288,16

证明：令 $R_1<R_2$ ∴ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

~~∵ $R_1<R_2$，$x\in R_1$ ∴ $x\in R_2$. ∴ $\sum_0^\infty (a_n+b_n)x^n$ 收敛.~~

若 $x\in(-R_2,R_2)$ 且 $x\notin(-R_1,R_1)$ $\sum a_n x^n$ 不收敛，若 $x\notin(-R_2,R_2)$ 且 $x\notin(-R_1,R_1)$

均不收敛；若 $x\in(-R_1,R_1)$ 且，则 $x\in(-R_2,R_2)$ ∴ $\sum_0^\infty (a_n+b_n)x^n$ 收敛.

∴ $R=\min\{R_1,R_2\}$.

~~若 $R_1=R_2$，则 $R=R_1=R_2$~~ 令 $a_n=-b_n$ ∴ $R_1=R_2$ 但 $R=R'$，不成立.

288,18.

(2) 令 $S(x)=\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ∴原式 $=S(\frac{\pi}{4})$.

$S'(x)=\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}=\sum_0^\infty(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2}$ ∴ $S(x)=\arctan x$

∴原式 $=1$

(4) 原式 $=\sum_2^\infty \frac{1}{2^{n+1}(n-1)}-\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\frac14\sum_2^\infty\frac{1}{2^{n-1}(n-1)}-\sum_2^\infty\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\frac14\sum_1^\infty\frac{(\frac12)^n}{n}-\sum_3^\infty\frac{(\frac12)^n}{n}$

令 $S(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$ ∴原式 $=\frac14 S(\frac12)-S(\frac12)+\frac12+\frac18$

$S'(x)=\sum_1^\infty x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ ∴ $S(x)=-\ln(1-x)$，$S(\frac12)=\ln 2$

∴原式 $=\frac58-\frac34\ln 2$

288,19

(1) 令 $x^2=y$ ∴ $ye^y=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)}{n!}y^n=\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{n!}y^n=\sum_{n=0}^\infty\frac{y^n}{(n-1)!}$

∴ $x^2e^{x^2}=\sum_{n=1}^\infty\frac{x^{2n}}{(n-1)!}$ $R_n(x)=\frac{(\xi+n+1)e^{\xi}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\to 0$ ∴ $x\in R$.

(3) $\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{(x-1-2)(x-1+3)}=\frac{1}{(y-2)(y+3)}=\frac15\left(\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y+3}\right)$

$\frac{1}{y-2}=\sum_{n=0}^\infty\frac{f^{(n)}(0)}{n!}y^n=\sum_0^\infty-\frac{1}{2^{n+1}}y^n$. $R_n(y)=(-1)^n(\xi-2)^{-n-1}y^{n+1}$ $y\in(-\infty,2)$ ~~$y\in(-1,1)$~~.

$\frac{1}{y+3}=\sum_0^\infty(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}$. $R_n(y)=(-1)^n\frac{y^{n+1}}{(\xi+3)^{n+1}}$ ~~$y\in(-\frac32,+\infty)$~~ $y\in(-3,+\infty)$.

∴原式 $=-\frac15\sum_0^\infty\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$ $x\in(-2,3)$.

289.19

(5) $\ln(3x+2)(1-x) \quad x\in(-\frac{2}{3},1)$.

$= \ln 3x+2 + \ln 1-x. \quad \ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2}x+1 + \ln 1-x$

$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^{n-1}(\frac{3}{2}x)^n - x^n]$

$(\ln(\frac{3}{2}x+1))^{(n)} = (\frac{3}{2})^n(-1)^{n-1}(n-1)!(\frac{3}{2}x+1)^{-n}, \quad |\frac{3}{2}x|\le 1 \Rightarrow x\in(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$

$(\ln(-x+1))^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,(1-x)^{-n}$.

(7). $\sin[(2x-\pi)+\pi] = -\sin(2x-\pi) = -\sin y \quad y = 2x-\pi$.

$\sin y = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \therefore$ 原式 $= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-\pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$(\sin y)^{(n)} = \sin(y-\frac{n}{2}\pi). \quad \therefore y\in R$.