287.12

(1) $|a_{n+1}|=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ $|a_n|=\frac{\ln n}{n}$ $a_n-a_{n+1}\geq 0$, $a_n>0$

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ∴收敛. $|a_n|>\frac{1}{n}$ ∴$\sum|a_n|$发散 ∴条件收敛.

(3) $|a_{n+1}|=\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$ $|a_n|-|a_{n+1}|=\frac{1}{2^{n+1}}(n^3-3n^2-3n-1)$

∴ $\exists N_1\in Z^+$, 当$n\geq N_1$时. $|a_n|-|a_{n+1}|\geq 0$. $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\exists N_2\in Z^+$, 当$n\geq N_2$时. $n^3-2^{\frac{n}{2}}\leq 0$ (易证) ∴ $|a_n|\leq\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n}=2^{-\frac{n}{2}}$, 收.

∴绝对收敛.

(5) $|a_{n+1}|=\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}$ $|a_n|-|a_{n+1}|=\frac{1}{2n+2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\geq 0$, $a_n\geq 0$

~~$\lim_{n\to\infty}|a_n|$~~ $\lim_{n\to\infty} a_n^2=\frac{(2n+1)!!}{[(2n+2)!!]^2}$ 令 $y=\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}<1$

∴ ~~$|a_n|\cdot y$~~ $\leq y=|a_n|\cdot\frac{2n+2}{2n+1}>|a_n|$ ∴ $|a_n|\cdot y\geq a_n^2\geq 0$

$|a_n|\cdot y=\frac{1}{2n+3}\to 0$ ∴ $\lim_{n\to\infty} a_n^2=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n=0$

~~$|a_n|<\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$~~ $|a_n|>\frac{1}{2n}$ 发散 ∴条件收敛.

287.13

(1) $\frac{1-3n}{3+4n}=\left[-\frac{3}{4}+\frac{13}{4}\left(\frac{1}{3+4n}\right)\right]^n$ $=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left(-\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{13}{4}\frac{1}{3+4n}\right)^{n-k}$

$\exists N\in Z^+$, 当$n>N$时, 原式 $=\left(-\frac{3}{4}\right)^n$.

∴绝对收敛.

(2) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n-\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\ ?\ 0\Rightarrow$ ~~$(n)^n(n+2)^n\cdot(n+2)\ ?\ (n+1)^{2n+1}\cdot(n+1)$~~

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}=e^{-1}\neq 0$ ∴发散.

(4) ~~$\exists N\in Z^+$, $n>N$时. $\lim_{n\to\infty} n\pi+\frac{1}{\ln n}=n+1$~~ $\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})=(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

~~$\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$ 不收敛 ∴ 不发散~~ ∴条件收敛.

(5) ~~同理, 发散~~ $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ ∴条件收敛.

(7) 取 ~~$n=\pi$~~ $n=\pi k$ ∴ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}\sim\frac{1}{n}$ ∴发散.

289.1

~~$\sum a_n \le \sum c_n \le \sum b_n$~~

$0 \le b_n - c_n \le b_n - a_n$，$\sum(b_n - a_n)$ 收敛 ∴ $\sum(b_n - c_n)$ 收敛.

$\sum b_n - c_n = \sum b_n - \sum c_n$ ∴ $\sum c_n$ 收敛.

290.3

~~由于~~ $\lim_{n\to\infty}$ 原式 $=$ ~~原~~ $e^{\ln \lim_{n\to\infty} \text{原式}}$

$\ln \lim_{n\to\infty}$ 原式 $= \lim_{n\to\infty} \ln$ 原式 $= \lim_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{1\cdot 2}) + \ln(1+\frac{1}{2\cdot 3}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n(n+1)})$

~~$\exists N \in Z^+$，当 $n > N$ 时~~ 由 $\ln(1+\frac{1}{n(n+1)}) < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

∴ 有 $\ln \lim_{n\to\infty}$ 原式 $\le \frac{n}{n+1}$ ∴ ~~又~~ $\lim_{n\to\infty}$ 原式 $\le e^{\frac{n}{n+1}} = e$

又 ∵ $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{n(n+1)}) > \prod_{k=1}^{n-1}(1+\frac{1}{n(n+1)})$ 单增有界 ∴ 收敛

290.4

即则证 $\sum \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 收敛

$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$0 < \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} < \frac{|a_n|}{n} \le \frac{1}{2}(a_n^2 + \frac{1}{n^2})$ ∴ $\sum \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} \le \frac{1}{2}(\sum a_n^2 + \sum \frac{1}{n^2})$

∴ 收敛.

290.7

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad \xi \in U(0)$

又 ∵ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ ∴ $f(0) = 0$ ∴ $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) + \frac{1}{2}f''(\xi)x \Rightarrow f'(0) = 0$

∴ $f(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi \in U(0)$．又 ∵ $f''(x) \in C(U(0))$

∴ $\exists\ |f''(x)_{max}| = M \in R$，$x \in [0,1]$ ∴ $f(x) \le \frac{1}{2}Mx^2$ ($M \ne \infty$)

$f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{2}M\frac{1}{n^2}$ ∴ $\sum f(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{2}M\sum\frac{1}{n^2}$ ∴ 收敛.