组合数学(第 2 版)-姜建国,岳建国

习题一（排列与组合）

1．在 1 到 9999 之间，有多少个每位上数字全不相同而且由奇数构成的整数？

解：该题相当于从“1，3，5，7，9”五个数字中分别选出 1，2，3，4 作排列的方案数；

（1）选 1 个，即构成 1 位数，共有 P_5^1 个；

（2）选 2 个，即构成两位数，共有 P_5^2 个；

（3）选 3 个，即构成 3 位数，共有 P_5^3 个；

（4）选 4 个，即构成 4 位数，共有 P_5^4 个；

由加法法则可知，所求的整数共有：$P_5^1+P_5^2+P_5^3+P_5^4=205$ 个。

2．比 5400 小并具有下列性质的正整数有多少个？

（1）每位的数字全不同；

（2）每位数字不同且不出现数字 2 与 7；

解：（1）比 5400 小且每位数字全不同的正整数；

按正整数的位数可分为以下几种情况：

① 一位数，可从 1～9 中任取一个，共有 9 个；

② 两位数。十位上的数可从 1～9 中选取，个位数上的数可从其余 9 个数字中选取，根据乘法法则，共有 $9\times9=81$ 个；

③ 三位数。百位上的数可从 1～9 中选取，剩下的两位数可从其余 9 个数中选 2 个进行排列，根据乘法法则，共有 $9\times P_9^2=648$ 个；

④ 四位数。又可分三种情况：

- 千位上的数从 1～4 中选取，剩下的三位数从剩下的 9 个数字中选 3 个进行排列，根据乘法法则，共有 $4\times P_9^3=2016$ 个；
- 千位上的数取 5，百位上的数从 1～3 中选取，剩下的两位数从剩下的 8 个数字中选 2 个进行排列，共有 $3\times P_8^2=168$ 个；
- 千位上的数取 5，百位上的数取 0，剩下的两位数从剩下的 8 个数字中选 2 个进行排列，共有 $P_8^2=56$ 个；

根据加法法则，满足条件的正整数共有：$9+81+648+2016+168+56=2978$ 个；

（2）比 5400 小且每位数字不同且不出现数字 2 与 7 的正整数；

按正整数的位数可分为以下几种情况：设 $A=\{0,1,3,4,5,6,8,9\}$

① 一位数，可从 $A-\{0\}$ 中任取一个，共有 7 个；

② 两位数。十位上的数可从 $A-\{0\}$ 中选取，个位数上的数可从 A 中其余 7 个数字中选取，根据乘法法则，共有 $7\times7=49$ 个；

③ 三位数。百位上的数可从 $A-\{0\}$ 中选取，剩下的两位数可从 A 其余 7 个数中选 2 个进行排列，根据乘法法则，共有 $7\times P_7^2=294$ 个；

④ 四位数。又可分三种情况：

- 千位上的数从 1，3，4 中选取，剩下的三位数从 A 中剩下的 7 个数字中选 3 个进行排列，根据乘法法则，共有 $3\times P_7^3=630$ 个；
- 千位上的数取 5，百位上的数从 0，1，3 中选取，剩下的两位数从 A 中剩下的 6 个数字中选 2 个进行排列，共有 $3\times P_6^2=90$ 个；

根据加法法则，满足条件的正整数共有：$7+49+294+630+90=1070$ 个；

3．一教室有两排，每排 8 个座位，今有 14 名学生，问按下列不同的方式入座，各有多少种做法？

（1）规定某 5 人总坐在前排，某 4 人总坐在后排，但每人具体座位不指定；

（2）要求前排至少坐 5 人，后排至少坐 4 人。

解：（1）因为就坐是有次序的，所有是排列问题。

5 人坐前排，其坐法数为 $P(8,5)$，4 人坐后排，其坐法数为 $P(8,4)$，

剩下的 5 个人在其余座位的就坐方式有 $P(7,5)$ 种，

根据乘法原理，就座方式总共有：

$$P(8,5)\cdot P(8,4)\cdot P(7,5)=28\,449\,792\,000 \text{（种）}$$

（2）因前排至少需坐 6 人，最多坐 8 人，后排也是如此。

可分成三种情况分别讨论：

① 前排恰好坐 6 人，入座方式有 $C(14,6)P(8,6)P(8,8)$；

② 前排恰好坐 7 人，入座方式有 $C(14,7)P(8,7)P(8,7)$；

③ 前排恰好坐 8 人，入座方式有 $C(14,8)P(8,8)P(8,6)$；

各类入座方式互相不同，由加法法则，总的入座方式总数为：

$$C(14,6)P(8,6)P(8,8)+C(14,7)P(8,7)P(8,7)+C(14,8)P(8,8)P(8,6)$$
$$=10\,461\,394\,944\,000$$

♦ **典型错误：**

先选 6 人坐前排，再选 4 人坐后排，剩下的 4 人坐入余下的 6 个座位。故总的入坐方式共有：$C(14,6)P\left(8,6\right)C(8,4)P\left(8,4\right)P\left(6,4\right)$ 种。

但这样计算无疑是有重复的，例如恰好选 6 人坐前排，其余 8 人全坐后排，那么上式中的$C(8,4)P\left(8,4\right)$就有重复。

4．一位学者要在一周内安排 50 个小时的工作时间，而且每天至少工作 5 小时，问共有多少种安排方案？

解：用x_i表示第 i 天的工作时间，$i=1,2,\cdots,7$，则问题转化为求不定方程
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=50$的整数解的组数，且$x_i\geq 5$，于是又可以转化为求不定方程$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7=15$的整数解的组数。

该问题等价于：将 15 个没有区别的球，放入 7 个不同的盒子中，每盒球数不限，即相异元素允许重复的组合问题。

故安排方案共有：$RC(\infty,15)=C(15+7-1,15)=54\,264$ （种）

♦ 另解：

因为允许$y_i=0$，所以问题转化为长度为 1 的 15 条线段中间有 14 个空，再加上前后两个空，共 16 个空，在这 16 个空中放入 6 个“＋”号，每个空放置的“＋”号数不限，未放“＋”号的线段合成一条线段，求放法的总数。从而不定方程的整数解共有：

$$RC(\infty,6)=C(16+6-1,6)=\frac{21\times 20\times 19\times 18\times 17\times 16}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=54\,264$$ （组）

即共有 54 264 种安排方案。

5．若某两人拒绝相邻而坐，问 12 个人围圆周就坐有多少种方式？

解：12 个人围圆周就坐的方式有：$CP(12,12)=11!$种，

设不愿坐在一起的两人为甲和乙，将这两个人相邻而坐，可看为 1 人，则这样的就坐方式有：$CP(11,11)=10!$种；由于甲乙相邻而坐，可能是“甲乙”也可能是“乙甲”；所以

则满足条件的就坐方式有：$11!-2\times 10!=32\,659\,200$种。

6．有 15 名选手，其中 5 名只能打后卫，8 名只能打前锋，2 名只能打前锋或后卫，今欲选出 11 人组成一支球队，而且需要 7 人打前锋，4 人打后卫，试问有多少种选法？

解：用 A、B、C 分别代表 5 名打后卫、8 名打前锋、2 名可打前锋或后卫的集合，则可分为以下几种情况：

（1）7 个前锋从 B 中选取，有C_8^7种选法，4 个后卫从 A 中选取，有C_5^4种，根据乘法法则，这种选取方案有：$C_8^7 \cdot C_5^4$种；

（2）7 个前锋从 B 中选取，从 A 中选取 3 名后卫，从 C 中选 1 名后卫，

根据乘法法则，这种选取方案有：$C_8^7 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$种；

（3）7 个前锋从 B 中选取，从 A 中选取 2 名后卫，C 中 2 名当后卫，

根据乘法法则，这种选取方案有：$C_8^7 \cdot C_5^2$种；

（4）从 B 中选 6 个前锋，从 C 中选 1 个前锋，从 A 中选 4 个后卫，

根据乘法法则，这种选取方案有：$C_8^6 \cdot C_2^1 \cdot C_5^4$种；

（5）从 B 中选 6 个前锋，从 C 中选 1 个前锋，从 A 中选 3 个后卫，C 中剩下的一个当后卫，选取方案有：$C_8^6 \cdot C_2^1 \cdot C_5^3$种；

（6）从 B 中选 5 个前锋，C 中 2 个当前锋，从 A 中选 4 个后卫，

选取方案有：$C_8^5 \cdot C_5^4$种；

根据加法法则，总的方案数为：

$$C_8^7 \cdot C_5^4 + C_8^7 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 + C_8^7 \cdot C_5^2 + C_8^6 \cdot C_2^1 \cdot C_5^4 + C_8^6 \cdot C_2^1 \cdot C_5^3 + C_8^5 \cdot C_5^4 = 1400$$

7．求$(x-y-2z+w)^8$展开式中$x^2y^2z^2w^2$项的系数。

解：令$a=x,b=-y,c=-2z,d=w$，则$(a+b+c+d)^8$中$a^2b^2c^2z^2$项的系数为

$\binom{8}{2\,2\,2\,2} = \frac{8!}{2!2!2!2!} = \frac{7!}{2}$，即$(x-y-2z+w)^8$中，$x^2(-y)^2(-2z)^2w^2$的系数，

因此，$x^2y^2z^2w^2$的系数为：$7!/2 \cdot (-1)^2 \cdot (-2)^2 = 10\,080$。

8．求$(x+y+z)^4$的展开式。

解：$n=4,t=3$，展开式共有$RC(\infty,4)=C(4+3-1,4)=15$（项）， 所以，

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 &= \binom{4}{4\,0\,0}x^4 + \binom{4}{0\,4\,0}y^4 + \binom{4}{0\,0\,4}z^4 + \binom{4}{3\,1\,0}x^3y + \binom{4}{3\,0\,1}x^3z \\ &+ \binom{4}{2\,2\,0}x^2y^2 + \binom{4}{2\,0\,2}x^2z^2 + \binom{4}{2\,1\,1}x^2yz \\ &+ \binom{4}{1\,3\,0}xy^3 + \binom{4}{1\,0\,3}xz^3 + \binom{4}{1\,1\,2}xyz^2 + \binom{4}{1\,2\,1}xy^2z \\ &+ \binom{4}{0\,1\,3}yz^3 + \binom{4}{0\,3\,1}y^3z + \binom{4}{0\,2\,2}y^2z^2 \\ &= x^4+y^4+z^4+4x^3y+4x^3z+4xy^3+4xz^3+4yz^3+4y^3z \\ &\quad +6x^2y^2+6x^2z^2+6y^2z^2+12x^2yz+12xyz^2+12xy^2z\end{aligned}$$

9．求$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$展开式中$x_2^3x_3x_4^6$的系数。

解：$x_2^3x_3x_4^6$的系数为： $\binom{10}{0\,3\,1\,6\,0} = \frac{10!}{3! \cdot 1! \cdot 6!} = 840$

10．试证任一整数 n 可唯一表示成如下形式：

$$n=\sum_{i\geq 1} a_i i! \quad ,0\leq a_i\leq i, i=1,2,\cdots$$

证明：（1）可表示性。

令 $M=\{(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\mid 0\leq a_i\leq i, i=1,2,\cdots,m-1\}$，显然 $|M|=m!$，

$N=\{0,1,2,\cdots,m!-1\}$，显然 $|N|=m!$，

定义函数 $f:M\to N$，

$f(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)=a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2\cdot 2!+a_1\cdot 1!$，

显然，

$$\begin{aligned}0&=0\cdot(m-1)!+0\cdot(m-2)!+\cdots+0\cdot 2!+0\cdot 1!\\&\leq a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2\cdot 2!+a_1\cdot 1!\\&\leq(m-1)(m-1)!+(m-2)(m-2)!+\cdots+2\cdot 2!+1\cdot 1!\\&=m!-(m-1)!+(m-1)!-(m-2)!+\cdots+3!-2!+2!-1!=m!-1\end{aligned}$$

即 $0\leq f(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\leq m!-1$，

由于 f 是用普通乘法和普通加法所定义的，故 f 无歧义，肯定是一个函数。

从而必有一确定的数 $K\ (0\leq K\leq m!-1)$，使得 $K=f(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)$，

为了证明 N 中的任一数 n 均可表示成 $n=\sum_{i\geq 1}a_i i!$ 的形式，

只需证明 f 是满射函数即可。又因为 f 是定义在两个有限且基数相等的函数上，因此如果能证明 f 单射，则 f 必是满射。

假设 f 不是单射，则存在 $(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1),(b_{m-1},b_{m-2},\cdots,b_2,b_1)\in M$，

$(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\neq(b_{m-1},b_{m-2},\cdots,b_2,b_1)$，且有 $K_0\in N$，使得

$K_0=f(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)=f(b_{m-1},b_{m-2},\cdots,b_2,b_1)$

由于 $(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\neq(b_{m-1},b_{m-2},\cdots,b_2,b_1)$，故必存在 $j\leq m-1$，使得 $a_j\neq b_j$。不妨设这个 j 是第一个使之不相等的，即 $a_i=b_i\ (i=m-1,\cdots,j+1)$，$a_j\neq b_j$ 且 $a_j<b_j$，

因为

$$\begin{aligned}&a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2\cdot 2!+a_1\cdot 1!\\=\ &b_{m-1}(m-1)!+b_{m-2}(m-2)!+\cdots+b_2\cdot 2!+b_1\cdot 1!\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}0&=\left[b_{m-1}(m-1)!+b_{m-2}(m-2)!+\cdots+b_2\cdot 2!+b_1\cdot 1!\right]\\&\quad-\left[a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2\cdot 2!+a_1\cdot 1!\right]\\&=(b_j-a_j)j!+(b_{j-1}-a_{j-1})(j-1)!+\cdots+(b_2-a_2)\cdot 2!+(b_1-a_1)\cdot 1!\\&\geq j!-\left[|b_{j-1}-a_{j-1}|\cdot(j-1)!+\cdots+|b_2-a_2|\cdot 2!+|b_1-a_1|\cdot 1!\right]\\&\geq j!-\left[(j-1)\cdot(j-1)!+\cdots+2\cdot 2!+1\cdot 1!\right]\\&=j!-(j!-1)=1\end{aligned}$$

产生矛盾，所以 f 必是单射函数。

因为$|M|=|N|=m!$，所以 f 必然也是满射函数，

故对任意的$n\in N$，都存在$(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\in M$，使得

$$n=a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2 \cdot 2!+a_1 \cdot 1!$$

这说明对任意的整数，都可以表示成$n=\sum_{i\ge1}a_i i!$ 的形式。

（2）唯一性。

由于函数 $f:M\to N$ 是一个单射，也是满射，即 f 是双射函数，

故，对任意的$n\in N$，都存在唯一的$(a_{m-1},a_{m-2},\cdots,a_2,a_1)\in M$，使得

$n=a_{m-1}(m-1)!+a_{m-2}(m-2)!+\cdots+a_2 \cdot 2!+a_1 \cdot 1!$。

否则，若存在另一个$(b_{m-1},b_{m-2},\cdots,b_2,b_1)\in M$，使得

$$n=b_{m-1}(m-1)!+b_{m-2}(m-2)!+\cdots+b_2 \cdot 2!+b_1 \cdot 1!$$

将与 f 是单射函数矛盾。证毕。

11．证明$nC(n-1,r)=(r+1)C(n,r+1)$，并给出组合意义。

证明：因为$C(n,k)C(k,l)=C(n,l)C(n-l,k-l)$，现令$k=r+1$，$l=1$，则可得

$C(n,r+1)C(r+1,1)=C(n,1)C(n-1,r)$，即$nC(n-1,r)=(r+1)C(n,r+1)$

组合意义：将 n 个元素分为 3 堆，1 堆 1 个元素，1 堆 r 个元素，1 堆$n-r-1$个元素。可以有下面两种不同的分法：

（1）先从 n 个元素中选出$r+1$个元素，剩下的$n-r-1$个作为 1 堆；再将选出的$r+1$个元素分为两堆，1 堆 1 个，1 堆 r 个。

（2）先从 n 个元素中选出 1 人作为 1 堆，再从剩下的$n-1$个中选出 r 个作为 1 堆，剩下的$n-r-1$作为 1 堆。

显然，两种分法是等价的，所以等式成立。

12．证明 $\sum_{k=1}^{n}kC(n,k)=n2^{n-1}$ 。

证明：采用殊途同归法。

- **组合意义一**：

考虑从 n 个人中选出 1 名正式代表和若干名列席代表的选法（列席代表人数不限，可以为 0）。可以有以下两种不同的选法：

（1）先选定正式代表，有$C_n^1=n$种选法；然后从$n-1$人中选列席代表，这$n-1$个人都有选和不选的两种状态，共有2^{n-1}种选法；

根据乘法法则，共有 $n2^{n-1}$ 种选法；

（2）可以先选出$k+1\,(k=0,1,2,\cdots,n-1)$人，然后再从中选出 1 名正式代表，其余 k 人作为列席代表，对于每个 k，这样的选法有：$C_n^{k+1}C_{k+1}^1$，

从而总选法有： $\sum_{k=0}^{n-1} C(n,k+1)C(k+1,1) = \sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(k,1) = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$

显然，两种选法是等价的，所以等式成立。

- **组合意义二：**

将 n 个不同的球放入标号为 A、B、C 的 3 个盒子，其中要求 A 盒只放 1 个球，其余两盒的球数不限。那么，有两种不同的放法：

（1）先从 n 个不同的球中选出 1 个，放入 A 盒，再将其余 $\boldsymbol{n-1}$ 个球放入另外两盒，有 $C_n^1 \cdot 2^{n-1} = n2^{n-1}$ 种放法；

（2）先从 n 个球中选出 k 个 $(k = 1,2,\cdots,n)$，再从所选的 k 个球中选出 1 个放入 A 盒，将其余的 $k-1$ 个球放入 B 盒，剩下的 $n-k$ 个球放入 C 盒，根据乘法法则，对于不同的 k，有 $C_n^k \cdot C_k^1 \cdot C_{n-k}^{n-k} = kC_n^k$ 种放法。

当 $k = 1,2,\cdots,n$ 时，各种情况互不重复，且包含了所有放法，

根据加法法则，总的放法有：$\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$。

显然两种放法是等价的，故等式成立。

- **另法：**

根据二项式定理：

$$(1+x)^n = 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + C(n,n-1)x^{n-1} + C(n,n)x^n,$$

两边求导，得：

$$n(1+x)^{n-1} = C(n,1) + 2C(n,2)x + \cdots + (n-1)C(n,n-1)x^{n-2} + nC(n,n)x^{n-1},$$

令 $x = 1$，即得 $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$

13．有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组数里的最小数大于第二组的最大数，问有多少种方案？

解：设这 n 个不同的数为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，

若假定第一组取 k_1 个数，第二组取 k_2 个数，并且令 $m = k_1 + k_2\ (m \ge 2)$，

则要求第一组数里的最小数大于第二组里的最大数，我们可以这样来选：

先从 n 个数中任选 m 个数出来，有 $C(n,m)$ 种选法；再从这 m 个数中从大到小取 k_1 个数作为第一组数，$k_1 = 1,2,\cdots,m-1$，有 $m-1$ 种取法；再将其余的 k_2 个数作为第二组数。

故总方案数有：$\sum_{m=2}^{n}(m-1)C(n,m)=\sum_{m=2}^{n}mC(n,m)-\sum_{m=2}^{n}C(n,m)$

$$=n2^{n-1}-n-(2^n-n-1)=(n-2)2^{n-1}+1$$

14. 六个引擎分列两排，要求引擎的点火次序两排交错开来，试求从某一特定引擎开始点火有多少种方案？

解：第一次点火仅有一种选择，即点某个特定引擎的火；第二次点另一组某个引擎的火，有三种选择；第三次有 2 种, ……。

所以方案数为：$1\times3\times2\times2\times1\times1=12$（种）

◆ 如果只指定从第一排先开始点火，不指定某一个，则方案数为

$3\times3\times2\times2\times1\times1=36$（种）

◆ 如果第一个引擎任意选，只要求点火过程是交错的，则方案数为

$6\times3\times2\times2\times1\times1=72$（种）

15. 试求从 1 到 1 000 000 的整数中，0 出现了几次？

解：分别计算 0 出现在各个位上的次数。

（1）0 出现在个位，此时符合条件的 2 位数有 9 个；3 位数有 9×10 个；4 位数有 9×10^2 个；5 位数有 9×10^3 个；6 位数有 9×10^4 个；

（2）0 出现在十位，此时符合条件的 3 位数有 9×10 个；4 位数有 9×10^2 个；5 位数有 9×10^3 个；6 位数有 9×10^4 个；

（3）0 出现在百位，此时符合条件的 4 位数有 9×10^2 个；5 位数有 9×10^3 个；6 位数有 9×10^4 个；

（4）0 出现在千位，此时符合条件的 5 位数有 9×10^3 个；6 位数有 9×10^4 个；

（5）0 出现在万位，此时符合条件的 6 位数有 9×10^4 个；

另外 1 000 000 中有 6 个 0。

所以，从 1 到 1 000 000 的整数中，0 出现的次数总共有：

$9+2\times9\times10+3\times9\times10^2+4\times9\times10^3+5\times9\times10^4+6=488\,895$（次）

◆ **另法：**

先不考虑 1 000 000 本身，那么任一个 000 000～999 999 之间的数都可以表示成如下形式：$d_1d_2d_3d_4d_5d_6$，其中每个 d_i 是 0 到 9 的数字。

因为每位数字可以有 10 种选择，根据乘法法则，共有 10^6 个“6 位数”，

又每个“6 位数”由 6 个数字组成（包括无效 0），所以共有 6×10^6 个数字，

又每个数字出现的概率相等， 所以 0 出现的次数应是 6×10^5，

但习惯上在计算 0 的个数时，不包括无效 0（即高位的 0），因而要从中去掉无效 0，其中：（1）1 位数有 9 个（不包括 0），其无效 0 共有 5×9 个（即 00000 d_i）；

（2）2 位数有 90 个，其无效 0 共4×90个。

依次类推，无效 0 的总数为

$$5\times 9+4\times 90+3\times 900+2\times 9000+1\times 90000=111\,105$$

因为$d_1d_2d_3d_4d_5d_6$全为 0 时的 6 个 0 和 1 000 000 本身的 6 个 0 相互抵消，所以 1 到 1 000 000 之间的自然数中 0 出现的次数为

$$6\times 10^5-111105=488\,895\text{（次）}$$

♦ 注意：1 出现的次数为$6\times 10^5+1$（要考虑 1 000 000 这个数的首位 1），2，3，…，9 各自出现的次数为6×10^5。

16．n 个男 n 个女排成一男女相间的队伍，试问有多少种不同的方案？若围成一圆桌坐下，又有多少种不同的方案？

解：排成男女相间的队伍：

先将 n 个男的排成 1 行，共有P_n^n种排法；

再将 n 个女的往 n 个空里插，有P_n^n种排法；由于可以先男后女，也可以先女后男，因此共有$2P_n^n$种排法；

根据乘法法则，男女相间的队伍共有：$2P_n^n\cdot P_n^n=2n!n!$种方案。

若围成一圆周坐下，同理

先将 n 个男的围成一圆周，共有$CP(n,n)$种排法，

再将 n 个女的往 n 个空中插，有P_n^n种排法，

根据乘法法则，围成圆周坐下，总的方案数有：$CP(n,n)\cdot P_n^n=n!(n-1)!$种。

17．n 个完全一样的球，放到 r 个有标志的盒子，$n\ge r$，要求无一空盒，试证其方案数为$\binom{n-1}{r-1}$。

证明：因为没有空盒，可先每盒放入一个球，再将剩余的$n-r$球放入 r 个盒子中，即将$n-r$个无区别的球，放入 r 个不同的盒子中，每盒的球数不受限制，因此方案数有：$C(r+n-r-1,n-r)=C(n-1,n-r)=C(n-1,r-1)$。

♦ 另法：插空法。

问题可看为：n 个球排成 1 行，球与球之间形成$n-1$个空，再在这$n-1$个空中，插入$r-1$个隔板，这样就可形成 r 个盒子，每盒球不空的方案，其方案数为$C(n-1,r-1)$。

18．设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，$p_1,p_2,\cdots,p_k$是 k 个素数，

试求能整除尽数 n 的正整数数目。

解：能整除数 n 的正整数即 n 的正约数，其个数为：

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)\text{。}$$

19．试求 n 个完全一样的骰子能掷出多少种不同的方案？

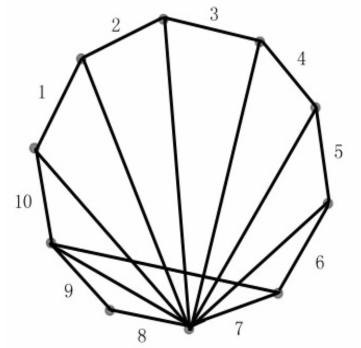
解：每个骰子有六个面，每个面的点数可以是$1,2,\cdots,6$中的一种。

由于 n 个骰子完全一样，故这样相当于将 n 个完全一样的球放到 6 个不同的盒子中，每盒球数不限。故方案数有

$$C(n+6-1,n)=C(n+5,5)=\frac{1}{5!}(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\text{（种）}$$

20．凸十边形的任意三个对角线不共点，试求这凸十边形的对角线交于多少个点？又把所有的对角线分割成多少段？

解：



（1）从一个顶点可引出 7 条对角线，这 7 条对角线和其他顶点引出的对角线的交点情况如下：从右到左，和第一条对角线的交点有：1×7个，和第二条的交点有2×6，和第三条的交点有3×5条，…，故和一个顶点引出的 7 条线相交的点为：

$1\times 7+2\times 6+3\times 5+4\times 4+5\times 3+6\times 2+7\times 1=84$，故和从 10 点引出的对角线交的点有$84\times 10=840$个，但每个点重复了四次（因为每个点在两条线上，而每条线又有两个端点），故凸十边形对角线交于$840/4=210$个点。

♦ **也可以直接这样看：**

因为一个交点需要两条对角线相交，而两条对角线又需要多边形的四个点构成一四边形。反之，从 n 个顶点中任取四个顶点，连成一四边形，而四边形的两条对角线必须确定唯一的一个交点，故凸十边形的对角线的交点共有：

$$C_{10}^4=210\text{（个）}$$

（前提：任三个对角线不共点，否则，一个交点不能对应 n 边形的唯一四个顶点）

（2）由（1）知，一个点引出的 7 条对角线中，第一条线上有 7 个点，故将该线段分成 8 段；第二条线上有 12 个点，故将该线段分成 13 段，…，故从一个点出发的 7 条线上的段数为：$8+13+16+17+16+13+8=91$。

现有 10 个点。故总的段数为：$91\times 10=910$。但每段重复计算了 2 次（因为每条线有 2 个端点）故总的段数应为：$910/2=455$。

♦ 另法：

一个交点给相交的两条对角线各增加 1 段，所以对角线总的段数为：

$$\text{对角线数}+2\text{倍交点数}=\frac{10(10-3)}{2}+2\times 210=455\ \text{（段）}$$

21. 试证一整数n是另一整数的平方的充要条件是除尽n的正整数的数目为奇数。

证明：必要性：整数 n 可表示为$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$， $p_i\le n$，且p_i为素数，$\alpha_i\ge 1$，

则除尽 n 的正整数个数为：$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$，

若$(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$为偶数，则必存在$\alpha_i$为奇数，

则 n 不可能写成令一个数的平方。

所以 n 是另一整数的平方的必要条件是除尽 n 的正整数数目为奇数。

充分性：若除尽 n 的正整数的数目为奇数，则$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,k)$均为偶数，

则 $$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}=p_1^{2\cdot\frac{a_1}{2}}p_2^{2\cdot\frac{a_2}{2}}\cdots p_k^{2\cdot\frac{a_k}{2}}=\left(p_1^{\frac{a_1}{2}}p_2^{\frac{a_2}{2}}\cdots p_k^{\frac{a_k}{2}}\right)^2$$

可写成另一整数的平方。证毕。

22. 统计力学需要计算 r 个质点放到 n 个盒子里去，并分别服从下列假定之一，问有多少种不同的图像？假设盒子始终是不同的。

（1）Maxwell-Boltzmann 假定：r 个质点是不同的，任何盒子可以放任意个；

（2）Bose-Einstein 假定：r 个质点完全相同，每一个盒子可以放任意个。

（3）Fermi-Dirac 假定：r 个质点都完全相同，每盒不得超过一个。

解：（1）问题即：将 r 个不同的质点放到 n 个不同的盒子，每个盒子放的质点数不受限制，即相异元素允许重复排列，其方案数有：

$$RP(\infty,r)=n^r$$

（2）问题即：将 r 个没有区别的质点放到 n 个不同的盒子，每个盒子方的质点数不受限制，即相异元素允许重复组合，其方案数有：

$$RC(\infty,r)=C(n+r-1,r)=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

（3）问题即：将 r 个没有区别的质点放到 n 个不同的盒子，每盒不超过一个，即相异元素不允许重复的组合，其方案数有：

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

23. 从 26 个英文字母中取出 6 个字母组成一字，若其中有 2 或 3 个母音，问分别可构成多少个字（不允许重复）？

解：母音指元音，即 a，e，i，o，u

（1）有 2 个元音。先从 5 个元音中取出 2 个，再从剩下的 21 个字母中选出 4 个，再将 6 个字母进行全排列，则可构成的字总共有：

$$C_5^2 C_{21}^4 P_6^6 = 43\,092\,000 \text{（个）}$$

（2）有 3 个元音。先从 5 个元音中取出 3 个，再从剩下的 21 个字母中选出 4 个，再将 6 个字母进行全排列，则可构成的字总共有：

$$C_5^3 C_{21}^3 P_6^6 = 9\,567\,000 \text{（个）}$$

24. 给出 $\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1}+\binom{n-2}{m-2}\binom{r+2}{2}+\cdots+\binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m}=\binom{n+r+1}{m}$ 的组合意义。

证明：

♦ **组合意义一：**

从 $(n+r+1)$ 个元素 $\{1,2,\cdots,n+r+1\}$ 中取出 $(n+r+1-m)$ 个元素的组合数为：$C(n+r+1,n+r+1-m)=C(n+r+1,m)$，且 $i_1<i_2<\cdots<i_r<i_{r+1}<\cdots<i_{n+r+1-m}$，其中第 $r+1$ 位置上的元素 i_{r+1} 可取 $r+1,r+2,\cdots,r+1+m$，

当 i_{r+1} 取 $(r+1+k)$ 时（ $k=0,1,\cdots,m$ ），前边的 r 个数 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 可在 $\{1,2,\cdots,r+1+(k-1)\}$ 这 $r+k$ 个数中取，故有 $\binom{r+k}{r}=\binom{r+k}{k}$ 种取法；后边的 $[(n+r+1-m)-(r+1)]=n-m$ 个数 $i_{r+2},i_{r+3},\cdots,i_{n+r+1-m}$ 可在 $\{r+1+k+1,\cdots,n+r+1\}$ 这 $[(n+r+1)-(r+1+k)]=n-k$ 个数中取，故有 $\binom{n-k}{n-m}=\binom{n-k}{m-k}$ 种取法。

根据乘法法则，当 $i_{r+1}=r+1+k$ 时，这样的组合数为：

$$\binom{n-k}{m-k}\cdot 1\cdot\binom{r+k}{k}=\binom{n-k}{m-k}\binom{r+k}{k}$$

再根据加法法则，对 $k=0,1,\cdots,m$ 进行求和，就有

$$\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1}+\binom{n-2}{m-2}\binom{r+2}{2}+\cdots+\binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m}=\binom{n+r+1}{m}\text{。}$$

♦ **组合意义二：（格路方法）**

等式左端：从点 $A(-r-1,0)$ 到点 $C(-1,k)$（ $k=0,1,\cdots,m$ ），直接经过点 $D(0,k)$

再到点$B(n-m,m)$的路径数。

从 A 到 C 的路径数为：$\binom{-1-(-r-1)+k-0}{k-0}=\binom{r+k}{k}$，

从 D 到 B 的路径数为：$\binom{n-m-0+m-k}{m-k}=\binom{n-k}{m-k}$，

根据乘法法则和加法法则，从 A 到 B 的路径数有：$\sum_{k=0}^{m}\binom{r+k}{k}\binom{n-k}{m-k}$。

等式右端：从点$A(-r-1,0)$到点$B(n-m,m)$的路径数为：

$$\binom{n-m-(-r-1)+m-0}{m-0}=\binom{n+r+1}{m}$$

25．给出$\binom{r}{r}+\binom{r+1}{r}+\binom{r+2}{r}+\cdots+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r+1}$的组合意义。

证明：（1）等式右端：从$n+1$个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$中，任选$r+1$个元素的组合方案数为：$\binom{n+1}{r+1}$。

（2）等式左端：从$n+1$不同元素$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$中选取$r+1$个元素，一定选元素$a_{r+k+1}\,(k=0,1,2,\cdots,n-r)$，但不选元素$a_{r+k+2},\cdots,a_n,a_{n+1}$的方案数。根据乘法法则，当 k 值取定时，这样的方案数为从其余的$r+k$个元素中任取 r 个的方案数，即$\binom{r+k}{r}$，再根据加法法则，总的方案数有：$\sum_{k=0}^{n-r}\binom{r+k}{r}$

26．证明 $\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}$。

证明：考虑从 m 双互不相同的鞋中取出 n 只，$n\le m$，要求其中没有任何两只是成对的，求方案数。

一方面，先从 m 双鞋中选取 n 双，共有$\binom{m}{n}$种选法，再从此 n 双中每双

抽掉一只，有 2^n 种取法，由乘法原理，总的方案数为：$2^n\binom{m}{n}$。

另一方面，先取出 $k(k=0,1,\cdots,n)$ 只左脚的鞋，再在其余的 $m-k$ 双中取出 $n-k$ 只右脚的鞋，则总的方案数为：

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}$$

所以，$\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}=2^n\binom{m}{n}$。

♦ 另法：

根据 $\binom{m}{r}\binom{m-r}{n-r}=\binom{m}{n}\binom{n}{r}$ （$n\geq r$）（$r=0,1,2,\cdots,n$）

从而有：

$$\begin{aligned}&\binom{m}{0}\binom{m}{n}+\binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{m-n}{0}\\&=\binom{m}{n}\binom{n}{0}+\binom{m}{n}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{n}\binom{n}{n}\\&=\binom{m}{n}\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}\right]\\&=2^n\binom{m}{n}\end{aligned}$$

27．对于给定的正整数 n，证明在所有 $C(n,r)\ (r=1,2,\cdots,n)$ 中，当

$$k=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2},\dfrac{n+1}{2} & , \quad n\text{为奇数}\\ \dfrac{n}{2} & , \quad n\text{为偶数}\end{cases}$$

时，$C(n,r)$ 取得最大值。

证明：取 $C(n,k)$ 与 $C(n,k-1)$ 进行比较。$\dfrac{C(n,k)}{C(n,k-1)}=\dfrac{n-k+1}{k}$，

当 $k<\dfrac{n}{2}$ 时，$\dfrac{n-k+1}{k}>1$，即 $C(n,k)>C(n,k-1)$，

当 $k>\dfrac{n}{2}$ 时，$\dfrac{n-k+1}{k}<1$，即 $C(n,k)<C(n,k-1)$，

因此，只有当 $k=\dfrac{n}{2}$ 或最接近 $\dfrac{n}{2}$ 时，$C(n,k)$ 取得最大值。

28．（1）用组合方法证明 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ 和 $\dfrac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 都是整数。

（2）证明 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整数。

证明：（1）考虑 $2n$ 个有区别的球放入 n 个不同的盒子里，每盒两个，盒中球不计顺序，则方案数为：$\dfrac{(2n)!}{\underbrace{2!\cdot 2!\cdots\cdot 2!}_{n个}}=\dfrac{(2n)!}{2^n}$，

方案数是整数，所以 $\dfrac{(2n)!}{2^n}$ 是整数。

同理，考虑 $3n$ 个有区别的球放入 n 个不同的盒子里，每盒 3 个，盒中球不计顺，则方案数为：$\dfrac{(3n)!}{\underbrace{3!\cdot 3!\cdots\cdot 3!}_{n个}}=\dfrac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$，

方案数是整数，所以 $\dfrac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ 是整数。

（2）考虑 n^2 个不同的球放入 n 个相同的盒子，每盒 n 个，盒中球不计顺序的方案。

先假设盒子是不同的，则这样的方案数为：$\dfrac{(2n)!}{\underbrace{n!\cdot n!\cdots\cdot n!}_{n个}}=\dfrac{(n^2)!}{(n!)^n}$，

又盒子是相同的，所以方案数应为：$\dfrac{(n^2)!}{(n!)^n \cdot (n!)}=\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$，

方案数必然是整数，所以 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是整数。

29．（1）在 2n 个球中，有 n 个相同，求从这 2n 个球中选取 n 个的方案数。

（2）在 $3n+1$ 个球中，有 n 个相同，求从这 $3n+1$ 个球中选取 n 个的方案数。

解：（1）问题即：从集合 $S=\{n\cdot e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$ 中，选取 n 个的方案数，

即多项式 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x)^n$ 中 x^n 的系数，即

$$1\times C_n^n+1\times C_n^{n-1}+\cdots+1\times C_n^0=2^n$$

从这 2n 个球中选取 n 个的方案数为 2^n 种。

（2）问题即：从集合 $S=\{n\cdot e_1,e_2,\cdots,e_{2n},e_{2n+1},e_{2n+2}\}$ 中，选取 n 个的方案数，

即多项式$(1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x)^{2n+1}$中$x^n$的系数，即

$$1\times C_{2n+1}^{n}+1\times C_{2n+1}^{n-1}+\cdots+1\times C_{2n+1}^{0}=\sum_{i=0}^{n}C_{2n+1}^{i}=2^{2n+1}/2=4^n$$

30．证明在由字母表$\{0,1,2\}$生成的长度为 n 的字符串中，

（1）0 出现偶数次的字符串有$\dfrac{3^n+1}{2}$个；

（2）$\dbinom{n}{0}2^n+\dbinom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\dbinom{n}{q}2^{n-q}=\dfrac{3^n+1}{2}$，其中 $q=2\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$。

证明：（1）采用数学归纳法

当$n=1$时，0 出现偶数次（0 次），长度为 1 的字符串为“1”和“2”两个字符串，而$\dfrac{3^1+1}{2}=2$，故结论成立。

假设当$n=k\ (k\geq 1)$时，结论成立，

即 0 出现偶数次，长度为 k 的字符串有$\dfrac{3^k+1}{2}$个，

当$n=k+1$时，0 出现偶数次，长度为$k+1$的字符串包括两部分：

① 在 0 出现偶数次，长度为 k 的字符串后面再增加一位不是 0 的数（只能是 1 或 2），因此，这样的字符串有$2\times\dfrac{3^k+1}{2}=3^k+1$个。

② 给 0 出现奇数次，长度为 k 的字符串后面再增加一个 0，

因此，这样的字符串有：$\left(3^k-\dfrac{3^k+1}{2}\right)=\dfrac{3^k-1}{2}$。

根据加法法则，0 出现偶数次，长度为$k+1$的字符串共有：

$3^k+1+\dfrac{3^k-1}{2}=\dfrac{3^{k+1}+1}{2}$，即$n=k+1$时，结论也成立。

所以，根据数学归纳法，结论成立。

（2）由（1）知，右端表示 0 出现偶数次的字符串数。

而左端代表的组合问题是：

长度为 n 的字符串中，有 0 个 0 的字符串数有：$\dbinom{n}{0}2^n$，

有 2 个 0 的字符串数有：$\binom{n}{2}2^{n-2}$，

…，

有 q 个 0 的字符串数有：$\binom{n}{q}2^{n-q}$，

根据加法法则，可知，左端代表的是长度为 n 的字符串中 0 出现偶数次的字符串数，因此

$$\binom{n}{0}2^{n}+\binom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\binom{n}{q}2^{n-q}=\frac{3^{n}+1}{2}$$

31．5 台教学仪器供 m 个学生使用，要求使用第 1 台和第 2 台的人数相等，有多少种分配方案？

解：

♦ **方法一：**

先从 m 个学生中选取 k 个使用第 1 台机器，再从剩下的 $m-k$ 个学生中选取 k 个使用第 2 台机器，其余 $m-2k$ 个学生可以任意使用剩下的 3 台机器，

按乘法原理，其组合数为 $\binom{m}{k}\binom{m-k}{k}\cdot 3^{m-2k}$，这里 $k=0,1,2,\cdots q\ (q=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor)$，

于是，按加法原理，共有 $\sum_{k=0}^{q}\binom{m}{k}\binom{m-k}{k}\cdot 3^{m-2k}$ 种使用方案。

♦ **方法二：**

先从 m 个学生种选出 2k 个，再将选出 2k 个学生平均分到 1、2 台机器上，其余的 $m-2k$ 个学生可以任意使用剩下的 3 台机器，

按乘法法则，其组合数为 $\binom{m}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 3^{m-2k}$，这里 $k=0,1,2,\cdots q\ (q=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor)$

于是，按加法原理，共有 $\sum_{k=0}^{q}\binom{m}{2k}\binom{2k}{k}\cdot 3^{m-2k}$ 种使用方案。

32．由 n 个 0 及 n 个 1 组成的字符串，其任意前 k 个字符中，0 的个数不少于 1 的个数的字符串有多少？

解：（参见 P21，例 1.8.8）转化为格路问题。即从点 $(0,0)$ 到 (n,n)，只能从对角线上方走，但可以碰到对角线的所有最短路径数。显然，第一步必然要走到

点$(0,1)$，因此可以转换为从点$(0,1)$到(n,n)的所有满足条件的路径数，进一步，可以转换为从$(0,1)$点到$(n,n+1)$，只能从对角线上方走，但不可以碰到对角线的所有路径数，因为从$(0,1)$点到$(n,n+1)$的所有经过对角线的路径数与从$(1,0)$点到$(n,n+1)$点的所有路径数是一一对应的，因此，所求的字符串有：

$$\binom{n-0+(n+1)-1}{n}-\binom{n-1+(n+1)-0}{n-1}=C(2n,n)-C(2n,n-1)\text{（个）}$$

♦ **方法二：**由 n 个 1 和 n 个 0 组成的 2n 位二进制数共有$\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$个(2n 个不尽相异元素的全排列)，

设所求的二进制数共有b_n个，不符合要求的数有r_n个。而不合要求的数的特征是从左向右扫描时，必然在某一位首次出现 0 的个数小于 1 的个数，即从左向右累计到第 2k＋1 位时出现 k 个 0 和$k+1$个 1。此时，后$2(n-k)-1$位上有$n-k-1$个 1，$n-k$个 0。将后部分的 0 改写为 1，1 改写为 0。结果整个数变成由$n+1$个和$n-1$个 0 组成的 2n 位数 z。即一个不合要求的数唯一对应于这样的一个数 z。

反之，给定一个由$n+1$个 1 和$n-1$个 0 组成的 2n 位数 z．由于 1 比 0 多 2 个，故一定在某一位首次出现 0 的累计数少于 1 的累计数。依同法将此位后的 0 与 1 互换，使 z 变成由 n 个 1 和 n 个 0 组成的 2n 位数。

所以，这两种二进制数一一对应。即 $r_n=\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

故 $b_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}-r_n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}-\dfrac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}=\dfrac{1}{n+1}C(2n,n)$。

习题二（母函数及其应用）

1．求下列数列的母函数$(n=0,1,2,\cdots)$

（1）$\left\{(-1)^n\binom{a}{n}\right\}$；

（2）$\{n+5\}$；

（3）$\{n(n-1)\}$；

（4）$\{n(n+2)\}$；

解：（1）母函数为：$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{a}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}(-x)^n=(1-x)^a$；

（2）母函数为：$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+5\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-x}=\frac{5-4x}{(1-x)^2}$；

- **方法二：**

$$
\begin{aligned}
G(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+5)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'+\frac{4}{1-x}=\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'+\frac{4}{1-x}\\
&=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{4}{1-x}=\frac{5-4x}{(1-x)^2}
\end{aligned}
$$

（3）母函数为：

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n-2\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{2x}{(1-x)^3}-\frac{2x}{(1-x)^2}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}；$$

- **方法二：**

$$
\begin{aligned}
G(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=0+0+x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\\
&=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+2}\right)''\\
&=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=x^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''\\
&=\frac{2x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}
$$

（4）母函数为：

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}。$$

- **方法二：**

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+2)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+2}\right)''-\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)'-\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''-\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{1}{1-x}$$
$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''-\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{1}{1-x}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

2．证明序列$C(n,n),C(n+1,n),C(n+2,n),\cdots$的母函数为 $\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$ 。

证明：因为 $C(n+k,n)=C(n+k-1,n)+C(n+k-1,n-1)$

令$G_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k,n)x^k=C(n,n)+C(n+1,n)x+C(n+2,n)x^2+C(n+3,n)x^3+\cdots$，

则 $x\cdot G_n(x)=C(n,n)x+C(n+1,n)x^2+C(n+2,n)x^3+\cdots$，

$$G_{n-1}(x)=C(n-1,n-1)+C(n,n-1)x+C(n+1,n-1)x^2+C(n+2,n-1)x^3+\cdots$$

而 $(1-x)G_n(x)-G_{n-1}(x)=0$

故 $G_n(x)=\dfrac{1}{1-x}\cdot G_{n-1}(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}\cdot G_{n-2}(x)=\cdots\cdots=\dfrac{1}{(1-x)^n}\cdot G_0(x)$

又
$$G_0(x)=C(0,0)+C(1,0)x+C(2,0)x^2+C(3,0)x^3+\cdots$$
$$=1+x+x^2+x^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-x}$$

所以 $G_n(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}}$

- **方法二：**

  已知$S=\{\infty\cdot e_1,\ \infty\cdot e_2,\cdots,\ \infty\cdot e_n\}$的 k−组合数为$C(n+k-1,k)$，

  其母函数为：$A(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots)^n=\dfrac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

  序列$C(n,n),C(n+1,n),C(n+2,n),\cdots$的母函数为

$$\begin{aligned}G(x)&=C(n,n)+C(n+1,n)x+C(n+2,n)x^2+C(n+3,n)x^3+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k,n)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k,k)x^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+1+k-1,k)x^k\\&=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\end{aligned}$$

3．设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，求序列 $\{a_n\}$ 的母函数。

其中，a_n 是 S 的满足下列条件的 n 组合数。

（1）S 的每个元素都出现奇数次；

（2）S 的每个元素都出现 3 的倍数次；

（3）e_1 不出现，e_2 至多出现一次；

（4）e_1 只出现 1、3 或 11 次，e_2 只出现 2、4 或 5 次；

（5）S 的每个元素至少出现 10 次。

解：（1）$G(x)=(x+x^3+x^5+\cdots+x^{2r+1}+\cdots)^4=\left(\dfrac{x}{1-x^2}\right)^4$

（2）$G(x)=(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3r}+\cdots)^4=\left(\dfrac{1}{1-x^3}\right)^4$

（3）$G(x)=(1+x)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$

（4）
$$\begin{aligned}G(x)&=(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2\\&=\frac{(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)}{(1-x)^2}=\frac{x^3+2x^5+x^6+x^7+x^8+x^{13}+x^{15}+x^{16}}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

（5）$G(x)=(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4=\left(\dfrac{x^{10}}{1-x}\right)^4$

4．投掷两个骰子，点数之和为 r $(2\le r\le 12)$，其组合数是多少？

解：用 x^i 表示骰子的点数为 i，

（1）若两个骰子不同，则问题等价于 r 的特殊有序 2-分拆

$$\begin{cases}r=r_1+r_2\\1\le r_i\le 6,\quad i=1,2\end{cases}$$

故相应的母函数为

$$\begin{aligned}G(x)&=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\\&=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}\end{aligned}$$

则点数之和为 r 的方案总数就是 x^r 的系数 $(2 \le r \le 12)$。

（2）若两个骰子相同，则问题等价于 r 的特殊无序 2-分拆

$$\begin{cases} r = r_1 + r_2 \\ 6 \ge r_1 \ge r_2 \ge 1 \end{cases}$$

而此问题又可转化为求 r 的最大分项等于 2，且项数不超过 6 的分拆数，

即求方程 $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = r \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 1, \quad x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$ 的非负整数解的个数。

相应的母函数为

$$\begin{aligned} G(x) &= \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^5\right)x^2 + \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)\left(x^2\right)^2 \\ &\quad + \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(x^2\right)^3 + \left(1 + x + x^2\right)\left(x^2\right)^4 + \left(1 + x\right)\left(x^2\right)^5 + \left(x^2\right)^6 \\ &= x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 2^9 + 3x^{10} + x^{11} + x^{12} \end{aligned}$$

其中点数之和为 r 的方案数就是 x^r 的系数。

5．投掷 4 个骰子，其点数之和为 12 的组合数是多少？

解： 参考第 4 题。

（第二版第 5 题）

居民小区组织义务活动，号召每家出一到两个人参加。设该小区共有 n 个家庭，现从中选出 r 人，问：

（1）设每个家庭都是 3 口之家，有多少种不同的选法？当 n=50 时，选法有多少种？

（2）设 n 个家庭中两家有 4 口人，其余家庭都是 3 口人，有多少种选法？

解：（1） $G(x) = \left(C_3^1 x + C_3^2 x^2\right)^n$

（2） $G(x) = \left(C_3^1 x + C_3^2 x^2\right)^{n-2}\left(C_4^1 x + C_4^2 x^2\right)^2$

（第二版第 6 题）

把 n 个相同的小球放入编号为 $1, 2, 3, \cdots, m$ 的 m 个盒子中，使得每个盒子内的球数不小于它的编号数。已知 $n \ge \dfrac{m^2 + m}{2}$，求不同的放球方法数 $g(n, m)$。

解：对应母函数为：

$$G(x)=(x+x^2+x^3+\cdots)(x^2+x^3+x^4+\cdots)\cdots(x^m+x^{m+1}+x^{m+2}+\cdots)=\frac{x^{m(m+1)}}{(1-x)^m}$$

$$=x^{m(m+1)}(1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m+1)}{2!}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$+\frac{m(m+1)\cdots[m+n-m(m+1)-1]}{[n-m(m+1)]!}x^{n-m(m+1)}+\cdots$$

故 $g(n,m)=\dfrac{m(m+1)\cdots[m+n-m(m+1)-1]}{[n-m(m+1)]!}=\dfrac{m(m+1)\cdots(n-m^2-1)}{[n-m(m+1)]!}$

6．红、黄、蓝三色的球各 8 个，从中取出 9 个，要求每种颜色的球至少一个，问有多少种不同的取法？

解：对应的母函数为：

$$G(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8)^3$$
$$=x^3(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^3$$
$$=x^3(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+7x^8+6x^9+5x^{10}$$
$$+4x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+x^{14})(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$$

从中取 9 个对应的组合数为 x^9 的系数，即

$$1\times1+2\times1+3\times1+4\times1+5\times1+6\times1+7\times1=28\text{（种）}$$

♦ **方法二：**

原问题等价于从集合 $S=\{8\cdot a,\ 8\cdot b,\ 8\cdot c\}$ 中取出 9 个元素，且每个元素至少取一个。现在先把元素 a、b、c 各取一个，然后再随意选出 6 个，则问题转变为从集合 $S_1=\{7\cdot a,\ 7\cdot b,\ 7\cdot c\}$ 中取出 6 个元素，且每个元素个数不限，求重复组合的方案数。又由于每个元素的个数大于 6，故从 S_1 中取 6 个元素与从集合 $S_1=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$ 中取出 6 个元素的组合数一样多，因此不同的取法为

$$C_{3+6-1}^{6}=C_8^2=28\text{（种）}$$

7．将币值为 2 角的人民币，兑换成硬币（壹分、贰分和伍分）可有多少种兑换方法？

解：该题用 1 分、2 分、5 分的硬币组成 20 分。是可重复的无序拆分：

$$G(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

其母函数为：

$$=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\right](1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

$$=\left[\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}x^i+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i\right](1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1+(-1)^i+2(i+1)\right)x^i\cdot(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

则不同的兑换方法为 x^{20} 的系数，即

$$\frac{1}{4}\Big[\left[1+(-1)^{20}+2(20+1)\right]\cdot 1+\left[1+(-1)^{15}+2(15+1)\right]\cdot 1+$$
$$+\left[1+(-1)^{10}+2(10+1)\right]\cdot 1+\left[1+(-1)^{5}+2(5+1)\right]\cdot 1+\left[1+(-1)^{0}+2(0+1)\right]\cdot 1\Big]$$
$$=29$$

即有 29 种兑换方法。

8．有 1 克重砝码 2 枚，2 克重砝码 3 枚，5 克重砝码 3 枚，要求这 8 个砝码只许放在天平的一端，能称几种重量的物品？有多少种不同的称法？

解：该题属于有限重复的无序拆分问题。对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^5+x^{10}+x^{15})$$
$$=1+x+2x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+2x^8+2x^9+2x^{10}+3x^{11}+3x^{12}$$
$$+2x^{13}+2x^{14}+2x^{15}+3x^{16}+3x^{17}+2x^{18}++2x^{19}+x^{20}+2x^{21}+x^{22}+x^{23}$$

所以能称 1～23 克等 23 种重量的物品。

总共的称法为母函数的各项系数之和，再减去常数项，即总共有

$G(1)-1=3\times4\times4-1=47$（种）不同的称法。

其中，称 1、3、20、22、23 克重量各有 1 种称法；

称 2、4、5、8、9、10、13、14、15、18、19、21 克重量各有 2 种称法；

称 6、7、11、12、16、17 克重量各有 3 种乘法；

若要枚举出各种方案，则可作母函数：

$$G(x,y,z)=(1+x+x^2)(1+y^2+y^4+y^6)(1+z^5+z^{10}+z^{15})$$

项 $x^{n_1}x^{n_1'}y^{n_2}y^{n_2'}y^{n_2''}z^{n_5}z^{n_5'}z^{n_5''}$ $(n_i,n_i',n_i''=i\text{ 或}0)$ 即为称 $n_1+n_2+n_2'+n_2''+n_5+n_5'+n_5''=n$ 克重量的一种方案。

9．证明不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的正整数解组的个数为 $C(r-1,n-1)$。

解：该问题即，求正整数 r 的 n 有序分拆。

问题可转换为：将 r 个无区别的球，放入 n 个不同的盒子中，每盒至少 1 个的组合问题。可以先在每个盒子中放 1 球，再将 $r-n$ 个无区别的球，放入 n 个不同的盒子中，每盒球数不限，则其方案数为：

$$C(n+(r-n)-1,r-n)=C(r-1,n-1)$$

故该不定方程的正整数解组的个数为 $C(r-1,n-1)$。

♦ **方法二：**

问题可以视为将 r 个相同的 1 放入 n 个盒子。由于将 $\boldsymbol{x_i}$ 之间的值互换，对应不同的解，所以盒子不同。设共有 $\boldsymbol{a_r}$ 个解，则 $\boldsymbol{a_r}$ 的母函数为

$$G\left(x\right)=\left(x+x^2+x^3+\cdots\right)^n=\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

$$=x^n\sum_{r=0}^{\infty}C_{n+r-1}^{r}x^r=\sum_{r=0}^{\infty}C_{n+r-1}^{r}x^{n+r}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k-1}^{k-n}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k-1}^{n-1}x^k$$

所以 $a_r=C\left(r-1,n-1\right)$

10．求方程 $x+y+z=24$ 的大于 1 的整数解的个数。

解：该题相当于将 24 的 3 有序分拆，并且要求每个分项大于 1。

其母函数为：

$$G(x)=(x^2+x^3+\cdots)^3=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^3=\frac{1}{2}x^5\left(\frac{2x}{(1-x)^3}\right)=\frac{1}{2}x^5\sum_{k=0}^{\infty}k(k+1)x^k$$

所求的整数解的个数即为 x^{24} 的系数：$\frac{1}{2}\square 19\square(19+1)=190$。

11．设 $a_n=\sum_{k=0}^{n}C(n+k,2k)$，$b_n=\sum_{k=0}^{n}C(n+k,2k+1)$，其中 $a_0=1$，$b_0=0$。试证：

（1）$a_{n+1}=a_n+b_{n+1}$，$b_{n+1}=a_n+b_n$；

（2）求出 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的母函数 $A(x)$，$B(x)$。

证明：（1）

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1+k,2k) \\
&= C(n+1,0)+\sum_{k=1}^{n+1} C(n+1+k,2k) \\
&= C(n,0)+\sum_{k=1}^{n+1} C(n+k,2k)+\sum_{k=1}^{n+1} C(n+k,2k-1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n+k,2k)+\sum_{k=0}^{n} C(n+k+1,2k+1) \quad (\because C(n+n+1,2n+2)=0) \\
&= a_n+\sum_{k=0}^{n+1} C(n+k+1,2k+1) \quad (\because C(n+1+n+1,2n+3)=0) \\
&= a_n+b_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n+b_n &= \sum_{k=0}^{n} C(n+k,2k)+\sum_{k=0}^{n} C(n+k,2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C(n+k+1,2k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C(n+1+k,2k+1) \quad (\because C(2n+2,2n+3)=0) \\
&= b_{n+1}
\end{aligned}
$$

（2） 因为

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+b_n)x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \\
&= 1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (\because b_0=0) \\
&= 1+xA(x)+B(x)
\end{aligned}
$$

所以 $(x-1)A(x)+B(x)=-1$

同理，

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+b_{n-1})x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} \\
&= xA(x)+xB(x)
\end{aligned}
$$

所以，$xA(x)+(x-1)B(x)=0$，

解联立方程组 $\begin{cases}(x-1)A(x)+B(x)=-1\\ xA(x)+(x-1)B(x)=0\end{cases}$，即可得

$$A(x)=\frac{1-x}{1-3x+x^2}，\quad B(x)=\frac{x}{1-3x+x^2}$$

12．设 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_k\}$，求序列 $\{p_n\}$ 的母函数，

其中 p_n 是 S 的满足下列条件的 n 排列数：

（1）S 的每个元素都出现奇数次；

（2）S 的每个元素至少出现 4 次；

（3）e_i 至少出现 i 次 $(i=1,2,\cdots,k)$；

（4）e_i 至多出现 i 次 $(i=1,2,\cdots,k)$；

解：（1）母函数为：$G_e(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^k=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^k$；

（2）母函数为：$G_e(x)=\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)^k=\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)^k$；

（3）母函数为：$G_e(x)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=i}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}\right)$；

（4）母函数为：$G_e(x)=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{i}\frac{x^j}{j!}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^i}{i!}\right)$；

13．把 23 本书分给甲乙丙丁四人，要求这四个人得到的书的数量分别不超过 9 本、8 本、7 本、6 本，问：

（1）若 23 本书相同，有多少种不同的分法？

（2）若 23 本书都不相同，又有多少种不同的分法？

解：（1）对应的母函数为：

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x+x^2+\cdots+x^8)\\&\quad(1+x+x^2+\cdots+x^7)(1+x+x^2+\cdots+x^6)\\&=(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+7x^7+7x^8\\&\quad+7x^9+6x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+3x^{13}+2x^{14}+x^{15})\\&\quad(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+8x^8\\&\quad+7x^9+6x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+3x^{13}+2x^{14}+x^{15})\end{aligned}$$

所求的分法数就是 x^{23} 的系数，即

$$7\cdot1+7\cdot2+6\cdot3+5\cdot4+4\cdot5+3\cdot6+2\cdot7+1\cdot8=119\text{（种）}$$

（2）对应的母函数为：

$$
\begin{aligned}
G_e(x) &= (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^9}{9!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^8}{8!}) \\
&\quad (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^7}{7!})(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^6}{6!}) \\
&= \left[1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{3!}\right)x^3\right. \\
&\quad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{8!}+\frac{1}{1!7!}+\frac{1}{2!6!}+\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{5!3!}+\frac{1}{6!2!}\right)x^8+\cdots+\left(\frac{1}{9!6!}\right)x^{15}\right] \\
&\quad \left[1+\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{1!}\right)x+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!1!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!2!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{3!}\right)x^3\right. \\
&\quad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{8!}+\frac{1}{1!7!}+\frac{1}{2!6!}+\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{5!3!}+\frac{1}{6!2!}+\frac{1}{7!1!}\right)x^8+\cdots+\left(\frac{1}{8!7!}\right)x^{15}\right]
\end{aligned}
$$

所求的分法数就是$\frac{x^{23}}{23!}$的系数，即

$$
\begin{aligned}
&23!\cdot\left[\left(\frac{1}{8!}+\frac{1}{1!7!}+\frac{1}{2!6!}+\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{5!3!}+\frac{1}{6!2!}\right)\cdot\left(\frac{1}{8!7!}\right)\right. \\
&\quad +\left(\frac{1}{9!}+\frac{1}{1!8!}+\frac{1}{2!7!}+\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{4!5!}+\frac{1}{5!4!}+\frac{1}{6!3!}\right)\cdot\left(\frac{1}{6!8!}+\frac{1}{7!7!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{1}{1!9!}+\frac{1}{2!8!}+\frac{1}{3!7!}+\frac{1}{4!6!}+\frac{1}{5!5!}+\frac{1}{6!4!}\right)\cdot\left(\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{6!7!}+\frac{1}{7!6!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{1}{2!9!}+\frac{1}{3!8!}+\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{5!6!}+\frac{1}{6!5!}\right)\cdot\left(\frac{1}{4!8!}+\frac{1}{5!7!}+\frac{1}{6!6!}+\frac{1}{7!5!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{1}{3!9!}+\frac{1}{4!8!}+\frac{1}{5!7!}+\frac{1}{6!6!}\right)\cdot\left(\frac{1}{3!8!}+\frac{1}{4!7!}+\frac{1}{5!6!}+\frac{1}{6!5!}+\frac{1}{7!4!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{1}{4!9!}+\frac{1}{5!8!}+\frac{1}{6!7!}\right)\cdot\left(\frac{1}{2!8!}+\frac{1}{3!7!}+\frac{1}{4!6!}+\frac{1}{5!5!}+\frac{1}{6!4!}+\frac{1}{7!3!}\right) \\
&\quad +\left(\frac{1}{5!9!}+\frac{1}{6!8!}\right)\cdot\left(\frac{1}{1!8!}+\frac{1}{2!7!}+\frac{1}{3!6!}+\frac{1}{4!5!}+\frac{1}{5!4!}+\frac{1}{6!3!}+\frac{1}{7!2!}\right) \\
&\quad \left.+\left(\frac{1}{6!9!}\right)\cdot\left(\frac{1}{8!}+\frac{1}{1!7!}+\frac{1}{2!6!}+\frac{1}{3!5!}+\frac{1}{4!4!}+\frac{1}{5!3!}+\frac{1}{6!2!}+\frac{1}{7!1!}\right)\right] \\
&= 26\,281\,939\,980\,582
\end{aligned}
$$

14．8 台计算机分给 3 个单位，第一个单位的分配量不超过 3 台，第二个单位不超过 4 台，第三个单位不超过 5 台，问共有几种分配方案？

解：对应的母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$
$$=(1+2x+3x^2+4x^3+4x^4+3x^5+2x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$$

所求的分配方案数即 x^8 的系数，即分配方案数为：

$$4\cdot 1+4\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1=14 \text{（种）}$$

15．用母函数证明下列等式成立：

（1）$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$；

（2）$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}$。

证明：（1）

♦ **方法一**：根据范德蒙恒等式

$$\binom{m+n}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

令 $m=r=n$，即得

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

♦ **方法二**：因为 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$，两边展开得

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]^2$$

比较 x^n 次方的系数，即得

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$$

（2）

♦ **方法一**：令 $a_m=C(n,n)+C(n+1,n)+\cdots+C(n+m,n)$，

则 $a_{m+1}=a_m+C(n+m+1,n)=a_m+C(n+m+1,m+1)$，

且 $a_0=C(n,n)=1$，

令 $A(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

则 $A(x)=1+xA(x)+\sum\limits_{m=0}^{\infty}C(n+m+1,m+1)x^{m+1}$

即 $(1-x)A(x)=1+C(n+1,1)x+C(n+2,2)x^2+C(n+3,3)x^3+\cdots$

因为 $1+C(n+1,1)x+C(n+2,2)x^2+C(n+3,3)x^3+\cdots=(1-x)^{-(n+1)}$，

所以 $(1-x)A(x)=(1-x)^{-(n+1)}$，

故 $$A(x)=\frac{1}{(1-x)^{n+2}}$$
$$=1+C(n+2,1)x+C(n+3,2)x^2+C(n+4,3)x^3+\cdots+C(n+m+1,m)x^m+\cdots$$

所以 $a_m=C(n+m+1,m)=C(n+m+1,n+1)$。证毕。

♦ **方法二：**

$$(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\cdots+(1+x)^{n+m}$$
$$=(1+x)^n\frac{(1+x)^{m+1}-1}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{1}{x}\left[(1+x)^{n+m+1}-(1+x)^n\right]$$

比较两边 $\boldsymbol{x^n}$ 的系数，即可得：$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}=\binom{n+m+1}{n+1}$。

♦ **方法三（组合意义法）**

等式右端：相当于从 $n+m+1$ 个不同的球中取 $n+1$ 个球的组合，

其组合方案数为 $C(n+m+1,n+1)$；

等式左端：把这 $n+m+1$ 个球编号为 $1,2,\cdots,n+m+1$，按取出的球中最小的编号，可分为如下的 m+1 类：

如果取出的 $n+1$ 个球中最小编号是 1，其余 n 个球要从去掉 1 号球后剩下的 $n+m$ 个球中选取，此类组合方案数为 $C(n+m,n)$；

如果取出的 $n+1$ 个球中最小编号是 2，则 1 不能被选取，其余 n 个球要从去掉 1，2 号球后剩下的 $n+m-1$ 个球中选取，此类组合方案数为 $C(n+m-1,n)$；…，依次类推，

如果取出的 $n+1$ 个球中最小编号是 m，则 $1,2,\cdots,m-1$ 不能被选取，其余 n 个球要从去掉 $1,2,\cdots,m-1,m$ 号球后剩下的 $n+1$ 个球中选取，此类组合方案数为 $C(n+1,n)$；

如果取出的 $n+1$ 个球中最小编号是 $m+1$，则 $1,2,\cdots,m$ 不能被选取，其

余 n 个球要从去掉$1,2,\cdots,m,m+1$号球后剩下的 n 个球中选取，此类组合方案数为$C(n,n)$；

因此，按加法原理，从$n+m+1$个不同的球中取$n+1$个球的组合方案数为$C(n,n)+C(n+1,n)+\cdots+C(n+m,n)$。

故等式两边相等。

16. 证明自然数 n 分拆为互异的正整数之和的分拆数等于 n 分拆为奇数之和的分拆数。

证明：将 n 分拆为互异的正整数之和的分拆数的母函数为：

$$\begin{aligned}G_1(x)&=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\cdots\\&=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^6}\cdot\cdots\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\cdots\end{aligned}$$

将 n 分拆为奇数之和的分拆数的母函数为：

$$\begin{aligned}G_2(x)&=\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{3i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}x^{5i}\right)\cdots\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\cdots=G_1(x)\end{aligned}$$

所以，两种分拆的方案数相同。

17．求自然数 50 的分拆总数，要求分拆的每个分项不超过 3。

解：其母函数为：

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\right](1+x^3+x^6+\cdots)\\&=\left[\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}x^i+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i\right](1+x^3+x^6+\cdots)\\&=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(1+(-1)^i+2(i+1)\right)x^i\cdot(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=(1+x^3+x^6+\cdots)\cdot\begin{cases}\frac{1}{2}(i+2) & i\text{为偶数}\\ \frac{1}{2}(i+1) & i\text{为奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

则所求的分拆数为 x^{50} 的系数，即

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big[(2+3\cdot 0+2)+(2+3\cdot 1+1)+(2+3\cdot 2+2)+(2+3\cdot 3+1)\\
&\quad +\cdots+(2+3\cdot 15+1)+(2+3\cdot 16+2)\big]\\
&=\frac{1}{2}[2\cdot 17+\frac{3\cdot 16\cdot 17}{2}+2\cdot 9+1\cdot 8]=234
\end{aligned}
$$

习题三（递推关系）

1．解下列递推关系：

（1）$\begin{cases} a_n-7a_{n-1}+10a_{n-2}=0 \\ a_0=0,a_1=1 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} a_n+6a_{n-1}+9a_{n-2}=0 \\ a_0=0,a_1=1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} a_n+a_{n-2}=0 \\ a_0=0,a_1=2 \end{cases}$

（4）$\begin{cases} a_n=2a_{n-1}-a_{n-2} \\ a_0=a_1=1 \end{cases}$

（5）$\begin{cases} a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3} \\ a_0=0,a_1=1,a_2=2 \end{cases}$

解：（1）对应的特征方程为： $x^2-7x+10=0$，解得 $x_1=2,x_2=5$。

所以齐次递推方程的通解为： $a_n=A\cdot 2^n+B\cdot 5^n$，

代入初始条件，得： $a_0=A+B=0$， $a_1=2A+5B=1$，

解得： $A=-\frac{1}{3},B=\frac{1}{3}$，　　故　 $a_n=-\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{3}\cdot 5^n$。

（2）对应的特征方程为： $x^2+6x+9=0$，解得： $x_1=x_2=-3$，

所以，齐次递推方程的通解为： $a_n=(A+Bn)\cdot(-3)^n$，

代入初始条件， $a_0=A=0$， $a_1=(A+B)\cdot(-3)=1$，

解得： $A=0,B=-\frac{1}{3}$，故 $a_n=-\frac{1}{3}n\cdot(-3)^n$。

（3）对应的特征方程为： $x^2+1=0$，解得： $x_1=i,x_2=-i$，

所以，齐次递推方程的通解为： $a_n=A\cdot(i)^n+B\cdot(-i)^n$，

代入初始条件， $a_0=A+B=0$， $a_1=A\cdot i-B\cdot i=2$，

解得：$A=-i,B=i$，故　$a_n=(i)^{n-1}+(-i)^{n-1}$。

（4）对应的特征方程为：$x^2-2x+1=0$，解得：$x_1=x_2=1$，

所以，齐次递推方程的通解为：$a_n=A+Bn$，

代入初始条件，$a_0=A=1$，$a_1=A+B=1$，

解得：$A=1,B=0$，故 $a_n=1$。

（5）对应的特征方程为：$x^3-x^2-9x+9=0$，解得：$x_1=1,x_2=3,x_3=-3$，

所以，齐次递推方程的通解为：$a_n=A+B\cdot 3^n+C\cdot(-3)^n$，

代入初始条件，$a_0=A+B+C=0$，$a_1=A+3B-3C=1$，

$a_2=A+9B+9C=2$，

解得，$A=-\dfrac{1}{4},B=\dfrac{1}{3},C=-\dfrac{1}{12}$，故　$a_n=-\dfrac{1}{4}+3^{n-1}-\dfrac{1}{12}\cdot(-3)^n$

2．求由 A，B，C，D 组成的允许重复的排列中 AB 至少出现一次的排列数。

解：

♦ **方法一：**

我们只要求出 n 位排列中不出现 AB 的排列个数 a_n，则至少出现一次 AB 的排列个数为 $b_n=4^n-a_n$。

a_n 可以分成两部分：

$a_n^{(1)}$：在 n 位排列中不出现 AB 且在第 n 位出现 A 的排列数目。

$a_n^{(2)}$：在 n 位排列中不出现 AB 且在第 n 位出现 B 或 C 或 D 的排列的数目。

因此，$a_n=a_n^{(1)}+a_n^{(2)}$，

显然，若在 n 位排列中不出现 AB，则在前 $n-1$ 位中也不会出现 AB，

考虑第 n 位：

（1）若第 n 位为 A，则第 $n-1$ 位可以是 A、B、C、D 中的任何一位；

（2）若第 n 位为 B，则第 $n-1$ 位只能是 B、C、D 中任何一位；

（3）若第 n 位为 C 或 D，则第 $n-1$ 为可以是 A、B、C、D 中任一位；

故可得递推关系：

$$\begin{cases} a_n^{(1)}=a_{n-1}^{(1)}+a_{n-1}^{(2)} \\ a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(1)}+3a_{n-1}^{(2)} \\ a_1^{(1)}=1,a_1^{(2)}=3 \end{cases}$$

令　$A(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(1)}x^i$，$B(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(2)}x^i$，

方程 $a_n^{(1)} = a_{n-1}^{(1)} + a_{n-1}^{(2)}$ 两边同乘于 x^n $(n \ge 2)$，即

$$\begin{aligned}
x^2:&\quad a_2^{(1)} = a_1^{(1)} + a_1^{(2)} \\
x^3:&\quad a_3^{(1)} = a_2^{(1)} + a_2^{(2)} \\
x^4:&\quad a_4^{(1)} = a_3^{(1)} + a_3^{(2)} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

将上面的式子进行累加，可得：$\sum_{i=2}^{\infty} a_i^{(1)} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} x^{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} x^{i+1}$，

故 $A(x) - x = xA(x) + xB(x)$，即 $(1-x)A(x) - xB(x) = x$

方程 $a_n^{(2)} = 2a_{n-1}^{(1)} + 3a_{n-1}^{(2)}$ 两边同乘于 x^n $(n \ge 2)$，即

$$\begin{aligned}
x^2:&\quad a_2^{(2)} = 2a_1^{(1)} + 3a_1^{(2)} \\
x^3:&\quad a_3^{(2)} = 2a_2^{(1)} + 3a_2^{(2)} \\
x^4:&\quad a_4^{(2)} = 2a_3^{(1)} + 3a_3^{(2)} \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

同样，将上面的式子进行累加，可得 $\sum_{i=2}^{\infty} a_i^{(2)} x^i = 2\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(1)} x^{i+1} + 3\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(2)} x^{i+1}$

故 $B(x) - 3x = 2xA(x) + 3xB(x)$，即 $-2xA(x) + (1-3x)B(x) = 3x$

故可得关于 $A(x), B(x)$ 的联立方程组

$\begin{cases} (1-x)A(x) - xB(x) = x \\ -2xA(x) + (1-3x)B(x) = 3x \end{cases}$，解得：

$$A(x) = \frac{x}{1-4x+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{1-(2+\sqrt{3})x} - \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})x}\right]$$

$$B(x) = \frac{3x-x^2}{1-4x+x^2} = \frac{x}{1-4x+x^2} \cdot (3-x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{1-(2+\sqrt{3})x} - \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})x}\right](3-x)$$

故 $a_n^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]$，

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{3\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right] - \left[(2+\sqrt{3})^{n-1} - (2-\sqrt{3})^{n-1}\right]\right\}$$

$$a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{4\left[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\right]-\left[(2+\sqrt{3})^{n-1}-(2-\sqrt{3})^{n-1}\right]\right\}$$

因此，$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{n-1}(7+4\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})^{n-1}(7-4\sqrt{3})\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}\right]$$

所以 $b_n = 4^n - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}\right]$。

♦ **方法二：**

设 a_n 表示由 A，B，C，D 组成的允许重复的不出现 AB 的 n 位排列数目；

由 A，B，C，D 组成的允许重复的不出现 AB 的 n 位排列数目，可分为两个部分：

（1）第 n 位是 A，C 或 D，则前 $n-1$ 位不出现 AB 的排列数为 a_{n-1}，则此类排列数为 $3a_{n-1}$；

（2）第 n 位是 B，前 $n-1$ 位形成的不出现 AB 的排列数有 a_{n-1} 个。其中，要去掉第 $n-1$ 位是 A 的排列，这样的排列由前 $n-2$ 位形成的不出现 AB 的 a_{n-2} 个 $n-2$ 位排列，再加上 AB 形成，于是此类排列的数目为 $a_{n-1}-a_{n-2}$；

根据加法法则，可得到递推关系：

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2} = 4a_{n-1}-a_{n-2} \\ a_1 = 4, a_2 = 15 \end{cases}$$

对应齐次方程的特征方程为：$x^2-4x+1=0$，

解得 $x_1 = 2+\sqrt{3}$，$x_2 = 2-\sqrt{3}$，故齐次方程的通解为：

$a_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n$，代入初始条件：

$a_1 = A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3}) = 4$，$a_2 = A(2+\sqrt{3})^2+B(2-\sqrt{3})^2 = 15$，

解得：$A = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(2+\sqrt{3})$，$A = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})$

故 $a_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}\right]$

因此，由 A，B，C，D 组成的允许重复的且 AB 至少出现一次的 n 位排列数目为 $4^n - \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{n+1}-(2-\sqrt{3})^{n+1}]$ 。

3．求 n 位二进制数中相邻两位不出现 11 的数的个数。

解：设所求的 n 位二进制数有 a_n 个，对第 1 位数的数值有两种可能：

（1）0，则余下的 $n-1$ 位数，满足条件的个数有 a_{n-1} 个；

（2）1，则第 2 位数只能为 0，余下的 $n-2$ 位数，满足条件的个数有 a_{n-2} 个；

由加法法则，可得：$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，且 $a_1 = 2, a_2 = 3$，

由递推关系反推，可得 $a_0 = 1$，

所以，$$a_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

4．利用递推关系求下列和：

（1）$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

（2）$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

（3）$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+2)$

（4）$S_n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$

解：（1）显然，$S_n - S_{n-1} = n^2$，

对应的齐次方程的特征方程为：$x-1=0$，解得 $x=1$，

所以对应的齐次方程对应的通解为：$\overline{S_n} = A(1)^n = A$，

因为 1 是特征根，所以对应的特解为：

$$S_n^* = n(Bn^2 + Cn + D) = Bn^3 + Cn^2 + Dn$$

所以方程的通解为 $S_n = Bn^3 + Cn^2 + Dn + A$，

显然，$S_0 = 0$，$S_1 = 1$，$S_2 = 5$，$S_3 = 14$，代入上式，可得

$S_0 = A = 0$，$S_1 = B + C + D + A = 1$，$S_2 = 8B + 4C + 2D + A = 5$，

$S_3 = 27B + 9C + 3D + A = 14$，解得：

$A = 0$，$B = \frac{1}{3}$，$C = \frac{1}{2}$，$D = \frac{1}{6}$，

所以 $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

♦ **方法二：**

显然，$S_n - S_{n-1} = n^2$

类似，可得 $S_{n-1}-S_{n-2}=(n-1)^2$，两式相减，可得 $S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=2n-1$，

同理，可得 $S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=2(n-1)-1$，两式再相减，可得

$S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=2$，同理，可得 $S_{n-1}-3S_{n-2}+3S_{n-3}-S_{n-4}=2$，

两式再相减，可得关于 S_n 的齐次定解问题：

$$\begin{cases} S_n-4S_{n-1}+6S_{n-2}-4S_{n-3}+S_{n-4}=0 \\ S_0=0, S_1=1, S_2=5, S_3=14 \end{cases}$$

其特征方程为：$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$，解得：$x_1=x_2=x_3=x_4=1$，

故 $S_n=(A+Bn+Cn^2+Dn^3)(1)^n=A+Bn+Cn^2+Dn^3$，

代入初始条件，$S_0=A=0$，$S_1=A+B+C+D=1$，

$S_2=A+2B+4C+8D=5$，$S_3=A+3B+9C+27D=14$，

解得：$A=0, B=\dfrac{1}{6}, C=\dfrac{1}{2}, D=\dfrac{1}{3}$，故 $S_n=\dfrac{1}{6}n+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{3}n^3=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

♦ **方法三（快速求系数）**

通解为：$S_n=A_0+A_1n+A_2\dfrac{n(n-1)}{2!}+A_3\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$，

初始条件：$S_0=0, S_1=1, S_2=5, S_3=14$，代入得

$A_0=0$，$A_0+A_1=1$，$A_0+2A_1+A_2=5$，$A_0+3A_1+3A_2+A_3=14$，

解得：$A_0=0$，$A_1=1$，$A_2=3$，$A_3=2$

所以，$S_n=n+3\dfrac{n(n-1)}{2!}+2\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

（2）显然，$S_n-S_{n-1}=n(n-1)$，

同理对应的齐次方程的特征根为 1，通解为 $\overline{S_n}=A(1)^n=A$，

非齐次方程的特解为：$S_n^*=n(Bn^2+Cn+D)=Bn^3+Cn^2+Dn$，

所以，非齐次方程的通解为：$S_n=Bn^3+Cn^2+Dn+A$，

初始条件为：$S_0=0, S_1=0, S_2=2, S_3=8$，代入上式，可得

$S_0=A=0$， $S_1=B+C+D+A=0$， $S_2=8B+4C+2D+A=2$，

$S_3=27B+9C+3D+A=8$，解得： $A=0$， $B=\frac{1}{3}$， $C=0$， $D=-\frac{1}{3}$，

所以 $S_n=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n=\frac{n^3-n}{3}$

- **方法二：**

显然， $S_n-S_{n-1}=n(n-1)$，类似可得， $S_{n-1}-S_{n-2}=(n-1)(n-2)$，

两式相减得 $S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=2(n-1)$，同理可得 $S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=2(n-2)$，

两式再相减得 $S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=2$，

同理得 $S_{n-1}-3S_{n-2}+3S_{n-3}-S_{n-4}=2$，两式再相减，可得关于 S_n 的齐次定解

问题： $\begin{cases}S_n-4S_{n-1}+6S_{n-2}-4S_{n-3}+S_{n-4}=0\\ S_0=0,S_1=0,S_2=2,S_3=8\end{cases}$

由（1）知，方程的通解为： $S_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3$，代入初始条件得：

$S_0=A=0$， $S_1=A+B+C+D=0$， $S_2=A+2B+4C+8D=2$，

$S_3=A+3B+9C+27D=8$，解得： $A=0,B=-\frac{1}{3},C=0,D=\frac{1}{3}$，

故 $S_n=-\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}n^3=\frac{n^3-n}{3}$

- **方法三（快速求系数）**

通解为： $S_n=A_0+A_1n+A_2\frac{n(n-1)}{2!}+A_3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$，

初始条件： $S_0=0,S_1=0,S_2=2,S_3=8$，代入得

$A_0=0$， $A_0+A_1=0$， $A_0+2A_1+A_2=2$， $A_0+3A_1+3A_2+A_3=8$，

解得： $A_0=0$， $A_1=0$， $A_2=2$， $A_3=2$

所以， $S_n=2\frac{n(n-1)}{2!}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

（3）显然， $S_n-S_{n-1}=n(n+2)$，

同理对应的齐次方程的特征根为 1，特解为 $\overline{S_n}=A(1)^n=A$，

非齐次方程的特解为：$S_n^* = n(Bn^2 + Cn + D) = Bn^3 + Cn^2 + Dn$，

所以，非齐次方程的通解为：$S_n = Bn^3 + Cn^2 + Dn + A$，

初始条件为：$S_0 = 0, S_1 = 3, S_2 = 11, S_3 = 26$，代入上式，可得

$S_0 = A = 0$，$S_1 = B + C + D + A = 3$，$S_2 = 8B + 4C + 2D + A = 11$，

$S_3 = 27B + 9C + 3D + A = 26$，解得：$A = 0$，$B = \frac{1}{3}$，$C = \frac{3}{2}$，$D = \frac{7}{6}$，

所以 $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

♦ **方法二：**

显然，$S_n - S_{n-1} = n(n+2)$，类似可得，$S_{n-1} - S_{n-2} = (n-1)(n+1)$，

两式相减得 $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 2n + 1$，

同理可得 $S_{n-1} - 2S_{n-2} + S_{n-3} = 2(n-1) + 1$，两式再相减得

$S_n - 3S_{n-1} + 3S_{n-2} - S_{n-3} = 2$，同理得 $S_{n-1} - 3S_{n-2} + 3S_{n-3} - S_{n-4} = 2$，

两式再相减，可得关于 S_n 的齐次定解问题：

$$\begin{cases} S_n - 4S_{n-1} + 6S_{n-2} - 4S_{n-3} + S_{n-4} = 0 \\ S_0 = 0, S_1 = 3, S_2 = 11, S_3 = 26 \end{cases}$$

由（1）知，方程的通解为：$S_n = A + Bn + Cn^2 + Dn^3$，代入初始条件得：

$S_0 = A = 0$，$S_1 = A + B + C + D = 3$，$S_2 = A + 2B + 4C + 8D = 11$，

$S_3 = A + 3B + 9C + 27D = 26$，解得：$A = 0, B = \frac{7}{6}, C = \frac{3}{2}, D = \frac{1}{3}$，

故 $S_n = \frac{7}{6}n + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

♦ **方法三（快速求系数）**

通解为：$S_n = A_0 + A_1 n + A_2 \frac{n(n-1)}{2!} + A_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$，

初始条件：$S_0 = 0, S_1 = 3, S_2 = 11, S_3 = 26$，代入得

$A_0 = 0$，$A_0 + A_1 = 3$，$A_0 + 2A_1 + A_2 = 11$，$A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3 = 26$，

解得：$A_0 = 0$，$A_1 = 3$，$A_2 = 5$，$A_3 = 2$

所以，$S_n=3n+5\dfrac{n(n-1)}{2!}+2\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

（4）显然，$S_n-S_{n-1}=n(n+1)(n+2)$，

同理对应的齐次方程的特征根为 1，特解为$\overline{S_n}=A(1)^n=A$，

非齐次方程的特解为：$S_n^*=n(Bn^3+Cn^2+Dn+E)=Bn^4+Cn^3+Dn^2+En$，

所以，非齐次方程的通解为：$S_n=Bn^4+Cn^3+Dn^2+En+A$，

初始条件为：$S_0=0,S_1=6,S_2=30,S_3=90,S_4=210$，代入上式，可得

$S_0=A=0$，$S_1=B+C+D+E+A=6$，$S_2=16B+8C+4D+2E+A=30$，

$S_3=81B+27C+9D+3E+A=90$，$S_4=256B+64C+16D+4E+A=210$

解得：$A=0$，$B=\dfrac{1}{4}$，$C=\dfrac{3}{2}$，$D=\dfrac{11}{4}$，$E=\dfrac{3}{2}$

所以 $S_n=\dfrac{1}{4}n^4+\dfrac{3}{2}n^3+\dfrac{11}{4}n^2+\dfrac{3}{2}n=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)}{4}$

- **方法二：**

显然，$S_n-S_{n-1}=n(n+1)(n+2)$，类似可得，$S_{n-1}-S_{n-2}=n(n-1)(n+1)$，

两式相减得$S_n-2S_{n-1}+S_{n-2}=3n(n+1)$，

同理可得$S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=3n(n-1)$，两式再相减得

$S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=6n$，同理得$S_{n-1}-3S_{n-2}+3S_{n-3}-S_{n-4}=6(n-1)$，

两式再相减得$S_n-4S_{n-1}+6S_{n-2}-4S_{n-3}+S_{n-4}=6$，

同理可得$S_{n-1}-4S_{n-2}+6S_{n-3}-4S_{n-4}+S_{n-5}=6$，

两式再相减，可得关于S_n的齐次定解问题：

$$\begin{cases}S_n-5S_{n-1}+10S_{n-2}-10S_{n-3}+5S_{n-4}-S_{n-5}=0\\S_0=0,S_1=6,S_2=30,S_3=90,S_4=210\end{cases}$$

其特征方程为：$x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1=0$，$x=1$是五重特征根，

所以方程的通解为：$S_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4$，代入初始条件得：

$S_0 = A = 0$， $S_1 = A + B + C + D + E = 6$， $S_2 = A + 2B + 4C + 8D + 16E = 30$，

$S_3 = A + 3B + 9C + 27D + 81E = 90$， $S_4 = A + 4B + 16C + 64D + 256E = 210$，

解得： $A = 0, B = \frac{3}{2}, C = \frac{11}{4}, D = \frac{3}{2}, E = \frac{1}{4}$，

故 $S_n = \frac{3}{2}n + \frac{11}{4}n^2 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

♦ **方法三（快速求系数）**

通解为： $S_n = A_0 + A_1 n + A_2 \frac{n(n-1)}{2!} + A_3 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + A_4 \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$，

初始条件： $S_0 = 0, S_1 = 6, S_2 = 30, S_3 = 90, S_4 = 210$，代入得

$A_0 = 0$， $A_0 + A_1 = 6$， $A_0 + 2A_1 + A_2 = 30$， $A_0 + 3A_1 + 3A_2 + A_3 = 90$，

$A_0 + 4A_1 + 6A_2 + 4A_3 + A_4 = 210$

解得： $A_0 = 0$， $A_1 = 6$， $A_2 = 18$， $A_3 = 18$， $A_4 = 6$

所以，
$$\begin{aligned} S_n &= 6n + 18\frac{n(n-1)}{2!} + 18\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + 6\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \end{aligned}$$

5．求 n 位四进制数中 2 和 3 必须出现偶数次的数目。

解：设符合条件的 n 位四进制数有 a_n 个，2 出现奇数次 3 出现偶数次的数有 b_n 个，2 出现偶数次 3 出现奇数次的数有 c_n 个，两者都出现奇数次的数有 d_n 个。

（1）对 2 和 3 出现偶数次的 n 位四进制数，考虑最高位，可分为三种情况：

① 最高位是 0 或 1，则在后续的 $n-1$ 个数字中 2 和 3 还必须出现偶数次，这样的四进制数共有 $2a_{n-1}$ 个；

② 最高位是 2，后 $n-1$ 位必须有奇数个 2 偶数个 3，这样的数有 b_{n-1} 个；

③ 最高位是 3，后 $n-1$ 位必须有偶数个 2 奇数个 3，这样的数有 c_{n-1} 个。

各类情形，没有重复的数。由加法法则，得 a_n 满足的递推关系为：

$$a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$$

（2）对 2 出现奇数次 3 出现偶数次的 n 位四进制数，考虑最高位，可分为三种情况：

① 最高位是 0 或 1，则在后续的 $n-1$ 个数字中 2 出现奇数次 3 出现偶数次，这样的四进制数共有 $2b_{n-1}$ 个；

② 最高位是 2，后 $n-1$ 位必须有偶数个 2 偶数个 3，这样的数有 a_{n-1} 个；

③ 最高位是 3，后 $n-1$ 位必须有奇数个 2 奇数个 3，这样的数有 d_{n-1} 个。

各类情形，没有重复的数。由加法法则，得 b_n 满足的递推关系为：

$$b_n = 2b_{n-1} + a_{n-1} + d_{n-1}$$

（3）对 2 出现偶数次 3 出现奇数次的 n 位四进制数，考虑最高位，

可分为三种情况：

① 最高位是 0 或 1，则在后续的 $n-1$ 个数字中 2 出现偶数次 3 出现奇数次，这样的四进制数共有 $2c_{n-1}$ 个；

② 最高位是 2，后 $n-1$ 位必须有奇数个 2 奇数个 3，这样的数有 d_{n-1} 个；

③ 最高位是 3，后 $n-1$ 位必须有偶数个 2 偶数个 3，这样的数有 a_{n-1} 个。

各类情形，没有重复的数。由加法法则，得 c_n 满足的递推关系为：

$$c_n = 2c_{n-1} + d_{n-1} + a_{n-1}$$

（4）对 2 出现奇数次 3 出现奇数次的 n 位四进制数，考虑最高位，

可分为三种情况：

① 最高位是 0 或 1，则在后续的 $n-1$ 个数字中 2 出现奇数次 3 出现奇数次，这样的四进制数共有 $2d_{n-1}$ 个；

② 最高位是 2，后 $n-1$ 位必须有偶数个 2 奇数个 3，这样的数有 c_{n-1} 个；

③ 最高位是 3，后 $n-1$ 位必须有奇数个 2 偶数个 3，这样的数有 b_{n-1} 个。

各类情形，没有重复的数。由加法法则，得 c_n 满足的递推关系为：

$$d_n = 2d_{n-1} + c_{n-1} + b_{n-1}$$

故可得联立方程组：
$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + d_{n-1} \\ c_n = a_{n-1} + 2c_{n-1} + d_{n-1} \\ d_n = b_{n-1} + c_{n-1} + 2d_{n-1} \end{cases} \qquad n \ge 2$$

初始条件为：$a_1 = 2, b_1 = c_1 = 1, d_1 = 0$，

a_n, b_n, c_n, d_n 对应的母函数分别为：$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$，

$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$，$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n$，从而可以得到关于母函数的联立方程：

$$\begin{cases} (1-2x)A(x) - xB(x) - xC(x) = 2x \\ -xA(x) + (1-2x)B(x) - xD(x) = x \\ -xA(x) + (1-2x)C(x) - xD(x) = x \\ -xB(x) - xC(x) + (1-2x)D(x) = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{aligned}A(x)&=\frac{2x(1-3x)}{(1-2x)(1-4x)}\\&=(1-3x)\cdot\left(\frac{1}{1-4x}-\frac{1}{1-2x}\right)\\&=(1-3x)\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n-2^n\right)x^n\right]\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n-2^n\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}3\left(4^n-2^n\right)x^{n+1}\end{aligned}$$

则 a_n 即 x^n 的系数，所以

$$a_n=4^n-2^n-3(4^{n-1}-2^{n-1})=4^{n-1}+2^{n-1}\quad（n\geq 1）$$

6．试求由 a，b，c 三个字母组成的 n 位符号串中不出现 aa 图像的符号串的数目。

解：假设符合条件的符合串的数目为 a_n，考虑第 1 位数的数值，有两种情况：

（1）第 1 位为 a，则第 2 位只能是 b 或 c，余下的 $n-2$ 位满足条件的有 a_{n-2} 个；根据乘法法则，这类情况总共有 $2a_{n-2}$ 个；

（2）第 1 位为 b 或 c，则余下的 $n-1$ 满足条件的有 a_{n-1} 个；

根据加法法则，可得递推关系 $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$，且 $a_1=3, a_2=8$；

对应的特征方程为：$x^2-2x-2=0$，解得：$x=1\pm\sqrt{3}$，

因此，通解为 $a_n=A\left(1+\sqrt{3}\right)^n+B\left(1-\sqrt{3}\right)^n$，代入初始条件，

$a_1=A\left(1+\sqrt{3}\right)+B\left(1-\sqrt{3}\right)=3$，$a_2=A\left(1+\sqrt{3}\right)^2+B\left(1-\sqrt{3}\right)^2=8$，

解得 $A=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}, B=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$，

故 $$a_n=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

7．利用递推关系解行列式：

$$\begin{vmatrix}a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b\end{vmatrix}$$

解：设行列式的值为D_n，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_n \qquad \text{(按第一行展开)}$$

$$=\left(a+b\right)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab\begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=\left(a+b\right)D_{n-1}-ab\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2} \qquad \text{（按第一列展开）}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$$

故可得到递推关系：$\begin{cases} D_n=\left(a+b\right)D_{n-1}-abD_{n-2} \\ D_1=a+b, \quad D_2=a^2+ab+b^2 \end{cases}$

对应齐次方程的特征方程为：$x^2-\left(a+b\right)x+ab=0$，

解得：$x_1=a,x_2=b$，对于通解，根据 a 与 b 的关系分情况讨论：

（1）$a=b\neq 0$，则通解为$D_n=\left(A+Bn\right)a^n$，代入初始条件，得

$D_1=\left(A+B\right)a=a+b=2a$，$D_2=\left(A+2B\right)a^2=a^2+ab+b^2=3a^2$，

解得$A=B=1$，所以行列式的值为；$D_n=\left(1+n\right)a^n$（$n\geq 1$）。

（2）$a\neq b$：则通解为：$D_n=Aa^n+Bb^n$，代入初始条件，得

$D_1=Aa+Bb=a+b$，$D_2=Aa^2+Bb^2=a^2+ab+b^2$，

解得，$A=\dfrac{a}{a-b}$，$B=\dfrac{b}{b-a}$，所以行列式的值为：

$$D_n=\frac{a}{a-b}a^n+\frac{b}{b-a}b^n=\frac{a^{n+1}}{a-b}-\frac{b^{n+1}}{a-b} \quad （n\geq 1）$$

8．在$n\times m$方格的棋盘上，放有 k 枚相同的车，设任意两枚不能相互吃掉的放法数为$F_k(n,m)$，证明$F_k(n,m)$满足递推关系：

$$F_k(n,m)=F_k(n-1,m)+(m-k+1)F_{k-1}(n-1,m)$$

证明：考虑第一行有两种情况：

（1）有 1 枚棋子，则余下的$k-1$枚放在余下的$(n-1)\times m$棋盘上，有$F_{k-1}(n-1,m)$种放法；考虑棋子不能同行同列，$(n-1)\times m$棋盘上放了$k-1$枚棋子后，要在第一行放 1 枚棋子，则该棋子可放的位置有：$m-(k-1)$种，根据乘法法则，这类放法共有：$(m-k+1)F_{k-1}(n-1,m)$

（2）没有棋子，则 k 枚棋子要放在余下的$(n-1)\times m$棋盘上，有$F_k(n-1,m)$放法；

根据加法法则，可得$F_k(n,m)=F_k(n-1,m)+(m-k+1)F_{k-1}(n-1,m)$。

9．在$n\times n$方格的棋盘中，令$g(n)$表示棋盘里正方形的个数（不同的正方形可以叠交），试建立$g(n)$满足的递推关系。

解：设每个正方形方格的面积为单位 1，当棋盘大小由$(n-1)\times(n-1)$变为$n\times n$时，所增加的正方形为

（1）$(2n-1)$个面积为 1 的小正方形；

（2）包含（1）中小正方形且面积为 4 的正方形有：$2(n-1)-1=2n-3$个；

（3）包含（1）中小正方形且面积为 9 的正方形有：$2(n-2)-1=2n-5$个；

……

（n）所有方格组成的最大的正方形（面积为$\boldsymbol{n}^2$），只有 1 个；

因此，可以得到递推关系：

$$g(n)=g(n-1)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[2(n-k)-1\right]=g(n-1)+n^2,$$

即$g(n)$满足的递推关系为：$\begin{cases}g(n)=g(n-1)+n^2\\ g(1)=1\end{cases}$

10．过一个球的中心做 n 个平面，其中无 3 个平面过同一直径，问这些平面可把球的内部分成多少个两两无公共部分的区域？

解：设这 n 个平面把球内部分成a_n个两两无公共部分的区域，

显然：$a_0=1$，$a_1=2$，$a_2=4$。

当$n\geq 2$时，去掉所给的 n 个平面中的一个平面 P，则剩下的$n-1$平面把球分成a_{n-1} 个区域，。现把平面 P 放回原处，则 P 与其余$n-1$个平面都相交，且所得的$n-1$条交线都不同（因为无 3 个平面过同一直径），这$n-1$条交线

把平面 P 分成n部分，每部分把原来的一个区域划分成两个区域，故把平面 P 放回原处后增加了n个区域，从而a_n满足递推关系：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n \\ a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases} \quad \text{解得：} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

11．设空间的 n 个平面两两相交，每 3 个平面有且仅有一个公共点，任意 4 个平面都不共点，这样的 n 个平面把空间分割成多少个不重叠的区域？

解：设 n 个的平面把空间所分割成的不重叠的区域数为a_n；

显然，$a_0 = 1$，$a_1 = 2$，$a_2 = 4$，

当$n \geq 2$时，去掉所给的 n 个平面中的一个平面 P，则剩下的$n-1$平面把空间分割成a_{n-1} 个区域，。现把平面 P 放回原处，则 P 与其余$n-1$个平面都相交，且所得的$n-1$条交线两两相交（每 3 个平面只有一个公共点），且任意三条不共点（任意 4 个平面都不共点），这$n-1$条交线将平面 P 分割成：

$\frac{n(n-1)}{2} + 1$（个）不重叠的区域

（n 条直线能将平面分割成$\frac{n(n+1)}{2} + 1$个不重叠的区域，参见习题第 13 题）

每部分把原来的一个区域划分成两个区域，

故把平面 P 放回原处后增加了$\frac{n(n-1)}{2} + 1$个区域，

从而a_n满足递推关系：$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} + 1 \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4 \end{cases}$

下面解递推方程，采用迭代法：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = a_{n-1} + \binom{n}{2} + 1 \\ &= a_{n-2} + \binom{n-1}{2} + 1 + \binom{n}{2} + 1 \\ &= \cdots\cdots \\ &= a_1 + \left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2}\right] + n - 1 \\ &= \binom{n+1}{3} + n + 1 = \frac{n^3 + 5n + 6}{6} \end{aligned}$$

（见第一章习题第 25 题，$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$）

12．相邻位不同为 0 的 n 位二进制数中一共出现了多少个 0？

解：假设符合条件的 n 位二进制数有 a_n 个，出现的 0 的个数为 b_n，

考虑第一位数，有两种情况：

（1）第 1 位数为 0，则第 2 位必为 1，余下的 $n-2$ 位的二进制数有 a_{n-2} 个，

故这类情况，共出现 0 的个数为：$a_{n-2}+b_{n-2}$；

（2）第 1 位数为 1，则余下的 $n-1$ 位二进制数有 a_{n-1} 个，

这类情况下，共出现 0 的个数位：b_{n-1}

根据加法法则，可得到递推关系：

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}+a_{n-2} \\ a_1 = 2, a_2 = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} b_n = a_{n-2}+b_{n-1}+b_{n-2} \\ b_1 = 1, b_2 = 2 \end{cases}$$

有递推关系可反推得：$a_0 = 1$，$b_0 = 0$

所以，$a_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$，

令 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，

则 $b_n - b_{n-1} - b_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^n - \beta^n\right]$，

对应的齐次方程的特征方程为 $x^2 - x - 1 = 0$，解得 $x_1 = \alpha, x_2 = \beta$，

所以非齐次方程 $c_n - c_{n-1} - c_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^n$ 的通解为：$c_n = A_1 n\alpha^n + B_1\alpha^n + C_1\beta^n$，

同理，$d_n - d_{n-1} - d_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\beta^n$ 的通解为：$d_n = A_2 n\beta^n + B_2\beta^n + C_2\alpha^n$，

则非齐次方程 $b_n - b_{n-1} - b_{n-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^n - \beta^n\right]$ 的通解为：

$b_n = c_n - d_n = (An+B)\alpha^n + (Cn+D)\beta^n$，

代入初始条件，可得：$b_0 = B + D = 0$，$b_1 = (A+B)\alpha + (C+D)\beta = 1$，

$b_2 = (2A+B)\alpha^2 + (2C+D)\beta^2 = 2$，$b_3 = (3A+B)\alpha^3 + (3C+D)\beta^3 = 5$，

解得：$A = \frac{1}{5}\alpha$，$B = \frac{2}{5\sqrt{5}}$，$C = \frac{1}{5}\beta$，$D = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$，

所以，$b_n=(\frac{\alpha}{5}n+\frac{2}{5\sqrt{5}})\alpha^n+(\frac{\beta}{5}n-\frac{2}{5\sqrt{5}})\beta^n$

13．平面上有两两相交，无 3 线共点的 n 条直线，试求这 n 条直线把平面分成多少个区域？

解：设这 n 条直线，把平面分成a_n个区域，显然$a_0=1,a_1=2,a_2=4$。

当$n\geq 2$时，去掉所给的 n 条直线中的一条直线 L，则剩下的$n-1$条直线把平面划分成a_{n-1}个区域。现在把 L 放回原处，则 L 与其余$n-1$条直线都相交，且所得的$n-1$个交点都不同（无三线共点）。这$n-1$个交点把直线 L 分成 n 段，每段把原来的区域划分成两个小区域，故把直线 L 放回原处后增加了 n 个区域，因此a_n满足递推关系：

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+n\\a_1=2\end{cases},\qquad \text{用迭代法解：}\quad \begin{aligned}&a_n=a_{n-1}+n\\&a_{n-1}=a_{n-2}+(n-1)\\&\quad\vdots\\&a_2=a_1+2\end{aligned}$$

所有式子相加，便可得：$a_n=\frac{n(n+1)}{2}+1$

14．证明 Fibonacci 数列的性质，当$n\geq 1$时，

（1）$F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=(-1)^n$

（2）$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

（3）$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1$

（4）$nF_1+(n-1)F_2+\cdots+2F_{n-1}+F_n=F_{n+4}-(n+3)$

证明：

（1）$F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=(-1)^n$

用数学归纳法：

$n=1$时，$F_2^2-F_1F_3=1^2-1\times 2=-1$，命题成立；

$n=2$时，$F_3^2-F_2F_4=2^2-1\times 3=1$，命题成立；

假设当$n=k$时，命题成立，即$F_{k+1}^2-F_kF_{k+2}=\left(-1\right)^k$，

当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}F_{k+2}^2-F_{k+1}F_{k+3}&=F_{k+2}(F_k+F_{k+1})-F_{k+1}(F_{k+1}+F_{k+2})\\&=F_kF_{k+2}-F_{k+1}^2=-(-1)^k=(-1)^{k+1}\end{aligned}$$

所以，$n=k+1$时，命题也成立；

由归纳原理知，命题成立。

♦ **方法二：**

$$F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]^2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}\right]$$

$$-\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[-2\left(-1\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+(-1)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{5}(-1)^n\left[2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right]=(-1)^n$$

（2）$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

证明：定义 $F_0=0$，则有 $F_2=F_1+F_0$，并且

$$F_{2n-2}F_{2n-1}+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n-2}\left(F_{2n}-F_{2n-2}\right)+\left(F_{2n}-F_{2n-2}\right)F_{2n}=F_{2n}^2-F_{2n-2}^2,\ \left(n\geq 1\right)$$

因此有：

$$\begin{aligned}&F_0\cdot F_1+F_1\cdot F_2=F_2^2-F_0^2\\&F_2\cdot F_3+F_3\cdot F_4=F_4^2-F_2^2\\&\qquad\vdots\\&F_{2n-2}\cdot F_{2n-1}+F_{2n-1}\cdot F_{2n}=F_{2n}^2-F_{2n-2}^2\end{aligned}$$

将上述式子两端各自相加并代入 $F_0=0$，即可得：

$$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$$

（3）$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1$

证明：与（2）类似，

$$F_{2n-1}F_{2n}+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n-1}\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)+\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-F_{2n-1}^2,$$

同理，

$$\begin{aligned}&F_1\cdot F_2+F_2\cdot F_3=F_3^2-F_1^2\\&F_3\cdot F_4+F_4\cdot F_5=F_5^2-F_3^2\\&\qquad\vdots\\&F_{2n-1}\cdot F_{2n}+F_{2n}\cdot F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-F_{2n-1}^2\end{aligned}$$

将上述式子两端各自相加并代入 $F_1=1$，即可得：

$$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n}F_{2n+1}=F_{2n+1}^2-1$$

（4）$nF_1+(n-1)F_2+\cdots+2F_{n-1}+F_n=F_{n+4}-(n+3)$

证明：采用数学归纳法。

$n=1$ 时，$F_1=1=5-(1+3)=F_5-(1+3)$，命题成立；

$n=2$ 时，$2F_1+F_2=3=8-(2+3)=F_6-(2+3)$，命题成立；

假设 $n=k$ 时，命题成立，即 $kF_1+(k-1)F_2+\cdots+2F_{k-1}+F_k=F_{k+4}-(k+3)$，

当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&(k+1)F_1+kF_2+(k-1)F_3+\cdots+2F_k+F_{k+1}\\&=\left[kF_1+(k-1)F_2+\cdots+2F_{k-1}+F_k\right]+\left[F_1+F_2+\cdots+F_k+F_{k+1}\right]\\&=\left(F_{k+4}-(k+3)\right)+\left(F_{k+3}-1\right)\\&=F_{k+5}-(k+4)\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时，命题也成立，

根据归纳法，命题成立。

15．证明：

（1）当 $n\ge 2$ 时，$F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$

（2）当 $n\ge 4$ 时，$F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+(-1)^{n-1}F_n=(-1)^{n-1}F_{n-1}+1$

证明：用数学归纳法。

（1）当 $n=1$ 时，$F_1^2=1=F_1\cdot F_2$，等式成立；

当 $n=2$ 时，$F_1^2+F_2^2=1+1=1\cdot 2=F_2\cdot F_3$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_k^2=F_k\cdot F_{k+1}$，

则，$n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}&F_1^2+F_2^2+\cdots+F_k^2+F_{k+1}^2\\&=F_k\cdot F_{k+1}+F_{k+1}^2=F_{k+1}\left(F_k+F_{k+1}\right)=F_{k+1}\cdot F_{k+2}\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时，等式也成立，

由归纳原理知，等式成立。

（2）由 Fibonacci 数列的定义，反推得 $F_0=0$

当 $n=1$ 时，$F_1=1=(-1)^0F_0+1$，等式成立，

当 $n=2$ 时，$F_1-F_2=1-1=0=(-1)^1F_1+1$，等式成立；

假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+(-1)^{k-1}F_k=(-1)^{k-1}F_{k-1}+1$，

则，$n=k+1$ 时有

$$F_1-F_2+F_3-F_4+\cdots+(-1)^{k-1}F_k+(-1)^kF_{k+1}$$
$$=(-1)^{k-1}F_{k-1}+1+(-1)^kF_{k+1}=(-1)^k\left(F_{k+1}-F_{k-1}\right)+1=(-1)^kF_k+1$$

即当$n=k+1$时，等式也成立，

由归纳原理知，等式成立。

16. 有 2n 个人在戏院售票处排队，每张戏票票价为 5 角，其中 n 个人各有一张 5 角钱，另外 n 个人各有一张 1 元钱，售票处无零钱可换。现将这 2n 个人看成一个序列，从第一个人开始，任何部分子序列内，都保证有 5 角钱的人不比有 1 元钱的人少，则售票工作能依次序进行，否则，只能中断，而请后面有 5 角钱的人先上来买票。前一种情况，售票工作能顺利进行，对应的序列称为依次可进行的。问有多少种这样的序列？

解：将持有 5 角的人看为 1，持有 1 元的人看为 0，则该问题等价于：

在由 n 个 1 和 n 个 0 组成的 2n 位二进制数中，从左到右扫描，1 的累计数不小于 0 的累计数，求这样的二进制数的个数。

见 P73 例 3.4.11。这样的序列有：$\dfrac{1}{n+1}C(2n,n)$（种）

17. 用a_n表示具有整数边长且周长为 n 的三角形的个数，证明

$$a_n=\begin{cases}a_{n-3} & \text{当}n\text{是偶数}\\ a_{n-3}+\dfrac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} & \text{当}n\text{是奇数}\end{cases}$$

证明：三边构成三角形的充要条件是：任二边之和都大于第三边。

（1）当 n 是偶数时

一方面，对于任一周长为$n-3$的整边三角形Δ_{n-3}，设其两较短边为 a、b，较长边为 c（三边可以相等，即可以 $a=b=c$），则必有 $a+b>c$。

于是可以知道：$(a+1)+(b+1)>(a+b)+2>c+2>c+1$ ，

从而三边 a+1，b+1，c+1 可构成一周长为 n 的整边三角形Δ_n，

因此，有 $a_{n-3}\le a_n$ 。

另一方面，对于任一周长为 n 的整边三角形Δ_n，设其两较短边为 a、b，较长边为 c（三边可以相等，即可以 $a=b=c$），则必有 $a+b>c$。

由于 n 是偶数，故可设$n=2k$；

由$a+b+c=n=2k$，可知$c<a+b=2k-c$，即$c<k$，

因此$c\le k-1$，从而$a+b\ge k+1$，

因此$a+b-c\ge(k+1)-(k-1)=2$，即$a+b\ge c+2$，

所以，$(a-1)+(b-1)=(a+b)-2\ge(c+2)-2=c>c-1$ ，

因此三边$a-1,b-1,c-1$可构成一周长为$n-3$的整边三角形Δ_{n-3}，

因此有：$a_n \le a_{n-3}$ 。

综上所述，就可以得到：$a_n = a_{n-3}$。

（2）当 n 为奇数时

对于任一周长为 n 的整边三角形Δ_n，设其两较短边为 *a*、*b*，较长边为 *c*（三边可以相等，即可以 *a*=*b*=*c*），则必有 *a*+*b*>*c*。

由于 n 是奇数，故可设$n=2k+3$（因为$n\ge 3$）；

由于$a+b+c=n=2k+3$，所以$c<a+b=2k+3-c$，即$c<k+3/2$，

故$c\le k+1$，从而$a+b\ge k+2$，

因此$a+b-c\ge(k+2)-(k+1)=1$，即$a+b\ge c+1$，

所以$(a-1)+(b-1)=(a+b)-2\ge(c+1)-2=c-1$，即$(a-1)+(b-1)\ge c-1$，

可分两种情况来讨论：

① $(a-1)+(b-1)>c-1$

这时$a-1,b-1,c-1$能构成一周长为$n-3$的整边三角形Δ_{n-3}，

这种情况下，周长为 n 的整边三角形Δ_n有a_{n-3}个。

② $(a-1)+(b-1)=c-1$

这时三边$a-1,b-1,c-1$不能构成周长为$n-3$的整边三角形，

而此时有：$(a-1)+(b-1)+(c-1)=(2k+3)-3=2k$，

因此 $(a-1)+(b-1)=c-1=k$ 。

■ 当$k=2l$为偶数时

这时三边$a-1,b-1,c-1$有$l+1$种构成方案，即

“$0,2l,2l$”，“$1,2l-1,2l$”，“$2,2l-2,2l$”，……，“$l,l,2l$”

因此三边 *a*，*b*，*c* 也有$l+1$种构成方案，它们可构成周长为 n 的整边三角形Δ_n的数目为：

$$l+1=\frac{k}{2}+1=\frac{\frac{n-3}{2}}{2}+1=\frac{n+1}{4}=\frac{n+(-1)^{2(l+1)}}{4}=\frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}\quad（个）$$

■ 当$k=2l+1$为奇数时

这时三边$a-1,b-1,c-1$也有$l+1$种构成方案，即

“$0,2l+1,2l+1$”，“$1,2l,2l+1$”，“$2,2l-1,2l+1$”，……，“$l,l+1,2l+1$”

因此三边 *a*，*b*，*c* 也有$l+1$种构成方案，它们可构成的周长为 n 的整边三角形Δ_n的数目为：

$$l+1=\frac{k}{2}+1=\frac{\frac{n-3}{2}}{2}+1=\frac{n+1}{4}=\frac{n+(-1)^{2(l+1)}}{4}=\frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4}\quad（个）$$

综上，满足条件$(a-1)+(b-1)=c-1$ 的周长为 n 的整边三角形的个数为：

$$\frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} \quad （个）$$

根据加法法则，由①②知，当 n 为奇数时周长为 n 的整边三角形的总个数为：

$$a_n = a_{n-3} + \frac{n+(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} \quad （个）$$

18.（1）证明边长为整数且最大边长为 r 的三角形的个数是

$$\begin{cases} \frac{1}{4}r(r+2) & 当r是偶数 \\ \frac{1}{4}(r+1)^2 & 当r是奇数 \end{cases}$$

（2）设 f_n 为边长不超过 $2n$ 的三角形的个数， g_n 为边长不超过 $2n+1$ 的三角形的个数，求 f_n 和 g_n 的解析表达式。

（1）证明：设三角形的三边长分别为 x, y, z ，且 $x \le y \le z = r$ ，显然 $x+y>z$ ，下面对 r 进行讨论。

$r=1$ 时，这时符合条件的三角形只有 1 个，即“$1,1,1$”，

显然 $1=(1+1)^2/4$，结论成立。

$r=2$ 时，符合条件的三角形只有 2 个，即“$1,2,2$”、“$2,2,2$”，

这时 $2=2(2+2)/4$，结论成立。

① $r=2k$ 为偶数时，

若 $x+y=2k+1$，则有 k 种方案，

即“$1,2k,2k$”，“$2,2k-1,2k$”，……，“$k,k+1,2k$”；

若 $x+y=2k+2$，则有 k 种方案，

即“$2,2k,2k$”，“$3,2k-1,2k$”，……，“$k+1,k+1,2k$”；

若 $x+y=2k+3$，则有 $k-1$ 种方案，

即“$3,2k,2k$”，“$4,2k-1,2k$”，……，“$k+1,k+2,2k$”；

若 $x+y=2k+4$，则有 $k-1$ 种方案，

即“$4,2k,2k$”，“$5,2k-1,2k$”，……，“$k+2,k+2,2k$”；

………………

若 $x+y=4k-1$，则有 1 种方案，即“$2k-1,2k,2k$”；

若 $x+y=4k$，则有 1 种方案，即“$2k,2k,2k$”；

综上，$r=2k$ 为偶数时，总的方案数为：

$$2(1+2+\cdots+k)=k(k+1)=r(r+2)/4，结论成立。$$

② $r=2k+1$ 为奇数时，

若 $x+y=2k+2$，则有 $k+1$ 种方案，

即“$1,2k+1,2k+1$”，“$2,2k,2k+1$”，……，“$k+1,k+1,2k$”；

若 $x+y=2k+3$，则有 k 种方案，

即“$2,2k+1,2k+1$”，“$3,2k,2k+1$”，……，“$k+1,k+2,2k+1$”；

若 $x+y=2k+4$，则有 k 种方案，

即“$3,2k+1,2k+1$”，“$4,2k,2k+1$”，……，“$k+2,k+2,2k+1$”；

若 $x+y=2k+5$，则有 $k-1$ 种方案，

即“$4,2k+1,2k+1$”，“$5,2k,2k+1$”，……，“$k+2,k+3,2k+1$”；

若 $x+y=2k+6$，则有 $k-1$ 种方案，

即“$5,2k+1,2k+1$”，“$6,2k,2k+1$”，……，“$k+3,k+3,2k+1$”；

………………

若 $x+y=4k+1$，则有 1 种方案，即“$2k,2k+1,2k+1$”；

若 $x+y=4k+2$，则有 1 种方案，即“$2k+1,2k+1,2k+1$”；

综上，$r=2k+1$ 为奇数时，总的方案数为：

$2(1+2+\cdots+k)+k+1=k(k+1)+k+1=(r+1)^2/4$，结论成立。

（2）解：令 $a_k=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(k+1)^2 & 当k为奇数时\\ \dfrac{1}{4}k(k+2) & 当k为偶数时\end{cases}$

则边长不超过 $2n$ 的三角形的个数为：$f_n=\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k$，

而边长不超过 $2n+1$ 的三角形的个数 $g_n=\sum\limits_{k=1}^{2n+1}a_k$，

于是有：$f_n-g_{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{2n}a_k-\sum\limits_{k=1}^{2n-1}a_k=\dfrac{2n(2n+2)}{4}=n(n+1)$，

$$g_n-f_n=\sum_{k=1}^{2n+1}a_k-\sum_{k=1}^{2n}a_k=\frac{(2n+1+1)^2}{4}=(n+1)^2,$$

$$f_n-f_{n-1}=\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2n-2}a_k=\frac{2n(2n+2)}{4}+\frac{(2n-1+1)^2}{4}=n(2n+1)$$

$$g_n-g_{n-1}=\sum_{k=1}^{2n+1}a_k-\sum_{k=1}^{2n-1}a_k=\frac{(2n+1+1)^2}{4}+\frac{2n(2n+2)}{4}=(n+1)(2n+1)$$

初始条件为：$f_0=0,f_1=a_1+a_2=1+2=3$，

$g_0=a_1=1,g_1=a_1+a_2+a_3=1+2+4=7$，

用迭代法解递推关系：
$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} &= n(2n+1) = 2n^2 + n \\ f_{n-1} - f_{n-2} &= 2(n-1)^2 + (n-1) \\ &\vdots \\ f_2 - f_1 &= 2\cdot 2^2 + 2 \\ f_1 - f_0 &= 2\cdot 1^2 + 1 \end{aligned}$$，

将上面式子两端分别相加，便可得：
$$\begin{aligned} f_n &= f_0 + 2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + \left(1 + 2 + \cdots + n\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6} \end{aligned}$$

同理：
$$\begin{aligned} g_n - g_{n-1} &= (n+1)(2n+1) = 2n^2 + 3n + 1 \\ g_{n-1} - g_{n-2} &= 2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ &\vdots \\ g_2 - g_1 &= 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1 \\ g_1 - g_0 &= 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1 \end{aligned}$$，

将上面式子两端分别相加，便可得：
$$\begin{aligned} g_n &= g_0 + 2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right) + 3\left(1 + 2 + \cdots + n\right) + n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{2}{3}n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{17}{6}n + 1 \end{aligned}$$

19．从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的整数，

设此选取的方案数为 $f(n,k)$。

（1）求 $f(n,k)$ 的递推关系及其解析表达式；

（2）将 1 与 n 也算作相邻的数，对应的选取方案数记作 $g(n,k)$，利用 $f(n,k)$ 求 $g(n,k)$。

解：（1）对元素 n 来说，不外乎两种情况：

① n 被选进某一 k 元子集。

这种情况下，$n-1$ 就不能选进这一 k 元子集，故其余 $k-1$ 个元素得从 $\{1,2,\cdots,n-2\}$ 中选取，共有 $f(n-2,k-1)$ 种选法。

② n 没有选进任一 k 元子集。

这种情况下，k 元素子集中的 k 个数可以从 $\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中去选取，故有 $f\left(n-1,k\right)$ 种选法。

由加法法则可得：$f\left(n,k\right) = f\left(n-2,k-1\right) + f\left(n-1,k\right)$

根据组合公式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$，我们推断 $f\left(n,k\right) = \binom{n-k+1}{k}$，

它满足递推公式，

$$f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}=f(n-1,k)+f(n-2,k-1)$$

下面利用递推关系对 n 进行归纳证明。

规定 $f\left(0,0\right)=1$， $f\left(0,k\right)=0 \quad \left(k\neq 0\right)$，

当 $n=1$时，显然有 $f\left(1,0\right)=1=C(1-0+1,0)$， $f\left(1,1\right)=1=C(1-1+1,1)$，

当 $n=2$时， $f\left(2,k\right)=f\left(0,k-1\right)+f\left(1,k\right)$，则

$$f\left(2,0\right)=f\left(0,-1\right)+f\left(1,0\right)=0+1=1=C(2-0+1,0)=1,$$

$$f\left(2,1\right)=f\left(0,0\right)+f\left(1,1\right)=1+1=2=C(2-1+1,1),$$

所以$n=1$， $n=2$时，有 $f\left(n,k\right)=\binom{n-k+1}{k}$成立。

假设小于 n 时结论成立，则当 n 时就有

$$f\left(n,k\right)=f\left(n-2,k-1\right)+f\left(n-1,k\right)=\binom{n-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}=\binom{n-k+1}{k}$$

结论也成立，

由归纳原理知，所以对一切正整数 n，有 $f\left(n,k\right)=\binom{n-k+1}{k}$

- **方法二：**

已知 $f\left(n,k\right)$是$\{1,2,\cdots,n\}$中的没有两个连续整数的 k 元子集的数目。

先在$\{1,2,\cdots,n\}$中任取 k 个不相邻元素构成组合$a_1,a_2,\cdots,a_k$，

不失一般性，可设$a_1<a_2<\cdots<a_k$，则$a_j-a_i\geq 2 \quad \left(1\leq i<j\leq k\right)$，令

$$b_i=a_i-\left(i-1\right),\quad i=1,2,\cdots k$$

则 $b_j-b_i\geq 1 \quad \left(1\leq i<j\leq k\right)$ 且有 $1\leq b_1<b_2<\cdots<b_k\leq n-k+1$，

因此所求组合数为从 1 至$n-k+1$中任取 k 个的组合数$\binom{n-k+1}{k}$，

即有 $f\left(n,k\right)=\binom{n-k+1}{k}$。

（**注意**：若$\boldsymbol{n+1<2k}$，则符合条件的组合数不存在）

（2）若 1 与 n 算是相邻的数时，从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数的方案数是从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数的方案数 $f\left(n,k\right)$，去掉不满足此假定的选数方案数：即所选 k 个数中既有数 1 又有数 n，这时数 2

和 n-1 都不能入选（因它们分别与数 1 和数 n 相邻），因此，其余 $k-2$ 个数只能从剩下的 $n-4$ 个数中选取，其方案数为 $f\left(n-1,k-2\right)$。

所以，在 1 与 n 算是相邻的数时，从 1 到 n 的自然数中选取 k 个不同且不相邻的数的总方案数

$$\begin{aligned} g(n,k) &= f(n,k) - f(n-4,k-2) \\ &= \binom{n-k+1}{k} - \binom{n-k-1}{k-2} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \end{aligned}$$

20．球面上有 n 个大圆，其中任何两个圆都相交于两点，但没有三个大圆通过同一点，用 a_n 表示这些大圆所形成的区域数，例如，$a_0=1, a_1=2$，试证明：

（1）$a_{n+1}=a_n+2n$；

（2）$a_n=n^2-n+2$

解：（1）当 $n\geq 1$，增加 1 个大圆 C，则 C 与其他 n 个圆都相交于 2 点，且都不相同，共有 $2n$ 个交点，这 $2n$ 个交点，把圆 C 分成 $2n$ 段弧，每段弧把原来的区域一分为二，故增加圆 C 后将增加 $2n$ 个区域，故可得递推公式：

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2n \\ a_0=1, a_1=2 \end{cases}$$

（2）用迭代法求解递推公式。

因为：
$$\begin{aligned} &a_n-a_{n-1}=2(n-1) \\ &\vdots \\ &a_3-a_2=2\times 2 \\ &a_2-a_1=2\times 1 \end{aligned}$$
，

将这些式子相加，可得 $a_n-a_1=2[1+2+\cdots+(n-1)]$，

所以　$a_n=n^2-n+2$。

21．（1）试计算从平面坐标点 $O(0,0)$ 到 $A(n,n)$ 点在对角线 OA 之上但可以经过 OA 上的点的递增路径的条数。

（2）试证明从平面坐标上 $O(0,0)$ 点到 $A(n,n)$ 点在对角线 OA 之上且不触及 OA 的递增路径的条数是 $\dfrac{1}{2(2n-1)}\dbinom{2n}{n}$。

解：（1）从 $O(0,0)$ 到 $A(n,n)$ 的最短路径必然是由 n 个 x 和 n 个 y 组成的长度为 2n 的路径，将 x 看为 0，y 看为 1，则从平面坐标点 $O(0,0)$ 到 $A(n,n)$ 点在对角线 OA 之上但可以经过 OA 上的点的递增路径是：由 n 个 1 和 n

个 0 组成的 2n 位的二进制数，并且从左到右扫描，1 的累计数不小于 0 的累计数。

见 P73 例 3.4.11。这样的最短路径有：$\frac{1}{n+1}C(2n,n)$（条）。

（2）因为不触及对角线 OA，所以满足条件的最短路径必然要经过点 $P(0,1)$ 和点 $B(n-1,n)$，且在对角线 PB 之上，但可经过 PB 上的点，即与（1）情况类似，故这样的路径有：$\frac{1}{(n-1)+1}\binom{2(n-1)}{n-1}=\frac{1}{2(2n-1)}\binom{2n}{n}$。

22．有多少个长度为 n 的 0 与 1 串，在这些串中，既不包含子串 010，也不包含子串 101？

解：设长度为 n 而满足条件的串有 a_n 个，显然，$a_1=2,a_2=4$，$a_3=6$，

可将串分为两类：

（1）最后两位相同。这种串可由长为 $n-1$ 而满足条件的串 a，再加上与 a 的末位相同的数字构成，如：$001\to0011$，因此这种串共有 a_{n-1} 个。

（2）最后两位不同。这种串可由长为 $n-2$ 的满足条件的串 a，再加上与 a 的末位先同而后异的两个数字构成，例如：$01\to0110$，$10\to1001$，因此这种串共有 a_{n-2} 个。

由加法法则，可得到递推关系：

$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\\a_1=2,a_2=4,a_3=6\end{cases}$$

由递推关系反推，可得 $a_0=2$，

所以，$a_n=2F_{n+1}=\frac{2}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right]$

第二版新增的部分习题

7．求由 0，1，2，3 作成的含有偶数个 2 的 n 可重排列的个数。

解：方法一（利用递推关系）

设由 0,1,2,3 作成的含有偶数个 2 的 n 可重复排列共有 a_n 个，

显然a_1=3，当 n≥2 时，在满足题意的 a_n个 n-可重复排列中，根据第 1 位数可分为两种情况：

（1） 第 1 位为 2，则剩下的 n-1 位，只能含有奇数个 2，这样的数共有$4^{n-1}-a_{n-1}$；

（2） 第 1 位不为 2，则剩下的 n－1 位，含有偶数个 2，这样的数有$3a_{n-1}$个。

故由加法原则，有

$$a_n=4^{n-1}-a_{n-1}+3a_{n-1}=2a_{n-1}+2^{2n-2}$$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+2^{n-2}$$

$$=\frac{a_{n-2}}{2^{n-2}}+2^{n-3}+2^{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{a_1}{2}+2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}$$

$$=\frac{3}{2}+2^{n-1}-1=2^{n-1}+\frac{1}{2},$$

所以 $a_n=2^{2n-1}+2^{n-1}$，（$n\geq 2$）。

显见当 n=1 时，上式仍成立，从而有 $a_n=2^{2n-1}+2^{n-1}$，（$n\geq 1$）

方法二（母函数法）

对应的指母函数为：

$$G_e(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots)^3(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots)$$

$$=e^{3x}(\frac{e^x-e^{-x}}{2})$$

$$=\frac{e^{4x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

所以，$a_n=2^{2n-1}+2^{n-1}$，（$n\geq 1$）

24．设把 2n 个人分成 n 个组且每组恰好有 2 个人的不同分组方法有a_n种，请给出a_n满足的递推关系并求解。

解：显然$a_1=1$，$a_2=3$，考虑 2 个人，

（1） 2 个人单独成一组，则剩下的 2(n-1)个人的分组方法有a_{n-1}种；

（2） 2 人在不同的组中，则得从剩下的 2(n-1)个人种选出 2 人，有$C_{2(n-1)}^2$种取法，

再将 2 人分到已有的 2 组中，有 2 种分法，剩下的 2(n-2)人有a_{n-2}种分法；

根据乘法法则和加法法则，有：$a_n=a_{n-1}+2C_{2(n-1)}^2 \cdot a_{n-2}$

解得：$a_n=\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$（用归纳法证明）

方法二：先将组看为是不同的，2n 个不同的人分到 n 个组，每组 2 人的分法有：$\dfrac{(2n)!}{2^n}$，又组是没有区别的，所以分法应为：$\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$

习题四（容斥原理）

1．试求不超过 200 的正整数中素数的个数。

解：因为$15^2=225, 13^2=169$，所以不超过 200 的合数必是$2,3,5,7,11,13$的倍数，而且其因子又不可能都超过 13。

设A_i为数 i 不超过 200 的倍数集，$i=2,3,5,7,11,13$，则

$|A_2|=\left\lfloor\dfrac{200}{2}\right\rfloor=100$，$|A_3|=\left\lfloor\dfrac{200}{3}\right\rfloor=66$，$|A_5|=\left\lfloor\dfrac{200}{5}\right\rfloor=40$，$|A_7|=\left\lfloor\dfrac{200}{7}\right\rfloor=28$，

$|A_{11}|=\left\lfloor\dfrac{200}{11}\right\rfloor=18$，$|A_{13}|=\left\lfloor\dfrac{200}{13}\right\rfloor=15$，$|A_2A_3|=\left\lfloor\dfrac{200}{2\times3}\right\rfloor=33$，

$|A_2A_5|=\left\lfloor\dfrac{200}{2\times5}\right\rfloor=20$，$|A_2A_7|=\left\lfloor\dfrac{200}{2\times7}\right\rfloor=14$，$|A_2A_{11}|=\left\lfloor\dfrac{200}{2\times11}\right\rfloor=9$，

$|A_2A_{13}|=\left\lfloor\dfrac{200}{2\times13}\right\rfloor=7$，$|A_3A_5|=\left\lfloor\dfrac{200}{3\times5}\right\rfloor=13$，$|A_3A_7|=\left\lfloor\dfrac{200}{3\times7}\right\rfloor=9$，

$|A_3A_{11}|=\left\lfloor\dfrac{200}{3\times11}\right\rfloor=6$，$|A_3A_{13}|=\left\lfloor\dfrac{200}{3\times13}\right\rfloor=5$，$|A_5A_7|=\left\lfloor\dfrac{200}{5\times7}\right\rfloor=5$，

$|A_5A_{11}|=\left\lfloor\dfrac{200}{5\times11}\right\rfloor=3$，$|A_5A_{13}|=\left\lfloor\dfrac{200}{5\times13}\right\rfloor=3$，$|A_7A_{11}|=\left\lfloor\dfrac{200}{7\times11}\right\rfloor=2$，

$|A_7A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{7\times13}\right\rfloor=2$，$|A_{11}A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{11\times13}\right\rfloor=1$，$|A_2A_3A_5|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times5}\right\rfloor=6$，

$|A_2A_3A_7|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times7}\right\rfloor=4$，$|A_2A_3A_{11}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times11}\right\rfloor=3$，$|A_2A_3A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times13}\right\rfloor=2$

$|A_2A_5A_7|=\left\lfloor\frac{200}{2\times5\times7}\right\rfloor=2$，$|A_2A_5A_{11}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times5\times11}\right\rfloor=1$，$|A_2A_5A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times5\times13}\right\rfloor=1$，

$|A_2A_7A_{11}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times7\times11}\right\rfloor=1$，$|A_2A_7A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times7\times13}\right\rfloor=1$，

$|A_2A_{11}A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times11\times13}\right\rfloor=0$，$|A_3A_5A_7|=\left\lfloor\frac{200}{3\times5\times7}\right\rfloor=1$，$|A_3A_5A_{11}|=\left\lfloor\frac{200}{3\times5\times11}\right\rfloor=1$

$|A_3A_5A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{3\times5\times13}\right\rfloor=1$，$|A_3A_7A_{11}|=\left\lfloor\frac{200}{3\times7\times11}\right\rfloor=0$，$\cdots$，

$|A_2A_3A_5A_7|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times5\times7}\right\rfloor=0$，$\cdots$，$|A_2A_3A_5A_7A_{11}A_{13}|=\left\lfloor\frac{200}{2\times3\times5\times7\times11\times13}\right\rfloor=0$，

所以

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}\cap\overline{A_{11}}\cap\overline{A_{13}}\right|\\
&=|S|-\sum_i|A_i|+\sum_{i<j}|A_iA_j|-\sum_{i<j<k}|A_iA_jA_k|+\sum_{i<j<k<l}|A_iA_jA_kA_l|\\
&\quad-\sum_{i<j<k<l<m}|A_iA_jA_kA_lA_m|+\sum_{i<j<k<l<m<n}|A_iA_jA_kA_lA_mA_n|\\
&=200-(100+66+40+28+18+15)\\
&\quad+(33+20+14+9+7+13+9+6+5+5+3+3+2+2+1)\\
&\quad-(6+4+3+2+2+1+1+1+1+0+1+1+1+0)+0-0+0\\
&=41
\end{aligned}$$

但这 41 个数未包括 $2,3,5,7,11,13$ 本身，却将非素数 1 包含其中，

故所求的素数个数为：$41+6-1=46$

2．问由 1 到 2000 的整数中：

（1）至少能被 2，3，5 之一整除的数有多少个？

（2）至少能被 2，3，5 中 2 个数同时整除的数有多少个？

（3）能且只能被 2，3，5 中 1 个数整除的数有多少个？

解：设 A_i 为 1 到 2000 的整数中能被 i 整除的数的集合，$i=2,3,5$，

则 $|A_2|=\left\lfloor\frac{2000}{2}\right\rfloor=1000$，$|A_3|=\left\lfloor\frac{2000}{3}\right\rfloor=666$，$|A_5|=\left\lfloor\frac{2000}{5}\right\rfloor=400$，

$$|A_2A_3|=\left\lfloor\frac{2000}{2\times3}\right\rfloor=333,\quad |A_2A_5|=\left\lfloor\frac{2000}{2\times5}\right\rfloor=200,\quad |A_3A_5|=\left\lfloor\frac{2000}{3\times5}\right\rfloor=133,$$

$$|A_2A_3A_5|=\left\lfloor\frac{2000}{2\times3\times5}\right\rfloor=66,$$

（1）即求$|A_2+A_3+A_5|$，根据容斥原理有：

$$\begin{aligned}|A_2+A_3+A_5|&=|A_2|+|A_3|+|A_5|-(|A_2A_3|+|A_2A_5|+|A_3A_5|)+|A_2A_3A_5|\\&=1000+666+400-(333+200+133)+66\\&=1466\end{aligned}$$

（2）即求$|A_2A_3+A_2A_5+A_3A_5|$，根据容斥原理有：

$$\begin{aligned}&|A_2A_3+A_2A_5+A_3A_5|\\&=|A_2A_3|+|A_2A_5|+|A_3A_5|-(|A_2A_3A_5|+|A_2A_3A_5|+|A_2A_3A_5|)+|A_2A_3A_5|\\&=333+200+133-2\times66=534\end{aligned}$$

（3）即求$N[1]$，根据 Jordan 公式有：

$$\begin{aligned}N[1]&=q_1-C_2^1q_2+C_3^1q_3\\&=|A_2|+|A_3|+|A_5|-2\times(|A_2A_3|+|A_2A_5|+|A_3A_5|)+3\times|A_2A_3A_5|\\&=1000+666+400-2\times(333+200+133)+3\times66\\&=932\end{aligned}$$

3．求从 1 到 500 的整数中能被 3 和 5 整除但不能被 7 整除的数的个数。

解：设A_i为 1 到 500 的整数中能被 i 整除的数的集合，$i=3,5,7$，

则$|A_3|=\left\lfloor\frac{500}{3}\right\rfloor=166$，$|A_5|=\left\lfloor\frac{500}{5}\right\rfloor=100$，$|A_7|=\left\lfloor\frac{500}{7}\right\rfloor=71$，

$$|A_3A_5|=\left\lfloor\frac{500}{3\times5}\right\rfloor=33,\quad |A_3A_7|=\left\lfloor\frac{500}{3\times7}\right\rfloor=23,\quad |A_5A_7|=\left\lfloor\frac{500}{5\times7}\right\rfloor=14,$$

$$|A_3A_5A_7|=\left\lfloor\frac{500}{3\times5\times7}\right\rfloor=4,$$

满足条件的整数个数为：$|A_3A_5\overline{A_7}|$，根据容斥原理有：

$$|A_3A_5\overline{A_7}|=|A_3A_5|-|A_3A_5A_7|=33-4=29$$

4．某人参加一种会议，会上有 6 位朋友，他和其中每一人在会上各相遇 12 次，每二人各相遇 6 次，每三人各相遇 4 次，每四人各相遇 3 次，每五人各相遇

2 次，与六人都相遇 1 次，一人也没遇见的有 5 次。问该人共参加几次会议？

解：设 S 为该人参加的所有会议组成的集合，

设 A_i 表示该人与第 i 个朋友相遇的所有会议构成的子集，$i=1,2,\cdots,6$，则

$R_1=|A_i|=12$，$i=1,2,\cdots,6$

$R_2=|A_iA_j|=6$，$R_3=|A_iA_jA_k|=4$，$R_4=|A_iA_jA_kA_l|=3$，$R_5=|A_iA_jA_kA_lA_m|=2$，

$R_6=|A_1A_2A_3A_4A_5A_6|=1$，

则，
$$\begin{aligned}&|A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6|\\&=C_6^1R_1-C_6^2R_2+C_6^3R_3-C_6^4R_4+C_6^5R_5-C_6^6R_6\\&=6\times12-15\times6+20\times4-15\times3+6\times2-1\\&=28\end{aligned}$$

则该人共参加会议次数为： $|S|=28+5=33$（次）。

5．n 位的四进制数中，数字 1，2，3 各自至少出现一次的数有多少个？

解：设 S 表示所有 n 位四进制数构成的集合，

A_i 为不出现 i 的数的集合，$i=1,2,3$，

则 $|A_1|=|A_2|=|A_3|=3^n$，$|A_1A_2|=|A_1A_3|=|A_2A_3|=2^n$，$|A_1A_2A_3|=1$，

则由逐步淘汰原理，可得

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|&=|S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)+(|A_1A_2|+|A_1A_3|+|A_2A_3|)-|A_1A_2A_3|\\&=4^n-3^{n+1}+3\times2^n-1\end{aligned}$$

6．某照相馆给 n 个人分别照相后，装入每人的纸袋里，问出现以下情况有多少种可能？

（1）没有任何一个人得到自己的照片；

（2）至少有一人得到自己的相片；

（3）至少有两人得到自己的照片；

解：以任一种装法为元素构成的集合记为 S，则 $|S|=n!$。

设 A_i 表示第 i 个人拿到自己的照片的所有装法组成的集合。则公共数

$R_1=|A_i|=(n-1)!$，同理 $R_2=|A_iA_j|=(n-2)!$，……，

$$R_k=|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}|=(n-k)!,\quad k=1,2,\cdots,n$$

（1）即求 $N[0]$，由问题的性质可知，这是一个错排问题，所以

$$N[0]=D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

（2）即求$L[1]$，$L[1]=|S|-N[0]=n!-D_n=n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)$

■ **方法二：**

问题即：将所有可能的分配方案－没有任何一人得到自己的照片的方案，则，符合条件的方案数为：$n!-D_n$，

■ **方法三：**

问题即求：

$$\left|A_1+A_2+\cdots+A_n\right|=\binom{n}{1}R_1-\binom{n}{2}R_2+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\binom{n}{n}R_n$$
$$=n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)$$

（3）问题即求：$L[2]=|S|-N[0]-N[1]$，

$$\begin{aligned}L[2]&=|S|-N[0]-N[1]\\&=n!-D_n-(C_1^1C_n^1R_1-C_2^1C_n^2R_2+C_3^1C_n^3R_3-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^1C_n^nR_n)\\&=n!-D_n-(n\times(n-1)!-\frac{2!}{1!}\frac{n!}{2!(n-2)!}\times(n-2)!+\frac{3!}{2!}\frac{n!}{3!(n-3)!}\times(n-3)!\\&\quad-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!}\frac{n!}{n!0!}\times0!)\\&=n!-D_n-n\times\left[(n-1)!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!})\right]\\&=n!-D_n-nD_{n-1}\end{aligned}$$

7．把$\{a,a,a,b,b,b,c,c,c\}$排成相同字母互不相邻的排列，有多少种排法？

解：设S为所有排列的组成的集合，则$|S|=\frac{9!}{3!3!3!}=1680$，

设A_i：表示排列中有相邻 i 个元素都是 a 的排列集合；$i=2,3$；

设B_i：表示排列中有相邻 i 个元素都是 b 的排列集合；$i=2,3$；

设C_i：表示排列中有相邻 i 个元素都是 c 的排列集合；$i=2,3$；

则：$|A_3|=|B_3|=|C_3|=\frac{7!}{1!3!3!}=140$，$|A_3B_3|=|A_3C_3|=|B_3C_3|=\frac{5!}{1!1!3!}=20$，

$|A_3B_3C_3|=3!=6$，（即将 aaa、bbb 或 ccc 看为一个元素）

$|A_2|=|B_2|=|C_2|=\frac{8!}{1!1!3!3!}-\frac{7!}{1!3!3!}=1120-140=980$

（将 aa 与 a 看做为不同的两个元素参与排列，但在出现 aaa 时就重复计算，(aa)a、a(aa)看为两个不同的排列，因此 aaa 多计算了一次）

因为 $A_2 \cap B_2$ 为 aa,bb 图象都出现的排列集合，当我们将 aa 与 a，bb 与 b 看作不同的两对元素进行排列时，在 aa 与 a 相遇而成 aaa 图象及 bb 与 b 相遇而成 bbb 图象时会产生重复计数。

当 aaa 图象与 bbb 图象恰出现一个时，重复因子为 2；（$N[1]=q_1-C_2^1q_2$）

当图象 aaa 与图象 bbb 同时出现时，重复因子为 4。

所以 $|A_2B_2|=|A_2C_2|=|B_2C_2|=\dfrac{7!}{3!}-\left(\dfrac{6!}{3!}+\dfrac{6!}{3!}-C_2^1\cdot\dfrac{5!}{3!}\right)-3\cdot\dfrac{5!}{3!}=580$

因为 $A_2 \cap B_2 \cap C_2$ 为 aa，bb，cc 图象出现的排列集合，当我们将 aa 与 a，bb 与 b，cc 与 c 看作不同的三对元素进行排列时，在 aa 与 a 相遇而成 aaa 图象，bb 与 b 相遇而成 bbb 图象，cc 与 c 相遇而成 ccc 图象时会产生重复计数。

当 aaa，bbb，ccc 图象恰出现一个时，重复因子为 2；（$N[1]=q_1-C_2^1q_2+C_3^1q_3$）

当 aaa，bbb，ccc 图象恰出现两个时，重复因子为 4；（$N[2]=q_2-C_3^2q_3$）

当 aaa，bbb，ccc 图象恰同时出现时，重复因子为 8；

所以，
$$\begin{aligned}|A_2B_2C_2| &= 6!-\left(5!+5!+5!-C_2^1(4!+4!+4!)+C_3^1\cdot 3!\right)-3\left(4!+4!+4!-C_3^2\cdot 3!\right)-7\cdot 3!\\ &=282\end{aligned}$$

故，根据逐步淘汰原理，相同字母互不相邻的排列共有：

$$\begin{aligned}\left|\overline{A_2}\cap\overline{B_2}\cap\overline{C_2}\right| &= |S|-\left(|A_2|+|B_2|+|C_2|\right)+\left(|A_2B_2|+|A_2C_2|+|B_2C_2|\right)-|A_2B_2C_2|\\ &=1680-3\times 980+3\times 580-282\\ &=198\end{aligned}$$

8．把 $1,2,\cdots,n$ 排成一圈，令 $f(n)$ 表示没有相邻数字恰好是自然顺序的排列数。

（1）求 $f(n)$；

（2）证明 $f(n)+f(n+1)=D_n$。

解（1）问题等价于在排列中，数 i 不能排在数 $i+1$ 之前，$i=1,2,\cdots,n$。

$i=n$ 时，$i+1=1$。

用 S 表示所有无重圆排列的集合，并设性质 P_i 表示在圆排列中具有 $i(i+1)$ 形式的性质，令 $A_i=\{x\mid x\in S, x具有性质P_i\}$，$i=1,2,\cdots,n$。

视 $i(i+1)$ 为一个整体，立即可得 $|A_i|=(n-2)!$，$i=1,2,\cdots,n$，

现计算 $|A_iA_j|(i\neq j)$，这种排列里同时含有 $i(i+1)$ 和 $j(j+1)$ 两种形式，不妨设 $i<j$，则只可能是以下情况中的一种：

① $j\neq i+1$，则成为 $n-2$ 个元素的圆排列，其个数为 $(n-3)!$；

② $j=i+1$，则排列中出现 $i(i+1)(i+2)$，看为一个元素，这样的圆排列也有 $(n-3)!$ 个；

③ $j=n, i=1$，则此时 $j+1=i$，同②类似，也有 $(n-3)!$ 个；

这三种情况不可能同时出现，所以 $\left|A_iA_j\right|=(n-3)!$，

同理可得：$\left|A_iA_jA_k\right|=(n-4)!$，⋯，$\left|A_1A_2\cdots A_n\right|=(n-(n+1))!=1$

所以，

$$f(n)=\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$=\left|S\right|-\sum_{i=1}^{n}\left|A_i\right|+\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_iA_j\right|-\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_iA_jA_k\right|+\cdots+(-1)^n\left|A_1A_2\cdots A_n\right|$$

$$=(n-1)!-C_n^1(n-2)!+C_n^2(n-3)!-\cdots+(-1)^{n-2}C_n^{n-2}1!+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}0!+(-1)^nC_n^n(-1)!$$

$$=(n-1)!-\frac{n!}{1!(n-1)!}(n-2)!+\frac{n!}{2!(n-2)!}(n-3)!-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{n!}{(n-2)!2!}1!+(-1)^{n-1}\frac{n!}{(n-1)!1!}\cdot 0!$$

$$=n!\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{1!(n-1)}+\frac{1}{2!(n-2)}-\frac{1}{3!(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!2!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!1!}\right]$$

（2）证明 $f(n)+f(n+1)=D_n$。

$$f(n)+f(n+1)$$

$$=n!\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{1!(n-1)}+\frac{1}{2!(n-2)}-\frac{1}{3!(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!2!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!1!}\right]$$

$$+(n+1)!\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{1!n}+\frac{1}{2!(n-1)}-\frac{1}{3!(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!2!}+(-1)^n\frac{1}{n!1!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{1!(n-1)}+\frac{1}{2!(n-2)}-\frac{1}{3!(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!2!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!1!}\right]$$

$$+n!\left[\frac{n+1}{n+1}-\frac{n+1}{1!n}+\frac{n+1}{2!(n-1)}-\frac{n+1}{3!(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{(n-1)!2!}+(-1)^n\frac{n+1}{n!1!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{1!(n-1)}+\frac{1}{2!(n-2)}-\frac{1}{3!(n-3)}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!2!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!1!}\right]$$

$$+n!\left[1-\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!(n-1)}\right)-\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!(n-2)}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!2!}\right)+(-1)^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!1!}\right)\right]$$

$$=n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]=D_n$$

9．n 个单位各派两名代表出席一个会议，2n 位代表围圆桌而坐，试问：

（1）同一单位的代表相邻而坐的方案数是多少？

（2）同一单位的代表互不相邻的方案数又是多少？

解：（1）同一单位的两名代表相邻而坐，可看为一个，

问题即：n 个代表的圆排列，则方案数有：$(n-1)!$ 种。

又同一单位的两名代表 A、B，相邻而坐有两种方式，AB，或 BA，

共有 n 个单位，故总的方案数有：$2^n(n-1)!$（种）。

（2）设 S 为所有 2n 个人的无重圆排列，显然$|S|=(2n-1)!$

A_i 表示第 i 个单位的两个代表相邻的方案数，$i=1,2,\cdots,n$，

则$\sum\left|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right|$表示有 k 个单位的代表相邻而坐的所有方案数，

可以这样得到：先在 n 个单位中任选出 k 个单位，有$\binom{n}{k}$种选法；

其次让选出的这 k 个单位的两个代表一定相邻，故每个单位的两个人可看作是一个人，而其余$n-k$个单位的$2n-2k$个代表不一定相邻，

因此这相当于$2n-2k+k=2n-k$个人做圆排列，有$(2n-k-1)!$种排法；

另外，两个代表一定相邻的 k 个单位，每个单位的两人做全排列，

有 2 种排法，k 个单位共有2^k种排法；

故按乘法原理，$\sum\left|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right|=\binom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!\cdot 2^k$

因此，根据容斥原理，各单位的两人互不相邻的方案数为：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\right|=|S|-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum\left|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cdot(2n-k-1)!\cdot 2^k$$ 。

10．一书架有 m 层，分别放置 m 类不同种类的书，每层 n 册，现将书架上的图书全部取出整理，整理过程中要求同一类的书仍然放在同一层，但可以打乱顺序，试问：

（1）m 类书全不在各自原来层次上的方案数是多少？

（2）每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数是多少？

（3）m 层书都不在原来层次，每层 n 本书也不在原来位置上的方案数又是多少？

解：（1）先将层号错排，m 层的错排数是D_m；

再将每层的 n 册书做全排列，有$n!$种排法，m 层共有$(n!)^m$种排法，

故按乘法原理，m 类书全不在各自原来层次上的方案数为：

$$D_m \cdot (n!)^m \quad （种）$$

（2）先在 m 层中任选出 k 层 $k=0,1,2,\cdots,m$，有 $C(m,k)$ 种选法，

让选出的这 k 层不在各自原来的层次上，即 k 层做错排，错排数是 D_k，其各层的 n 册书做全排列，有 $n!$ 种排法，k 层共有 $(n!)^k$ 种排法；

其次让剩下的 $m-k$ 层都在各自原来的层次上，但每层的 n 本书都不在原来位置上，因此这相当于 n 本书做错排，错排数是 D_n，$m-k$ 层共计有 $(D_n)^{m-k}$ 种排法，

因此，当 k 固定时，按乘法原理，有 $C(m,k)\cdot D_k\cdot(n!)^k\cdot(D_n)^{m-k}$ 种排法。

最后，按加法原理，每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数为：

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}D_k(n!)^k(D_n)^{m-k} \quad （种）$$

（3）m 层书都不在原来层次，这相当于 m 层做错排，错排数是 D_m；

每层 n 本书也不在原来位置上，这相当于 n 本书做错排，错排数是 D_n，m 层共计有 $(D_n)^m$ 种排法；

因此，按乘法原理，m 层书都不在原来层次，每层 n 本书也不在原来位置上的方案数为：$D_m\cdot(D_n)^m$ （种）。

11．证明错排数的下列性质（$n\ge 2$）：

（1）　$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

（2）　$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

证明：

$$\begin{aligned}
&(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})\\
&=(n-1)\left[(n-2)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right)\right.\\
&\quad\left.+(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\right]
\end{aligned}$$

（1）
$$\begin{aligned}
&=(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)-(-1)^{n-1}\\
&\quad+(n-1)(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\\
&=D_{n-1}+(-1)^n+n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)-(-1)^n-D_{n-1}\\
&=D_n
\end{aligned}$$

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

（2）
$$= n(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)+n!\cdot(-1)^n\frac{1}{n!}$$
$$= nD_{n-1}+(-1)^n$$

12．n 个人参加一晚会，每人寄存一顶帽子和一把雨伞，会后各人也是任取一顶帽子和一把雨伞，问：

（1）有多少种可能使得没有人能拿到他原来的任一件物品？

（2）有多少种可能使得没有人能同时拿到他原来的两件物品？

解：（1）由错排问题的结果，没有人拿回自己原来的帽子有 D_n 种可能，没有人拿回自己原来的伞也有 D_n 种可能，这两件事情是互相无关的，由乘法法则可知，没有人拿到他原来的两件物品的方案数为：D_n^2（种）。

（2）设 S 表示所有可能的方案的集合，则 $|S|=(n!)^2$，

设 A_i 表示第 i 人同时取回自己原来两件物品的方案的集合，$i=1,2,\cdots,n$

则 $R_k=\left|A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right|=\left((n-k)!\right)^2$，$k=1,2,\cdots,n$，

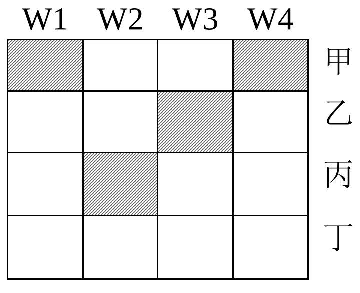
根据容斥原理，所求的方案数为：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}\right|=(n!)^2-\binom{n}{1}R_1+\binom{n}{2}R_2+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}R_n$$
$$=(n!)^2-\binom{n}{1}\left((n-1)!\right)^2+\binom{n}{2}\left((n-2)!\right)^2+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}(0!)^2$$

第二版部分题

15．（题目略）

解：扫地、整理桌椅、擦窗子、擦黑板四项工作分别用 w1,w2,w3,w4 表示，该题对应的带有禁区的棋盘如下：



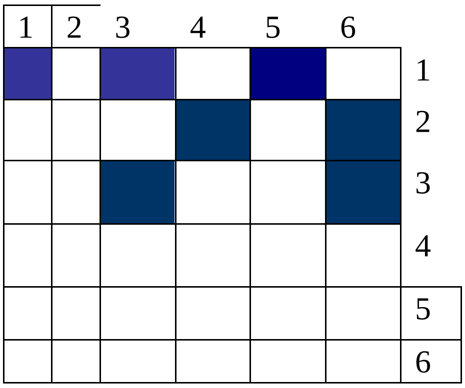
则，$R(A)=(1+2x)(1+2x+x^2)=1+4x+5x^2+2x^3$

故安排工作的方案有：

$$\begin{aligned}N[B]&=4!-r_1(A)\cdot 3!+r_2(A)\cdot 2!-r_3(A)\cdot 1!+r_4(A)\cdot 0!\\&=4!-4\cdot 3!+5\cdot 2!-2\cdot 1!+0\cdot 0!\\&=8\end{aligned}$$ （种）

16．（题目略）

解：对应的带禁区的棋盘如下：



则， $R(A)=1+7x+14x^2+7x^3$

故：

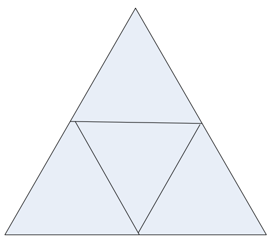
$$\begin{aligned}N[B]&=6!-r_1(A)\cdot 5!+r_2(A)\cdot 4!-r_3(A)\cdot 3!+r_4(A)\cdot 2!-r_5(A)\cdot 1!+r_6(A)\cdot 0!\\&=6!-7\cdot 5!+14\cdot 4!-7\cdot 3!\\&=174\end{aligned}$$

故抽签结果使大家都满意的概率为：174/6! = 0.2417.

习题五（抽屉原理）

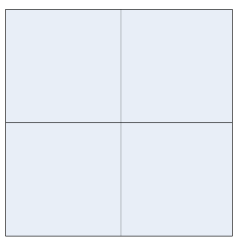
1．证明：在边长为 2 的等边三角形中任取 5 点，至少有两个点相距不超过 1。

证明：如图所示，将正三角形分成 4 个边长为 1 的小等边三角形，现在取 5 点，有 4 个小等边三角形，根据抽屉原理，则至少有两点落在同一个小等边三角形中，其距离不超过 1。



2．在一个边长为 1 的正方形内任取 9 个点，证明以这些点为顶点的各个三角形中，至少有一个三角形的面积不大于$1/8$。

证明：如图所示，将正方形分为 4 个边长为$1/2$的小正方形，



现取 9 个点，则至少有三个点落在同一个小正方形中，以这三点为顶点的三角形的面积不大于$1/2\times$长$\times$高$=1/2\times 1/2\times 1/2=1/8$。

3．把从 1 到 326 的 326 个正整数任意分成 5 组，试证明其中必有 1 组，该组中至少有一个数是同组中某两个数之和，或是同组中某个数的两倍。

证明：用反证法。

设任何一组中的每一个数，它既不等于同组中另外两数之和，也不等于同组中另一数的两倍。即任何一组数中任意两个数之差总不在该组中。

（1）由抽屉原理知，五组中必有一组其中至少有 66 个数，设为 A 组。

从中取 66 个数，记为$a_1,a_2,\cdots,a_{66}$，不妨设a_{66}最大，

令 $a_i^{(1)}=a_{66}-a_i \quad ,i=1,2,\cdots,65$，显然$1\le a_i^{(1)}<326$，

由假设知 $a_i^{(1)}\notin A$，故这 65 个数必在另外四组 B、C、D、E 中。

（2）由抽屉原理知，B、C、D、E 四组中必有一组至少含有 17 个$a_i^{(1)}$，

设为 B 组，从中取 17 个$a_i^{(1)}$，记为$b_1,b_2,\cdots,b_{17}$，同理不妨设b_{17}最大，

令 $b_i^{(1)}=b_{17}-b_i \quad i=1,2,\cdots,16$，显然$1\le b_i^{(1)}<326$，且由假设知，$b_i^{(1)}\notin B$，

又 $b_i^{(1)}=b_{17}-b_i=(a_{66}-a_j)-(a_{66}-a_k)=a_k-a_j\notin A$，

所以这 16 个数$b_i^{(1)}$必在 C、D、E 中。

（3）由抽屉原理知，C、D、E 三组中必有一组至少含有 6 个$b_i^{(1)}$，设为 C 组，

从中取 6 个$b_i^{(1)}$，记为$c_1,c_2,\cdots,c_6$，同理不妨设c_6最大，

令 $c_i^{(1)}=c_6-c_i$，$i=1,2,\cdots,5$，显然$1\le c_i^{(1)}<326$，且由假设知$c_i^{(1)}\notin C$，

又 $c_i^{(1)}=c_6-c_i=(b_{17}-b_j)-(b_{17}-b_k)=b_k-b_j\notin B$

$c_i^{(1)}=b_k-b_j=(a_{66}-a_n)-(a_{66}-a_m)-a_m-a_n\notin A$

所以这五个数必在 D、E 组中。

（4）由抽屉原理知，D、E 两组中必有一组至少含有 3 个$c_i^{(1)}$，设为 D 组，

从中取 3 个$c_i^{(1)}$，记为d_1,d_2,d_3，同理不妨设d_3最大，

令$d_i^{(1)}=d_3-d_i \quad ,i=1,2$，显然$1\le d_i^{(1)}\le 326$，且由假设知$d_i^{(1)}\notin D$，

同理可得$d_i^{(1)}\notin A,B,C$，故$d_i^{(1)}\in E$。

（5）不妨设$d_1^{(1)}>d_2^{(1)}$，令 $e=d_1^{(1)}-d_2^{(1)}$，则$1\le e<326$，且由假设知$e\notin E$，

同理可知，$e\notin A,B,C,D$，

即 e 不在 A、B、C、D、E 任一组中，又$1\le e<326$，与题设矛盾。

所以，命题成立。证毕。

4．任意一个由数字 1，2，3 组成的 30 位数，从中任意截取相邻的三位，证明在各种不同位置的截取中，至少有两个三位数是相同的。数的位数 30 还可以再

减少吗？为什么？

解：设由数字 1，2，3 组成的 30 位数为：$a_1a_2\cdots a_{30}$，

则任意截取相邻的三位，可能的截法有 28 种：

$$a_1a_2a_3, a_2a_3a_4, \cdots, a_{27}a_{28}a_{29}, a_{28}a_{29}a_{30}\text{，}$$

而由 1，2，3 组成的三位数最多有 $3^3 = 27$ 个，

则根据抽屉原理，这 28 个数中必至少有 2 个是相同的。

由证明过程可以知道，数的位数 30 不可以再减少了。

因为若改为 29 个，则可得到 27 个三位数，就不能保证有 2 个是相同的。

- ♦ **若改为截取相邻的 5 位**，首先可知元素 1、2、3 的 5－可重排列共有 $3^5 = 243$ 个。其次，由问题的性质可知至少要能截取出不同的 244 段才能保证结论成立，从而知该数至少应该有 248 位。
- ♦ **问题的一般描述是**：任意一个由数字 1，2，…，m 组成的 n＝$\boldsymbol{m^k + k}$ 位数，从中任意截取相邻的 k 位，则在各种不同位置的截取中，至少有两个 k 位数是相同的。若希望至少有 r 个 k 位数是相同的，则应有 n＝$\boldsymbol{(r-1)m^k + k}$ 。

5．任取 11 个整数，求证其中至少有两个数的差是 10 的倍数。

证明：设这 11 个整数为：$a_i\ (i=1,2,\cdots,11)$，不妨设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{11}$，

令 $r_i = a_i \bmod 10$，则 $0 \le r_i < 10$，

由抽屉原理知，必存在 i, j，$i < j$，使得 $r_i = r_j$，

则 $10 \mid (a_j - a_i)$。证毕。

- ♦ **问题的一般描述**：任取 n＋1 个整数，其中至少存在两数，其差是 n 的倍数。

6．一次考试采用百分制，所有考生的总分为 10101，证明如果考生人数不少于 202，则必有三人得分相同。

证明：采用百分制，则所有可能的分数为 $0 \sim 100$，共 101 个分数，现人数不少于 202，则平均每个分数有两个人得分相同。分情况讨论：

（1）若有某些分数没有考生得该分数，则 202 名考生，可能的考生成绩最多 100 种，根据抽屉原理，必有三个的得分相同。

（2）若有 1 个考生的分数与其他人都不同，则其余 201 名考试可能的分数只有 100 种，则必有三人的得分相同。

（3）若每个分数线都有两个人，则所有考生的总分为：

$2(1+2+\cdots+100) = 10100$，与题目矛盾。所以这种情况不可能存在。

综上所述，必有三人得分相同。证毕。

- ♦ **方法二：反证法。**

假设没有三个考生考试成绩相同，因为分数的分布为 0～100 分，共 101 种分

数，若考生人数大于 202 人，则根据抽屉原理必然有三人考试成绩相同，矛盾；

若考生人数恰好 202 个，要求没有三个考生考试成绩相同，则所有考生必然恰好两两得分相同。

而此时所有考生的总分为：$2(0+1+2+\cdots+100)=10100$，矛盾。

故结论成立。

◆ **方法三：**

此题的另一种理解是将 10101 个物品放入 202 个盒子，每个盒子最多放 100 个，也可以不放，则至少有三个盒子中所放物品个数相同。如若不然，至多有两个盒子的物品一样多，则只能恰好用去 10100 个物品，剩下一个物品，就无法处理，一旦将其放入某个有 k 个物品的盒子，那么，就有 3 个盒子放了 k＋1 个物品$(\boldsymbol{k}=0,1,2,\cdots,99)$。

◆ **此问题的一般提法是**：所有考生的总分为 5050r＋t $(1\le \boldsymbol{t}\le 5050)$，如果考生人数不多于 101*r* 人，则至少有 *r*＋1 人得分相同。

7．将 n 个球放入 m 个盒子中，$n<\frac{m}{2}(m-1)$，试证其中必有两个盒子有相同的球数。

证明：（反证法）。

假设 m 个盒子中的球数均不相同，则 m 个盒子中球的总数至少为：

$$0+1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}>n$$ ，矛盾，

故必然有两个盒子的球数是相同的。

8．设有三个 7 位二进制数：$(a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)$、$(b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7)$和$(c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7)$，试证存在整数 i 和 j，$1\le i<j\le 7$，使得下列等式中至少有一个成立：

$a_i=a_j=b_i=b_j$，$b_i=b_j=c_i=c_j$，$c_i=c_j=a_i=a_j$

证明：因为二进制数只有 0,1 两种数位，

从而有$a_k,b_k,c_k \quad (k=1,2,\cdots,7)$只有两种状态，又$7=3\times 2+1$，

根据抽屉原理可知，在$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$这 7 个元素中，至少有四个元素的取值相同，或均为 1，或均为 0。不妨设这四个元素为a_1,a_2,a_3,a_4，且设$a_1=a_2=a_3=a_4=1$（同理可讨论$a_1=a_2=a_3=a_4=0$的情况），

因为$\left\lceil\frac{4}{2}\right\rceil=2$，由抽屉原理可知，在$b_1,b_2,b_3,b_4$这四个元素中，必至少有两

个元素取值相同，或均为 1，或均为 0。不妨设这两个元素为：b_1, b_2，

（1） 若 $b_1 = b_2 = 1$，则得 $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$，满足结论，

（2）若 $b_1 = b_2 = 0$，则

① 若 $b_3 = b_4 = 1$，则 $a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = 1$，满足结论；

② 否则，b_3, b_4 中至少有一个取 0。不妨设 $b_3 = 0$，

从而有 $b_1 = b_2 = b_3 = 0$。

因为由 $\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$，由抽屉原理可知，在 c_1, c_2, c_3 中应至少有两个元素

取值相同，不妨设是 c_1, c_2，则

- ◆ 若 $c_1 = c_2 = 1$，则有 $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1$，满足结论；
- ◆ 若 $c_1 = c_2 = 0$，则有 $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$，满足结论。

综上所述，结论必成立。证毕。

♦ **证法二：**

显然，每组 $(a_i, b_i, c_i)\ (i = 1, 2, \cdots, 7)$ 中，必有两数字相同，共有 $\binom{3}{2}$ 种模式，

其值或为 0 或为 1，故共有 $2 \cdot \binom{3}{2} = 6$ 种选择。

现在有 7 组，因为 $\left\lceil \frac{7}{6} \right\rceil = 2$，由抽屉原理可知，必有 2 组数在相同的两行 i、j 上选择相同的数字，即存在整数 i 和 j，$1 \le i < j \le 7$，使得下式之一必然成立：

$a_i = a_j = b_i = b_j$，$b_i = b_j = c_i = c_j$，$c_i = c_j = a_i = a_j$

♦ **证法三：**

考虑将 3 个 7 位二进制数视为一个 3×7 的方格棋盘，用红、蓝两色（分别用 0、1 表示）之一对每个方格进行染色，则问题变成：证明至少有 4 个格子同色，且此 4 个格子位于由若干个小方格组成的某个长方形的 4 个角上。也就是说必存在两行两列，其交叉处的 4 个格子同色

0	0	1	1	1	0	
0	1	0	1	0	1	
1	0	0	0	1	1	

0	0	1	1			
0	1	0	1			
0	1	1	0			

由于颜色数比行数少一，故对每列而言，至少有两格同色。如图 5.2.3（a），设第一列的前两行为红色，后一行为蓝色，则后 6 列中的任何一列的前两行都不能再为红色，否则即会出现 4 个同色格子构成长方形的情形，即结论成立。由此看出，两个红色方格同列的情形最多只能有 C_3^2＝3 列。而图 5.2.3（b）的染法，只能使得这样的列数最多为 1 列，其后每列最多只能有一个红格子，且各列红格子所处的行还不能相同。

总之，对每种颜色，在某列中被用了两次的列最多为 C_3^2 列。当颜色数为 2 时，这样的列最多只有 2 • C_3^2＝6 个，现在总列数为 7，故由抽屉原理，必有某两列中相同的两行的 4 个格子所染颜色相同。

9．证明：把 1～10 这 10 个数随机地写成一个圆圈，则必有某 3 个相邻数之和大于或等于 17。若改为 1～26，则相邻数之和应大于或等于 41。

证明：设这 10 个数围成的圆圈为 $a_1a_2\cdots a_9a_{10}a_1$，

令 $A_i=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}\quad ,i=1,2,\cdots,8$，$A_9=a_9+a_{10}+a_1$，$A_{10}=a_{10}+a_1+a_2$，

则 $A_1+A_2+\cdots+A_{10}=3\times(1+2+\cdots+10)=165=16\times10+5$，

现在有 10 个数，故必存在某个 $A_i\geq17$。证毕。

同理，若是 1～26，则同样可构造出 3 个相邻数之和 $B_k\ (k=1,2,\cdots26)$，

且有 $B_1+B_2+\cdots+B_{26}=3\times(1+2+\cdots+26)=1053=40\times26+13$，

故必存在某个 $B_k\geq41$。

♦ **一般情形：** 已知 n 个正整数数 $\boldsymbol{a_1,a_2,\cdots,a_n}$，将其随机地写成一个圆圈，则必有某 k 个相邻数之和大于或等于 M，那么，$M\leqslant\left\lceil\dfrac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)k}{n}\right\rceil$

10．某学生准备恰好用 11 个星期时间做完数学复习题，每天至少做一题，一个星期最多做 12 题，试证必有连续几天内该学生共做了 21 道题。

证明：11 个星期总共有 77 天，每天做的题数设为 $a_i\ (i=1,2,\cdots,77)$，

则 $a_i\geq1$，$a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+7}\leq12, k=0,1,\cdots,70$，

构造序列 $s_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$，则 $1\leq s_1<s_2<\cdots<s_{77}\leq132$，

若存在某个 $s_k=21$，则问题得证。

否则，所有的 $s_i\neq21$，令集合 $A=\{s_1,s_2,\cdots,s_{77},s_1+21,s_2+21,\cdots,s_{77}+21\}$，

则有 $22\leq s_1+21<s_2+21<\cdots<s_{77}+21\leq153$，

集合 A 中共有 154 个数，每个数的取值在 1～153 之间，

由抽屉原理知，必有两个数相等。又 $i\neq j$ 时，$s_i\neq s_j$，从而 $s_i+21\neq s_j+21$，

所以，相等的两个数必为$s_k = s_i + 21$，显然$k > i$，

故 $21 = s_k - s_i = \sum_{j=i+1}^{k} a_j$ 。证毕。

11．$(m+1)$行$(mC_{m+1}^2 + 1)$列的格子用 m 种颜色着色，每格着一种色，证明其中必有一个 4 角的格子同色的矩形。

证明：每列有$(m+1)$行，只有 m 种颜色，

因此，根据抽屉原理，一列中必有两格同色。

一列中同色的两个格子的行号有C_{m+1}^2种取法，故有mC_{m+1}^2种同色模式。

现有$(mC_{m+1}^2 + 1)$列，所以，根据抽屉原理，必有两列的同色模式相同。

因此，这两列对应于同色模式的两行上有 4 个格子同色，

它们正好是一个矩形的 4 个角上的格子。证毕。

12．证明：（1）平面上任取 5 个整点（坐标为整数的点），其中至少有两个点，由它们所连线段的中点也是整点。

（2）从三维空间任取 9 个整点中至少有两个点，其连线的中点为整点。

证明：平面上的整点的坐标为(x, y)，而 x、y 只可能为奇数或偶数，

故可能的坐标只有四种：（奇，奇）、（奇、偶）、（偶，奇）、（偶，偶），

现在取 5 个整点，则必有两个整点的奇偶性是一样的，

设这两个整点为(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，则x_1, x_2奇偶性相同，y_1, y_2奇偶性相同，

而这两个点的连线中点的坐标为：$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$，

因为x_1, x_2奇偶性相同，y_1, y_2奇偶性相同，所以$x_1 + x_2$，$y_1 + y_2$均为偶数，

所以$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$为整点。

（2）三维空间的点的坐标为(x, y, z)，

根据 x，y，z 的奇偶性可将坐标分为 8 类：（奇,奇,奇）、（奇,奇,偶）、（奇,偶,奇）、（奇,偶,偶）、（偶,奇,奇）、（偶,奇,偶）、（偶,偶,奇）、（偶,偶,偶），

现在取 9 个点，则必有 2 个点的类型相同，

设这两个整点为：(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)，

则x_1, x_2奇偶性相同，y_1, y_2奇偶性相同，z_1, z_2奇偶性相同，

而这两个点的连线中点的坐标为：$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$，

因为$x_1 + x_2$，$y_1 + y_2$，$z_1 + z_2$均为偶数，所以该点为整点。

13. 在平面直角坐标系中至少任取多少个整点，才能保证其中存在 3 个点构成的三角形的重心是整点。

(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,0)	(2,1)	(2,2)

解：设三角形三个顶点的坐标为：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，

则其重心坐标为：$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$，

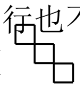
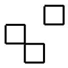
因为平面直角坐标系中的整点 (x,y) 的坐标模 3 后只有如表所示的 9 种可能；而满足 3 点重心是整点的条件类型有以下 4 种情况：

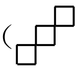
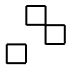
（1）3 点在同一格子中；

（2）3 点占满一行的格子；

（3）3 点占满一列的格子；

（4）3 点均匀分布，不同行也不同列，由下面四种模式：

(0,0)，(1,1)，(2,2)（）（主对角线）；(1,0)，(2,1)，(0,2)（）；

(0,2)，(1,1)，(2,0)（）（副对角线）；(0,1)，(1,2)，(2,0)（）；

因而任取 9 个点中，必至少存在着 3 个点，其重心是整点。下面证明。

（反证法）假设任取 9 个点，不存在 3 个点构成的三角形的重心是整点。

则每个格子最多有 2 个点，否则有三个点在同一格子中，满足（1)，其重心是整点，与假设矛盾。

因为$\left\lceil \dfrac{9}{2} \right\rceil = 5$格，根据抽屉原理，则 9 个点至少落入 5 个格子中，

若 5 个格子中有三个在同一行，即满足（2)，则与假设矛盾，故每行最多有占 2 格，又$\left\lceil \dfrac{5}{2} \right\rceil = 3$行，根据抽屉原理，则每行都有点；

同理，若 5 个格子中有三个在同一列，即满足（3)，与假设矛盾，故每列最多占 2 格，同理$\left\lceil \dfrac{5}{2} \right\rceil = 3$列，根据抽屉原理可知，每列都有点；

由证明过程知，每行每列都有点，又不满足（1)（2)（3)，

则必是（4）的情况，这与假设矛盾。

因此，因而任取 9 个点中，必至少存在着 3 个点，其重心是整点。

但是 8 个点中不能保证其中存在着 3 个点其重心一定是整点。

因为存在着一种情况：8 个点分布在表 1 的 4 个格子中，每格 2 个点，而不满足 3 点重心是整点的条件类型的 4 种情况。例如若 8 个点落在表 1 的左上角

(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)这 4 个格子中，每格 2 个点，则显然不满足 3 点重心是整点的条件类型的 4 种情况。

因此，在平面直角坐标系中，最少需任取 9 个整点，才能保证其中存在 3 个点构成的三角形的重心是整点。

第二版新增部分习题：

11．求证在任意给的 11 个整数中，一定存在 6 个整数，它们的和是 6 的倍数。

证明：设这 11 个数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$，

令 $r_i=a_i \bmod 3(i=1,2,\cdots 11)$，则 r_i 的可能取值为 0，1，2（看为 3 个抽屉），

根据抽屉原理，至少有 3 个整数的 r_i 相同，不妨设这 3 个整数为 a_1,a_2,a_3，

令 $S_1=a_1+a_2+a_3$， 则 $3|S_1$，

剩下 8 个整数中，根据抽屉原理，至少有 3 个整数的 r_i 相同，不妨设为

a_4,a_5,a_6， 令 $S_2=a_4+a_5+a_6$， 则 $3|S_2$，

剩下 5 个整数中，若有 3 个整数的 r_i 相同，则它们之和必然被 3 整除，

否则 r_i 相同的整数最多 2 个，则必存在三个整数，其 r_i 取值都不相同，则它们之和也是 3 的倍数，因此从 5 个数中，必然可以找到 3 个数，其和是 3 的倍数，不妨设这三个数为 a_7,a_8,a_9， 令 $S_3=a_7+a_8+a_9$， 则 $3|S_3$，

对于 S_1,S_2,S_3 这三个数而言， 令 $t_i=S_i \bmod 2(i=1,2,3)$，

则根据抽屉原理，至少有 2 个数的 ti 相同，不妨设这两个数为 S_1,S_2，

则 $2|(S_1+S_2)$， 而又有 $3|S_1$， $3|S_2$， 故 $6|(S_1+S_2)=6|(a_1+a_2+\cdots+a_6)$。

证毕。

12．证明任意给定的 52 个整数中，总存在两个数它们的和或差能被 100 整除。

证明：设 52 个整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{52}$，

令 $r_i=a_i \bmod 100 \quad (i=1,2,\cdots,52)$，则 r_i 的可能取值为 0，1，2，……，99。

现将 r_i 分为 51 类：{0},{1,99},{2,98},……,{49,51},{50}（看为 51 个抽屉），

则根据抽屉原理，至少有 2 个 r_i 属于同一类，

假设 r_i, r_j 属于同一类，则或者 $r_i = r_j$ 或者 $r_i + r_j = 100$，

若 $r_i = r_j$，则 $a_i - a_j$ 能被 100 整除，

若 $r_i + r_j = 100$，则 $a_i + a_j$ 能被 100 整除。

证毕。

13．证明：（1）每年至少有一个 13 日是星期五。

（2）每年至多有三个 13 日是星期五。

证明：（假设 1 年 365 天）

（1）每年中共有 12 个 13 日，它们是 1.13，2.13，3.13，…，12.13。

（反证法）假设它们都不是星期五，则是星期一、星期二、星期三、星期四、星期六、星期日之一（用 mi 表示）

因为 2.13 和 3.13 相差 28 天，3.13 和 11.13 相差 245 天，都是 7 的倍数，因此这 3 天星期几相同，用 m1 表示星期几（星期天用 7 表示）；

而 1.13 和 10.13 相差 274 天属于同一个星期几，用 m2 表示；

同理，4.13 和 7.13 相差 91 天，同属于一个星期几，用 m3 表示；

9.13 和 12.13 相差 91 天，同属于 1 个星期几，用 m4 表示；

且 $m1 \neq m2 \neq m3 \neq m4$（它们相差不是 7 的倍数，因此不会相等），

则剩下的 3 天 5.13，6.13，8.13 的星期几只能在剩下的两个 mi 中选，

根据抽屉原理，至少有 2 个的星期几相同，但是这时不可能的，因为这 3 天相隔都不是 7 的倍数，产生矛盾，因此必有一个 13 日是星期五。

（2）从（1）的讨论可知，至多只有 3 个月，它们两两之间的间隔天数都是 7 的整数倍，因此只有 2.13，3.13，11.13 可能同时为星期五，不可能有 4 个月的 13 日全为星期五。

14．设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是整数 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列，证明：当 n 是奇数时，乘积 $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$ 肯定是偶数。

证明：n 为奇数时，$1, 2, \cdots, n$ 中有 $\dfrac{n+1}{2}$ 个奇数，$\dfrac{n-1}{2}$ 个偶数，

则 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_n$ 这 $\dfrac{n+1}{2}$ 个数中，必至少有 1 个是奇数，

从而 $a_1 - 1, a_3 - 3, \cdots, a_n - n$ 中，必至少有 1 个是偶数，

因此乘积$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$肯定是偶数。证毕。

17．在平面直角坐标系中任取 5 个整点（两个坐标都是整数），证明其中一定存在 3 个点，由其构成的三角形（包含 3 点在一条直线上）的面积是整数（可以为 0）。

解：任一整点(a,b)的坐标只有如下 4 种可能：

（奇数，偶数），（奇数，奇数），（偶数，奇数），（偶数，偶数）。

根据抽屉原理，5 个点中必至少有 2 个点的奇偶模式相同，

设(x1,y1)，(x2,y2)是 5 个点中奇偶模式相同的那 2 个点，

则有 2|(x1-x2)，2|(y1-y2)，故可设 x1-x2=2k，y1-y2=2m。

再在剩下的 3 个点中任取一点(x3,y3)，则这 3 点构成的三角形Δ的面积

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&1&1\\x_1-x_2&x_2&x_3\\y_1-y_2&y_2&y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1\\k&x_2&x_3\\m&y_2&y_3\end{vmatrix}$$

是整数。

18．用 4 种颜色给平面上的完全图K_{66}（66 个顶点，每个顶点间都有边连接）的边染色，每个边选一种颜色。证明，染色后必存在一个同色的K_3（即三角形）。

证明：就图中某个端点 v0 而言，跟其他的 65 个顶点联结，有 65 条边；

现在用 4 个颜色进行染色（看为 4 个抽屉），

则至少有 17 条边染同一种颜色，设该颜色为 c1，

设这 17 条边对应的顶点为 v1, v2, …, v17。

若 v1, v2, …, v17 中有两个顶点 vi，vj，它们的连边(vi, vj)也染颜色 c1，

则这时（v0, vi, vj）就构成一个同色的三角形，

否则，v1, v2, …, v17 中所有顶点的连边只能用剩下的 3 种颜色染之。

就 v1 而言，与其余 16 个顶点的 16 条连边用 3 种颜色染色，

则至少有 6 条边染同一种颜色，设为 c2，

假设这 6 个顶点为 v2,v3,v4,v5,v6,v7，

若 v2,v3,v4,v5,v6,v7 中有两个顶点 vi，vj，它们的连边(vi, vj)也染颜色 c2，

则这时（v1, vi, vj）就构成一个同色的三角形，显然，若(vi, vj)染 c1，则（v0, vi, vj）也构成一个同色三角形；

否则 v2,v3,v4,v5,v6,v7 中的连边只能用剩下的 2 种颜色染之，

就 v2 而言，与其余 5 个顶点的 5 条连边用 2 种颜色染色，

则至少有 3 条边染同一种颜色，设为 c3，假设这 3 个顶点为 v3,v4,v5，

若 v2,v3,v4 中有两个顶点 vi，vj，它们的连边(vi, vj)也染颜色 c3，则这时（v2, vi, vj）就构成一个同色的三角形，

否则 v2,v3,v4 的连边只能染最后一种颜色 c4，这时（v2, v3, v4）就构成一个同色三角形。

习题六（Polya 定理）

1．一张卡片分成4×2个方格，每格用红蓝两色涂染，可有多少种方法？

解：如图所示将卡片的八个格进行编号，则对应集合$S=\{1,2,\cdots,8\}$，用红蓝两色涂染，卡片只能旋转，不能翻转，则可得 S 上的置换群$Q=\{p_1,p_2\}$，

1	2
3	4
5	6
7	8

其中，$p_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，$p_2=(1\ 8)(2\ 7)(3\ 6)(4\ 5)$，

现在用两种颜色进行涂染，则不同的涂染方案有：

$$L=\frac{1}{2}(2^8+2^4)=136 \text{（种）}$$

♦ 若卡片还能翻转，但同一个格子对应的正反面要求同色，

则除了上述两个置换外，还有沿着横、竖两个对称轴翻转的置换

$$p_3=(1\ \ 7)(2\ \ 8)(3\ \ 5)(4\ \ 6),\quad p_4=(1\ \ 2)(3\ \ 4)(5\ \ 6)(7\ \ 8)$$

从而可知不同的染色方案有：

$$L_2=\frac{1}{4}\left(2^8+2^4\times 3\right)=76 \text{（种）}$$

♦ 若同一个格子对应的正反面不要求同色，且卡片既能旋转，又能翻转，

则相应的置换为：

$q_1=(1)(2)\cdots(8)(A)(B)\cdots(H)$，$q_2=(18)(27)(36)(45)(AH)(BG)(CF)(DE)$

$q_3=(1G)(2H)(3E)(4F)(5C)(6D)(7A)(8B)$，

$q_4=(1B)(2A)(3D)(4C)(5F)(6E)(7H)(8G)$

其中$A,B,\cdots,H$是卡片的背面分别依序与$1,2,\cdots,8$对应的格子。

那么，此时的染色方案有

$$L_3=\frac{1}{4}\left(2^{16}+2^8\times 3\right)=16\,576 \text{（种）}$$

2．一根木棍等分成 n 段，用 m 种颜色涂染，问有多少种染法？

当$n=m=2$和$n=m=3$时各有多少种方法？

解：如图给木棍的每段依次编号为$1,2,\cdots,n$，

1	2	……	$n-1$	n

则对应集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$，用 m 中颜色进行涂染，当 n 为偶数时，可得 S 上的置换群$Q_1=\{p_1,p_2\}$，其中

$p_1=(1)(2)\cdots(n)$， $p_2=(1\ \ n)(2\ \ n-1)\cdots(\frac{n}{2}\ \ \frac{n}{2}+1)$，（木棍只能翻转$180^\circ$）

用 m 种颜色进行涂染，则不同的染色方案有：$L_1=\frac{1}{2}(m^n+m^{\frac{n}{2}})$；

当 n 为奇数时，可得 S 上的置换群$Q_2=\{p_1,p_3\}$，其中

$p_3=(1\ \ n)(2\ \ n-1)\cdots(\frac{n-1}{2}\ \ \frac{n-1}{2}+2)(\frac{n+1}{2})$，

则不同的染色方案有：$L_2=\frac{1}{2}(m^n+m^{\frac{n+1}{2}})$。

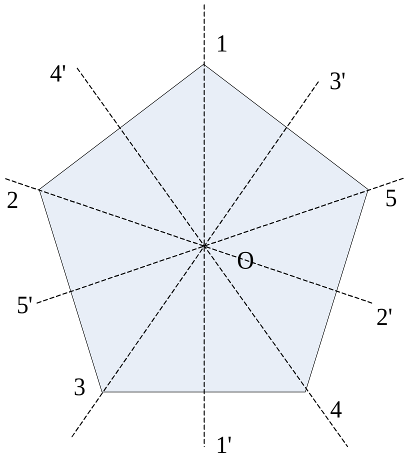
综上所述，不同的染色方案有：$L=\frac{1}{2}(m^n+m^{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil})$。

当$n=m=2$时，不同的染色方案有：$L_1=\frac{1}{2}(2^2+2^1)=3$

当$n=m=3$时，不同的染色方案有：$L_2=\frac{1}{2}(3^3+3^2)=18$

3．正五角星的五个顶点各镶嵌一个宝石，若有 m 种颜色的宝石可供选择，问可以有多少种方案？

解：该问题即：用 m 种颜色给正五边形的五个 d 顶点染色，有多少种方案。



如图所示的正五边形，可绕其中心 O 旋转$0^\circ,72^\circ,144^\circ,216^\circ,288^\circ$，以及过$1-1'$，$2-2'$，$\cdots$，$5-5'$等 5 条轴翻转，从而得到置换群 Q 所含的置换如下：

$p_1=(1)(2)(3)(4)(5)$， $p_2=(5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1)$，

$p_3=(1\ \ 4\ \ 2\ \ 5\ \ 3)$， $p_4=(1\ \ 3\ \ 5\ \ 2\ \ 4)$，

$p_5=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$， $p_6=(1)(2\ \ 5)(3\ \ 4)$，

$p_7=(2)(1\ \ 3)(4\ \ 5)$， $p_8=(3)(1\ \ 5)(2\ \ 4)$，

$p_9=(4)(3\ \ 5)(1\ \ 2)$， $p_{10}=(5)(1\ \ 4)(2\ \ 3)$，

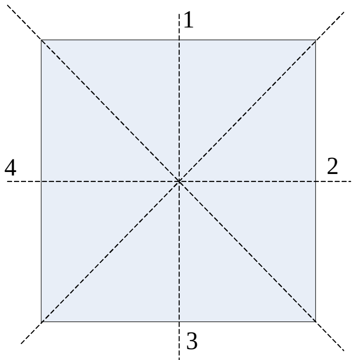
根据 Polya 定理，不同的染色方案有：

$$L=\frac{1}{10}(m^5+4m+5m^3)$$

4．有一个正方形木筐，用漆刷 4 边。现有三种不同颜色的漆，可有多少种不同的涂法？

解：如图所示正方形，用三种颜色对正方形的四条边进行涂染。正方形可绕其中

心逆时针旋转$0^\circ,90^\circ,180^\circ,270^\circ$，及关于两条对角线和中线进行翻转，于是可得到



置换群 Q 所包含的置换如下：

$p_1=(1)(2)(3)(4)$， $p_2=(1\ 2\ 3\ 4)$， $p_3=(1\ 3)(2\ 4)$，

$p_4=(4\ 3\ 2\ 1)$， $p_5=(1\ 4)(2\ 3)$， $p_6=(1\ 2)(3\ 4)$，

$p_7=(1)(2\ 4)(3)$， $p_8=(1\ 3)(2)(4)$

根据 Polya 定理，不同方案有：

$$L=\frac{1}{8}(3^4+3^1+3^2+3^1+3^2+3^2+3^3+3^3)=21\text{（种）}$$

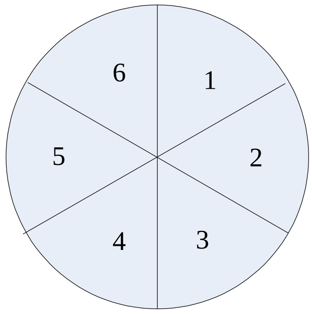
5．一个圆分成 6 个相同的扇形，分别涂以三色之一，可有多少种涂法？

解：如图所示，用三个颜色对圆的六个扇形进行涂染，圆可以绕其圆心逆时针旋转$0^\circ,60^\circ,120^\circ,180^\circ,240^\circ,300^\circ$，于是可以得到置换群 Q 所包含的置换如下：

$p_1=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$， $p_2=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$，

$p_3=(1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$， $p_4=(1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$，

$p_5=(1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$， $p_6=(6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1)$，



根据 Polya 定理，则不同的染色方案有：

$$L=\frac{1}{6}(3^6+2\times3^1+2\times3^2+3^3)=130\text{（种）}$$

6．两个变量的布尔函数$f(x,y)$的全体关于变量下标可以进行置换时，其等价类的个数为多少？写出其布尔表达式。

解：设 2 个输入变量为：$X=\{x_1,x_2\}$，其变换群为：$H=\{h_1,h_2\}$，

$h_1=(x_1)(x_2)$， $h_2=(x_1\ \ x_2)$，

设x_1,x_2的状态集合为$S=\{a_0=00,a_1=01,a_2=10,a_3=11\}$，则对应于集合$X=\{x_1,x_2\}$的置换$h_i$必得 S 的某个置换$q_i$，由此可以得到 S 的置换群 Q 为：

$q_1=(a_0)(a_1)(a_2)(a_3)$， $q_2=(a_0)(a_1\ \ a_2)(a_3)$

求不同布尔函数的问题，就相当于求服从群 Q 的变换的 4 个顶点a_0,a_1,a_2,a_3用 2 种颜色（相当于布尔函数的 0、1 状态）进行染色的方案数。

由 Polya 定理可知，其等价类的个数为：$L=\frac{1}{2}(2^4+2^3)=12$（个）。

下表给出了由两个变量定义的 16 个布尔函数，其中的等价类可划分如下（同一括号中的两个函数等价）：

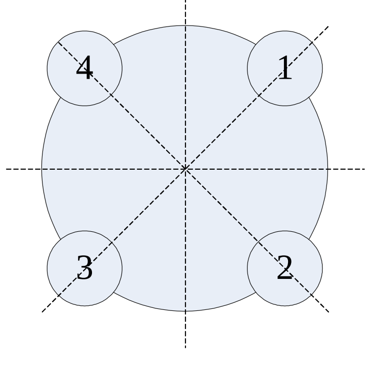
(f_0)，(f_1)，(f_2,f_4)，(f_3,f_5)，(f_6)，(f_7)，

(f_8)，(f_9)，(f_{10},f_{12})，(f_{11},f_{13})，(f_{14})，(f_{15})

自变量	x	0	1

	y		0	1	0	1
函数	f_0	0	0	0	0	0
	f_1	$x\wedge y$	0	0	0	1
	f_2	$x\wedge \bar{y}$	0	0	1	0
	f_3	x	0	0	1	1
	f_4	$\bar{x}\wedge y$	0	1	0	0
	f_5	y	0	1	0	1
	f_6	$(x\vee y)\wedge(\bar{x}\vee \bar{y})$	0	1	1	0
	f_7	$x\vee y$	0	1	1	1
	f_8	$\bar{x}\wedge \bar{y}$	1	0	0	0
	f_9	$(\bar{x}\vee y)\wedge(x\vee \bar{y})$	1	0	0	1
	f_{10}	$\bar{y}$	1	0	1	0
	f_{11}	$x\vee \bar{y}$	1	0	1	1
	f_{12}	$\bar{x}$	1	1	0	0
	f_{13}	$\bar{x}\vee y$	1	1	0	1
	f_{14}	$\bar{x}\vee \bar{y}$	1	1	1	0
	f_{15}	1	1	1	1	1

7．红、蓝、绿三种颜色的珠子，每种充分多，取出 4 颗摆成一个圆环，可有多少种不同的摆法？



解：该问题可等价于从无穷多的珠子中取出四个摆成一个圆环，然后再用三种颜色对珠子进行着色，问有多少种不同的着色方案。

如图所示，使之重合的运动有逆时针旋转 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$，及绕四条对称轴翻转，于是

可以得到置换群$Q=\{p_1,p_2,\cdots,p_8\}$，其中：

$p_1=(1)(2)(3)(4)$，$p_2=(1\ 2\ 3\ 4)$，$p_3=(1\ 3)(2\ 4)$，$p_4=(4\ 3\ 2\ 1)$，

$p_5=(1\ 4)(2\ 3)$，$p_6=(1\ 2)(3\ 4)$，$p_7=(1\ 3)(2)(4)$，$p_8=(1)(2\ 4)(3)$，

根据 Polya 定理，不同排法有：$L=\dfrac{1}{8}(3^4+2\times3^1+3\times3^2+2\times3^3)=21$（种）

8．某物质分子由 5 个 A 原子和 3 个 B 原子组成，8 个原子构成一个正立方体，问最多可能有几类分子？

解：该问题即：用两种颜色 a、b 对正立方体的八个顶点进行着色，求 5 个顶点着 a 颜色，5 个顶点着 b 颜色的方案数。

见 P140 页例 6.4.2 图 6.4.3。使正立方体重合的关于顶点的置换群 Q 如下：

（1）单位元：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，格式为$(1)^8$；

（2）绕轴xx'（面-面中心连线）旋转$\pm90^\circ$的置换分别为：$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$和$(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$，格式为$(4)^2$，同类置换共有 6 个；

（3）绕轴xx'旋转180°的置换为：$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$，格式为$(2)^4$，同类共有 3 个；

（4）绕轴yy'（棱中－棱中）旋转180°的置换为：$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$，格式为$(2)^4$，同类置换有 6 个；

（5）绕轴zz'（对角线）旋转$\pm120^\circ$的置换分别为：$(1\ 3\ 6)4\ 7\ 5)(2)(8)$和$(1\ 3\ 6)(5\ 7\ 4)(2)(8)$，格式为$(1)^2(3)^2$，同类置换共有 8 个。

则群 Q 的轮换指标为：$P_Q(x_1,x_2,\cdots,x_8)=\dfrac{1}{24}(x_1^8+6x_4^2+9x_2^4+8x_1^2x_3^2)$，

令$x_k=a^k+b^k$，代入上式得：

$$P_Q=\frac{1}{24}\left[(a+b)^8+6(a^4+b^4)^2+9(a^2+b^2)^4+8(a+b)^2(a^3+b^3)^2\right]$$

其中，a^5b^3的系数为：$\dfrac{1}{24}\left[C_8^5+8\times C_2^2C_2^1\right]=3$，即最多可能有 3 类分子。

9．验证下列函数对于运算$f\circ g=f(g(x))$是一个群：

$f_1(x)=x$，$f_2(x)=\dfrac{1}{x}$，$f_3(x)=1-x$，$f_4(x)=\dfrac{1}{1-x}$，$f_5(x)=\dfrac{x-1}{x}$，$f_6(x)=\dfrac{x}{x-1}$

解：设$G=\{f_1,f_2,\cdots,f_6\}$，画出其运算表，便可得以下四条。

（1）封闭性。对任意的$f,g\in G$，有$f\circ g=f(g(x))\in G$；

（2）结合性。对任意的$f,g,h\in G$，有$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$，

函数复合运算本身就满足结合性；

（3）单位元。显然对任意的$f\in G$，有$ff_1(x)=f_1f(x)=f(x)$，

故 $f_1 = x$ 是么元。

（4）逆元。$f_2 f_2(x) = f_2(\frac{1}{x}) = x = f_1(x)$，$f_3 f_3(x) = f_3(1-x) = 1-(1-x) = x = f_1(x)$，

$$f_4 f_5(x) = f_4(\frac{x-1}{x}) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = f_1(x)\text{，}$$

$$f_5 f_4(x) = f_5(\frac{1}{1-x}) = \frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}} = x = f_1(x)\text{，}\quad f_6 f_6(x) = f_6(\frac{x}{x-1}) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x = f_1(x)\text{，}$$

故 f_1, f_2, f_3, f_6 的逆元为其自身， f_4, f_5 互为逆元素。

$\bullet$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3	f_6	f_5
f_3	f_3	f_5	f_1	f_6	f_2	f_4
f_4	f_4	f_6	f_2	f_5	f_1	f_3
f_5	f_5	f_3	f_6	f_1	f_4	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

10．用 g, r, b, y 四种颜色涂染正方体的六个面，求其中两个面用色 g，两个面用色 y，其余一面用 b，一面用 r 的方案数。

解：见 P147 例 6.6.4 图 6.6.3，使正方体的面重合的刚体运动群有以下几种情况：

（1）不动置换：即单位元 $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$，格式为 $(1)^6$；

（2）绕过 $1-6$ 面中心的轴 AB 旋转 $\pm 90^\circ$ 的置换分别为：$(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6)$ 和 $(1)(5\ 4\ 3\ 2)(6)$，格式为 $(1)^2(4)^1$，类似置换共有 6 个；

（3）绕轴 AB 旋转 180° 的置换为：$(1)(2\ 4)(3\ 5)(6)$，格式为 $(1)^2(2)^2$，类似置换共有 3 个；

（4）绕轴 CD 旋转 180° 的置换为：$(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$，格式为 $(2)^3$，因为正方体对角线位置的平行棱有 6 对，故同类置换有 6 个；

（5）绕对角线 EF 旋转 $\pm 120^\circ$ 的置换分别为：$(1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6)$ 和 $(6\ 4\ 3)(2\ 5\ 1)$，格式为 $(3)^2$，同类置换共有 8 个。

所以轮换指标 $P_Q(x_1, x_2, \cdots, x_6) = \frac{1}{24}\left[x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2\right]$，

令 $x_k = g^k + r^k + b^k + y^k$ 代入上式，得：

$$P_Q = \frac{1}{24}\Big[(g+r+b+y)^6 + 6(g+r+b+y)^2(g^4+r^4+b^4+y^4)$$
$$+3(g+r+b+y)^2(g^2+r^2+b^2+y^2)^2 + 6(g^2+r^2+b^2+y^2)^3 + 8(g^3+r^3+b^3+y^3)^2\Big]$$

则所求的方案数即 g^2rby^2 的系数： $\frac{1}{24}\left[\binom{6}{2\,1\,1\,2} + 3\times\binom{2}{0\,1\,1\,0}\binom{2}{1\,0\,0\,1}\right] = 8$ 。

11．对一正六面体的八个顶点，用 y 和 r 两种颜色染色，使其中 6 个顶点用色 y，其余 2 个顶点用色 r，求其方案数。

解：见 P140 页例 6.4.2 图 6.4.3。使正立方体重合的关于顶点的置换群 Q 如下：

（1）单位元：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，格式为 $(1)^8$；

（2）绕轴 xx' 旋转 $\pm 90^\circ$ 的置换分别为：$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ 和 $(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$，格式为 $(4)^2$，同类置换共有 6 个；

（3）绕轴 xx' 旋转 180° 的置换为：$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$，格式为 $(2)^4$，同类共有 3 个；

（4）绕轴 yy' 旋转 180° 的置换为：$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$，格式为 $(2)^4$，同类置换有 6 个；

（5）绕轴 zz' 旋转 $\pm 120^\circ$ 的置换分别为：$(1\ 3\ 6)4\ 7\ 5)(2)(8)$ 和 $(1\ 3\ 6)(5\ 7\ 4)(2)(8)$，格式为 $(1)^2(3)^2$，同类置换共有 8 个。

则群 Q 的轮换指标为：$P_Q(x_1, x_2, \cdots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_4^2 + 9x_2^4 + 8x_1^2x_3^2)$，

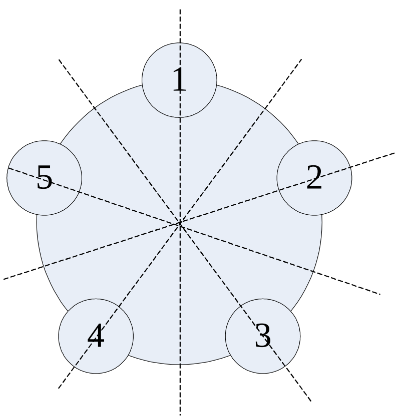
令 $x_k = y^k + r^k$，代入上式得：

$$P_Q = \frac{1}{24}\Big[(y+r)^8 + 6(y^4+r^4)^2 + 9(y^2+r^2)^4 + 8(y+r)^2(y^3+r^3)^2\Big]$$

则所求的方案数即 y^6r^2 的系数：$\frac{1}{24}\Big[C_8^6 + 9\times C_4^3 + 8\times C_2^0C_2^2\Big] = 3$ 。

12．由 b, r, g 三种颜色的 5 颗珠子镶成圆环，共有几种不同的方案？

解：如图所示，使之重合的运动有关于圆心逆时针旋转 $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$，



及过五条对称轴翻转，故有置换群 $Q = \{p_1, p_2, \cdots, p_{10}\}$，其中

$p_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$， $p_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$，

$p_3 = (1\ 3\ 5\ 2\ 4\ 1)$， $p_4 = (1\ 4\ 2\ 5\ 3)$，

$p_5 = (5\ 4\ 3\ 2\ 1)$， $p_6 = (1)(2\ 5)(3\ 4)$，

$p_7=(1\ 3)(2)(4\ 5)$， $p_8=(1\ 5)(2\ 4)(3)$，

$p_9=(1\ 2)(3\ 5)(4)$， $p_{10}=(1\ 4)(2\ 3)(5)$，

根据 Polya 定理，不同的方案数有：

$$L=\frac{1}{10}(3^5+4\times3^1+5\times3^3)=39 \text{（种）}$$

13．一个圆圈上有 n 个珠子，用 n 种颜色对这 n 个珠子着色，问所用颜色数目不少于 n 的着色方案数是多少？

解：该问题即：每个珠子用不同的颜色进行着色，求方案数。

用 Burnside 引理求解。

n 个珠子用 n 种颜色涂染，每个珠子颜色不同，应有 $n!$种方案。

其中经过旋转和翻转而重合的两个方案只算 1 种方案。

可以知道，n 个珠子的运动群 Q 共有 n 个旋转置换和 n 个翻转置换，

从而相应于 $n!$种方案集合的置换群也有 2n 个置换，考察在这 2n 个置换下方案集 $f_1,f_2,\cdots,f_{n!}$，则

（1）恒等置换： $p_1=(f_1)(f_2)\cdots(f_{n!})$，故 $\lambda_1(p_1)=n!$；

（2）由于所有的珠子颜色均不同，故在其他 $2n-1$ 个置换下，没有一个方案 f_i 能保持不变，即 $\lambda_1(p_2)=\lambda_1(p_3)=\cdots=\lambda_1(p_{2n-1})=0$；

由 Burnside 引理知，不同的方案数为：

$$L=\frac{1}{2n}(n!+0+0+\cdots+0)=\frac{1}{2}(n-1)!$$

14．若已给两个 r 色的球，两个 b 色的球，用它装在正六面体的顶点，试问有多少种不同的方案？

解：将没有装球的顶点看为装 y 色球，则该问题等价于：

用 r、b、y 三色给正六面体的 8 个顶点着色，求两个顶点着 r 色，两个顶点着 b 色，四个顶点着 y 色的方案数。

见 P140 页例 6.4.2 图 6.4.3。使正立方体重合的关于顶点的置换群 Q 如下：

（1）单位元： $(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，格式为 $(1)^8$；

（2）绕轴 xx' 旋转 $\pm90^\circ$ 的置换分别为： $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ 和 $(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$，格式为 $(4)^2$，同类置换共有 6 个；

（3）绕轴 xx' 旋转 180° 的置换为： $(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$，格式为 $(2)^4$，同类共有 3 个；

（4）绕轴 yy' 旋转 180° 的置换为： $(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$，格式为 $(2)^4$，同类置换有 6 个；

（5）绕轴 zz' 旋转 $\pm120^\circ$ 的置换分别为： $(1\ 3\ 6)4\ 7\ 5)(2)(8)$ 和

(1 3 6)(5 7 4)(2)(8)，格式为$(1)^2(3)^2$，同类置换共有 8 个。

则群 Q 的轮换指标为：$P_Q(x_1,x_2,\cdots,x_8)=\dfrac{1}{24}(x_1^8+6x_4^2+9x_2^4+8x_1^2x_3^2)$，

令 $x_k=r^k+b^k+y^k$，代入上式得：

$$P_Q=\frac{1}{24}\left[(r+b+y)^8+6(r^4+b^4+y^4)^2+9(r^2+b^2+y^2)^4+8(r+b+y)^2(r^3+b^3+y^3)^2\right]$$

则所求的方案数即 $r^2b^2y^4$ 的系数：$\dfrac{1}{24}\left[\begin{pmatrix}8\\2\,2\,4\end{pmatrix}+9\times\begin{pmatrix}4\\1\,1\,2\end{pmatrix}\right]=22$。

15．试说明群 S_5 的不同格式及其个数。

解：参见例 6.3.2，6.3.5。

S_5 的格式是满足方程$1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+3\cdot\lambda_3+4\cdot\lambda_4+5\cdot\lambda_5=5$的全部非负整数解组。因为 5 分解拆成最大数不超过 5 的数的和为多项式 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$ 中 x^5 的系数。其为 $(1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9)(1+x^3+x^4+x^5+x^7+x^8+x^9+x^{12})$

故 x^5 的系数为$1\times1+1\times1+2\times1+3\times1=7$，这说明共有 7 种不同的格式。

根据定理，不同格式中的个数为：

$$|D(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)|=\frac{5!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!\lambda_4!\lambda_5!\cdot 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}3^{\lambda_3}4^{\lambda_4}5^{\lambda_5}}$$

所以，S_5 的不同格式及其个数如下表所示：

格式	个数	格式	个数	格式	个数
$(1)^5$	$\dfrac{5!}{5!1^5}=1$	$(1)^1(2)^2$	$\dfrac{5!}{1!2!1^12^2}=15$	$(2)^1(3)^1$	$\dfrac{5!}{1!1!2^13^1}=20$
$(5)^1$	$\dfrac{5!}{1!5^1}=24$	$(1)^3(2)$	$\dfrac{5!}{3!1!1^32^1}=10$		
$(1)^1(4)^1$	$\dfrac{5!}{1!1!1^14^1}=30$	$(1)^2(3)^1$	$\dfrac{5!}{2!1!1^23^1}=20$		

16．将一正方形均分为 4 个格子，用两种颜色对 4 个格子着色，问能得到多少种不同的图像？其中认为两种颜色互换后使之一致的方案属同一类。

解：用 Burnside 引理求解。

4 个格子用两种颜色着色，不同的染色方案有 16 种，

设方案集为$N=\{f_1,f_2,\cdots,f_{16}\}$，（参见 P135 例 6.3.10 图 6.3.1），

其中两种颜色互换后一致的方案认为是同一个方案。则

$G=\{p_1,p_2\}$构成群，其中 $p_1=(f_1)(f_2)\cdots(f_{16})$为恒等置换，$\lambda_1(p_1)=16$，

$$p_2=(f_1\ f_2)(f_3\ f_7)(f_4\ f_8)(f_5\ f_9)(f_6\ f_{10})(f_{11}\ f_{12})(f_{13}\ f_{15})(f_{14}\ f_{16})，\ \lambda_1(p_2)=0，$$

根据 Burnside 引理知，不同的图像有：$L=\frac{1}{2}(16+0)=8$（种）

◆ 若正方形允许旋转，即旋转后吻合的方案认为是同一个方案，则此时不等价的方案有 6 种（参见 P135 例 6.3.10 图 6.3.1），即 $H=\{f_1,f_2,f_3,f_7,f_{11},f_{13}\}$，若再考虑两种颜色互换后一致的方案认为是同一个方案，可得到 H 上的置换群 $G'=\{p_3,p_4\}$，其中：

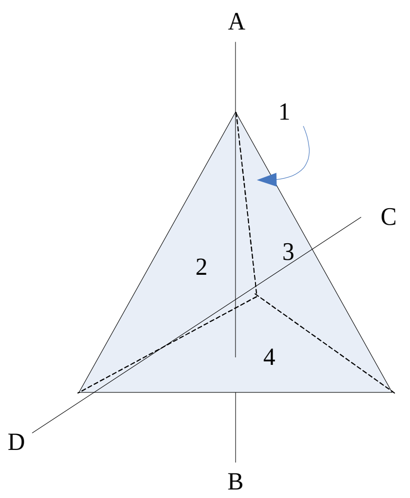
$$p_3=(f_1)(f_2)(f_3)(f_7)(f_{11})(f_{13})，\ \lambda_1(p_3)=6，$$

$$p_4=(f_1\ f_2)(f_3\ f_7)(f_{11})(f_{13})，\ \lambda_1(p_4)=2，$$

由根据 Burnside 引理知，不同的图像有：$L=\frac{1}{2}(6+2)=4$（种）

17．在正四面体的每个面上都任意引一条高，有多少种方案？

解：如图所示，使正四面体的面重合的运动群为：



（1）单位元 $(1)(2)(3)(4)$，格式为 $(1)^4$；

（2）绕过轴 AB（顶点-对面中心连线）旋转 $\pm120^\circ$ 的置换分别为 $(1\ 2\ 3)(4)$ 和 $(3\ 2\ 1)(4)$，格式为 $(1)^1(3)^1$，类似的置换共 8 个；

（3）绕轴 CD（棱中-棱中）旋转 180° 的置换为：$(1\ 3)(2\ 4)$，格式为：$(2)^2$，类似置换共有 3 个。

除绕顶点—对面中心轴旋转均不会产生不变的图像外，绕其他轴的旋转相当于用三种颜色给正四面体的面着色，

根据 polya 定理，不同的方案有：

$$L=\frac{1}{12}(3^4+8\times0+3\times3^2)=9\ （种）$$

18．一幅正方形的肖像与立方体的一个面一样大，6 幅相同的肖像贴在正立方体的 6 个面上有多少种贴法？

解：见 P147 例 6.6.4 图 6.6.3，使正方体的面重合的刚体运动群有以下几种情况：

（1）不动置换：即单位元 $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$，格式为 $(1)^6$；

（2）绕过 $1-6$ 面中心的轴 AB 旋转 $\pm90^\circ$ 的置换分别为：$(1)(2\ 3\ 4\ 5)(6)$ 和 $(1)(5\ 4\ 3\ 2)(6)$，格式为 $(1)^2(4)^1$，类似置换共有 6 个；

（3）绕轴 AB 旋转 180° 的置换为：$(1)(2\ 4)(3\ 5)(6)$，格式为 $(1)^2(2)^2$，类似置换共有 3 个；

（4）绕轴 CD 旋转180°的置换为：$(1\ 6)(2\ 5)(3\ 4)$，格式为$(2)^3$，

因为正方体对角线位置的平行棱有 6 对，故同类置换有 6 个；

（5）绕对角线 EF 旋转$\pm120^\circ$的置换分别为：$(1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6)$和$(6\ 4\ 3)(2\ 5\ 1)$，

格式为$(3)^2$，同类置换共有 8 个。

除了绕面心－面心轴旋转任何度数均不会产生不变的图像外，绕其他轴的旋转都相当于用四个颜色（一幅肖像有 4 种贴法）给正六面体的面着色。

根据 Polya 定理，不同的方案为：

$$L=\frac{1}{24}(4^6+6\times0+3\times0+6\times4^3+8\times4^2)=192\text{（种）}$$

19．（1）本质上有多少种确实是 2 个输入端的布尔代数？写出其布尔表达式；

（2）本质上有多少种确实是 3 个输入端的布尔电路？

解：（1）$S2$：$(1)^4,(1)^2(2)^1$，（见第 6 题）

根据 Polya 定理，不等价的布尔代数有$L=\frac{1}{2}(2^4+2^3)=12$，

其中包括 0 个输入端的 2 个，1 个输入端的 2 个，

故确实是 2 个输入端的布尔代数有 8 个；

（2）$S3$：$(1)^8$ 1 个；$(1)^2(3)^2$ 2 个；$(1)^4(2)^2$ 3 个。（见 P146，例 6.6.3）

根据 Polya 定理，不等价的布尔代数有：$L=\frac{1}{6}(2^8+2\times2^4+3\times2^6)=80$，

其中，确实是 3 输入端的布尔代数有$80-12=68$个。

20．用 8 个相同的骰子垛成一个正六面体，有多少种方案？

解：见 P140 页例 6.4.2 图 6.4.3。使正立方体重合的关于顶点的置换群 Q 如下：

（1）单位元：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$，格式为$(1)^8$；

（2）绕轴xx'旋转$\pm90^\circ$的置换分别为：$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$和

$(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)$，格式为$(4)^2$，同类置换共有 6 个；

（3）绕轴xx'旋转180°的置换为：$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)$，格式为$(2)^4$，

同类共有 3 个；

（4）绕轴yy'旋转180°的置换为：$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)$，格式为$(2)^4$，

同类置换有 6 个；

（5）绕轴zz'旋转$\pm120^\circ$的置换分别为：$(1\ 3\ 6)4\ 7\ 5)(2)(8)$和

$(1\ 3\ 6)(5\ 7\ 4)(2)(8)$，格式为$(1)^2(3)^2$，同类置换共有 8 个。

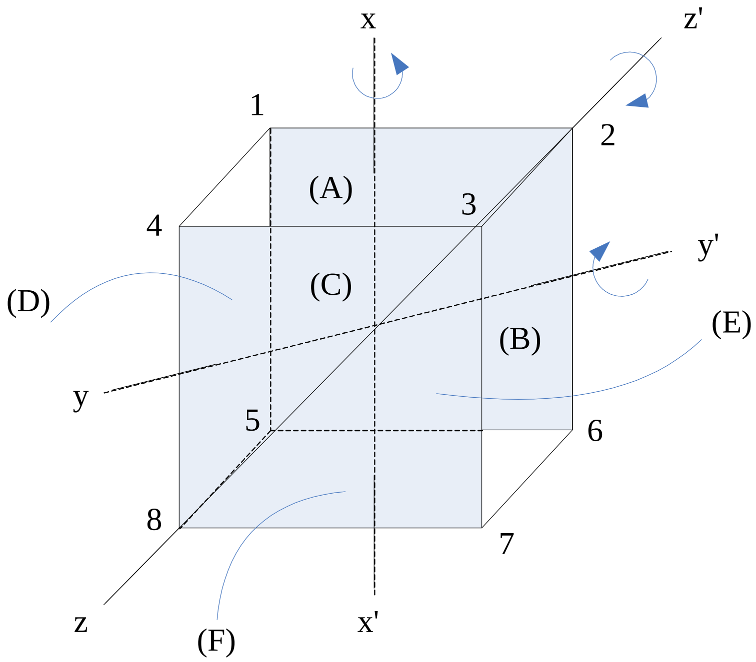
题目相当于在正六面体每个角上放一个骰子。骰子关于正立方体的不同旋转均不会产生重合现象，共 24 种方案。因此本题相当于用 24 种颜色对正六面体的顶点着色。但绕对角线对称轴旋转不会产生重合的图象。

根据 Polya 定理，不同的方案有：

$$L=\frac{1}{24}(24^8+6\times24^2+3\times24^4+6\times24^4+8\times0)=4\,586\,595\,984$$

21．正六面体的 6 个面和 8 个顶点分别用红、蓝两种颜色的珠子嵌入。试问有多少种不同的方案数？（旋转使之一致的方案看作是相同的。）

解：本题相当于把“用两种颜色对正六面体的顶点着色”和“用两种颜色对正六面体的面着色”结合起来。



如图所示，8 个顶点 6 个面共 14 个元素的置换群如下：

（1）单位元：$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(A)(B)(C)(D)(E)(F)$，格式为 $(1)^8(1)^6$；

（2）绕轴 xx' 旋转 $\pm90^\circ$ 的置换分别为：$(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(A)(B\ C\ D\ E)(F)$ 和 $(4\ 3\ 2\ 1)(8\ 7\ 6\ 5)(A)(E\ D\ C\ B)(F)$，格式为 $(4)^2(1)^2(4)^1$，同类置换共有 6 个；

（3）绕轴 xx' 旋转 180° 的置换为：$(1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(A)(B\ D)(C\ E)(F)$，格式为 $(2)^4(1)^2(2)^2$，同类共有 3 个；

（4）绕轴 yy' 旋转 180° 的置换为：$(1\ 7)(2\ 6)(3\ 5)(4\ 8)(A\ F)(B\ E)(C\ D)$，格式为 $(2)^4(2)^3$，同类置换有 6 个；

（5）绕轴 zz' 旋转 $\pm120^\circ$ 的置换分别为：$(1\ 3\ 6)4\ 7\ 5)(2)(8)(A\ E\ B)(C\ D\ F)$ 和 $(1\ 3\ 6)(5\ 7\ 4)(2)(8)(F\ D\ C)(B\ E\ A)$，格式为 $(1)^2(3)^2(3)^2$，同类置换共有 8 个。

根据 Polya 定理，不同的染色方案有：

$$L=\frac{1}{24}(2^{14}+6\times2^5+3\times2^8+6\times2^7+8\times2^6)=776\text{（种）}$$