211.28

(2) $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x+1)^n+o(x^n)$

$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ $\therefore f^{(n)}(-1)=-n!$

$\therefore f(x)=-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+o(x^n)$

(4) $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n+o(x^n)$

$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{3}{2}-n)\cdot\frac{1}{x^{-\frac{1}{2}+n}}=(\frac{1}{2})^n(-1)^{n-1}(2n-3)!!\ \frac{2}{4^n}$

$=\cancel{(\frac{\quad}{2})^{n-1}(2n-3)!!\cdot(2n-2)}\ \frac{1}{2^{3n-1}}(-1)^{n-1}(2n-3)!!$

$\therefore f(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\cdots+\frac{(2n-3)!!}{(2^{3n-1})(-1)^{n-1}n!}(x-4)^n+o((x-4)^n)$

(5) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f(x)=0+x+\frac{8\xi^2-2(1+\xi^2)}{(1+\xi^2)^3\cdot 6}x^3$ $\xi\in(0,x)$.

211.29

$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $f^{(n)}(x)=\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)x^{\frac{1}{3}-n}$

$\therefore\left|\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdots(\frac{1}{3}-n+1)\xi^{\frac{1}{3}-n}}{n!}(x-27)^n\right|<0.001$ 时. $\xi\in(27,30)$.

~~x=30时. n~~

在27处展开

$f(x)=3+\frac{1}{3}(x-27)\times\frac{1}{9}-\frac{1}{9}(x-27)^2\times\frac{1}{3^5}+\frac{5}{81}(x-27)^3\times\frac{1}{3^8}$

$x=30$时 余式 $=\left|\frac{1}{n!}((1-0\times3)(1-1\times3)\cdots(1-3n+3))\xi^{n}\right|<0.001$

$n=4$ $\therefore f(30)\approx 3.107$

211.30

(1) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\frac{x^2}{2})(x-\frac{x^3}{6})+o(x^3)-x-x^2}{x^3}=\frac{1}{3}$.

(2) ~~$\lim_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]=x(1-x\ln(1+\frac{1}{x}))=x(1-x($~~

$=\frac{1-x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\cancel{\frac{1-x(\ln(1+x)-\ln x)}{\frac{1}{x}}}=\cancel{\frac{1}{\frac{1}{x}}(1-x(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}$

$-0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\cdots)$

$=$

211.30

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$

$\ln(1+\frac{1}{x}) \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \ln(1+t)$.

$\ln(1+t)=0+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3-\cdots+(-1)^{n}\frac{t^n}{n}$.

$\ln(1+\frac{1}{x})=0+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2(0+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-x\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}=x\left(\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}\right)$

$\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \sqrt[5]{1+t}=(1+t)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}t-\frac{4}{25}t^2+\frac{36}{125}t^3-\cdots$

$\therefore \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{5x}-\frac{4}{25x^2}+\frac{36}{125x^3}+o(\frac{1}{x^3})$

$\sqrt[5]{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{5x}-\frac{4}{25x^2}-\frac{36}{125x^3}+o(\frac{1}{x^3})$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}$ 原式 $=x\left(\frac{2}{5x}\right)=\frac{2}{5}$

211.31.

~~$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=0 \quad \frac{\cos x+}{3x^2}$~~

$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+xf(0)+x^2f'(0)+x^3\frac{f''(0)}{2}+o(x^3)}{x^3}=0$

$\therefore f(0)=-1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=\frac{1}{3}$

~~211.~~

211.32.

$f(x) = f(\frac{b+a}{2}) + f'(\frac{b+a}{2})(x-\frac{b+a}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{b+a}{2})^2$

$\cancel{\therefore f(b) = f(\frac{b+a}{2}) + f'(\frac{b+a}{2})(\frac{b-a}{2}) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}}$ ①

$\cancel{f(a) = f(\frac{b+a}{2}) + f'(\frac{b+a}{2})(\frac{a-b}{2}) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}}$ ②

~~①+②~~ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2$ ①

$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2$ ②

取 $x = \frac{b+a}{2}$

$\therefore f(\frac{b+a}{2}) = f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$ ①

$f(\frac{b+a}{2}) = f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\frac{(b-a)^2}{4}$ ②

$\therefore$ ①−②得 $f(a) - f(b) = \frac{(b-a)^2}{4}(\frac{f''(\xi_1)}{2} - \frac{f''(\xi_2)}{2})$

$\therefore |f(a)-f(b)| = \frac{(b-a)^2}{4}|\frac{f''(\xi_1)}{2} - \frac{f''(\xi_2)}{2}| \le \frac{(b-a)^2}{4}(|\frac{f''(\xi_1)}{2}| + |\frac{f''(\xi_2)}{2}|)$.

取 $|\frac{f''(\xi)}{2}| = \max\{|\frac{f''(\xi_1)}{2}|, |\frac{f''(\xi_2)}{2}|\}$.

$\therefore |f''(\xi)| \ge \frac{4}{(b-a)^2}|f(a)-f(b)|$

211.33.

将 $f(x+h)$ 在 x 处展开.

$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2 = f(x) + hf'(x+\theta h)$

$\therefore \frac{f''(x+\theta h)}{2}h^2 = h(f'(x+\theta h) - f'(x))$

$\therefore f''(x+\theta h) = \frac{f'(x+\theta h) - f'(x)}{\frac{h}{2}} = \frac{f'(x+\theta h) - f'(x)}{\theta h}$.

$\therefore \lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{2}$.

x	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$
y'	+	0	−
y	↗	极小	↘

211.34.

(2) $y' = 4x - \frac{1}{x} = 2x(2 - \frac{1}{2x^2})$. $\therefore y$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ ↑, 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ↓.

(3) $y' = 1 - 2\cos x$ $\therefore y$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5}{3}\pi, 2\pi)$ ↓, 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi)$ ↑

x	$(0, \frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi)$	$\frac{5}{3}\pi$	$(\frac{5}{3}\pi, 2\pi)$
y'	−	0	+	0	−
y	↘	极小	↗	极大	↘

211.35

(1) 令 $f(x)=e^x-x-1$ ∴ $f'(x)=e^x-1$ ∴ $f'(x)>0$ 时 $x>0$，$f'(x)<0$ 时 $x<0$

∴

x	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

∴ $f(x)_{min}=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ∴ $e^x>x+1$

(3) 令 $f(x)=\sin x+\tan x-2x$ ∴ $f'(x)=\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2 \overset{u=\cos x}{=\!=} u+\frac{1}{u^2}-2>0$

在 $u\in(0,1)$ 上恒成立. ∴ $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上↑ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ ∴ $\sin x+\tan x>2x$

(4) 即证 $(1+x)\ln(1+x)\geq \arctan x$. 令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$ $(x\geq0)$

∴ $f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}$ ∴ ~~$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上~~

∴ ~~$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x(x+1)}{(\sqrt{1-x^2})(1+x)}=\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x}-x\sqrt{x+1})$~~

∴ ~~$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}x}{1-x^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+x(x+1)}{\cdots}>0$~~

$f''(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{(1+x^2)^2}>0$ ∴ $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↑，$f'(0)=0$ ∴ $f'(x)\geq0$

∴ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ ↑ $f(0)=0$ ∴ ———

(5). 即 $x^2e^{\frac{1}{x}-x}>1$ 即 $x^2>e^{x-\frac{1}{x}}$ 即 $x^2-e^{x-\frac{1}{x}}>0$

令 $f(x)=x^2-e^{x-\frac{1}{x}}$ ∴ $f'(x)=2x-(1+\frac{1}{x^2})e^{x-\frac{1}{x}}$ ↗ $f'(1)=0$.

∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ ↓ ∴ $f(x)>f(1)=0$ ∴ ———

211.31.

$$\cancel{\varphi'(x)=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \quad 令\ g(x)=xf'(x)-f(x)}$$

~~在 $(0,+\infty)$ 上取 $\forall 0<x_1<x_2$~~

$$\therefore \cancel{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)=\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1x_2}}$$

$$\varphi'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \quad 令\ g(x)=xf'(x)-f(x) \quad \therefore g(0)=0$$

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi) \quad \xi\in(0,x).$$
$$<f'(x).$$

$$\therefore \varphi'(x)=\frac{f'(x)-\frac{f(x)}{x}}{x}=\frac{f'(x)-\varphi(x)}{x}>\frac{f'(x)-f'(x)}{x}=0$$

$\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $\uparrow$

211.37.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1-x}=x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x=0=f(0)$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{1-x}=\frac{\ln x+1}{-1}=-1-\ln x=-1=f(1)$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $D(f)$ 上连续.

$x\in(0,1)$ 时, $f'(x)=\frac{(\ln x+1)(1-x)+x\ln x}{(1-x)^2}=\frac{\ln x+1-x}{(x-1)^2}<0.$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上 $\downarrow$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=\frac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}=-\frac{\ln x}{2x-2}=-\frac{\frac{1}{x}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $f'(1)=-\frac{1}{2}$

212、38

(2) $y=[x(a-x)]^2$ 无间断点.   极小值 $y=0$, 极大值 $y=\frac{a^4}{16}$

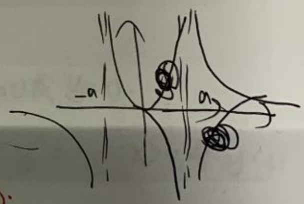
∴ $y'=2x(a-x)^2-2(a-x)x^2=2x^3-4ax^2+2xa^2-2x^2a+2x^3$

$=4x^3-6ax^2+2xa^2=4(x-\frac{a}{2})x(x-a)$.

∴

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},a)$	a	$(a,+\infty)$
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘	极小	↗	极大	↘	极小	↗

(4) $y=(x^2-a^2)^{\frac{2}{3}}$



∴ $y'=\frac{2}{3}(x^2-a^2)^{-\frac{1}{3}}2x=\frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-a^2}}$.

∴ $x=0$ 是极大值点.

$y=a^{\frac{4}{3}}$ 极大值   极小值 $y(\pm a)=0$.

212、39

(2) $y'=\frac{-20\sin x\cos x}{(1+\sin^2x)^2}=-\frac{10\sin 2x}{(1+\sin^2x)^2}$ $y'=0$ 时 ∴ $\sin 2x=0$ ∴ $2x=2\pi k$ $k\in Z$

$2x=2\pi k+\pi$.

∴ $x=\pi k$ $(k\in Z)$ 是 y 的驻点.
$\pi k+\frac{\pi}{2}$

$y''=-10\frac{2\cos2x(1+\sin^2x)^2-2\sin2x(1+\sin^2x)\cdot}{(1+\sin^2x)^4}$ $=2\frac{\sin^2 2x-\cos 2x(1+\sin^2x)}{(1+\sin^2x)^3}$

$y''|_{x=\pi k}=2\frac{-2}{\ }<0$ $=2\frac{\cancel{\sin^2 2x-\cos 2x}}{\cancel{(1+\sin^2x)^3}}$

∴ $x=\pi k$ $(k\in Z)$ 为极大值点. $y(\pi k)=10$.

$\pi k+\frac{\pi}{2}$ 为极小值点. $y(\pi k+\frac{\pi}{2})=5$.

212.39

(3) $y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$y'' = -e^{-x} - e^{-x}(1-x) = -(2-x)e^{-x}$ ∴ $y''|_{x=1} = -e^{-1} < 0$

∴ $x=1$ 为极大值点，$y(1) = \frac{1}{e}$

212.40

$x^2y^2 + y = 1$ 两边求导。

∴ $2xy^2 + 2x^2yy' + y' = 0$.

∴ $y' = \frac{-2xy^2}{2x^2y+1} = 0$ 时. ∴ $-2xy^2 = 0$ ∴ $x=0$ 或 $y=0$.

又∵ $y \neq 0$ ∴ $x=0$. $y(0) = 1$. $x<0$ 时 $y'>0$，$x>0$ 时 $y'<0$

∴ $y(0) = 1$ 是极大值.

212.41

$$f'(x) = \begin{cases} 2(\ln x+1)x^{2x} & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x^{2x}-1}{x} = \frac{2x\ln x}{x} = 2\ln x = -\infty$$

$f'(x)=0$ 时. $x = \frac{1}{e}$，$x<\frac{1}{e}$ 时. $f'(x)<0$，$x>\frac{1}{e}$ 时 $f'(x)>0$

∴ $f(\frac{1}{e}) = (\frac{1}{e})^{\frac{2}{e}}$ 是极小值.

极大值 $y(0)=1$.　　注意导数不存在的点.

212.42

$\because \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} 1-e^{-x^2}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1-e^{-x^2}}{x} = \frac{x^2}{x} = x = 0$

$\therefore f'(0) = 0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) > 0$, $\lim_{x\to 0^-} f'(x) < 0$

$\cancel{\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}}$ $\therefore f(0)$是极小值.

212.43

(2) 易得 y 在 $[0,4]$ 上↗ $\quad y_{min} = y(0) = 0$, $y_{max} = y(4) = 8$

(4) ~~易得 y 在~~ $y' = 2x + \frac{54}{x^2} = \frac{54+2x^3}{x^2} = \frac{2}{x^2}(27+x^3)$.

$\therefore y'|_{x=-3} = 0$.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,0)$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	极小	↗

$\therefore y_{min} = y(-3) = 27$

无最大值.

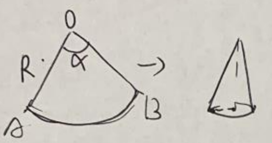
(5) ~~y=~~ 令 $f(x) = 4x^3 - 18x + 27$ $\therefore f'(x) = 12x^2 - 18 = 6(2x^2-3)$

$\therefore f'(x)$在 $[0,\sqrt{\frac{3}{2}}] \leq 0$, 在$[\sqrt{\frac{3}{2}}, 2]$上≥ 0

$\therefore f(0) = 27$, $f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 27-6\sqrt{6}$, $f(2) = 23$.

$\therefore y_{max} = 27$ $\quad y_{min} = 27-6\sqrt{6}$

212.45



$\overset{\frown}{AB} = R \cdot \alpha = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{R}{2\pi}\alpha$

$h^2 + r^2 = R^2 \Rightarrow \cancel{R^2}\ h^2 = R^2 - r^2$

$\therefore V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi r^2 \Rightarrow V^2 = \frac{\pi^2}{9}(R^2 - r^2) r^4$

令 $f(r) = r^4(R^2 - r^2)$

$\therefore f'(r) = 4R^2 r^3 - 6r^5 = 2r^3(2R^2 - 3r^2) \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

$\therefore \alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

212.46

令 $A(x_0, e^{x_0})$ $\therefore AB = \cancel{2}\, e^{x_0}$ $\therefore CD = \frac{e^{x_0}}{2} = e^{-2x'} \Rightarrow x_0 - \ln 2 = -2x'$

$D(x', e^{-2x'})$ $\therefore S = \frac{1}{2}|x_0 - x'| \cdot (e^{x_0} + e^{-2x'})$

$= \frac{1}{2}|x_0 - x'| \cdot \frac{3}{2}e^{x_0} = \frac{3}{4}e^{x_0}\frac{\ln 2 - 3x_0}{2}$

$= \frac{3}{8}e^{x_0}(\ln 2 - 3x_0)$

令 $f(x) = e^{x_0}(\ln 2 - 3x_0)$

$\therefore f'(x) = e^x(\ln 2 - 3x - 3)$ $\therefore x = \frac{\ln 2 - 3}{3}$

$\therefore x_B = \frac{\ln 2 - 3}{3}$ $\quad x_C = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{2}$

213.49

(2) $y'=\frac{3x^2(x^2+3a^2)-2x^4}{(x^2+3a^2)^2}=\frac{x^4+9x^2a^2}{(x^2+3a^2)^2}$

$y''=\frac{6xa^2(9a^2-x^2)}{(x^2+3a^2)^3}$ ∴ $y''|_{x=\pm 3a,0}=0$

$(-3a,0)$ 0, $(0,3a)$.

由

x	$(-\infty,-3a)$	$-3a$	$(-3a,3a)$	$3a$	$(3a,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	∩↑	拐点	∪↑	拐点	∩↑

$(-3a,0)$. $(0,3a)$, $(-\infty,-3a)$

∴在 $\cancel{(-\infty,-3a)}$, $(3a,+\infty)$ 上凸, 在 $\cancel{(-3a,3a)}$ 下凸

$(-3a, f(-3a))$, $(3a, f(3a))$ 是拐点. $(0,0)$

(3) $y'=\frac{2x}{x^2+1}$ $y''=\frac{2}{(x^2+1)^2}(1-x^2)$ ∴ $y''|_{x=\pm1}=0$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	∩↓	拐点	0 极值点 ∪↑∩	拐点	∩↑

∴在 $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$ 上凸, 在 $(-1,1)$ 下凸

$(-1,f(-1))$, $(1,f(1))$ 是拐点.

213.50.

$y'=3ax^2+2bx+c$ $y''=6ax+2b$ ∴ $y''|_{x=1}=0$, $y|_{x=1}=2$

$y'|_{x=1}=-1$ ∴ $\begin{cases}6a+2b=0\\3a+2b+c=-1\\a+b+c=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=-9\\c=8\end{cases}$

213.51.

$y'=\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$ ∴ $y''=\frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$

∴ $x_1=1$, $x_2=-2-\sqrt3$, $x_3=\sqrt3-2$.

$f(x_1)=1$, $f(x_2)=-\frac{1+\sqrt3}{8+4\sqrt3}$ $f(x_3)=\frac{\sqrt3-1}{8-4\sqrt3}$ ∴ $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}$

∴ — —

213.53

(1) ~~$x^p+(1-x)^p \geq 2\sqrt{x(1-x)}$~~ 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$.

$\therefore f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=p\left(x^{p-1}-(1-x)^{p-1}\right)$

$\therefore f''(x)=p\left((p-1)x^{p-2}+(p-1)(1-x)^{p-2}\right)=p(p-1)\left(x^{p-2}+(1-x)^{p-2}\right)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上下凸 又 $\because f'(\frac{1}{2})=0$ $\therefore$ ~~$f'(x)>0$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 单增~~

$\therefore f(x)_{min}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^{p-1}}$ $\therefore x^p+(1-x)^p \geq (\frac{1}{2})^{p-1}$

(3) $\frac{1}{2}(e^x+e^y)>\frac{1}{2}\times 2\sqrt{e^{x+y}}=e^{\frac{x+y}{2}}$ $\therefore \frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$ 得证

$f(x)=e^x$ $f''(x)=e^x>0$ $\therefore f(x)$ 严格下凸 $\therefore f(\frac{x+y}{2})<\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$ $\therefore$ 得证

213.54

(2) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$ $x\neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} y=+\infty$ $\therefore x=0$ 是铅直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x^2}}-x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0$

$\therefore y=x$ 是水平渐近线

(4) $\because D(y)=R$ $\therefore$ 无铅直……, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\arctan\frac{x}{2}}{x}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\arctan\frac{x}{2}-2x=\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\arctan\frac{x}{2}-2x=-\frac{\pi}{2}$.

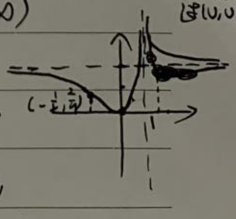
$\therefore y=2x+\frac{\pi}{2}$ $(x>0)$, $y=2x-\frac{\pi}{2}$ $(x<0)$.

213.55

(2). $D(y)=R-\{1\}$. $y'=$ ~~$\frac{\ }{(1-x)^4}$~~ $\frac{-4x}{(x-1)^3}$. $y''=\frac{4(x-1)^2(2x+1)}{(x-1)^6}=\frac{4(2x+1)}{(x-1)^4}$.

y', y'' 不存在时. $x=1$, $y'=0$ 时 $x=0$, $y''=0$ 时 $x=-\frac{1}{2}$. $f(x)$ 是非奇非偶 无周期 过 $(0,0)$.

x	$(-\infty,-\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	不存在	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	不存在	$+$
y	$\cap\downarrow$	拐点	$\cup\downarrow$	极小值	$\cup\uparrow$	$+\infty$	$\cup\downarrow$



拐点: $(-\frac{1}{2},\frac{2}{9})$ 极小值 $(0,0)$, 渐近线 $x=1$, $y=2$.

(3) $y=\begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x} & x\geq 0 \\ -\dfrac{x^2}{1+x} & x<0 \end{cases}$ $D(y)=R-\{-1\}$ 非奇非偶，无周期. $f(0)=0$

$y'=\begin{cases} \cancel{\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}}\ \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} & x\geq 0 \\ -\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2} & x<0 \\ \cancel{0} & \cancel{x=0} \end{cases}$ $y''=\begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3} & x>0 \\ -\dfrac{2}{(x+1)^3} & x<0 \\ 不存在 & x=0 \end{cases}$

$y'=0$ 时. ~~得~~ $x=0$ 或 $x=-2$， $y''=0$ 时无.

y'，~~时~~不存在时 $x=-1$ ， y'' 不存在时. $x=-1$，$x=0$

~~x (-∞, -1) -1 (-1, 0) 0 (0, +~~

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	+	+	+	无	−	无	+
y'	−	0	+	无	+	0	+
y	∪↓	极小值	∪↑	~~拐点~~	∩↑	拐点	∪↑

$x\to -1$ 时 $f(x)\to\infty$ ∴ $x=-1$ 是铅直渐近线.

$f(-2)=4$ 极小 ；拐点 $(0,0)$ $y=x-1$ $(x>0)$.

$y=-x+1$ $(x<0)$.