23.4

(1) $\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\2&3&3&1\\3&4&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-1&3\\0&-2&-2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&-1&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&2&-1\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times 2}$

$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&0&1&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[(r_1+3r_2)\times\frac{1}{2}]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\3&-3&5&-4&1\\2&-2&3&-2&6\\3&-3&4&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&-4&8&-8\\0&0&-3&6&0\\0&0&-5&10&-10\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_3\times(-\frac{1}{3})\\r_4\times(-\frac{1}{5})}]{r_2\times(-\frac{1}{4})}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&1&-2&0\\0&0&1&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3-r_4}\begin{pmatrix}1&-1&3&-4&3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{r_1-3r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&-3\\0&0&1&-2&2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}1&-1&0&2&0\\0&0&1&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\2&3&1&-3&-7\\2&-3&7&4&3\\3&-2&8&3&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&-7&7&8&11\\0&-8&8&9&12\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\times(-1)\\r_4\times(-1)}]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&1&-1&-1&-1\\0&7&-7&-8&-11\\0&8&-8&-9&-12\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_4-8r_2]{r_3-7r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&-1&-4\\0&0&0&-1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times -1]{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&-1&-1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&-6&-10&-18\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times(-1)\times\frac{1}{2}]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&3&5&9\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&3&5&9\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&0&-1&0\\0&1&2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_1+r_3]{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\1&-2&2&3\\0&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\1&-2&2&3\\0&2&-1&2\\0&1&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_4]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&-3&-1&0\\0&0&-3&-6\\0&1&1&4\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{r_3\leftrightarrow r_4\\r_2\times(-1)}]{\substack{r_3\times(-\frac{1}{3})\\r_1+r_3}}\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&3&1&0\\0&1&1&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{\cancel{r_3-r_4}}\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&3&1&0\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-3r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&0&1&-6\\0&1&0&2\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&6\\0&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_3]{\cancel{r_3-r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&6\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4\times(-\frac{1}{4})}\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4$

(7) $\begin{pmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&2\\2&3&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2-4r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_4-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

~~$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&2\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$~~

(8) $\begin{pmatrix}1&1&3\\-1&2&3\\1&3&7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{1}{2}]{r_2\times\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

24.5

(1) $\Rightarrow\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&-2&1&4\\3&6&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&4\\2&4&-1&6\\3&6&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&\cdots\\0&8&\cdots\\0&12&\cdots\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{8}]{r_3-\frac{3}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&4\\0&1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{7}{2}&-10\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\times\frac{2}{7}]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{4}&\frac{7}{2}\\0&1&-\frac{3}{8}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&-\frac{20}{7}\end{pmatrix}$

→ 有唯一解

(2) $\Rightarrow\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&2&1&4\\3&6&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\2&4&-1&6\\3&6&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&\cdots\\0&0&-3&\cdots\\0&0&-1&\cdots\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&4\\0&0&-3&-2\\0&0&0&-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$ 无解.

(3) $\Rightarrow\begin{pmatrix}2&4&-1&6\\1&2&1&3\\3&6&2&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\2&4&-1&6\\3&6&2&9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 无数个解.

(4) $\Rightarrow\begin{pmatrix}3&-2&1&-2\\6&-4&2&-5\\-9&6&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}3&-2&1&-2\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 无解.

(5) $\Rightarrow\begin{pmatrix}2&4&a\\3&6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&4&a\\0&0&5-\frac{3}{2}a\end{pmatrix}$ 当 $5-\frac{3}{2}a\neq 0$ 即 $a\neq\frac{10}{3}$ 时 无解

(6) $\Rightarrow\begin{pmatrix}3&a&3\\a&3&5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{a}{3}r_1}\begin{pmatrix}3&a&3\\0&3-\frac{a^2}{3}&5-a\end{pmatrix}$

~~① a=0时，无解 ② a≠0~~ $3-\frac{a^2}{3}=0$，$5-a\neq 0\Rightarrow a=\pm 3$.

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{m1}&-&-&a_{mn}\end{pmatrix}$

~~当 m=1 时~~

~~$A_1=(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n})$ 令第一个非0元为 a_{1r}~~

~~∴ 简化阶梯阵为 $A_1'=(0\ \cdots\ 1\ \frac{a_{1(r+1)}}{a_{1r}}\ \cdots\ \frac{a_{1n}}{a_{1r}})$ 唯一~~

令 m=k 时，假设成立（A_k' 唯一）

∴ m=k+1 时，A_{k+1} 一定能化为简化阶梯阵.

记简化后为 $A_{k+1}'=\begin{pmatrix}A_k'\\A_1\end{pmatrix}$

∵ A_k' 唯一，∴（除主元外全0的列）分布唯一，记有 t 列.

∴ ~~A₁中的元素分布唯一~~

∴ A_1 中有 t 个 0，分布于（除主元外全0列）记 A_1 中 s 个主元

$s\leq n-t$ ∴ s 个元分布唯一

A_1 中剩余 $(n-t-s)$ 个元素不为 1，不为 0

① $(A_1)_1-(A_1)_2=0$，则 A_{k+1}' 唯一，得证.

② $(A_1)_1-(A_1)_2\neq 0$，将 A_1 赋予一条线性关系，记 a_1

$(a_1)_1\neq(a_1)_2$ ∴ $(a_1)_1$ 与 $(a_1)_2$ 各自的变量关系不同；但对于 A_1，

只有一种关系 ∴矛盾 ∴→

综上，唯一

?

真不会了，老师救命