

1. 离散时间信号与系统

常见信号 $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & \text{a.w.} \end{cases}$ $u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & \text{a.w.} \end{cases}$

$R_N(n) = u(n) - u(n-N) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{a.w.} \end{cases}$

$x(n) = a^n u(n)$ $|a| < 1 \Rightarrow x(n)$ 收敛

$x(n) = \sin(\omega n)$

离散信号常见特征 $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$ $P_x = \frac{1}{N} E_x$

周期性 $x(n) = x(n+N)$ $\forall n$ 奇偶 $x \pm \frac{1}{2}[x(n) \pm x(n-N)]$

共轭对称 $x(n) = x^*(n)$ 反: $x(n) = -x^*(n)$

反对称分量 $x_a = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$ 对称: $\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$

抽样 $x(nm)$ 每 m 个点抽一; $x(\frac{n}{M})$ 每 $\frac{1}{M}$ 个点插 $M-1$ 个 0

线性卷积 $x(n) * h(n) = \sum x(n)h(n-N)$

$M \rightarrow N$ 序列得到 $M+N-1$ 的结果, 这就是卷积

LT I 系统 因果 $\Leftrightarrow h(n) = 0, n < 0$; $y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k+1)$

稳定性 $\sum |h(n)| < \infty$

信号采样与重建 出现 A, D 转换, A 用 Δ , D 用 ∇

预滤波 当采样频率 ω_s 提升, 用低通 ($\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$)

折叠频率 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ 也就是 N 频率, ω_s 是 N 率

采样 $p(nT) = \sum \delta(t - nT)$, $t = nT \Rightarrow \omega = \omega_s T$

重建 对 $x(n)$ 在低通滤波, ideal lowpass 在时域为

$\text{sinc} = \frac{T_s}{\pi} \sin \frac{\pi}{T_s} \omega$, $\text{sinc} = \frac{\sin(\pi \omega T_s)}{\pi \omega T_s}$ 代入 $x_p(t) = x(n) * h(nT)$

$\Rightarrow x_p(t) = \sum x(n) p(nT) * h(nT) = \sum x(n) \delta(t - nT) * h(nT)$

也就是重建就是 sinc 在时域插值

N 率下的结论 $x(n)$, $y(n)$ 的 N 率为 f_x, f_y 有

D $x(nT)$ 为 $2\pi f_x$ D $x(nT) * y(nT)$ 为 $2\pi \max\{f_x, f_y\}$

D $x(nT) * y(nT)$ 为 $2\pi \min\{f_x, f_y\}$ 若 N 率

D $x(nT) \cdot y(nT)$ 为 $2\pi(f_x + f_y)$ N 率: $1/N$ (抽样间隔)

z 变换

从 Laplace 到 z : $\int x(n)z^{-n} = \int x(nT)e^{-sTn} = \int x(nT)e^{-sTn} \delta(nT) = \int x(nT)e^{-sTn} \delta(nT)$

后者 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_0^T \delta(t-nT) e^{-st} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-sTn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-\frac{sT}{T}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) z^{-n}$

$\therefore \bar{x}(z) = \sum x(n)z^{-n}$, $z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$

令 $\sigma = \frac{\ln|z|}{T}$, $\omega = \frac{\angle z}{T}$ \therefore 在 $\sigma \rightarrow 0$ 时, ω 在 2π

与 Laplace 一样, 要指明收敛域 ROC.

有限长信号, $\text{ROC} = R^2$

z 变换性质 线性, $\text{ROC} = \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2$

时间反转 $x(n) \leftrightarrow x(-n)$ $\text{ROC}: \frac{1}{R}$ $|z| < R$ $\frac{1}{R}$

时域卷积 $x(n) * y(n) \leftrightarrow \bar{x}(z) \bar{y}(z)$ $\text{ROC}: \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2$

时域卷积 $x[n] * y[n] \leftrightarrow \bar{x}(z) \bar{y}(z)$ $\text{ROC}: \text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2$

序列相关 $r_{x_1, x_2}(l) = \sum x_1(n) x_2(n-l) = x_1(l) * x_2(-l)$

$\leftrightarrow \bar{x}_1(z) \bar{x}_2(z^{-1})$

初值定理 因果序列, $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(0)$

常用变换对

$\delta(n) \leftrightarrow 1, \text{ROC}: R^2$; $u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ROC}: |z| > 1$

$R_N(n) \leftrightarrow \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}, \text{ROC}: R^2$; $a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ROC}: |z| > |a|$

$-a^n u(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \text{ROC}: |z| > |a|$

4. 差分方程

LT I 系统稳定性 $\Leftrightarrow \sum |h(n)| < \infty \Leftrightarrow \sum |z| > 1$ 在 $H(z)$ ROC 内

因果 $\Leftrightarrow \text{ROC}$ 在最大极点之外; 稳定因果: $|P_z| < 1$

单边 $z^{-1} x(n) = \bar{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$

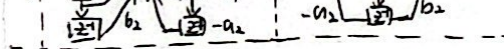
$k > 0$ 有 $x(n-k) \leftrightarrow z^{-k} \bar{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k) z^{-n}$

$x(n+k) \leftrightarrow z^k \bar{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k) z^{-n}$

这在带初值的差分方程中有用.

系统模型 $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

直接 I 型 两延迟器; II 型: 共用延迟器



5. 几种信号的分解

连续周期 $x(t) = \sum C_k e^{j2\pi k t}$, $C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi k t} dt$

平均功率 $P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

连续非周期 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{x}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, $\bar{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

能量谱密度 $S_{xx}(\omega) = |\bar{x}(\omega)|^2$

Parseval 关系 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{x}(\omega)|^2 d\omega$

离散周期 DTFS: $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k n}$

$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k n}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$, C_k 是复数.

功率谱密度 $S_{xx}(k) = |C_k|^2$ 相位是这个分量的时延.

Parseval: $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$

离散非周期 DTFT: $\bar{x}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \bar{x}(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{x}(\omega) e^{j\omega n} d\omega$, $x(n)$ 离散.

$\bar{x}(\omega) = \bar{x}(\omega + 2\pi)$, $\bar{x}(\omega) \in [-\pi, \pi]$, $\bar{x}(\omega)$ 连续.

$S_{xx}(\omega) = |\bar{x}(\omega)|^2$, $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{x}(\omega)|^2 d\omega$

常用变换对

$\delta(n) \leftrightarrow 1$; $u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \pi \delta(\omega)$; $R_N(n) \leftrightarrow \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$

$R_N(n)$ 是窗, 更常用的是 $R_N(n) \leftrightarrow \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} e^{j\omega \frac{N-1}{2}}$

对于 $x(n) = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & \text{a.w.} \end{cases}$ $\bar{x}(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$

对于 $\bar{x}(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{a.w.} \end{cases}$ $x(n) = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$ ($n \neq 0$), $\frac{\omega_c}{\pi}$ ($n=0$)

$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$; $\sin \omega_c n \leftrightarrow \frac{1}{2j} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$

$\cos \omega_c n \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$; $e^{j\omega_c n} \leftrightarrow \pi \delta(\omega - \omega_c)$

DTFT 性质

线性; 时移: $x(n-k) \leftrightarrow e^{-j\omega k} \bar{x}(\omega)$

频移: $x(n) e^{j\omega_0 n} \leftrightarrow \bar{x}(\omega - \omega_0)$

卷积: $x(n) * y(n) \leftrightarrow \bar{x}(\omega) \bar{y}(\omega)$

时域微分: $\frac{dx(n)}{dn} \leftrightarrow j\omega \bar{x}(\omega)$

时域积分: $\sum_{k=-\infty}^n x(k) \leftrightarrow \frac{\bar{x}(\omega)}{j\omega}$

卷积定理: $x_1 * x_2 \leftrightarrow \bar{x}_1(\omega) \bar{x}_2(\omega)$

窗口/调制: $x_1 * x_2 \leftrightarrow \frac{1}{N} \bar{x}_1 * \bar{x}_2$

共轭对称: $x(n) \in \mathbb{R}$, $\bar{x}(\omega) = \bar{x}^*(\omega)$

几个例子

$\uparrow \Rightarrow x_2 = x_1 e^{j\pi n} \Rightarrow \bar{x}_2(\omega) = \bar{x}_1(\omega - \pi)$, 高低频互换

已知 $\bar{x}_1(\omega)$, 求 $x(n+1)$ 的 DTFT

$\bar{x}_1(\omega) = \sum x(n) e^{-j\omega n} = \sum x(n) e^{-j(\omega - \pi)n} = \bar{x}(n) e^{j\pi n}$ 但 $x(n)$ 是奇数序列, 不行, 观察 $x(n+1) = \frac{1}{2}[x(n) + (-1)^n x(n)]$

$\Rightarrow x(n+1) = \frac{1}{2}[x(n) - (-1)^n x(n)]$, $x_3(n) = x(n+1)$

这里 $x_3(n)$ 是奇数序列, 代入, 有 $\bar{x}_1(\omega) = e^{j\pi} \bar{x}_3(\omega)$

$\bar{x}_3(\omega) = \frac{1}{2} \bar{x}_1(\omega) - \frac{1}{2} \bar{x}_1(\omega - \pi)$

数字 LT I 系统频域分析

$y(n) = h(n) * x(n)$, $x(n) = A e^{j\omega n} \Rightarrow y(n) = H(e^{j\omega}) x(n)$

$e^{j\omega n}$ 为系统特征函数, $H(e^{j\omega})$ 为特征值

根据差分方程, 得到 $H(z)$, 在 $|z|=1$ 上为 $H(e^{j\omega})$

用这块图测试得到 $|H(e^{j\omega})|$ 和 $\angle H(e^{j\omega})$

由于共有对称性, 只画 ω 从 0 到 π , ω 就是频率.

极点 在靠近虚轴 ($\omega=0$), 通带截止频率

将极点关于虚轴对称, 得到 $1-F$

希望 $y = A x(n-k)$, $H = |H| e^{-j\omega k}$ 时延 ωk

LT I 系统的逆系统: 充要条件: H^{-1} 存在 $\Leftrightarrow y, x$ 双射.

$H_1(z) = H(z)^{-1}$, 要注意 ROC 选取: $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

$\Rightarrow H(z) = 1 - z^{-1}$, $\text{ROC}: |z| > 1$; $H^{-1}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, 极点 $z=1$

全通系统: $H(\omega) = e^{-j\omega k}$, $|H|=1$, $\angle H = -\omega k$ 相位

1. DFT: $\bar{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k n}$, $k=0, 1, \dots, N-1$

$\Rightarrow \bar{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi k n}$, 令 $W_N = e^{-j2\pi/N}$

$\Rightarrow \bar{x}(k)_{N \times 1} = \begin{pmatrix} 1 & W_N^{k \cdot 0} & \dots & W_N^{k \cdot (N-1)} \\ W_N^{0 \cdot 1} & W_N^{1 \cdot 1} & \dots & W_N^{(N-1) \cdot 1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{0 \cdot (N-1)} & W_N^{1 \cdot (N-1)} & \dots & W_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} x(0)_{N \times 1}$

$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) e^{j2\pi k n}$, $\bar{x}(k)$ 与 $x(n)$ 等

三个变换关系:

$\bar{x}(k) = \bar{x}(\omega)|_{\omega=2\pi k/N} = \bar{x}(z)|_{z=e^{j2\pi k/N}}$

补 0: $\omega = \frac{2\pi}{N}$, 补 0, N 变大, ω 变小, 频率分辨率

对 DFT 无影响, 对 $x(n)$ 就是多 0

DFT 常用变换对 用 k 代替 DTFT 的 ω , 注意 δ

$\delta(n) \leftrightarrow 1$; $u(n) \leftrightarrow \frac{1}{(1-e^{-j2\pi/N})} + \frac{N}{2} \delta(k)$; $\delta(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi k n}$

$R_N(n) \leftrightarrow N, k=0; 0, \text{a.w.}$; $a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j2\pi/N})}$

$\sin \frac{2\pi k n}{N} \leftrightarrow \frac{jN}{2} [\delta(k-k_0) - \delta(k+k_0)]$

$\cos \frac{2\pi k n}{N} \leftrightarrow \frac{N}{2} [\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0)]$

$e^{j2\pi k n} \leftrightarrow N \delta(k-k_0)$

DFT 的性质 时域反转: $x(N-n) \leftrightarrow \bar{x}(N-k)$, N 为长度.

线性; 序列共轭: $x(n) \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{x}(k) = \bar{x}^*(N-k)$

或: $x^* \leftrightarrow \bar{x}^*(N-k)$

时移: $x(n-n_0) \leftrightarrow \bar{x}(k) e^{-j2\pi k n_0}$

频移: $x(n) e^{j2\pi k n} \leftrightarrow \bar{x}(k-k_0)$

Parseval: $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) \bar{y}^*(k)$

圆周卷积 前置: 周期卷积, $x_1 * x_2 = y$ 周期均为

长为 M, N 的 x_1, x_2 ; $x_1 \odot x_2 = y$, y 的补长为 $\max\{M, N\}$

在操作过程中, 短序列用 0 补到 N , $x_1 \odot x_2 = y$

$x_1 \odot x_2 \leftrightarrow \bar{x}_1(k) \bar{x}_2(k)$, N 点 DFT

计算: $y = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k) x_2(N-k-1) \bar{x}_2(k)$ 对 N 取模.

例如: $x_1 = \{1, 2, 3, 1\}$, $x_2 = \{4, 3, 2, 2\}$ $N=4$

$y(0) = \sum_{k=0}^3 x_1(k) x_2(0-k-1) = 4 + 4 + 6 + 3 = 17$

$y(1) = \sum_{k=0}^3 x_1(k) x_2(1-k-1) = 3 + 8 + 6 + 2 = 19$

$y(2) = \sum_{k=0}^3 x_1(k) x_2(2-k-1) = 2 + 6 + 12 + 2 = 22$

$y(3) = \sum_{k=0}^3 x_1(k) x_2(3-k-1) = 2 + 4 + 9 + 4 = 19$

$x_1 * x_2$ (线性) 的结果为 $M+N-1$ 点序列.

将 x_1, x_2 都补 0 到 $M+N-1$ 长度, 此时 $x_1 \odot x_2 = x_1 * x_2$

也即 $\bar{x}_1(k) \bar{x}_2(k) = \bar{x}(k)$, $\bar{x}(k) = \bar{x}_1(k) \bar{x}_2(k)$

重叠相加法: 将长信号分为若干 L 的块, $h(n)$ 长 M

① 将 $h(n)$ 补到 $L+1$, $L > M$, 对 $x(n)$ 补 $M+1$ 个 0, 也是 $L+M$

$\bar{x}(k) \cdot H(k) \rightarrow \bar{x}(n) * h(n)$, 有 $(M+1)$ 重叠, 重叠部分相加

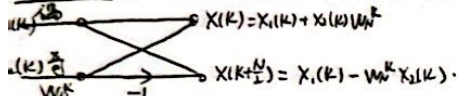


5. FFT

DFT造成频谱泄露 对时域上取有限长，相当于加窗，当窗函数就是加一个主瓣为 $\frac{2\pi}{N}$ 的 sinc 函数。当 $\omega_{\min} \leq \frac{2\pi}{N}$ 时，造成了泄露。

$\frac{2\pi}{N} \leq \omega_{\min} \Rightarrow N \geq \frac{2\pi}{\omega_{\min}}$ ，这对序列长度给下限。同样的，DFT在频率上的分辨率 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ ，为了解 DFT 的两个峰分开， $\omega_{\min} \leq \Delta\omega \Rightarrow N \geq \frac{2\pi}{\omega_{\min}}$ 。

FFT 算法 关键在于 $W_N^{kN/2} = -W_N^k$, $W_N^{kN} = W_N^k$



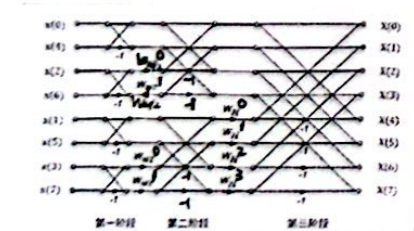
由前代，三阶段形式：

占位符：见最下方

在一个 N 点序列进行 DFT 处理时，一共 N 个 $X(k)$ ，每个 $X(k)$ N 次复乘， $(N-1)$ 次复加与 $N-2$ 次复乘， $N(N-1)$ 次复加。进行 FFT 处理时，如 scale 到最近的 2^m ，记为 N_1 ，一共 M 级蝶形图，每级级数 $\frac{N_1}{2}$ 个小图，每个图 2 次复乘， $M \cdot \frac{N_1}{2}$ 复乘， $M \cdot N_1$ 复加。若 N 是 2^m ，则 $N_1 = N$ ， $M = \log_2 N$ ， $N_1 = N$ 。

固定输入序列：用二进制码的时延。

Or	bin	inub	bin	Out
0	000	000	0	0
1	001	100	4	4
2	010	010	2	2
3	011	110	6	6
4	100	001	1	1
5	101	101	5	5
6	110	011	3	3
7	111	111	7	7



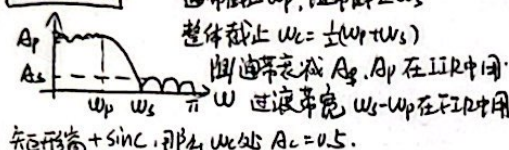
第一阶段 第二阶段 第三阶段

9. 数字 Filter：就是一个离散系统

IIR 和 FIR 区别

IIR: $\sum u_i y(n-i) = \sum b_j x(n-j)$ ，存在极点，FIR: $y(n) = \sum b_j x(n-j)$ 元极点，一定稳定

物理 Filter



矩形窗 + sinc，那么 W_c 处 $A_c = 0.5$ 。

FIR 的窗函数法

用各种不同的窗在时域截 sinc，因为在频域是 ideal low pass。记

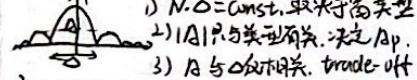
记窗为 $w(n)$ ，那么 $h(n) = w(n) \cdot \text{sinc}(n)$ 。sinc 原型如下：长为 $2M+1=N$ (窗长) $\rightarrow \text{sinc}(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$ 。lowpass: $h(n) = \begin{cases} \frac{W_c}{\pi} & n=0 \\ \frac{\sin(W_c n)}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$ 。高通: $h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{W_c}{\pi} & n=0 \\ -\frac{\sin(W_c n)}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$ 。

带通: $h(n) = \begin{cases} \frac{W_h - W_l}{\pi n} & n=0 \\ \frac{\sin(W_h n) - \sin(W_l n)}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$ ，两个 lowpass 相减。

带阻: $h(n) = \begin{cases} 1 - \frac{W_h - W_l}{\pi n} & n=0 \\ \frac{\sin(W_h n) - \sin(W_l n)}{\pi n} & n \neq 0 \end{cases}$ ， $\delta(n) - h(n)$ 。

根据通带波纹和阻带衰减要求选择窗，根据过渡带宽选择窗长，得到 $h(n) = w(n)$ 原型，再 $h_d(n) = h(n-M)$ 平移为因果的系统。窗函数在频域的主瓣宽与过渡带宽相关，窗函数产生旁瓣，因为 A_p, A_s 只与窗类型有关。

频域窗的性质 ① N 点的窗，② 主瓣宽 ③ 旁瓣 $mx = A$



窗函数法得到的一定有线性相位，但此不佳。

同种线性相位 FIR Filter

I: $h(n) = h(N-1-n)$, N 为奇 \rightarrow 全通
II: $h(n) = h(N-1-n)$, N 为偶 \rightarrow 低通
III: $h(n) = -h(N-1-n)$, N 为奇 \rightarrow 高通
IV: $h(n) = -h(N-1-n)$, N 为偶 \rightarrow 带通
同种的相位都是 $\angle H = -\omega \frac{N-1}{2} + \beta$ ，其中 I, II: $\beta = 0$; III, IV: $\beta = \pi$ 。这个要会证。

频率抽样法：给出理想，对其抽样。

得到 $|H(k)|$, $\angle H = -\omega \frac{N-1}{2} + \beta$ ，如上所述。记 $|H(k)| = H_k$ ，对同种 Filter 有以下结论：
I: $h(n) = \frac{1}{N} \{ H_0 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} H_k \cos[\frac{2\pi}{N} k(n - \frac{N-1}{2})] \}$ 。

II: $h(n) = \frac{1}{N} \{ H_0 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} H_k \cos[\frac{2\pi}{N} k(n - \frac{N-1}{2})] \}$ 。

III: $h(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{M-1} H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k(n - \frac{N-1}{2})]$ 。

IV: $h(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{M-1} H_k \sin[\frac{2\pi}{N} k(n - \frac{N-1}{2})]$ 。

$N \in [0, M]$ ，注意这些已经是因果的。
 $K=0, 1, \dots, N-1$, $\omega = \frac{2\pi}{N}$ ，给了 $H_d(\omega)$ 和 N 就可以做。一般只给出 I 型就行，也就是保证 N 为奇。

改进：在 $1 \sim 0$ 之间增加 0.5 过渡，代价： N 大， W 不准，改进了阻带衰减不足的问题。

IIR 中做相差不法：这种方法会给出 $H_d(s)$ 。

已知 $H_d(s) = \sum \frac{A_k}{s - s_k}$, $h_d(n) = \sum A_k e^{s_k n}$ 。对 $h_d(n)$ 抽样， $h(n) = \sum A_k e^{s_k n T_s}$ ，对 $h(n)$ 做 z 变换： $H(z) = \sum h(n) z^{-n} = \sum A_k \frac{1}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}}$ 。

问题： $r = e^{T_s}$ 设 $\omega = \omega_c T_s \in [-\pi, \pi]$, $\omega_c \in [-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}]$ 。
 $\therefore \omega$ 存在多映射，即对 ω 的采样为 $\frac{2\pi}{T_s}$ ，折衷 $\frac{2\pi}{T_s}$ 。

这不能要求模拟信号的 N 频率，不能做高通、带阻。

IIR 的双线性变换法 $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$

在 $\omega = 0$ 上，就是 $\omega_c = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}$ ，所以这方法有 $A \rightarrow D$ 。 $A \rightarrow D$: $\omega = \omega_c T_s$, $1 \rightarrow A$: $\omega_c = \frac{2}{T_s} \tan \frac{\omega}{2}$ 。注意两次不根据 ω_c, ω_p 要求，得到 ω_c, ω_p 代入原型 Filter。

原型设计：
Butter: $|H_p(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \tan^2 \frac{\omega}{2}}}$, ω 为 3dB 截止频率。
 $\omega_c = \omega_p$ 为通带截止，此时 $20 \lg |H_p(\omega_p)| = A_p$ ，代入得：
 $\epsilon^2 = 10^{-0.1 A_p} - 1$ ，注意这里不用自己求 ω_c ，用 ω_p 就行。
 $\omega_c = \omega_p$ 时为阻带截止， A_s 代入有：
 $\omega_s = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$ 。
 $n \geq \lceil \lg \frac{(10^{-0.1 A_s} - 1)}{\epsilon^2} / (2 \lg \frac{\omega_s}{\omega_p}) \rceil$ 。当 $A_p = -3\text{dB}$ 时 $\epsilon^2 = 1$ 。

Chebys 同理：结论： $\epsilon^2 = 10^{-0.1 A_p} - 1$, $\omega_s = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 + \epsilon^2}}$ 。
 $h \geq \cosh^{-1} \left(\frac{10^{-0.1 A_s} - 1}{\epsilon^2} \right) / \cosh^{-1} \frac{\omega_s}{\omega_p}$ 。

Butter: 通带平坦，但 ω 大；Chebys: 通带波纹大， ω 小。

原型都是低通 Filter，还要变换。

ω_p 到 ω_s : $s \rightarrow \frac{1}{s - \omega_p}$, ω_p 到 ω_s : $s \rightarrow \frac{\omega_p}{s - \omega_p}$ 。
 ω_p 到 ω_s : $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_p^2}{s^2 - \omega_p^2}$ ，带阻 $s \rightarrow \frac{s(\omega_h - \omega_l)}{s^2 + \omega_h \omega_l}$ 。

这里没有 ω_c 的概念，只有 ω_p, ω_s 。注意，这样也只是 $H(s)$ ，再用 $s = \frac{z-1}{T_s}$ ，得到。

几种方法对比

FIR: 严格线性相位，系统一定稳定，用 FFT 缺点： ω_c, ω_s 难控制。

IIR: 边缘与失真(没有 ω_c)，模拟 Filter 有反馈，一般 N 阶更小。

缺点：非线性相位，系统条件稳定。

频率抽样： $H_d(\omega)$ 不显式 ω ，有通带波纹， A_s 很 ω_c 更值难；但 ω 固定，准确的 ω_c 。

窗函数：方法简单，但 ω 不准。是开级。