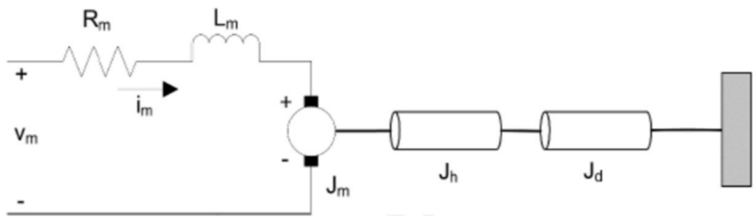
自控实验预习报告

1 建模

1.1 公式推导

如图的电机



如果认为电感远小于电阻，得到

$$V_m(t) - R_m i_m(t) - e_b(t) = 0$$

其中$e_b(t) = K_e w_m(t)$是电机的电压，右边是反电动势常数和电机转速，带入对上式进行$Laplace$变换，得到

$$I_m(s) = \frac{V_m(s) - K_e W_m(s)}{R_m} \tag{1-1}$$

又知电机的转速与负载质量和输出扭矩的关系是

$$J_{eq}\dot{w}_m(t) = K_t i_m(t) \Rightarrow J_{eq} s W_m(s) = K_t I_m(s) \tag{1-2}$$
$$J_{eq} = J_m + J_h + J_d, \quad J = \frac{1}{2}mr^2$$

联立式(1-1)和(1-2)得到转速关于电压的传递函数

$$\frac{W_m(s)}{V_m(s)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{\frac{J_{eq}R_m}{K_eK_t}s + 1} \tag{1-3}$$

若输入电压为阶跃信号，即$V(t) = Au(t)$，得到转速的阶跃响应

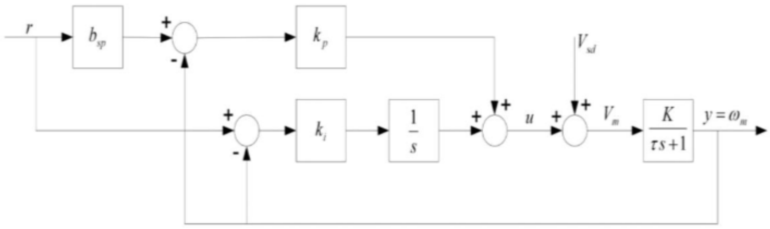
$$W_m(s) = \frac{A}{K_e} \cdot \frac{1}{s} - \frac{A}{K_e} \cdot \frac{1}{s + \frac{K_eK_t}{J_{eq}R_m}} \tag{1-4}$$

$$w_m(t) = \frac{A}{K_e}u(t) - \frac{A}{K_e}e^{-\frac{K_eK_t}{J_{eq}R_m}t}u(t) \tag{1-5}$$

2 比例积分速度控制

2.1 公式推导

系统框图如下图



在无扰动条件下，即$V_{sd}=0$时，系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{W_m(s)}{R(s)}=K\cdot\frac{(b_{sp}k_ps+k_i)}{\tau s^2+(Kk_p+1)s+Kk_i} \tag{2-1}$$

使用梅逊公式，该系统的前向通路是

$$P_1=b_{sp}k_p\frac{K}{\tau s+1}\ \ ,\ \ P_2=k_i\frac{1}{s}\frac{K}{\tau s+1}$$

回路是

$$L_1=-k_p\frac{K}{\tau s+1}\ \ ,\ \ L_2=-k_i\frac{1}{s}\frac{K}{\tau s+1}$$

二者相互接触，且分别和P_1,P_2接触，那么Δ为

$$\Delta=1+k_p\frac{K}{\tau s+1}+k_i\frac{1}{s}\frac{K}{\tau s+1}$$
$$\Delta_1=\Delta_2=1$$

系统的传递函数为$\frac{W_m(s)}{R(s)}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}$，带入即可

对于这个二阶系统，刻画系统的数学量为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{Kk_i}{\tau}} \tag{2-2}$$

$$\zeta=\frac{Kk_p+1}{2\sqrt{Kk_i\tau}} \tag{2-3}$$

2.2 实验练习

> 改变k_p变化产生的性能差异

当k_p减小时，比例控制的作用减小，系统的响应速度变慢，但是振荡会减小，超调量更小，稳定性提高；当其增大时变化相反，系统的振荡和超调量更大，但是响应更快，稳定性不太好说，应该是降低的。

> 计算当$\zeta=0.75,\omega_0=16.0$rad/s时的峰值时间t_p和最大过调量M_p

峰值时间$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}=0.297$s

最大过调量$M_p=e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}}\times100\%=e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times100\%=2.84\%$

> 稳态增益$K=26\text{rad}/\text{V}/\text{s}$，时间常数$\tau=0.145\text{s}$，在满足上题的指标下，计算比例和微分控制增益$k_p,k_i$

$\omega_n=\sqrt{\frac{Kk_i}{\tau}},\zeta=\frac{Kk_p+1}{2\sqrt{Kk_i\tau}}$，带入得到$k_i=1.43\text{V}/\text{rad},k_p=0.0955\text{V}\cdot\text{s}/\text{rad}$

> 增加ζ对实测的速度响应有什么影响？控制增益怎么样？

当ζ增大时，上升时间**变大**，峰值时间**不变**，最大过调量**减小**，调整时间**减小。**

响应速度变慢，但是系统变得稳定。**控制增益k_p变大，k_i不变。**

> 增加ω_n对实测的速度响应有什么影响？控制增益怎么样？

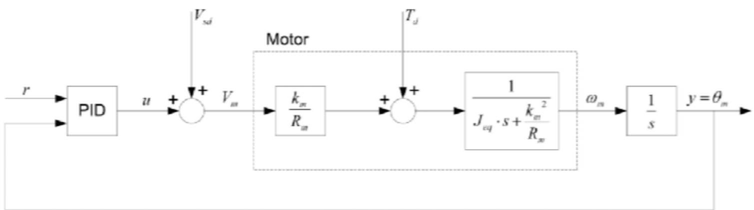
当ω_n增大时，上升时间**减小**，峰值时间**减小**，最大过调量**不变**，调整时间**减小。**

响应速度变快。控制增益k_p增大，k_i增大。

3 比例微分速度控制

3.1 公式推导

系统框图如下



只考虑PD控制的作用下

$$U(s)=PID(R(s),Y(s))=k_p\left(b_{sp}R(s)-Y(s)\right)+k_d s(b_{sd}R(s)-Y(s))$$

在无扰动的条件下，即$V_{sd}=0,T_d=0$时，系统的传递函数为

$$H(s)=\frac{\Theta_m(s)}{R(s)}=\frac{k_m(k_p b_{sp}+k_d b_{sd}s)}{R_m J_{eq}s^2+(k_m k_d+k_m^2)s+k_m k_p}\quad(3\text{-}1)$$

其中$\tau=\frac{R_m J_{eq}}{k_m^2},K=\frac{1}{k_m}$

相应的刻画系统特征的数学量为

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_m k_p}{R_m J_{eq}}}\quad(3\text{-}2)$$

$$\zeta=\frac{k_m k_d+k_m^2}{2\sqrt{R_m J_{eq}k_m k_p}}\quad(3\text{-}3)$$

3.2 实验练习

> 计算当$\zeta = 0.60, \omega_0 = 25.0\text{rad}/\text{s}$时的峰值时间$t_p$和最大过调量$M_p$

峰值时间$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.157\text{s}$

最大过调量$M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} \times 100\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 9.49\%$

> 稳态增益$K = 26\text{V}/\text{rad}$，时间常数$\tau = 0.145\text{s}$，在满足上题的指标下，计算比例和微分控制增益$k_p, k_d$

$\omega_n = \sqrt{\frac{Kk_p}{\tau}}, \zeta = \frac{k_d + 1/K}{2\sqrt{\frac{\tau k_p}{K}}}$，带入得到$k_p = 3.49\text{rad}/\text{s}/\text{V}, k_d = 0.129\text{rad}/\text{V}$

> 更改ζ对测量的位置响应和产生的控制增益有什么影响

更改ζ会对响应曲线的形状产生显著的影响，这里假定$\zeta < 1$。当ζ减小时，上升时间**减小**，峰值时间**不变**，最大过调量**增大**，调整时间**增大**；当ζ大于1时，系统变成过阻尼，响应太慢，一般不会在这个区间内。

对于位置响应，响应**变快**，但是**更不稳定**；对于控制增益，k_p**增加，**k_d**减小**。这是在ζ减小的情况下而言的。

> 更改ω_n对测量的位置响应和产生的控制增益有什么影响

更改ω_n也会对响应曲线造成影响，当ω_n减小时，上升时间**增大**，峰值时间**增大**，最大过调量**不变**，调整时间**增大**。

对于位置响应，响应**变慢**，但是**变得稳定**；对于控制增益，k_p**减小，**k_d**不变**。这是在ω_n减小的情况下而言的。

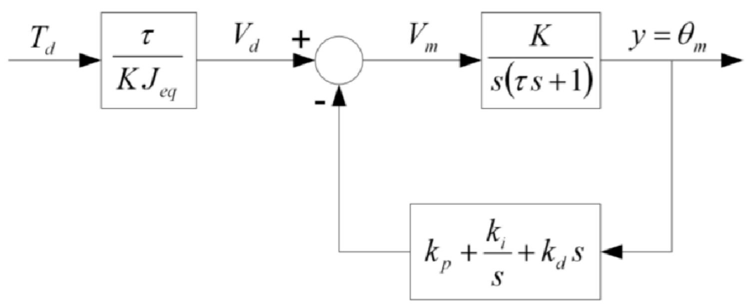
> 设置$k_p = 1.5\text{V}/\text{rad}$，仅用比例增益，描述系统对阶跃输入的稳态误差

$R(s) = \frac{1}{s}, k_d = 0$，利用终值定理得到$y_s(\infty) = 1$，稳态误差为0

4 跟踪和扰动抑制

4.1 公式推导

当存在扰动时的系统框图如下



在无参考输入、存在误差的情况下，即$U(s)=0, V_d, T_d \neq 0$，系统的传递函数为

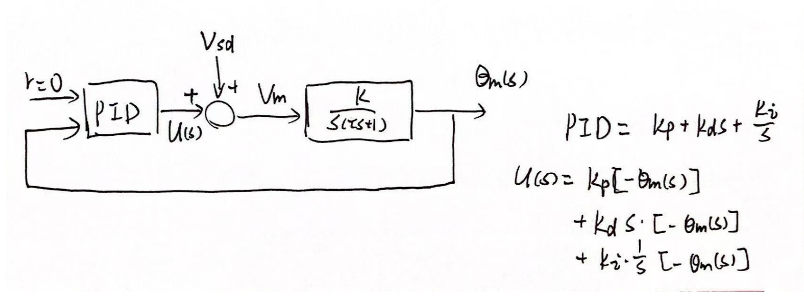
$$H(s)=\frac{\Theta_m(s)}{T_d(s)}=\frac{\tau}{J_{eq}}\cdot\frac{s}{\tau s^3+(Kk_d+1)s^2+Kk_p s+Kk_i} \tag{4-1}$$

当外界扰动近似为阶跃输入，即$T_d(s)=\frac{A}{s}$时，系统的稳态输出为

$$\theta_s(\infty)=\lim_{s\to 0} sH(s)T_d(s)=0 \tag{4-2}$$

4.2 实验练习

> 没有参考信号，扰动是模拟扰动电压V_{sd}，给出整个系统的框图



此时的闭环传递函数为

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_{sd}(s)}=\frac{Ks}{\tau s^3+(Kk_d+1)s^2+Kk_p s+Kk_i}$$

当在PID控制下，电机的稳态转角为0，在PD控制下，电机的稳态转角为$\frac{V_{sd0}}{k_p}=1.5$rad

> 解释积分作用下扰动响应差异

积分器为系统引入了一个$z=0$的开环零点，消除了主导极点的作用