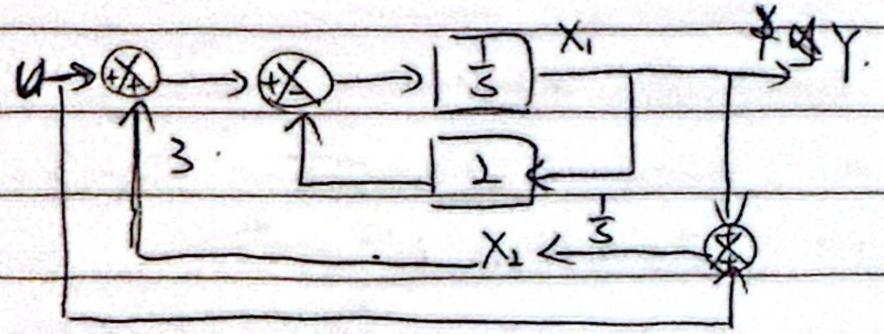
1、判断系统的可控性、可观性



$\cancel{X_1}$: $X_1(s) = \frac{1}{s}[3X_2(s) - 2X_1(s) + U(s)]$

$X_2(s) = \frac{1}{s}[Y + U]$.

$Y(s) = X_1(s) \Rightarrow y = x_1$

∴ $sX_1 = -2X_1 + 3X_2 + U$， $sX_2 = X_1 + U$

∴ $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + u \\ \dot{x}_2 = 1x_1 + 0x_2 + u \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C = (1, 0) \quad D = 0$

可控性: $[B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rank = 1 ∴不可控.

可观性: $[C^T, A^T C^T]^T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}$ rank = 2 ∴可观

2、一个系统.

$A=\begin{pmatrix}0&1\\4&-3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $C=(-1,1)$, $D=0$

(1) 稳定性: $sI-A=\begin{pmatrix}s&-1\\-4&s+3\end{pmatrix}$, $|sI-A|=0 \Rightarrow s=-4, 1$

∴ 不稳定. 在 s右半存在极点.

(2) 状态转移矩阵.

$\dot{x}=AX+BU \Rightarrow sX=AX+BU \Rightarrow (sI-A)X=BU+X(0)$

$\Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}X(0)+(sI-A)^{-1}BU(s)$.

$\Rightarrow \cancel{X}=X(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]X(0)+\{\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]\}*(B\cdot U(t))$

$\Rightarrow \Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s+4)(s-1)}\begin{bmatrix}s+3&1\\4&s\end{bmatrix}$

∴ $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}e^{-4t}+\frac{4}{5}e^{t}, & \frac{1}{5}e^{t}-\frac{1}{5}e^{-4t}\\ \frac{4}{5}e^{t}-\frac{4}{5}e^{-4t}, & \frac{4}{5}e^{-4t}+\frac{1}{5}e^{t}\end{pmatrix}$ 可以看出不稳定.

(3) $U=-K_{1\times2}X_{2\times1}$ 期望 $(s+3)^2=s^2+6s+9$

实际 $sX(s)=AX(s)-BKX(s)+X(0) \Rightarrow X(s)=(sI-A+BK)^{-1}X(0)$

∴ $|sI-A+BK|=s^2+6s+9$,

令 $K=(k_1,k_2)$ ∴ $BK=\begin{pmatrix}0&0\\k_1&k_2\end{pmatrix}$ ∴ $|sI-A+BK|=s^2+(3+k_2)s+k_1-4$

插入一下: 首先判断可控性:

$B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\cancel{BA}$ $AB=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ ∴ 由 $\mathrm{rank}(B, AB)=2$, 可控.

∴ $k_2=3$, $k_1=13$ ∴ $K=(13,3)$

(4) ~~由于……~~

原系统: ∴ $\begin{pmatrix}C\\CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\4&-4\end{pmatrix}$ rank=1 不完全可观

修改后: $A'=A-BK=\begin{pmatrix}0&1\\-9&-6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}C\\CA'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\-9&-7\end{pmatrix}$ rank=2 完全可观

变了.

3. $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-5&-6&0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $C=(1,0,0)$ $D=0$

观测器特征方程 $(s+10)^2(s+15)=0 \Rightarrow s^3+35s^2+400s+1500=0$

令观测值为 $\tilde{X}$，实际值为 X

$\therefore \begin{cases}\dot{X}=AX+Bu\\ y=CX\end{cases}$ $\begin{cases}\dot{\tilde{X}}=A\tilde{X}+Bu+\underset{3\times1}{K_e}(y-\tilde{y})\\ \tilde{y}=C\tilde{X}\end{cases}$

$\therefore \dot{\tilde{X}}=A\tilde{X}+Bu+K_e y-K_eC\tilde{X}=(A-K_eC)\tilde{X}+Bu+K_eCX$

$\Rightarrow \dot{X}-\dot{\tilde{X}}=(A-K_eC)X-(A-K_eC)\tilde{X}$ 令 $X-\tilde{X}=E$

$\therefore \dot{E}=(A-K_eC)E$，又已知 E 的极点配置。

$\therefore |sI-A+K_eC|=(s+10)^2(s+15)$

令 $K_e=[k_1, k_2, k_3]^T$ $\therefore |sI-A+K_eC|=s^3+s^2k_1+sk_2+(5+k_3)$

$\therefore k_1=35,\ k_2=400,\ k_3=1495$

$\therefore K_e=[35, 400, 1495]^T$