

生物医学信号与系统 2

1 离散时间信号与系统

1.1 常见的典型序列

单位采样序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

注意 $u(0) = 1$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k), \quad \delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

N为矩形序列的长度, $R_N(n) = u(n) - u(n-N)$

实指数序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

$|a| < 1$, $|x(n)|$ 递减, $x(n)$ 收敛

正弦序列

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

ω 是序列的数字域频率, 单位 rad

若正弦序列由模拟信号 $x_a(t) = \sin(\Omega t)$ 采样得到, 则 $x_a(nT) = \sin(\Omega nT) = x(n) = \sin(\omega n)$

得到 $\omega = \Omega T$, 其中 Ω 是模拟角频率, T 是采样周期

复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n}$$

我估计用不到

1.2 离散时间信号常见的特征、描述参数

信号能量

$$E_x = \sum_{i=0}^{n-1} |x(i)|^2$$

信号功率

$$P_X = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n-1} |x(i)|^2$$

周期信号

存在最小正整数，使得 $x(n) = x(n + N)$ 在 $n \in \mathbb{N}$ 上成立

奇信号和偶信号

奇： $x(n) = -x(-n)$ ；偶： $x(n) = x(-n)$

任意的信号 $x(n)$ ，其奇分量 $x_o = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)]$ ，偶分量 $x_e = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)]$

共轭对称和共轭反对称

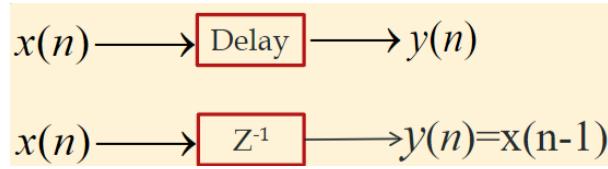
反对称： $x(n) = -x^*(-n)$ ；对称： $x(n) = x^*(-n)$

任意的信号 $x(n)$ ，其反对称分量 $x_o = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$ ，对称分量 $x_e = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$

1.3 离散时间信号基本运算

位移

$$y(n) = x(n - n_0)$$

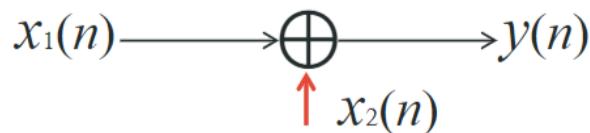


翻转

$$y(n) = x(-n)$$

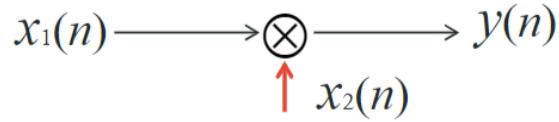
加法

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$$



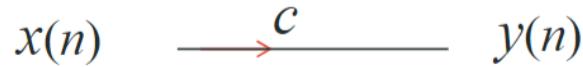
乘法

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$



缩放

$$y(n) = c \cdot x(n)$$



抽样

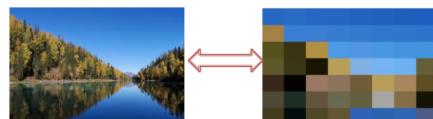
分为抽取（下采样）和插值（上采样）

(5) 序列的抽样：

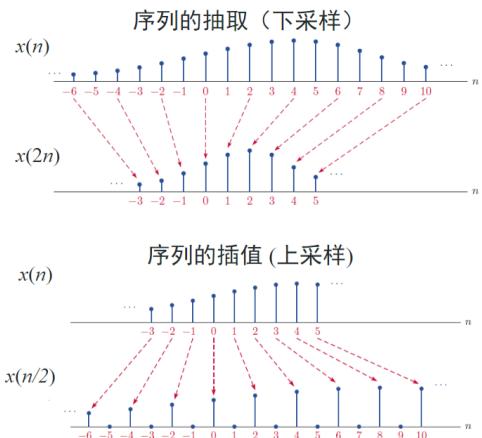
$x(mn)$: 每 m 个点中抽取一个点

$x\left(\frac{n}{m}\right)$: 每2个点间插入 $m-1$ 个零值

其中 m 正整数



插值一般插0或均值

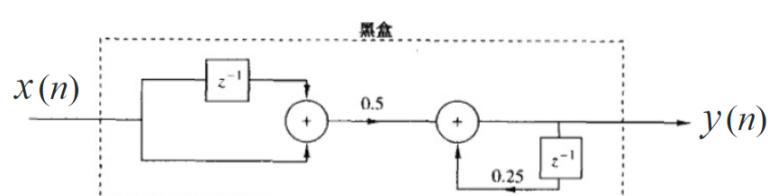


1.4 离散系统

将输入转换为输出的一种运算, $y(n) = T[x(n)]$, 其中 $T[\cdot]$ 是离散系统

例: 已知输入输出关系 $y(n) = 0.25y(n-1) + 0.5[x(n) + x(n-1)]$, 画出系统的离散时间结构图

解:



1.5 离散时间系统分类

静态系统（无记忆）与动态系统（记忆）

输出只取决于此刻的输入，为无记忆系统

时变系统与时不变系统

同SaS1

例：判断 $y(n) = x(-n)$ 是否时变

解：令 $x_1(n) = x(n - N)$ ，则 $y_1(n) = x_1(-n) = x_1(-n - N) = x(n - N)$ ， $x(n - N)$ 的输出则是 $y(n - N) = x(N - n)$

故时变

线性系统与非线性系统

同时满足叠加性和齐次性

$y(n) = ax(n) + b$ 是增量线性系统

因果系统与非因果系统

输出与之后的输入无关，为因果

形如 $y(n) = f[x(n), x(n - m), \dots, x(n - k)], k > 0, m > 0$ 为因果系统

稳定系统与非稳定系统

对于有界输入，输出有界，则稳定

1.6 离散时间LTI系统分析

$x(n)$ 可以表示为所有时刻 $x(k)$ 值的累加和，即 $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n - k)$

又已知 $\delta(t) \rightarrow h(t)$ ，系统是 LTI 系统，得到

$\delta(n - k) \rightarrow h(n - k)$, $\sum x(k)\delta(n - k) \rightarrow \sum x(k)h(n - k) = x(n) * h(n)$

故 $y(n) = x(n) * h(n)$ ，该式称为离散卷积

离散卷积的过程

观察公式 $\sum x(k)h(n - k)$ ，得到以下四步

1. 将 $h(k)$ 反转，得到 $h(-k)$
2. 将 $h(-k)$ 向右位移 n ，得到 $h(n - k)$
3. 将 $x(k)$ 和 $h(n - k)$ 对应值相乘
4. 将所有 k 处的乘积相加，得到 $y(n)$

若序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 分别长 N 、 M ，卷积和/线性卷积的序列长度为 $N+M-1$

例: 一个LTI系统, $h(n) = \{1, 2, 2, -1\}$, 输入 $x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$, 求输出结果

解: 首先反转 $h(n)$ (或 $x(n)$, 都行) 得到 $h(-n) = \{-1, 2, 2, 1\}$

然后从无穷远处向右移动 $h(-n)$, 第一个结果是 $x(1) = 1$ 与 $h(4) = 1$ 相交

然后再移动直到分离, 最终序列为 $y(n) = \{1, 4, 9, 10, 6, -1, -1\}$, 个数符合 $4+4-1=7$ 个

注: 序列表示法用箭头表示 0 时刻的位置

卷积和表明, n 时刻系统的输出, 与之前的输入也有关

即某一时刻的输出是之前很多次输入乘以各自的衰减系数之后的叠加

卷积遵守的数学定律

交换律: $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$

结合律: $x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$

分配律: $x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$

可以用框图证明

卷积用途

1. 是数据变化更加平滑
2. 提取图像或者数据的特征

1.7 LTI 系统的因果性和稳定性

因果性

对于 LTI 系统, 因果性与 $h(n) = 0, n < 0$ 互为充要条件

利用卷积的展开形式证明:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k)$$

后一项为 0

例: 已知 $h(t) = a^n u(n)$, 求阶跃响应

$$\text{解: } y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k) u(n-k) = \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

等比数列求和公式: $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

稳定性

LTI 系统, 稳定与 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$ 互为充要条件

利用有界的定义证明

1.8 有限/无限冲击响应

有限 (Finite Impulse Response, FIR)

即 $h(n) = 0$, 当 $n < 0, n \geq M$ 时, 此时 $y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$

无限 (IIR)

即 $h(n)$ 的非零区间无限大, 此时 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$

1.9 差分方程描述的离散时间系统

N阶线性常系数差分方程, 形如

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

线性: $y(n-i), x(n-j)$ 只有一次幂, 无交叉项

常系数

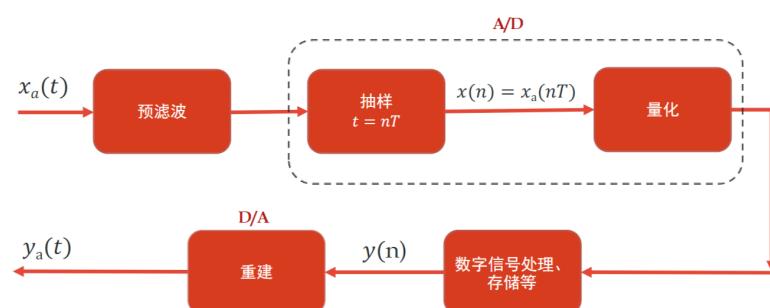
N阶: 输出的阶次确定

方框图见1.3的位移运算

2 信号采样与重建

与信号与系统1所讲一致, 这里再操作一遍

整个流程



2.1 预滤波

不是必须的

当采样频率无法提升时，使用预滤波将原始信号 $\omega > \frac{\omega_s}{2}$ 部分的信号过滤，防止混叠

$$x(t) = x_a(t) * h_1(t)$$

$$X(j\Omega) = X_a(j\Omega) \cdot H_1(j\Omega)$$

$$\text{其中 } H_1(\Omega) = \begin{cases} 1 & , |\Omega| \leq \Omega_s/2 \\ 0 & , \text{o.w.} \end{cases}$$

2.2 抽样

这里讨论理想抽样模型，使用冲击串（非理想是阶跃串）

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot p_\delta(t), \text{ 其中 } p_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

为了方便积分变化，将采样函数级数展开， $p_\delta(t) = \sum a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$, $a_k = \frac{1}{T} \int_T p_\delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt = \frac{1}{T}$

$$\text{已知 } \mathcal{F}\{e^{j\Omega_s kt}\} = 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_s), \Omega_s = \frac{2\pi}{T}, \delta(t - T) * x(t) = x(t - T)$$

故有

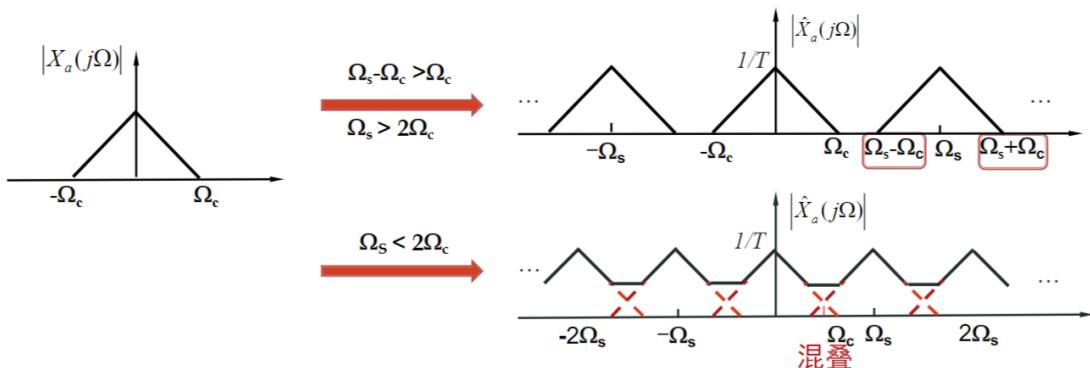
$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * P_\delta(j\Omega)$$

$$P_\delta(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

得到

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum X_a(j\Omega - jk\Omega_s)$$

抽样得到的频谱是 $X_a(j\Omega)$ 以 Ω_s 为周期的延拓，幅度变为 $1/T$



其中 Ω_c 是原始信号的奈奎斯特频率，当 $\Omega_s - \Omega_c > \Omega_c \Rightarrow \Omega_s > 2\Omega_c$ 时，才不会产生混叠，此时唯一重建信号

实际上可以不可以等于，但一般没问题

定义信号的折叠频率为 $\Omega_s/2$ ，也就是预滤波的上限频率

2.3 重建

首先需要取出一个周期的频谱，很显然用幅值为T的低通滤波器 $H_r(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| \leq \Omega_s/2 \\ 0, & o.w. \end{cases}$

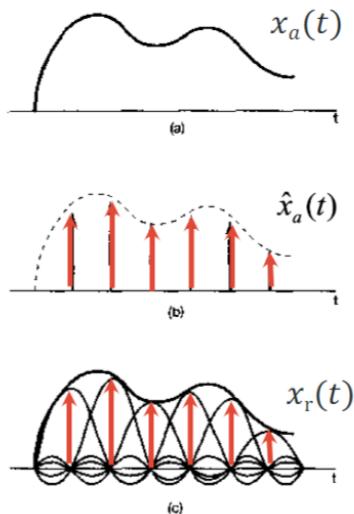
这个滤波器对应的时域函数为 $h_r(t) = \frac{T}{\pi t} \sin(\frac{\pi t}{T}) = \text{sinc}(\frac{t}{T})$, 其中 $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

这在实际上做不到的，我们无法得到一个无限长的信号

所以这是理想重建，有

$$\begin{aligned} x_r(t) &= \hat{x}_a(t) * h_r(t) = (x_a(t) \cdot p_\delta(t)) * h_r(t) \\ &= \left(\sum x_a(kT) \delta(t - kT) \right) * h_r(t) \\ &= \sum x_a(kT) h_r(t - kT) \end{aligned}$$

故重建信号就是由采样点为中心的sinc函数的加权和，这是由采样点内插得到的结果



上图就是采样和重建的过程在图像上的显示

c的过程相当于对一个离散信号的频谱（有限），在最高频率之外加0值，不改变频谱图像，但是原图像对于新的图像来说就是一个加窗，也就是用低通滤波器重建

2.4 关于奈奎斯特率的几个结论

对于信号 $x(t), y(t)$, 其奈奎斯特频率分别是 f_x, f_y , 那么下面几个信号的奈奎斯特率分别是

1. $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$, 为 $2|a|f_x$
2. $x(t) + y(t)$, 为 $2 \max\{f_x, f_y\}$
3. $x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$, 为 $2 \min\{f_x, f_y\}$
4. $x(t) \cdot y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$, 为 $2(f_x + f_y)$

3 Z变换

3.1 从Laplace到Z

对连续信号 $x_a(t)$ 采样得到 $x(n) = x_a(nT_s)$, 对 $x(n)$ 做Laplace变换

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(n)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-st} dt \\ &= \sum_n x_a(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT_s)e^{-snT_s} \\ &\triangleq X(e^{sT_s})\end{aligned}$$

令 $z = e^{sT_s}$, 得到

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot z^{-n}$$

这就是Z变换的公式

类似的, 有单边Z变换

s到z的映射

$$s = \sigma + j\Omega \Rightarrow z = e^{\sigma T_s} \cdot e^{j\Omega T_s} \triangleq r e^{j\omega}$$

当 $\sigma < 0$ 时, $r < 1$, 对应于单位圆内; $\sigma > 0$ 则映射到单位圆外

$\omega = \Omega T_s = 2\pi F / F_S$, Ω 每变化 $2\pi F_s$ 都对应一个 ω , 有周期性

σ 映射为圆半径, Ω 映射为角度

特别的, 当 $r = 1$ 时, $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ 退化为 $X(\omega) = \sum x(n)e^{-j\omega n}$, 为离散时间傅里叶变换(DTFT)

3.2 收敛域ROC

只有 $X(z)$ 收敛, 这个变换才有意义, 因此必须满足

1. $X(z)$ 绝对可和, $\sum |x(n)z^{-n}| < \infty$
2. 所有满足上式的 $|z|$, 组成了Z变换的ROC
3. $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 0点极点

必须指明收敛域

有限长度的信号ROC是整个z平面, 但是 $z=0$ 和 $z=\infty$ 需要另外考虑

3.3 典型序列的z变换

牢记: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

单位抽样序列

$$\Delta(z) = \sum \delta(n)z^{-n} = 1 \quad ROC: 0 \leq |z| \leq \infty$$

单位阶跃序列

$$U(z) = \sum u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad ROC: |z| > 1$$

实指数右边序列

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-a/z} \quad ROC: |z| > a$$

一般右边序列的ROC一定在最大极点的圆周外 (考虑s平面上最大极点的右边)

实指数左边序列和双边序列同理, 不赘述

3.4 Z反变换

将 $X(z)$ 表示为分式, 最终化为分式之和, 逆变换

例: $X(z) = \frac{1}{(1-1/4z)(1-1/2z)}$, $ROC: |z| > 1/2$, 求 $x(n)$

解: $X(z) = \frac{2}{1-1/2z} - \frac{1}{1-1/4z}$, 得到 $x(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

3.5 Z变换性质和定理

线性

$$Z[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z), ROC: ROC_1 \cap ROC_2$$

时移

$$Z[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z), ROC: ROC_x$$

Z域尺度变换

$$Z[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), ROC: |a| ROC_x$$

时间反转

$$Z[x(-n)] = X(z^{-1}), ROC: \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Z域微分

$$Z[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, ROC : ROC_x$$

时域卷积

$$Z[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z) \cdot X_2(z), ROC : ROC_1 \cap ROC_2$$

序列相关

$$\text{定义相关操作: } r_{x_1, x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_2(n-l) = x_1(l) * x_2(-l)$$

$$Z[r_{x_1, x_2}(l)] = R_{x_1, x_2}(z) = X_1(z) \cdot X_2(z^{-1})$$

初值定理

对因果序列 $x(n)$, 有

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0)$$

4 系统的差分方程

4.1 LTI系统的系统函数

一个系统 $y(n) = x(n) * h(n)$, 两边Z变换, 得到

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

其中 $H(z)$ 就是系统函数, $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$, $h(n)$ 是单位冲激响应

系统稳定性

充要条件是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$, 也就是 $|z| = 1$ 时 $H(z)$ 收敛

因此当 ROC 包含 $|z| = 1$ 时系统稳定

其实就是系统在的傅里叶变换存在, 即在 s 平面上包含虚轴

系统因果性

这里默认 $H(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, 那么充要条件就是 ROC 在最大极点之外

参考 s 平面上在最大极点的右边为 ROC

那么一个因果系统的充要条件就是 $ROC = R_h < |z| \leq \infty, |R_h| < 1$

也就是所有的极点都在单位圆内

4.2 单边Z变换

定义单边z变换为

$$X^+(z) = Z[x(n)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

其特点是

1. 对因果信号来说无所谓单不单边
2. ROC总在最大极点之外

位移性

假设 $k > 0$, 那么有

$$\begin{aligned} Z^+[x(n-k)] &= z^{-k}[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n)z^n] \\ Z^+[x(n+k)] &= z^k[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}] \end{aligned}$$

4.3 常系数线性差分方程

形如

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^M b_j x(n-j)$$

若 $y(n)$ 的初始状态为 0, 且 $x(n)$ 是因果序列, 那么两边z变换, 得到

$$\sum_{i=0}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} X(z)$$

得到的系统函数一般是 $H(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$

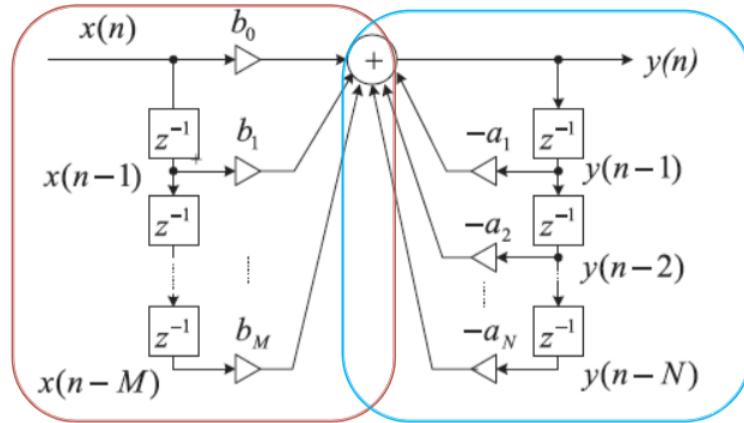
如果存在初始状态, 那么就用单边Z变换

4.4 系统框图

直接I型系统结构

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} \dots + a_N z^{-N}} \cdot X(z)$$

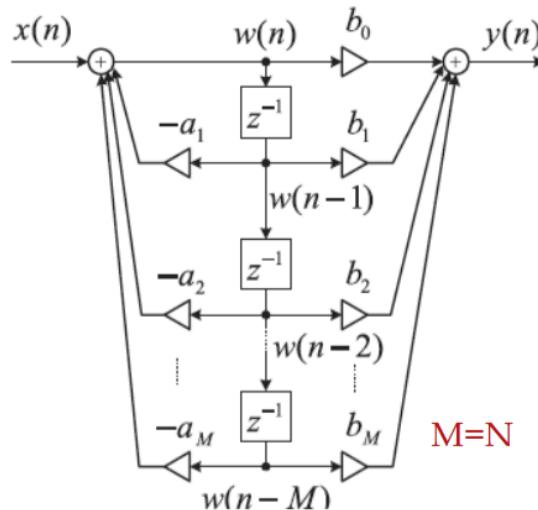
那么结构为



注意到这很直接， $x(n-j)$ 的系数都在左边， $y(n-i)$ 的系数的负数都在右边

直接II型系统结构

和SaS I中的直接型框图类似，方程同上，结果如下



也就是分母是输入的负反馈，分子是输出

当然还有串联型和并联型框图，不赘述

5 数字信号的频域分析

5.1 连续周期信号的傅里叶级数

信号 $x(t) = x(t + T)$ ，基波频率 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ，谐波频率 $\Omega_k = \frac{2\pi k}{T}, k \in \mathbb{Z}$

可以将信号分解为傅里叶级数，也可以由傅里叶级数合成原始信号

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \frac{2\pi}{T} kt}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j \frac{2\pi}{T} kt} dt$$

存在帕萨瓦关系，平均功率 P_x 和功率谱密度 $|C_k|^2$ 的关系为

$$P_x = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

5.2 连续非周期时间信号的傅里叶变换

将周期拉为无限长，得到傅里叶变换

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

能量谱密度为 $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$

帕萨瓦关系为

$$E_x = \int |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int |X(j\omega)|^2 d\omega$$

5.3 离散周期时间信号的傅里叶级数 (DTFS)

离散信号 $x(n)$ 满足 $x(n) = x(n + N)$, 基波频率 $\Omega_s = \frac{2\pi}{N}$, 谐波频率 $\Omega_k = \frac{2\pi k}{N}, k \in \mathbb{Z}$

同样可以分解为傅里叶级数

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \\ C_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned}$$

功率谱密度为 $|C_k|^2$

帕萨瓦关系为

$$P_x = \sum_{k=0}^{N-1} |C_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

C_k 往往是一个复数，其相位谱的含义就是这个频率的分量的时延

5.4 离散非周期时间信号的傅里叶变换 (DTFT)

将周期拉为无限长，得到傅里叶变换

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ X(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

观察下面的式子 (DTFT)，不难发现 $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$ ，故实际操作中只看一个周期 $[-\pi, \pi]$ 的频谱

在时域上 $x(n)$ 非周期，得到的 $X(\omega)$ 是连续函数，有对应的相位谱和幅度谱，相位谱的值域为 $[-\pi, \pi]$

能量谱密度为 $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$

帕萨瓦关系为

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

实际上，DTFT就是在 $r = 1$ 时的Z变换，上文已经证明

常用的DTFT变换对

指数序列

$x(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$, 带公式得到

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

这个信号的幅度谱为 $|X(\omega)| = \left| \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos \omega)^2 + (a \sin \omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$

相位谱为 $\angle X(\omega) = -\tan^{-1} \frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}$

窗序列

定义窗序列为

$$x(n) = \begin{cases} 1 & -L \leq n \leq L \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

那么 $X(\omega)$ 就是

$$X(\omega) = \frac{\sin[(L + 1/2)\omega]}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$$

如果频域上是窗函数呢？

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \begin{cases} \frac{\sin(n\omega_c)}{\pi n} & n \neq 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \end{cases}$$

其中 ω_c 是奈奎斯特频率

注意需要将 $n = 0$ 的情况分开，因为 $n = 0$ 指数项消失了

吉布斯现象

就是窗函数边缘是振荡的，因为做不到时域无限长的信号，相当于将无限长的信号在时域上乘一个窗函数

那么频域就是一个理想的窗函数卷积一个辛格函数，就造成了边缘的振荡

吉布斯现象就是在 $X(\omega)$ 的不连续点处， $X_N(\omega)$ 逼近 $X(\omega)$ 的振荡行为

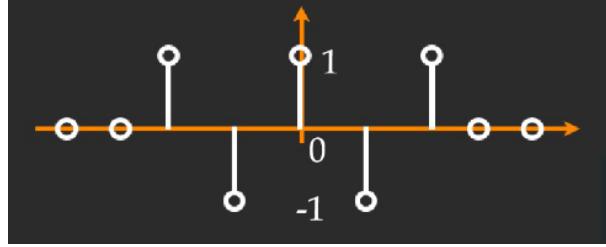
DTFT的性质

1. 线性, $ax_1(n) + bx_2(n) \leftrightarrow aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
2. 时移特性, $x(n - k) \leftrightarrow X(\omega)e^{-jk\omega}$
3. 频移特性, $x(n)e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$
4. 翻转特性, $x(-n) \leftrightarrow X(-\omega)$

5. 时域微分, $\frac{d}{dn}x(n) \leftrightarrow j\omega X(\omega)$
6. 频域微分, $nx(n) \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
7. 卷积定理, $x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$
8. 窗口定理/调制定理, $x_1(n) \cdot x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
9. 共轭对称, 若 $x(n)$ 为实信号, 那么 $X(\omega) = X^*(-\omega)$, 这个定理说明, 在实信号的DTFT中, 只需要变换一半的频谱

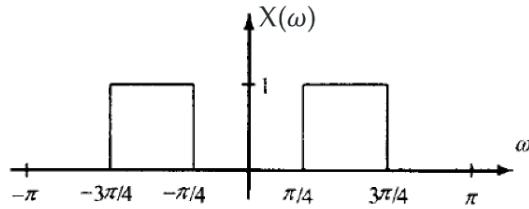
一些例子

对下面的信号做DTFT



这是一个窗函数乘以相位因子, 如果 $x(n)$ 是窗函数, 那么这个信号就是 $y(n) = e^{j\pi n}x(n)$, 其DTFT就是 $X(\omega - \pi)$, 就可以从低通滤波器变成高通

对下面的信号做iDTFT



这是一个大窗减去小窗, 是长度为 $3\pi/2$ 的频域窗减去一个长度为 $\pi/2$ 的频域窗, 得到的时域信号也就是二者相减

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{\pi n} (\sin(\frac{3\pi}{4}n) - \sin(\frac{\pi}{4}n)) & n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & n = 0 \end{cases}$$

例: 已知 $X(\omega)$, 求 $x(2n + 1)$ 的DTFT

解: 常规做法是 $N = 2n + 1 \rightarrow x(N)$, 但是 $x(2n + 1)$ 是一个奇数序列, 那么在

$$X_1(\omega) = \sum_N x(N) e^{-j\omega \frac{N}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}}$$

这里, N 是一个奇数序列, 换言之这个不是常规的DTFT, 故不能这么做

观察到

$$\hat{x} = \frac{1}{2}(x + (-1)^{n+1}x) = \frac{1}{2}(x - e^{jn\pi}x)$$

利用DTFT的性质进行变换

但是观察到 $x(2n + 1)$ 是对序列 $\hat{x}(n)$ 的平移加缩放, 因此还需要进行变换

此时有 $X_1(\omega) = \sum_N x(N) e^{-j\omega \frac{N}{2}} e^{j\omega/2}$, 这里是奇数序列, 可以用 $\hat{x}(n)$ 代替, 得到

$$X_1(\omega) = e^{j\frac{\omega}{2}} \hat{X}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

6 数字LTI系统的频域分析

6.1 LTI系统的特性

输出信号 $y(n)$ 可以表达为输入信号 $x(n)$ 和单位冲激响应 $h(n)$ 的卷积

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

当 $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ 时, 特别的 $y(n) = H(\omega)Ae^{j\omega n}$, 证明如下

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n-k) \\ &= \sum_k h(k) e^{-j\omega_0 k} \cdot e^{j\omega n} \\ &= H(\omega_0)x(n) \end{aligned}$$

称 $e^{j\omega_0 n}$ 为系统的特征函数, $H(\omega_0)$ 为系统的特征值

$H(\omega)$ 的特性

$$H(\omega) = \sum_k h(k) \cos(\omega k) + j h(k) \sin \omega k$$

对于实系统, $h(n)$ 为实数, 那么有 $H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$, 其中

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \sqrt{H_R^2 + H_I^2} \\ \angle H &= \tan^{-1} \frac{H_I}{H_R} \end{aligned}$$

不难看出 $|H|$ 是偶函数, $\angle H$ 是奇函数, $H(\omega)$ 有共轭对称性

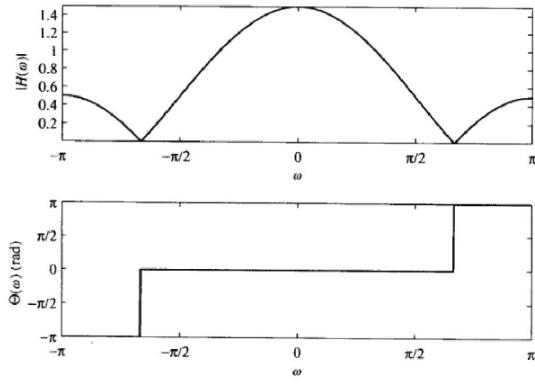
滑动平均Filter

一个3点滑动Filter可以表示为

$$y(n) = \frac{1}{3}[x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$$

那么 $H(\omega) = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos(\omega))$, $|H| = |H(\omega)|$ (这里是绝对值), $\angle H = \angle(1 + 2 \cos(\omega))$ (注意正负)

图像如下



6.2 有理分式系统的响应

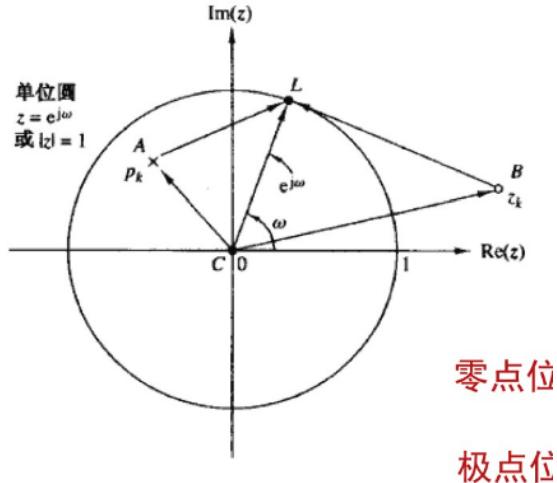
当一个系统函数可以表达为

$$H(\omega) = b_0 e^{j\omega k} \frac{\prod(e^{j\omega} - z_i)}{\prod(e^{j\omega} - p_i)}$$

时，可以使用0极点图对 $|H|, \angle H$ 进行估计，从而大致判断通频带

注意DTFT是 $r = 1$ 的特殊的Z变换，故实验点应该在单位圆上，如下图

进行估计时只需要将角度 ω 从 0° 转到 π 就行，根据共轭对称性得到另一边



6.3 作为频率选择滤波器的LTI系统

$$\begin{aligned} y &= h * x \\ |Y| &= |H||X| \\ \angle Y &= \angle H + \angle X \end{aligned}$$

$|Y|$ 与通频带有关

一个滤波器的通频带可以通过0极点图进行估计，大致而言存在以下关系

1. 极点越靠近低频点的单位圆，通频带越低
2. 将低通滤波器的0极点关于虚轴对称，可以得到高通滤波器

$\angle Y$ 与滤波器相位有关

信号经过滤波器时相位也会有影响，当然不希望相位被打乱

为了得到有序信号，即 $y(n) = Ax(n - k)$ ，滤波器应当是 $|H|e^{-j\omega k}$ ，相位是 $-\omega k$ ，是线性相位（存在截距也行）

称相位的负倒数 $\tau(\omega) = -\frac{d\Theta}{\omega} = k$ 时群时延，是常数

群时延是常数的滤波器才是可以使用的

例： $h(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & o.w. \end{cases}$ 是线性相位吗

$$\text{解： } H(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}, \quad \angle H = \angle(1 - e^{-j\omega(N+1)}) - \angle(1 - e^{-j\omega})$$

$$\angle 1 - e^{-j\omega} = \tan^{-1} \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega}$$

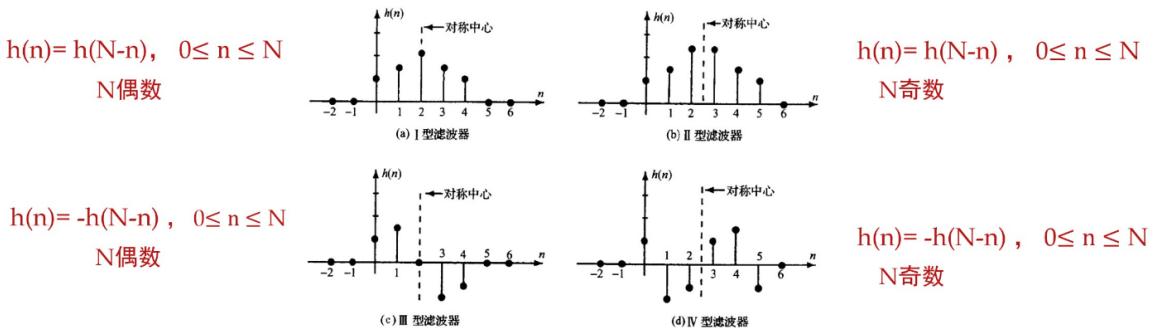
使用 $2 \sin^2 \omega/2 = 1 - \cos \omega$ ，化简得到上式右边等于 $\tan^{-1}(\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2})) = \frac{\pi - \omega}{2}$ ，同理处理前者，最终得到

$$\angle H = -\frac{N}{2}\omega$$

是线性相位

常见的具有线性响应的滤波器

只有 $h(n)$ 满足下面的情况时，FIR滤波器才具有线性相位



下面求每个滤波器的群时延



I型

$$H(w) = \sum_{n=0}^N h(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jwn} + h\left(\frac{N}{2}\right) e^{-jw\frac{N}{2}} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h(n) e^{-jwn}$$

令 $n' = N-n$, $\sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h(n) e^{-jwn} = \sum_{n'=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-n') e^{-jw(N-n')}$

由于 $h(n) = h(N-n)$, 上式 = $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jw(N-n)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jw\left(\frac{N}{2}-n\right)} e^{-jw\frac{N}{2}}$

$$\therefore H(w) = e^{-jw\frac{N}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [e^{-jw\left(\frac{N}{2}-n\right)} + e^{-jw\left(n-\frac{N}{2}\right)}] + h\left(\frac{N}{2}\right) \right)$$

$$= e^{-jw\frac{N}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left(\frac{N}{2}n\right) w + h\left(\frac{N}{2}\right) \right]$$

注: $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jwn} e^{jw\frac{N}{2}}$

II型

$$H(w) = \sum_{n=0}^N h(n) e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h(n) e^{-jwn} + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h(n) e^{-jwn}$$

令 $n' = N-n$, $\sum_{n=\frac{N}{2}+1}^N h(n) e^{-jwn} = \sum_{n'=\frac{N}{2}-1}^0 h(N-n') e^{-jw(N-n')}$

由于 $h(n) = h(N-n)$, 上式 = $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jw(N-n)}$.

原式 = $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}} h(n) e^{-jwn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-jw(N-n)} = e^{-jw\frac{N}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) [e^{-jw\left(\frac{N}{2}-n\right)} + e^{-jw\left(n-\frac{N}{2}\right)}] \right]$

$$= e^{-jw\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left(\frac{N}{2}n\right) w$$

$$\angle H(w) = -w\frac{N}{2}, \quad \tau(w) = \frac{N}{2}$$

III型

$$H(w) = e^{-jw\frac{N}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) 2j \sin\left(\frac{N}{2}n\right) w + h\left(\frac{N}{2}\right) \right]$$

由于 $h\left(\frac{N}{2}\right) = 0$, $H(w) = e^{-j(w\frac{N}{2}-\frac{\pi}{2})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin\left(\frac{N}{2}n\right) w$.

$$\angle H(jw) = -w\frac{N}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \tau(w) = \frac{N}{2}$$

IV型

$$\text{同上, } \angle H(jw) = -w\frac{N}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad \tau(w) = \frac{N}{2}, \quad H(w) = e^{-j(w\frac{N}{2}-\frac{\pi}{4})} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin\left(\frac{N}{2}n\right) w$$

结论, 每个滤波器的群时延都是 $\tau(\omega) = \frac{N}{2}$

6.4 LTI系统的可逆性

系统可逆的充要条件: 输出 y 与输入 x 一一对应

那么有

$$x(n) = h_1(n) * h(n) * x(n)$$

其中 $h_1(n)$ 是逆系统, 那么

$$h_1 * h = \delta$$

$$H_1 H = 1 \Rightarrow H_1 = H^{-1}$$

求逆系统要注意收敛域的选取和多值性, 如

一个系统的冲击响应 $h(n) = \delta(n) - 0.5\delta(n-1)$, 求它的逆系统

$H(z) = 1 - 0.5z^{-1}$, ROC $|z| > 0$, 因果稳定系统,

逆系统 $H_l(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$, 零点: $z=0$; 极点 $z=0.5$;

$$h_l(n) = \begin{cases} (0.5)^n u(n), & \text{if } \text{ROC } |z| > 0.5 \\ -(0.5)^n u(-n-1), & \text{if } \text{ROC } |z| < 0.5 \end{cases}$$

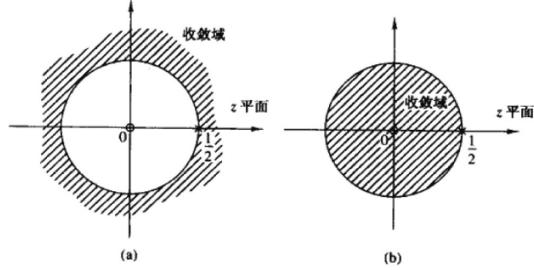


图 5.5.2 $H(z) = z / (z - \frac{1}{2})$ 的两种可能的收敛域

6.5 全通系统

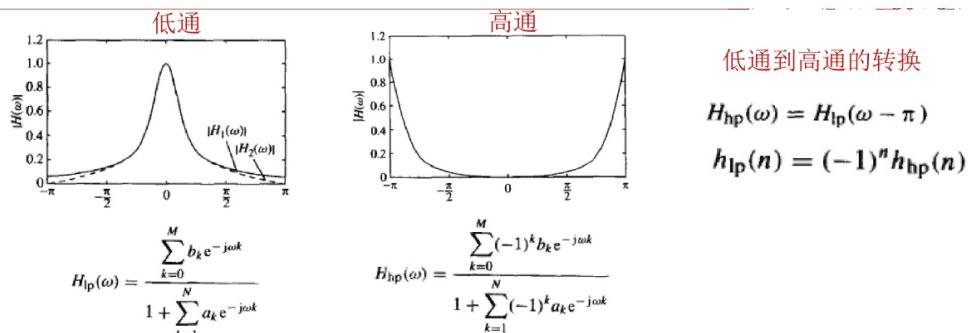
对任意频率的信号, 全通, 即

$$|H| = 1$$

为了保证常数群时延, $H = e^{-jk\omega}$, $H(z) = z^{-k}$

全通系统可以作为**相位补偿**使用

6.6 低通高通转换



与之对应的差分方程

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N (-1)^k a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M (-1)^k b_k x(n-k)$$

也就是用 $\pi - \omega$ 代换 ω

7 DFT

7.1 DFT的概念

在离散信号经过DTFT后, 得到的频谱是连续的, 但是数字信号需要离散的表达, 由此引出了离散傅里叶变换DFT

DFT表现为对 $X(\omega)$ 进行抽样, 表达为

$$X(k) = X(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

其中 N 是有限长时域信号的长度，因此

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

令 $W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$ 对上式展开，可以发现

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + \dots + x(N-1) \\ X(1) &= x(0) + x(1)W_N + x(2)W_N^2 + \dots + x(N-1)W_N^{N-1} \\ &\quad \vdots \\ X(N-1) &= x(0) + x(1)W_N^{N-1} + \dots + x(N-1)W_N^{(N-1)(N-1)} \end{aligned}$$

因此，可以使用矩阵简化计算，得到

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \cdots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$\underline{X}_{N \times 1} \qquad \underline{W}_{N \times N} \qquad \underline{x}_{N \times 1}$

为了得到逆变换，可以假设 $x = AX$ ，带入 DFT，得到

$$X = Wx = WAx$$

故 $WA = I \Rightarrow A = W^{-1}$ ，得到逆变换为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

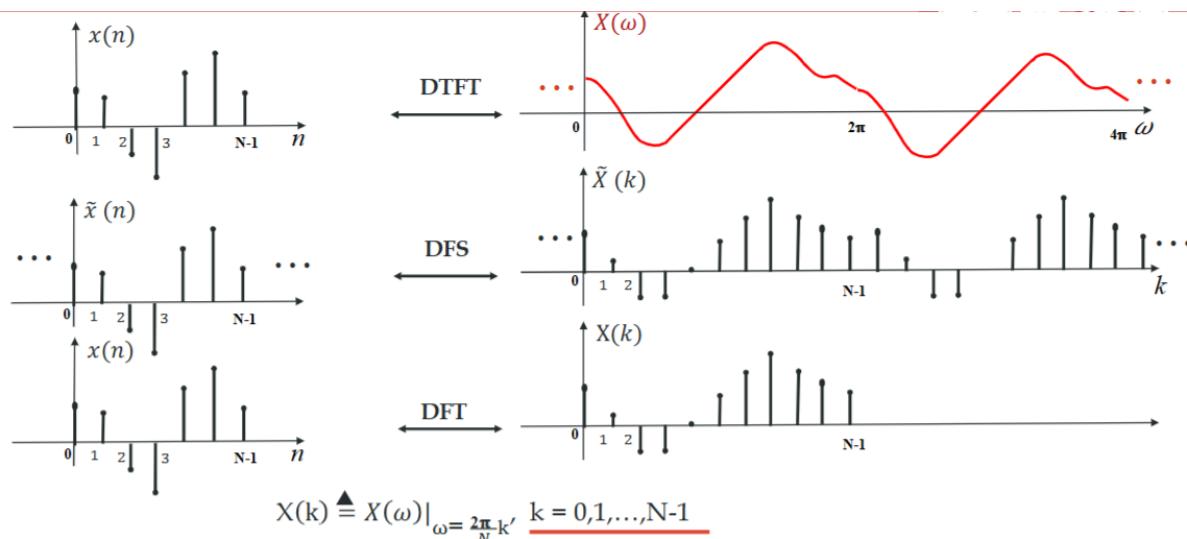
矩阵如下

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \boxed{\frac{1}{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

注意，DFT 变换对应该有同样的长度

7.2 几个变换的区别

DTFT, DFT, DFS



其中 \tilde{x} 是周期信号，对周期信号的DFT称为DFS

DFT和DFS没有本质区别，前者是后者的主值区间，后者是前者的周期延拓

DTFT, DFT, Z

容易得到

$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

7.3 补零，用于信号分析

当想要的 $X(k)$ 序列更加密集时，需要增大 N 的值，此时需要对 $x(n)$ 进行添0处理，即

$$x'(n) = \begin{cases} x(n) & , n < N_0 \\ 0 & , N_0 \leq n < N \end{cases}$$

即扩展了时域信号，相对的频域信号就会进行压缩，即两个采样点之间的距离会变小，采样更密集

注意：

1. 补零对DTFT无影响，很显然0对累加无效果
2. 对DFT来说，只是增加了采样点，整个信号的包络依然是DTFT的图像
3. 对于周期信号，只有信号的长度是周期的整数倍，DFT的频谱才不会丢失峰值信息

7.4 DFT的性质

圆周位移

序列的圆周位移的DFT，等价于其周期延拓的线性位移后主周期内的DFT

简单理解就是转过头了就取模

线性

易证

序列共轭

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(N-k)$$

其中 N 是序列长度

序列圆周位移、相移

$$\begin{aligned} x(n-l) &\leftrightarrow X(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} \\ x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}ln} &\leftrightarrow X(k-l) \end{aligned}$$

插播一条DFS的性质：

周期卷积

两个周期都为 N 的周期序列，其卷积结果也是周期为 N 的序列

$$\tilde{y} = \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2$$

周期卷积定理

$$\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

对于非周期序列来说，可以用圆周位移来构造圆周卷积

圆周卷积

$$y = x_1 \odot x_2$$

其中 \odot 中应该有一个 N ，但是这里打不出来， N 是 x_1, x_2 序列长度；后面统一用 \circledast 代替

圆周卷积与DFT存在对应关系

$$x_1 \circledast x_2 \leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

这个东西有什么用？

圆周卷积本身没有任何物理意义，但是由于其能被对应成DFT直乘，那么就存在一定用处

由于离散序列的卷积对应于DTFT的直乘，而 $X(\omega)$ 是连续函数，这在计算机中是无法做到的

因此，若能有方法使得

$$x_1(n) * x_2(n) = x_1(n) \circledast x_2(n)$$

那么就有

$$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

这样计算机就能做了

帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

7.5 基于DFT的LTI系统：如何让线性卷积等于圆周卷积

线性卷积

两个序列 $x(n), h(n)$, 分别长 L, M , 得到的输出 $y(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=1}^{L-1} x(k)h(n-k)$$

$y(n)$ 的长度为 $N_1 = L + M - 1$

圆周卷积

$y(n)$ 的长度为 $N_2 = \max\{L, M\}$ (短的一方用0补齐)

因此, 想要使用圆周卷积表示线性卷积, 那么需要用 $N_2 \geq N_1 = L + M - 1$ 的DFT

例: $h(n) = \{1(0), 2, 3\}, x(n) = \{1(0), 2, 2, 1\}$, 使用DFT和iDFT, 求 $y(n)$

解: 线性卷积的长度为6, 因此需要使用6点的DFT, 得到结果是 $y(n) = \{1(0), 4, 9, 11, 8, 3\}$

如果用4点DFT呢? 得到的结果是 $y(n) = \{9, 7, 9, 11\}$, 产生这个结果的原因是8, 3经过圆周到了1, 4的位置

$$1 + 8 = 9, 4 + 3 = 7$$

利用圆周卷积计算线性卷积

步骤如下

1. $x(n)$ 添加 $M - 1$ 个0, $h(n)$ 添加 $L - 1$ 个0, 二者的长度都是 $L + M - 1$
2. 利用 $L + M - 1$ 点的DFT计算 $Y(k)$, 逆变换为 $y(n)$

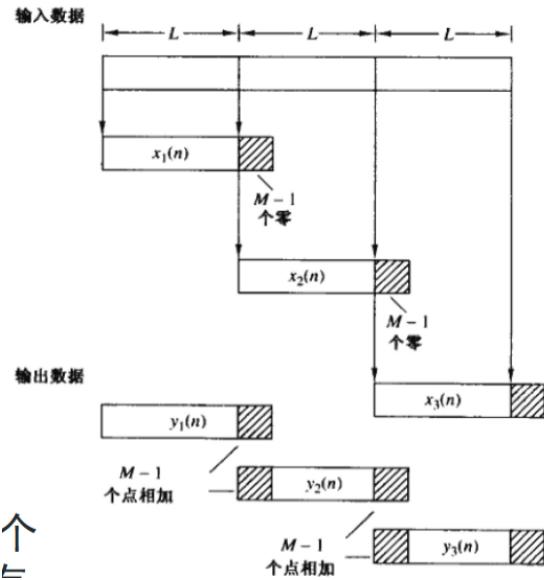
优点: 在引入FFT后很快

缺点: 必须等到所有的信号, 延迟巨大

解决大延迟

将信号分为小片段进行处理, 步骤如下

1. 将 $h(n)$ 补到 $L + M - 1$, 将输入 $x(n)$ 划分为长度为 L 的小段, 这个 L 相比于整个序列很小
2. 对输入的 $x_i(n)$ 补 $M - 1$ 个0, 计算 $X_i(k) \cdot H(k)$
3. 得到 $y_i(n)$, 注意 $y_i(n)$ 之间存在重叠部分, 将重叠部分相加, 得到 $y(n)$



8 FFT

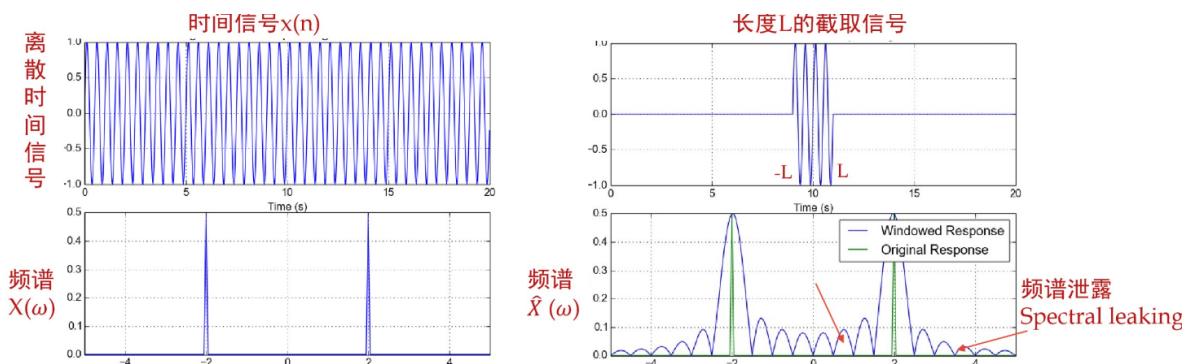
8.1 为什么有FFT

首先是DFT带来的问题

频谱泄露

当截取小片段时，相当于使用了一个长度为 L 的窗，其DTFT是一个主瓣宽度为 $\frac{4\pi}{L}$ 的sinc函数

这样会引入杂波，如下图



当主瓣很宽时，两个相邻的冲激峰就会重叠，定义当sinc的0点恰好在另一个峰的频率时，两个峰不可辨认

即要求

$$\frac{2\pi}{L} \leq \min\{\omega_i - \omega_j\}$$

故小序列不是能无限小的

例： $x(n) = \cos \omega_0 n + \cos \omega_1 n + \cos \omega_2 n$, 其中 $\omega_0 = 0.2\pi, \omega_1 = 0.22\pi, \omega_2 = 0.6\pi$, 求序列最短能是多少

解：带入上面的公式，得到 $L_{\min} = 100$

DFT对频谱分辨率的影响

根据定义, $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$, 那么 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ 就是 $X(k)$ 在频域的分辨率

为了将DTFT的两个峰 $|\omega_1 - \omega_2|$ 在DFT中分开, 需要有

$$\Delta\omega \leq \min\{\omega_1 - \omega_2\}$$

计算量

由于 $X(k)$ 的计算都是复数计算, 根据公式 N 个序列的DFT计算量为 $O(N^2)$

这是NP问题的时间复杂度, 非常不好

由此, 引出了FFT

8.2 FFT的改善思路

首先需要明确, FFT不是一种新的计算, 没有物理意义; 它只是DFT的一个快速算法

关键思路

关键在 $W_N^k = e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$

1. 对称性:

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$$

2. 周期性:

$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

预处理: $x(n)$ 的长度 N 通过补0, 到最近的 2^M

将 $x(n)$ 分为奇偶序列, $x_1(r) = x(2r), x_2(r) = x(2r+1), r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

那么

■ 算法原理 $X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{为偶数}}}^{N-1} x(n)W_N^{nk} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{为奇数}}}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)(W_N^2)^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)(W_N^2)^{rk}$$

由于 $W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}2} = e^{-j2\pi/\left(\frac{N}{2}\right)} = W_{N/2}$, 故上式可表示成

$$X(k) = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(r)W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{N/2}^{rk} = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad (1)$$

其中 X_1, X_2 分别是 x_1, x_2 的前 $N/2$ 个点的DFT, 根据周期性, $W_{N/2}^{k+N/2} = W_{N/2}^k$

那么

$$X_1(k + N/2) = X_1(k)$$

$$X_2(k + N/2) = X_2(k)$$

两部分的 $X_i(k)$ 是相等的

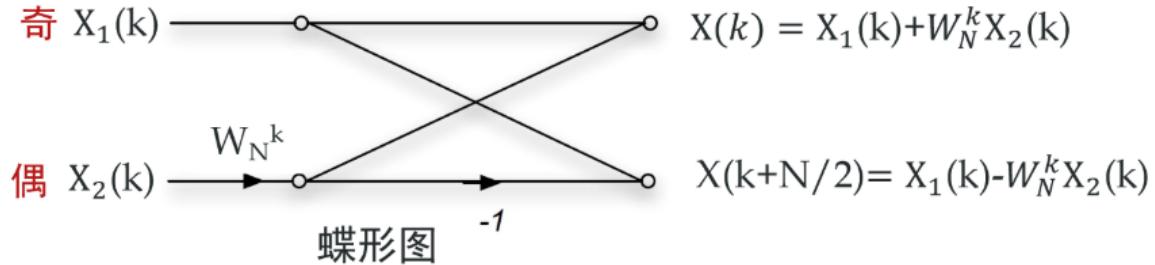
那么得到

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

$$X(k + N/2) = X_1(k) - W_N^k X_2(k)$$

这样就将计算DFT的时间复杂度降为了 $O(N^2/2)$, 因为只算了一半的序列

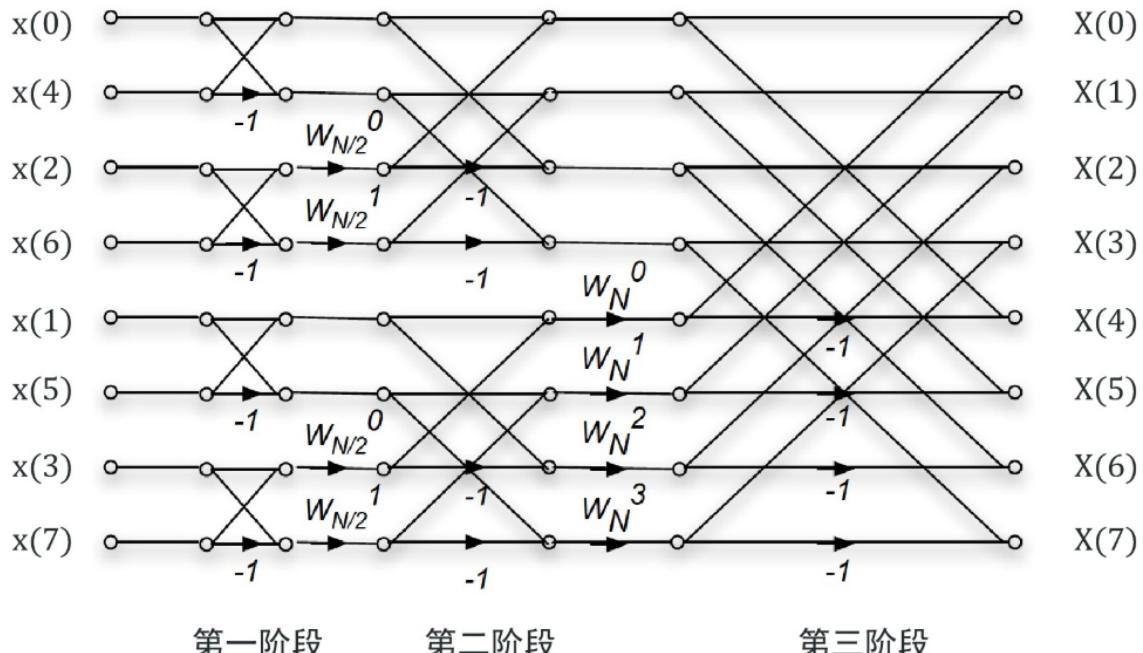
输出的线路图如下



将 $X_1(k), X_2(k)$ 视为新的 $X(k)$, 上面的算法完全适用, 因此一开始需要将 N scale 到 2^M , 就是为了一级级减半

最终可分出 M 级蝶形图, 一个蝴蝶图的运算时间是 $O(1)$, 就只有 2 次加法和 1 次乘法

每级一共 $N/2$ 个蝶形图, 需要的运算时间是 $O(N/2)$, 一共 $\log_2 N$ 级, 总共花了 $\frac{N \log_2 N}{2}$ 的时间, 相比于 DFT 提升了 $\frac{2N}{\log_2 N}$ 倍



如何计算输入序列的排列

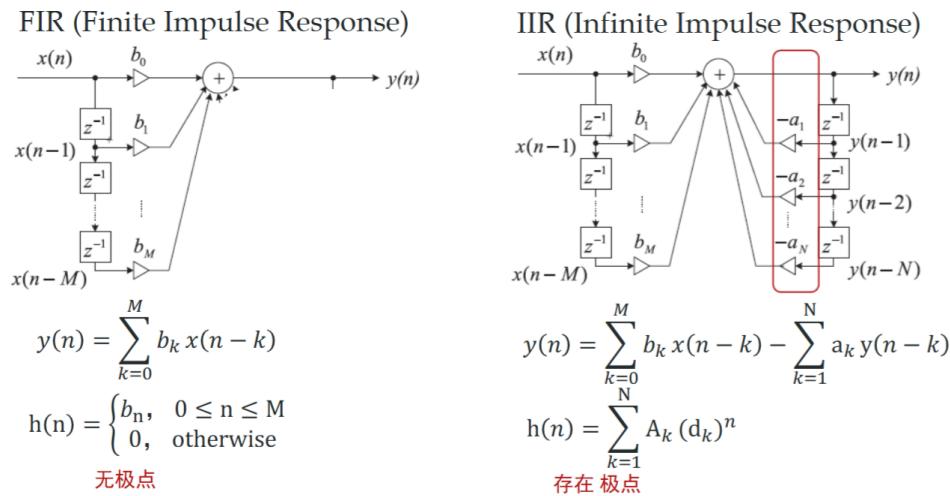
原始排列	二进制	翻转二进制	输入序列
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

9 FIR滤波器的设计

数字滤波器就是一个系统，可以用迄今为止所有对系统的描述方式对其进行描述

9.1 数字滤波器的分类

根据是否有限，分为FIR和IIR两种，二者的框图如下



显然FIR滤波器是一定稳定的， IIR滤波器存在极点而是条件稳定

9.2 FIR滤波器的基本结构

输入输出关系为

$$y(n) = \sum_{i=0}^K b_i x(n-i) = \sum_{i=0}^K h(i)x(n-i) = h(n) * x(n)$$

其中

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

几个性质

- 由于是有限的，可以使用FFT/DFT
- 系统函数是稳定的
- 有严格的线性相位

例：

例：FIR滤波器的输入输出关系

$$y(n) = 0.1x(n) + 0.25x(n-1) + 0.2x(n-2)$$

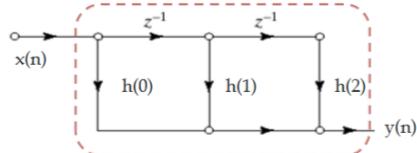
请计算滤波器的系统函数H(z)，滤波器的长度和系数，单位冲击响应函数h(n)。

系统函数H(z)为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 0.1 + 0.25z^{-1} + 0.2z^{-2}$$

单位冲击响应为 $h(n) = 0.1\delta(n) + 0.25\delta(n-1) + 0.2\delta(n-2)$

滤波器的长度为3，系数分别为
 $h(0)=0.1$ ，
 $h(1)=0.25$ ，
 $h(2)=0.2$



这是一个滑动窗口，用于信号的去噪平滑

非理想数字滤波器的性能参数

由于物理系统的限制，不可能做到理想的滤波器，一个典型的物理上能实现的滤波器如下

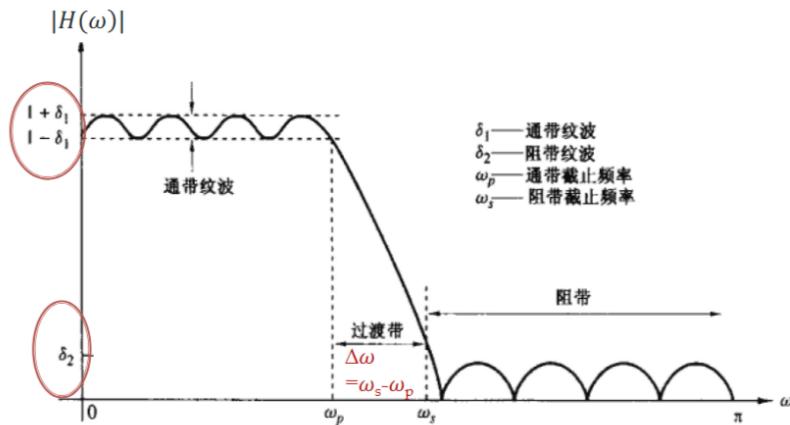


图 10.1.2 物理上可实现滤波器的幅度特性

通常采用分贝表示各个波纹大小 ($20 \lg$)

- δ_1 是通带波纹
- δ_2 是阻带波纹
- ω_p 是通带截止频率
- ω_s 是阻带截止频率

这些是怎么产生的？

很显然不可能有无限长的时域sinc函数，必须加窗，相当于在频域内的窗函数卷积一个sinc

卷积的结果是sinc在窗内的面积和，即

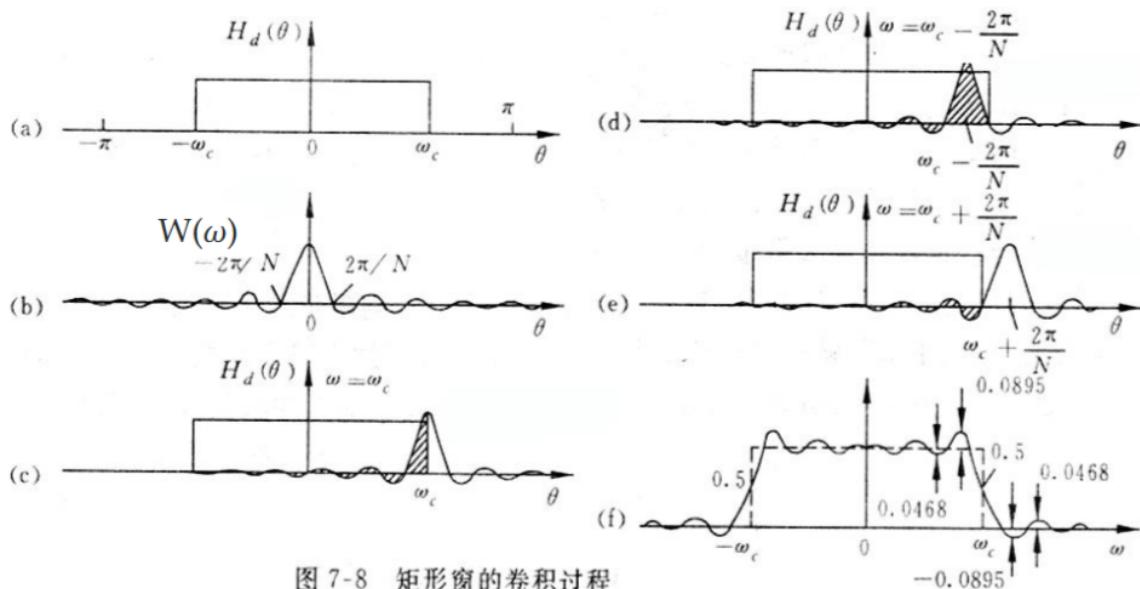


图 7-8 矩形窗的卷积过程

理想频率响应被窗函数的 $W(\omega)$ “平滑了”

那么 δ_1, δ_2 产生自sinc的旁瓣, ω_p, ω_s 产生自规定的通频带分别减/加与滤波器窗长度N反相关的量

值得一提的是，在我们希望的截止频率 ω_c 处， $H_d(\omega_c) = 0.5$ 恒成立。

9.3 窗函数法设计FIR滤波器

如上所述，对时域的sinc函数加窗产生一个非理想的频域窗函数，步骤如下

- 对于 $h(n) = \text{sinc}(n)$, 使用 $w(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & o.w. \end{cases}$ 截断, 产生物理上可实现的有限长信号

$$h_d(n) = h(n)w(n)$$
 - 对 $h_d(n)$ 做 DFT/FFT, 得到的就是 $H_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} (H(\omega) * W(\omega))$
 - 在频域中验证 $H_d(\omega)$ 的上述参数是否满足要求, 如果满足了就继续操作 $h_d(n)$
 - 因为物理系统一定是因果的, 故需要对 $h_d(n)$ 进行平移, 得到 $h_d'(n) = h_d(n - M)$

最终得到的是时域上的信号，这是要产生的信号所以必须是时域的。

由于最终结果都是一个频域的窗，故时域的模板是已知的，都是

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin \omega_c n}{n\pi}, & |n| \leq M, n \neq 0 \end{cases}$$

其中 ω_c 是希望的截止频率

同上述关系，窗函数 $W(\omega)$ 的主瓣宽度正相关于滤波器的过渡带宽 $\Delta\omega$, δ_1, δ_2 产生自 sinc 的旁瓣

例：窗函数法设计3阶低通滤波器，截止频率 $f_c = 800\text{Hz}$ ，抽样频率 $f_s = 8000\text{Hz}$

解：首先需要有数字频率和模拟频率的关系，数字为 ω

$$\omega = \Omega T_s$$

这个可以用 $x(nT_s) = x(t)$ 理解, $\omega = \frac{2\pi}{n}$, $\Omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{nT_s}$

那么模拟截止频率为 f_c , 数字截止角频率 $\omega_c = 2\pi f_c / f_s = 0.2\pi$

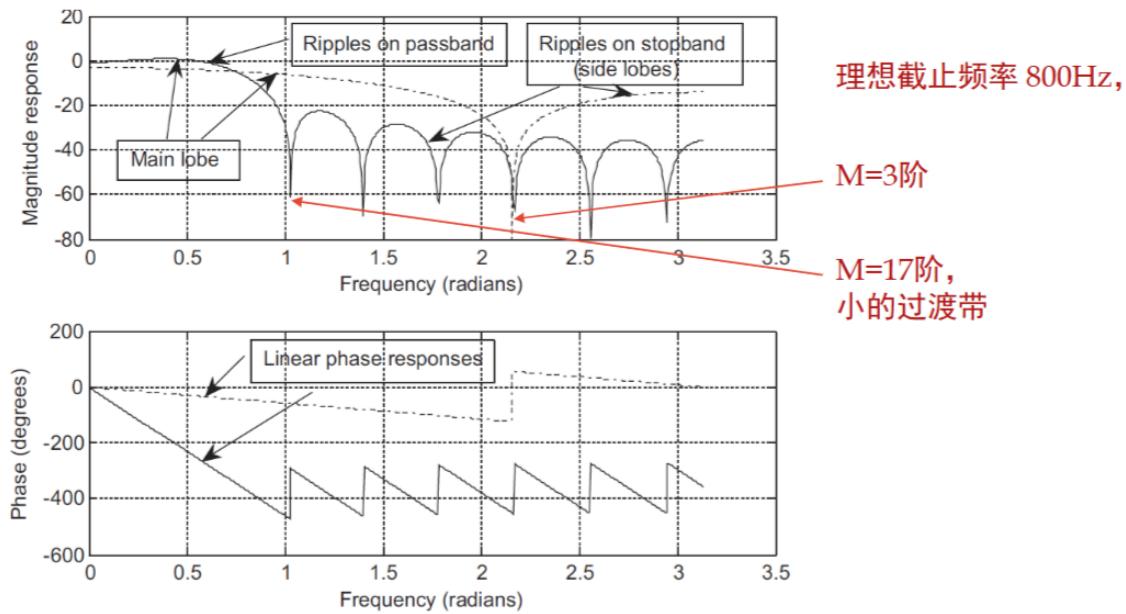
带入通式，得到 $h(0) = 0.2, h(1) = 0.1871, h(-1) = 0.1871$ ，还需要进行平移，最终得到

$$h(0) = 0.1871, h(1) = 0.2, h(2) = 0.1871$$

对其做Z变换，得到

$$H(z) = \sum h(n)z^{-n} = 0.1871 + 0.2z^{-1} + 0.1871z^{-2}$$

但是，实际进行画图发现，这个滤波器的截止频率大致在2600Hz，原因在于窗太小，如上所述



滤波器的实际截止频率 ω_s 是与时域窗函数截断的长度 M 反相关的

理想滤波器的原型

- 低通

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin \omega_c n}{n\pi}, & |n| \leq M, n \neq 0 \end{cases}$$

- 高通，理解为1-低通

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\pi - \omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ -\frac{\sin \omega_c n}{n\pi}, & |n| \leq M, n \neq 0 \end{cases}$$

- 带通，理解为两个低通相减

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_H - \omega_L}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin \omega_H n}{n\pi} - \frac{\sin \omega_L n}{n\pi}, & |n| \leq M, n \neq 0 \end{cases}$$

- 带阻，理解为1-带通

$$h(n) = \begin{cases} \delta(n) - \frac{\omega_H - \omega_L}{\pi}, & n = 0 \\ -\frac{\sin \omega_H n}{n\pi} + \frac{\sin \omega_L n}{n\pi}, & |n| \leq M, n \neq 0 \end{cases}$$

注意，这些都还需要右移 M ，变成因果系统

一般性窗

除了矩形窗之外，还有别的窗可以选择

特征：

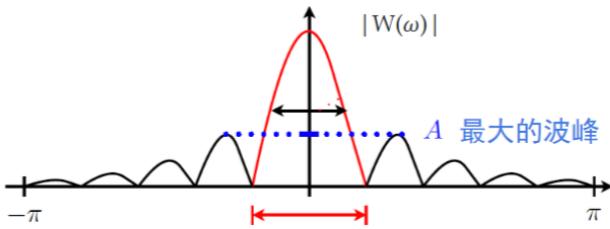


表. 不同窗函数设计的滤波器指标

注：此表通常带纹dB定义为 $20\lg(1-\delta_1)$

窗函数	数学表达	过渡带宽 $\Delta\omega$ (rad)	通带波纹(dB)	阻带衰减(dB)
矩形窗	1	$1 \times (2\pi/N)$	-0.7416	-21
Hanning	$0.5 + 0.5\cos(\frac{\pi n}{M})$	$3.1 \times (2\pi/N)$	-0.0546	-44
Hamming	$0.54 + 0.46\cos(\frac{\pi n}{M})$	$3.3 \times (2\pi/N)$	-0.0194	-53
Blackman	$0.42 + 0.5\cos(\frac{\pi n}{M}) + 0.08\cos(\frac{2\pi n}{M})$	$5.5 \times (2\pi/N)$	-0.0017	-74

根据要求选择合适的窗，注意，还需要点乘辛格函数

一般而言，窗函数的图像有以下性质，规定长度 $N = 2M + 1$

- $N \cdot \Delta = Const$, 因此, 窗越宽, 滤波器越理想
- $|A|$ 取决于窗的类型, 与 N 无关
- A 与 Δ 通常反相关, 需要trade-off (这里指的是改变了窗函数的类型, 时域越平滑的窗函数高频成分越少, A 小 Δ 大)
- 矩形窗的主瓣和造成的过渡带宽更小 (其实是一个东西), 但是有更大的旁瓣

FIR滤波器的特点

- 优点：线性相位；创造的方法简单
- 缺点：不容易控制边缘频率，显然不能做到精准的 ω_c ；即使精准了， $h(n)$ 往往很长

设计步骤

1. 根据阻带衰减要求和过渡带宽, 选择窗函数的类型
2. 根据过渡带宽确定理想滤波器的截止频率, 根据窗函数的特性确定窗的长度 N
3. 平移滤波器, 得到因果的系统
4. 根据 $h(n)$ 再求 $H(\omega)$, 看是否满足要求

例：抽样频率8000Hz, 通带要求0-800Hz, 阻带1000-4000Hz, 通带波纹-0.02dB, 阻带衰减-50dB

解：根据上面的表格, hamming和blackman都能满足, 选择hamming

过渡带宽 $\Delta\omega = 2\pi \times (1000 - 800) \div 8000 = 0.05\pi = 3.3 \times 2\pi \div N$, 得到窗长 $N \geq 132$, 取 $N = 133$

为什么？下面会讲

截止频率就是通带频率和阻带频率的中间值, 即 $\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = 2\pi \times 900 \div 8000$, 用这个算理想滤波器的时域表达式, 然后二者相乘得到滤波器表达式

将 $M = \frac{N-1}{2}$ 带入滤波器的表达式, 平移, 得到结果

不同类型的FIR滤波器的适用情况

存在以下四种线性相位的FIR滤波器

情况i	$h(n)$	N	适用情况
1	$h(n) = h(N-1-n)$	奇数	全能
2	$h(n) = h(N-1-n)$	偶数	低通, 带通
3	$h(n) = -h(N-1-n)$	奇数	带通
4	$h(n) = -h(N-1-n)$	偶数	高通, 带通

9.4 频率抽样法设计FIR滤波器

基本想法是根据理想滤波器的N个点确定实际FIR滤波器的DFT，然后做iDFT得到满足这些点的 $h(n)$

即，给定理想的 $H_d(\omega)$ ，进行采样，使得 $|H(k)| = |H_d(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ ，其中 $k = 0, 1, \dots, N-1$

然后得到 $h(n) = iDFT\{H(k)\}$

为了得到线性相位的滤波器，幅角必须是

$$\varphi(\omega) = -\left(\omega \frac{N-1}{2} - \beta\right)$$

其中当 $h(n)$ 奇对称时 $\beta = \frac{\pi}{2}$ ，偶对称时 $\beta = 0$

对于 $H(k)$ ，将 ω 换成 $\frac{2\pi}{N}k$ ，带入iDFT的公式

对于 $h(N-1-n) = h(n)$, $N = 2M + 1$ 的滤波器

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[H(0) + 2 \sum_{k=1}^M |H(k)| \cos\left(\frac{2\pi k(n-M)}{N}\right) \right]$$

其中 $M = \frac{N-1}{2}$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，用到了 $H^*(k) = H(N-k)$

对于 $h(N-1-n) = h(n)$, $N = 2M$ 的滤波器，则

$$h(n) = \frac{1}{N} \left[H(0) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} |H(k)| \cos\left(\frac{2\pi k}{N} \left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right) \right]$$

其余见下图

I $h(n) = h(N-1-n)$, $N=2M+1$, $n \in [0, 2M]$, N 为奇, $H(k) = |H(k)| e^{j\frac{2\pi}{N} k n}$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \{ |H(0)| + \sum_{k=1}^M H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + \sum_{k=M+1}^N H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} \}$$

$$\because k' = 2M+1-k = N-k, \sum_{k=M+1}^N H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} = \sum_{k'=1}^M H(N-k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n}$$

$\therefore h(n)$ 是实数信号. $\therefore H(N-k) = H^*(k)$.

$$\begin{aligned} \therefore h(n) &= \frac{1}{N} \{ H_0 + \sum_{k=1}^M H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + [\sum_{k=1}^M H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n}]^* \} \\ &= \frac{1}{N} \{ H_0 + 2 \operatorname{Re} \{ \sum_{k=1}^M H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} \} \}. \text{ 其中 } H_k = |H(k)| \operatorname{Re} H(k). \\ &= \frac{1}{N} \{ H_0 + 2 \operatorname{Re} \{ \sum_{k=1}^M H_k e^{j\frac{2\pi}{N} k [n - \frac{M-1}{2}]} \} \} \\ &= \frac{1}{N} \{ H_0 + 2 \sum_{k=1}^M H_k \cos[\frac{2\pi}{N} k (n - \frac{M-1}{2})] \}. \end{aligned}$$

II $h(n) = h(N-1-n)$, $N=2M$, $n \in [0, 2M-1]$ $H(k) = |H(k)| e^{-j\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k}$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \{ \sum_{k=0}^{M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + \sum_{k=M}^{2M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} \} \\ \because k' = N-k, \sum_{k=M}^{2M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} &= \sum_{k=1}^M H^*(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} \\ \therefore h(n) &= \frac{1}{N} \{ H_0 + \sum_{k=1}^{M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + [\sum_{k=1}^{M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n}]^* + H^*(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} M n} \}. \\ \Rightarrow h(n) &= \frac{1}{N} \{ H_0 + \overbrace{H_M e^{j\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N}}} + 2 \sum_{k=1}^{M-1} H_k \cos[\frac{2\pi}{N} k (n - \frac{M-1}{2})] \}. \end{aligned}$$

III $h(n) = -h(N-1-n)$, $N=2M+1$, $n \in [0, 2M]$ $H(k) = |H(k)| e^{-j[\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k - \frac{\pi}{2}]}$

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \{ jH_0 + \sum_{k=1}^M H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + \sum_{k=M+1}^{2M} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} \} \\ \because k' = N-k, \sum_{k=M+1}^{2M} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} &= \sum_{k=1}^M H(N-k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} \\ \therefore h(n) &= \frac{1}{N} \{ jH_0 + 2 \operatorname{Re} \{ \sum_{k=1}^M jH_k e^{-j[\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k - \frac{\pi}{2}] n} \} \}. \\ &= \frac{1}{N} \{ jH_0 - 2 \sum_{k=1}^M H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k (n - \frac{M-1}{2})] \}. \end{aligned}$$

显然 $H_0=0$ 才能满足条件. 且 $H_0 = \sum h(n) = 0$ 是恒成立的.

$$\therefore h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k (\frac{N-1}{2} - n)]$$

IV $h(n) = -h(N-1-n)$, $N=2M$, $n \in [0, 2M-1]$, $H(k) = |H(k)| e^{-j[\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N} k - \frac{\pi}{2}]}$.

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} = \frac{1}{N} \{ \sum_{k=0}^{M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} + \sum_{k=M}^{2M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} \} \\ \because k' = N-k, \sum_{k=M}^{2M-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N} k n} &= \sum_{k=1}^M H^*(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n} \\ \therefore h(n) &= \frac{1}{N} \{ jH_0 + \cancel{H_M e^{j\frac{N-1}{2} \frac{2\pi}{N}}} + 2 \sum_{k=1}^{M-1} H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k (\frac{N-1}{2} - n)] \}. \\ \therefore h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M-1} H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k (\frac{N-1}{2} - n)]. \end{aligned}$$

关于II型的说明: 图片不好更改, 但是根据DFT的定义, 代入 $N=2M$ 可以得到 $H(M)$

$$H(M) = \sum_{n=0}^{2M-1} h(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} Mn} = \sum_{n=0}^{2M-1} h(n) (-1)^n$$

根据 $h(n) = h(2M-1-n)$, 因为 n 和 $2M-1-n$ 奇偶性显然不同, 故 $h(n)(-1)^n + h(2M-1-n)(-1)^{2M-1-n} = 0$

所以 $H(M) = 0$, 因此图上II的 H_M 可以舍去

不过一般设计都是I型

整个设计流程就是

1. 根据 $H_d(\omega)$ 确定FIR滤波器的类型（高/低通等），长度 N 和幅度 $|H(k)|$
2. 根据实际情况确定线性相位的 β
3. 在 $[0, 2\pi]$ 上采样 N 个 $H_d(\omega)$ ，注意中间的是高频，得到 $|H(k)|$
4. 根据 $|H(k)|e^{j\varphi(k)}$ 进行IDFT，得到 $h(n)$ ，不用平移，因为这个相位就是平移后的

例：已知 $H_d(\omega)$ 是 $\omega_c = \frac{3\pi}{4}$ 的理想低通FIR滤波器，使用抽样法设计 $h(n)$ ，抽样间隔为 $\frac{\pi}{2}$

解： $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow N = 4$ ，那么由于是低通，必须选择情况2，不能用情况4， $\varphi = -\frac{3}{2}\omega$

$|H(k)|$ 则为 $H(0) = H(1) = H(3) = 1, H(2) = 0$ ，那么这个序列就确定了，IDFT得到 $h(n)$

$$h(n) = \frac{1}{4}[1 + 2 \cos \frac{\pi}{2}(n - 1.5)]$$

改进

上面的方法存在问题，在通带的1直接跳到阻带的0，引入了非常大的高频分量，导致阻带衰减不够低
由于阻带衰减与窗的长度无关，增加采样点不能解决问题

只能减小这个高频分量，也就是在1和0之间加0.5，平滑这个跳变

在数学上相当于对这个跳变进行插值，也就是在2.3节提到的内插辛格函数

一般情况下，不增加过度点的阻带衰减大致为-21dB，增加一个过渡点是-65dB，两个则是-75dB

相对于窗函数法的优势

- 当 $H_d(\omega)$ 没有数学表达式时
- 增加过渡点，阻带衰减能很小
- 截止频率更准确

缺点

- 抽样频率间隔固定
- 截止频率自由的前提增加抽样点，导致计算成本大

10 IIR滤波器的设计

10.1 基本设计思路

1. 首先需要给定IIR数字滤波器的技术指标，如 $\omega_p, \omega_{st}, A_p, A_{st}$ 分别是通带截止频率，阻带截止频率，通带衰减和阻带衰减
2. 根据数字指标，转换为模拟指标
3. 根据模拟指标得到模拟低通滤波器的技术指标，也就是归一化
4. 查表，通过模拟低通的原型计算模拟滤波器的表达式
5. 将模拟滤波器转换为数字滤波器

可以看到AD/DA各一次；有两种方法

10.2 冲激响应不变法

基本想法

对得到的模拟滤波器进行抽样，得到数字滤波器，即

1. 已知 $H_a(s)$, 逆变换得到 $h_a(t)$
2. 对其采样，得到 $h(n) = h_a(nT_s)$
3. 做Z变换得到数字滤波器 $H(z)$

如果

$$H_a(s) = \sum \frac{A_k}{s - s_k}$$

那么最终得到的

$$H(z) = \sum \frac{A_k}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}}$$

证明略，好证的

本方法对第1-4步延续了传统的想法，即

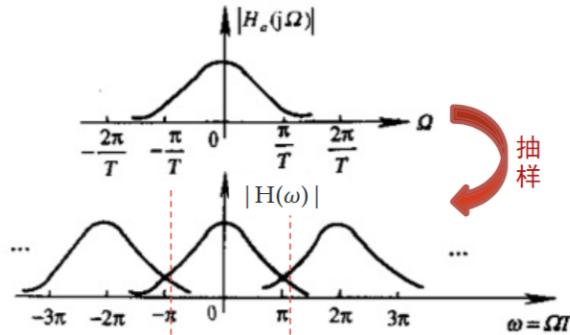
1. $\Omega = \frac{\omega}{T_s}$, A_p, A_{st} 不改变
2. 设计低通模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$
3. 用上面的方法将 $H_a(s)$ 转换为 $H(z)$

方法的局限

由于使用了抽样，这必然会导致一个抽样定理的问题，即

$$z = e^{sT} \Rightarrow z = e^{\sigma T} e^{j\Omega T} \Rightarrow r = e^{\sigma T}, \omega = \Omega T$$

由于 $\omega \in [-\pi, \pi]$ ，这会导致映射非双射，表现在系统函数上就是，在 $\Omega = \pm \frac{\pi}{T}$ 之外的频谱会造成混叠



用抽样定理的视角来看， ω 的周期为 2π ，那么对 Ω 的抽样频率就是 $\frac{2\pi}{T}$ ，即折叠频率就是 $\frac{\pi}{T}$

这带来的问题就是：高通/带阻滤波器无法设计。因为实际中无法限制模拟滤波器的频谱

特点

- 频率变换是线性的，即 $\omega = \Omega T$
- 时域的逼近程度好，毕竟是对其进行采样的
- 周期延拓问题

10.3 双线性变换法

为了构造单一的频率映射而出现，直接给出映射公式

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$

那么在频率响应上，即 $z = e^{j\omega}$ 上，这个映射就是

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$$

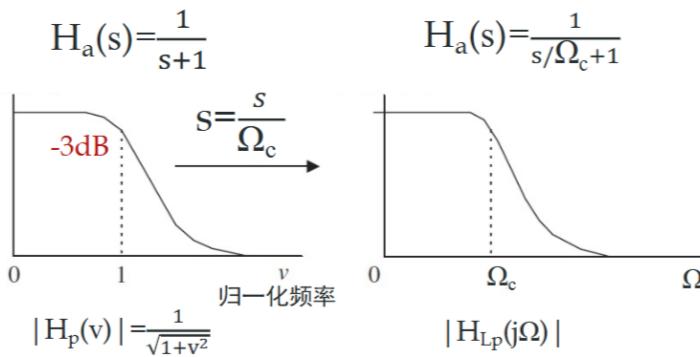
基本想法

1. 根据数字滤波器的技术指标要求，通过 $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$ 得到模拟指标
2. 根据模拟指标和模拟滤波器原型设计模拟滤波器，得到 $H_a(s)$
3. 用 $s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$ 带入 $H_a(s)$ ，得到 $H(z)$

通过原型设计模拟滤波器

一个例子如下

Butterworth滤波器原型



转换为其他类型的滤波器的方法如下

3dB截止频率1低通原型到其他模拟滤波器间转换		
类型	映射	新的截止频率
低通	$s \rightarrow \frac{1}{\Omega_c} s$	Ω_c
高通	$s \rightarrow \frac{1}{s} \Omega_c$	Ω_c
带通	$s \rightarrow \frac{s^2 + \Omega_l \Omega_h}{s(\Omega_h - \Omega_l)} \Omega_c$	Ω_l, Ω_h
带阻	$s \rightarrow \frac{s(\Omega_h - \Omega_l)}{s^2 + \Omega_l \Omega_h} \Omega_c$	Ω_l, Ω_h

对这张表的修正：低/高通的 Ω_c 变为 Ω_p ，带通/阻的 Ω_c 变为 1， Ω_l/Ω_h 指的是通带截止频率

原型滤波器的设计

存在两种，巴特沃兹和切比雪夫

- 巴特沃兹，通带平坦但是过渡带宽大；需要指的滤波器的阶数

已知n阶低通巴特沃兹的表达式为

$$|H_p(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \nu^{2n}}}$$

其中 ν 是归一化模拟角频率，当 $\nu = \nu_p = 1$ 时为通带截止频率，即

$$A_p = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \Rightarrow \varepsilon^2 = 10^{-\frac{A_p}{10}} - 1$$

当 $\nu = \nu_s$ 时为归一化阻带截止频率，即

$$A_{st} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \nu_s^{2n}}}$$

ν_s 有

$$\nu_s = \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$$

利用 A_p, A_{st}, ν_s 的值，求得n为

$$n \geq \left(\lg \frac{10^{-0.1A_{st}} - 1}{\varepsilon^2} \right) / (2 \lg \nu_s)$$

特别的，当 $A_p = -3$ dB时， $\varepsilon = 1$

不同阶的滤波器原型会在考试中给出

- 切比雪夫，通带波纹大，但是过度带宽小，这个就不赘述了估计不会考，直接给结果

$$\varepsilon^2 = 10^{-0.1A_p} - 1$$

$$n \geq \cosh^{-1} \left(\frac{10^{-0.1A_{st}} - 1}{\varepsilon^2} \right)^2 / \cosh^{-1} \nu_s$$

例：设计一个低通IIR滤波器，满足截止频率为 $f_p = 1.5$ kHz，通带衰减 A_p 3dB，阻带频率 $f_{st} = 3$ kHz，阻带衰减 $A_{st} = -10$ dB；抽样频率8000Hz

解：首先求截止频率的模拟角频率

$$\Omega_p = \frac{2}{T_s} \tan(2\pi f_p / f_s / 2) = 1.07 \times 10^4$$

$$\Omega_{st} = \frac{2}{T_s} \tan(2\pi f_{st} / f_s / 2) = 3.86 \times 10^4$$

那么归一化的阻带截止频率就是

$$\nu_s = \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p} = 3.613$$

带入上文公式，得到 $\varepsilon = 1, n \geq 0.855$ ，取 $n = 1$ ，即原型为

$$H_a(s) = \frac{1}{s + 1}$$

由于是求的低通，故用 $S = \frac{s}{\Omega_p}$ 带入，得到

$$H_{LP} = \frac{1}{s/\Omega_p + 1}$$

再经过变换得到 $H(z)$

10.4 IIR与FIR的对比

- IIR
 - 准确的边缘频率
 - 利用模拟滤波器设计，有大量轮子用
 - 存在反馈，阶数更少
 - 缺点：相位非线性；存在右边极点，系统条件稳定
- FIR
 - 严格的线性相位
 - 系统一定是稳定的
 - 可以用FFT快速计算
 - 缺点：截止频率难控制

11 其他说明

11.1 关于DSP的说明

整门课可以说就是为了第9节，第10节服务的，所以学懂了9/10两章，这门课就没问题

11.2 关于滤波器截止频率的选定

首先需要明确的是，带通/阻滤波器并没有所谓的截止频率

这里我们特指不显含的 ω_c ，而不是给定的通频带参数如 f_p, f_{st} 等

当不指定 ω_c / f_c ，而只给出了通频带的截止频率时，认为不显含；如果直接给出了，就直接用显式的就行

下面只讨论低通，毕竟高通就是1-低通

FIR滤波器

- 窗函数法中会使用到一个 ω_c ，这是时域sinc函数经过DFT后在频域上的截止频率
经过9.2节的说明可以发现，这个 $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_{st}}{2}$ ，此时的 $|H(\omega)|$ 也一定恒等于0.5，也就是-3dB
- 频率抽样法并不会直接涉及 ω_c ，但是理想滤波器的 ω_c 显然是同上的含义，当然这种方法一般会给出
- 一定有线性相位，或者说一定要求线性相位

IIR滤波器

- 冲激响应不变法一般会给出模拟滤波器 $H_a(s)$ ，故不存在这个问题

- 双线性变换法给定的参数一般是 A_p , A_{st} , 前者对应于 f_p , 也就是使用 Ω_p 作为-3dB的横坐标 (实际是 A_p dB)

根据对FIR滤波器的讨论可以知道, 这是将 $|H(\omega)| = 0.5$ 的 $\omega = \omega_p$, 也就是指定 $\omega_c = \omega_p$

那么在原型更改时, 就需要使 $\Omega_c = \Omega_p$

值得一提, 这种方法一般会涉及模-数-模转换, 第一次是模拟指标正常转数字指标, 第二次是双线性

- 当然, 如Lab 3所示, 也会存在不需要 A_p 的设计方法, 这种没法手搓, 也就不存在截止频率的选取问题
- 一般是没有线性相位的, 因为滤波器的原型就不具有线性相位
- 双线性法设计滤波器的基本流程

给定模拟频率要求 f_p, f_{st} 分别为通带截止频率和阻带截止频率, 抽样频率为 f_s , 通带截止衰减为 A_p , 阻带衰减为 A_{st}

1. 用模拟要求求的数字要求

$$\omega_p = 2\pi f_p / f_s, \omega_{st} = 2\pi f_{st} / f_s$$

2. 用数字要求和双线性法求的滤波器的模拟要求

$$\Omega_p = 2f_s \tan \frac{\omega_p}{2}, \Omega_{st} = 2f_s \tan \frac{\omega_{st}}{2}$$

3. 求出原型滤波器的归一化阻带截止频率 ν_s

$$\nu_s = \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}$$

4. 根据 A_p 和 A_{st} 求的原型的阶数n

$$|H_p(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \nu^{2n}}}$$

$$\varepsilon^2 = 10^{-\frac{A_p}{10}} - 1$$

$$n \geq \left(\lg \frac{10^{-0.1A_{st}} - 1}{\varepsilon^2} \right) / (2 \lg \nu_s)$$

5. 根据n求出原型滤波器, 再用滤波器之间的相互转换求出需要的模拟域滤波器 $H(s)$

6. 反变换为数字域

$$H(z) = H(s)|_{s=2f_s \frac{z-1}{z+1}}$$

观察这二者的 Ω_c 选取的差别, 会对

IIR有准确的边缘频率

这句话有新的认识