1 王君豪

随堂测验 2

一、填空题

1. 信号 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$，则 $x(n)=$ $\cos\omega_0 n$。

2. 序列 $x(n)$ 的 DTFT 为 $X(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|<\pi\end{cases}$，则 $x(n)=$ $\begin{cases}\dfrac{\sin\omega_c n}{\pi n} & (n\neq 0)\\ \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=0.\end{cases}$。

3. 长度为 $N=2M+1$ 的窗函数表达式 $w(n)=\begin{cases}1, & -M\le n\le M\\ 0, & 其他\end{cases}$，其离散时间傅里叶变换 (DTFT) $W(\omega)=$ $\cancel{\dfrac{2\sin\omega M}{\omega}}$ $\dfrac{\sin(\omega M+\frac{\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$，其频谱主瓣宽度 $\Delta=$ $\dfrac{4\pi}{2M+1}$（第一个零点频率的 2 倍）。

4. 系统函数为 $H(z)=\frac{1}{1-0.8z^{-1}}$ 的系统的幅度响应为 $|H(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{1.64-1.6\cos\omega}}$ 相位响应为 $\angle H(j\omega)=-\tan^{-1}\dfrac{0.8\sin\omega}{1-0.8\cos\omega}$

5. 一个两极点滤波器的系统函数为 $H(z)=\frac{b_0}{(1-pz^{-1})^2}$，当 $b_0=$ ______，$p=$ ______，频率响应函数 $H(\omega)$ 满足条件 $H(0)=1$，$\left|H\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2=\frac{1}{2}$。

$b_0=(1-p)^2$ $\quad \dfrac{(p-1)^4}{(p^2-\sqrt{2}p+1)^2}=\dfrac{1}{2}.$

二、计算题

1. 计算系统 $y(n)=x(n)-x(n-8)$ 的幅度响应 $|H(\omega)|$ 和相位响应 $\angle H(\omega)$，并画图。

$$y(n)=x(n)-x(n-8) \Rightarrow Y(z)=X(z)-z^{-8}X(z)=(1-z^{-8})X(z).$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=1-z^{-8}.$$

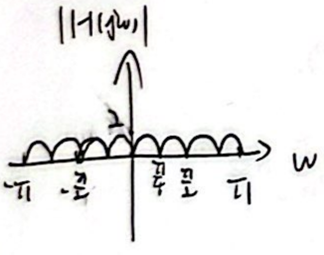
$$\Rightarrow H(j\omega)=1-e^{-j8\omega}$$

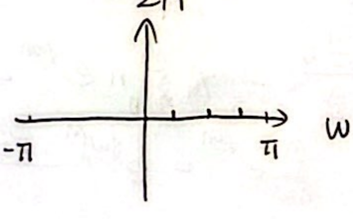
$$=1-\cos 8\omega+j\sin 8\omega \Rightarrow |H(j\omega)|=2|\sin 4\omega|$$

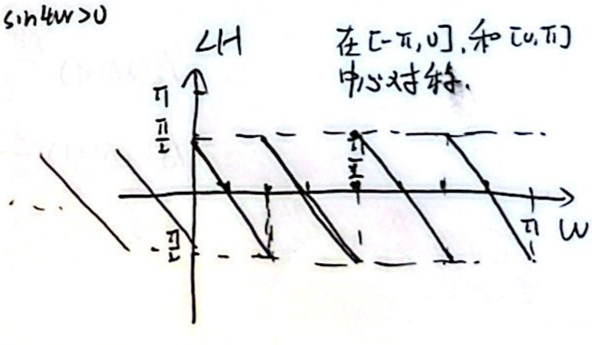
$$\angle H(j\omega)=\tan^{-1}\frac{\sin 8\omega}{1-\cos 8\omega}=\tan^{-1}\frac{2\sin 4\omega\cos 4\omega}{2\sin^2 4\omega}=\tan^{-1}(\cot 4\omega)$$

$$=\cancel{\frac{\pi}{2}-4\omega}\begin{cases}\pi+\frac{\pi}{2}-4\omega & \sin 4\omega<0\\ \frac{\pi}{2}-4\omega & \sin 4\omega>0\end{cases}$$

scale 到 $[-\pi,\pi]$







2. 计算以下信号的傅里叶变换。

(1) $x(n)=\begin{cases}2-0.5n, & |n|\le 4\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $x(n)=\begin{cases}A(2M+1-|n|), & |n|\le M\\ 0, & |n|>M\end{cases}$

(1) $X(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$

$= \sum_{n=-4}^{4} x(n)e^{-jwn} = \sum_{n=-4}^{4}(2-0.5n)e^{-jwn}$

$= 2\sum_{n=-4}^{4} e^{-jwn} - \frac{1}{2}\sum_{n=-4}^{4} ne^{-jwn} = \frac{4\sin 4w}{w} + j\sin w + 2j\sin 2w + 3j\sin 3w + 4j\sin 4w$

(2) $X(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$

$= \sum_{n=-M}^{M} A(2M+1-|n|)e^{-jwn}$

$= A(2M+1)\frac{\sin Mw}{w} - A\sum_{n=-M}^{M}|n|e^{-jwn}$

$= A(2M+1)\frac{\sin Mw}{w} - A2\sum_{n=1}^{M} n\cos wn$

(1) $X(w)=\sum_{n=-4}^{4}(2-0.5n)e^{-jwn} = 2\sum_{n=-4}^{4}e^{-jwn} - \frac{1}{2}\sum_{n=-4}^{4}ne^{-jwn}$

$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(w)}{dw}$ $\quad = 2\frac{\sin(4w+\frac{w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})} - \frac{1}{4}\frac{9\cos\frac{9}{2}w\sin\frac{w}{2} - \cos\frac{w}{2}\sin\frac{9}{2}w}{\sin^2\frac{w}{2}}$

(2). $X(w) = A(2M+1)\sum_{n=-M}^{M}e^{-jwn} - A\sum_{n=-M}^{M}|n|e^{-jwn}$

$= A(2M+1)\frac{\sin\frac{2M+1}{2}w}{\sin\frac{w}{2}} - A\sum_{n=1}^{M}n(e^{-jwn}+e^{jwn})$.

$= A(2M+1)\frac{\sin\frac{2M+1}{2}w}{\sin\frac{w}{2}} - A\sum_{n=0}^{M}ne^{-jwn} - A\sum_{n=0}^{M}ne^{jwn}$

$C_1=\sum_{n=0}^{M}e^{-jwn} = e^{-jw\frac{M}{2}}\frac{\sin\frac{M+1}{2}w}{\sin\frac{w}{2}}$, $\sum_{n=0}^{M}e^{jwn} = e^{jw\frac{M}{2}}\frac{\sin\frac{M+1}{2}w}{\sin\frac{w}{2}} = C_2$

$\therefore$ 原式 $= A(2M+1)\frac{\sin\frac{2M+1}{2}w}{\sin\frac{w}{2}} - Aj\frac{dC_1}{dw} - Aj\frac{dC_2}{dw}$. 代入 C_1, C_2.

三、简答题

1. 请写出 DTFT 和 z 变换的公式和两者之间的关系。

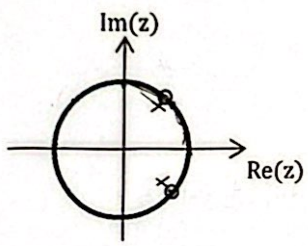
DTFT： $X(w)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}$ ， $\cancel{x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}}$

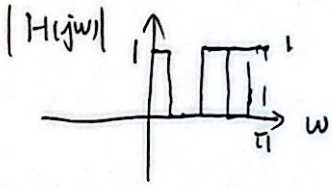
z： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$

其中 $z=re^{jw}$ ， $r=e^{\sigma}$. 当 $\sigma=0$ 即 $|z|=1$ 时，z变换退化为DTFT.

$|z|=1$ 时， $z=e^{jw}$ ， $X(z)\big|_{|z|=1}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-jwn}=X(w)$

2. 判断零极点如下图的滤波器的滤波特性（低通/带通/高通/带阻）。





在U点处阻.

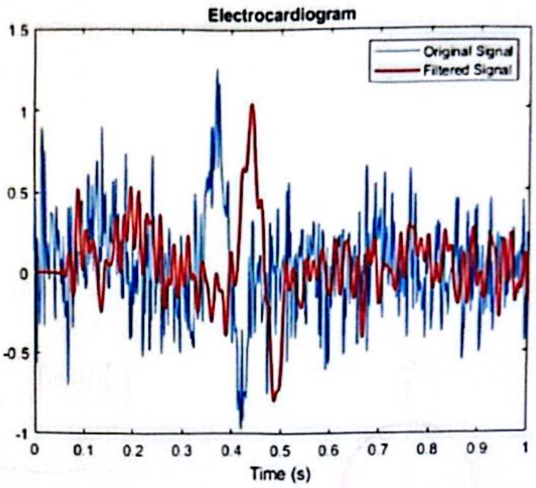
带阻 Filter

四、思考题

1. 现采集有一段心电信号，采样频率为500Hz，采样时间为1s，现采用一个低通滤波器滤除高频噪声，滤波器的频率响应$W(\omega)=\begin{cases} e^{-35\cdot i\omega}, & |\omega|\le 70 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，原信号与滤波后时域信号如下图所示

（1）观察图片，请问滤波器对信号具体造成了什么影响？为什么？

（2）请思考应采取什么方案补偿该影响，并具体说明理由。



(1) 滤过了高频信号，造成了时移.

$Y = X\cdot H = X\cdot|H|\cdot e^{j\angle H}$

对于 $H = \begin{cases} e^{-35jw} & |w|\le 70 \\ 0 & o.w. \end{cases}$

只考虑 $|w|\le 70$ 部分.

$H(jw) = e^{-35jw}$

$\angle H = -35w$ 是线性相位

$\tau = \cancel{35}\,35$. 群时延是常数.

频域相移 = 时域时移

(2) ① ~~提前~~ 在采样前先开机. 然后对采集到的信号时移.

② 先正向滤波. 再得到 $\cancel{X(n)}$ $X(n-\tau)$. 将 $\cancel{X(n)}$ $X(n-\tau)$. 关于 $\frac{N}{2}$ 对称. 得到 $X(\tau-n-\frac{N}{2})$.
再滤波. 得到 $X(-n-\frac{N}{2})$. 再关于 $\frac{N}{2}$ 对称. 得到 $X(n)$.