Pw3.1

(2) $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt]e^{i\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\, e^{-i\omega t}dt]e^{i\omega t}d\omega$

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin t e^{-i\omega t}dt = \cancel{Im\int_{-\pi}^{\pi}e^{it}e^{-i\omega t}dt} =$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t(\cos\omega t - i\sin\omega t)dt = -2i\int_0^{\pi}\sin t\sin\omega t\, dt$

$=-i\int_0^{\pi}\cos(\omega-1)t-\cos(\omega+1)t\, dt=\frac{2i}{\omega^2-1}\sin\omega\pi$

$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4i}{\omega^2-1}\sin\omega\pi(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega$

$=\cancel{\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^2\omega\pi\, d\omega}\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi}{1-\omega^2}\sin\omega t\, d\omega.$

(3).

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt]e^{i\omega t}d\omega$

$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{0}-e^{-i\omega t}dt+\int_0^1 e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{i\omega}(2-e^{i\omega}-e^{-i\omega})$

$\therefore f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}(2-e^{i\omega}-e^{-i\omega})e^{i\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}e^{i\omega t}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega t\, d\omega.$

Pw3.2

$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

(2).

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t|}\cos t\, e^{-i\omega t}dt]e^{i\omega t}d\omega.$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{1-i\omega}{(1-i\omega)^2+1}+\frac{1+i\omega}{(1+i\omega)^2+1})e^{i\omega t}d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\omega^2+4}{\omega^4+4}\cancel{(\cos\omega t+i\sin\omega t)}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\, d\omega.$

$\therefore\ \frac{\pi}{2}f(t)=\frac{\pi}{2}e^{-|t|}\cos t=\int_0^{+\infty}\frac{\omega^2+2}{\omega^4+4}\cos\omega t\, d\omega.$

P203.3

(2)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \sin 2\pi t \, e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2i} \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i\omega)} \left(e^{i(2\pi t)} - e^{-i(2\pi t)}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \frac{\cancel{4\pi i}}{4\pi^2 + (i\omega+1)^2} = \frac{2\pi}{4\pi^2 + (i\omega+1)^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$= \cdots$

补1:

$f(x)=\frac{1}{2+\cos x}$ $x\in[-\pi,\pi)$, $T=2\pi$, $\omega=1$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2+\cos x}\cos n\omega t\,dt=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z^n}{2+\cos x}dt$.

$=\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{Re}\oint_{|z|=1}\frac{z^n\,dz}{(z+2-\sqrt3)(z+2+\sqrt3)}\cdot=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi i\cdot\frac{(\sqrt3-2)^n}{\cancel{2}\sqrt3}\cdot\frac{\cancel{2}}{i}=\frac{2\pi}{\sqrt3}(\sqrt3-2)^n$.

易知 $b_n\equiv 0$

$\therefore$ $f(x)=\frac{\pi}{\sqrt3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\pi}{\sqrt3}(\sqrt3-2)^n\cdot\cos nt$

补2: $f(t)=1-|t|$ $t\in[-1,1)$. $T=2$, $\omega=\pi$.

$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t$ 同理 $b_n\equiv 0$

$a_n=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1}(1-|t|)\cdot\cos n\pi t\,dt.=2\int_0^1(1-t)\cos n\pi t\,dt$

$=\frac{2}{n^2\pi^2}-\frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^2}=\begin{cases}0 & n=2k\\ \frac{4}{n^2\pi^2} & n=2k+1\end{cases}$

$\therefore$ $a_0=\cancel{\lim_{n\to0}\frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi^2}=\lim_{n\pi\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$ $a_0=\int_{-1}^{1}(1-|t|)dt=1$

$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi t$

补3. $f(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac12\\ 0 & \frac12\le|t|<1\end{cases}$ $t\in[-1,1)$. $T=2$, $\omega=\pi$

同理 $b_n\equiv 0$. $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos n\omega t$.

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\,dt=\int_{-\frac12}^{\frac12}\cos n\omega t\,dt=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n}{2}\pi=\begin{cases}0 & n=2k.\\ \frac{2}{n\pi} & n=4k+1\\ -\frac{2}{n\pi} & n=4k+3\end{cases}$

$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac12}^{\frac12}dt=1$

$\therefore$ $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{(2n-1)\pi}\cos(2n-1)\pi t$

P2例4.

$f(x)=x(1-x).\quad x\in(0,1).$

正弦. 奇延拓, $g(x)=\begin{cases} x-x^2 & x\in(0,1) \\ x+x^2 & x\in(-1,0). \end{cases}$ $T=2,\ \pi=\omega$

$\therefore\ a_n\equiv 0$

$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega t$, ~~$b_n=\int$~~

$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\, dt=\int_{-1}^{0}(x+x^2)\sin(n\pi x)dx+\int_{0}^{1}(x-x^2)\sin(n\pi x)dx$

$=\cancel{\frac{\sin(\pi n)}{n^2\pi^2}}+\frac{4}{n^3\pi^3}-\frac{4\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}+=\begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{8}{n^3\pi^3} & n=2k+1. \end{cases}$

$\therefore\ f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3}\sin[(2n-1)\pi t],\quad t\in(0,1).$

余弦, 偶延拓. $g(x)=\begin{cases} x-x^2 & x\in(0,1) \\ -x-x^2 & x\in(-1,0) \end{cases}$ $T=2,\ \omega=\pi.$

$\therefore\ b_n\equiv 0$

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\omega nt$

$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos\omega nt\, dt=\begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi^2} & n=2k \\ 0 & n=2k+1 \end{cases}$

$\therefore\ \cancel{f(x)=}\ a_0=\int_{-1}^{1}\overset{f(x)}{\cancel{x-x^2}}\,dx=\frac{1}{3}$

$\therefore\ f(t)=\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\cancel{4}1}{\cancel{4}n^2\pi^2}\cos[(2n)\pi t]$