Group element가 항상 unitary representation을 가질 수 있을까? Finite group (ex. $S_4, Z_3, \cdots$) 의 경우 우리가 항상 unitary인 representation을 고를 수 있다. $\rightarrow$
Finite group G의 원소인 g에 대한 Non-unitary representation를 $\tilde{D}(g)$ 라고 하자. 이제 다음과 같은 quantity를 정의할 수 있고,

$$H = \sum_g \tilde{D}(g)^\dagger \tilde{D}(g)$$

H 는 주어진 representation에 의한 unitary transformation에 대해 invariant하다.

$$\tilde{D}(g')^\dagger H \tilde{D}(g') = \sum \tilde{D}(g')^\dagger \tilde{D}(g)^\dagger \tilde{D}(g) \tilde{D}(g') = \sum_{g''} \tilde{D}(g'')^\dagger \tilde{D}(g'') = H$$

한편, H는 hermitian이기 때문에 어떤 unitary matrix W에 의한 unitary transformation으로 diagonalize 될 수 있다. 또한 $M^\dagger M$ 이 항상 양의 eigenvalue를 갖기 때문에 ($M\psi = \rho\psi$ 일 때, $\left(\psi, M^\dagger M\psi\right) = (M\psi, M\psi) = (\rho\psi, \rho\psi) = |\rho|^2$, 따라서 $M^\dagger M\psi = |\rho|^2 \psi$) H 는 항상 양의 eigenvalue로 이루어진 diagonal matrix ρ^2을 갖는다.

$$\rho^2 = W^\dagger H W$$

마지막으로 $D(g)$ 를 다음과 같이 다시 정의하면 비로소 finite group에 대한 unitary representation을 얻어낼 수 있다.

$$D(g) = \rho W^\dagger \tilde{D}(g) W \rho^{-1}$$

$$D^\dagger D = \rho^{-1} W^\dagger \tilde{D}^\dagger W \rho \rho W^\dagger \tilde{D} W \rho^{-1} = \rho^{-1} W^\dagger \tilde{D}^\dagger H \tilde{D} W \rho^{-1} = \rho^{-1} \rho^2 \rho^{-1} = I$$

그러나, continuous group에 대해서는 이들이 unitary representation을 언제나 갖는다고 섣불리 단정할 수 없다. 오직 작은 element 요소들에 대한 적분인 $\int d\mu(g)(\cdots)$ 이 converge할 때만(즉, group이 compact할 때) continuous group의 element에 대한 unitary representation을 고를 수 있다.

Lie Group 의 특징

Group?

$$\text{associativity}, \quad \exists \mathbb{I}, \quad \exists g^{-1}$$

- Group element G를 어떤 parameter $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_a$에 관한 함수 $T(\theta_a)$ 로 나타낼 수 있다.
- Identity $\mathbb{I} = T(0)$ 이 존재한다.
- 두 group element인 $T(\theta_1)$, $T(\theta_2)$ 에 대해 이들의 product를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T(\theta_1) \cdot T(\theta_2) = T(f(\theta_1, \theta_2))$$

이때 $f(\theta_1, \theta_2)$ 가 주어진 Lie group 의 성질을 결정한다. 이제 위에서 보인 Lie group의 세 가지 성질들을 이용해서 $f^a(\theta_1, \theta_2)$ 의 Taylor expansion을 엿볼 수 있다. 다음 식을 보자.

$$T(\theta) \cdot T(\phi) = T(f^a(\theta, \phi))$$

위 식에서 θ 나 ϕ 가 0 이라면 identity 조건에 의해,

$$T(\theta) \cdot T(0) = T(\theta) \cdot \mathbb{I} = T(\theta) = T(f(\theta, 0)), \quad f^a(\theta, 0) = \theta$$

$$T(0) \cdot T(\phi) = \mathbb{I} \cdot T(\phi) = T(\phi) = T(f(0, \phi)), \quad f^a(0, \phi) = \phi$$

이고, $f^a(\theta, \phi)$ 의 일반적인 Taylor expansion은 다음과 같으므로,

$$f^a(\theta, \phi) = \theta + \phi + (\sim)(\theta^2 + \phi^2 + \theta\phi) + (\sim)(\theta^3 + \phi^3 + \theta^2\phi + \theta\phi^2) + \cdots$$

위의 조건에 의해 혼자 돌아다니는 항들은 전부 제거하면,

$$f^a(\theta, \phi) = \theta^a + \phi^a + f^a{}_{bc}\theta^b\phi^c + \cdots$$

의 꼴로 나타낼 수 있다. 뿐만아니라, $T(\theta)$ 의 unitary representation $U(T(\theta))$ 도 identity 근처에서 taylor series로 전개할 수 있는데,

$$U(T(\theta)) = 1 + i\theta^a T_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c T_{bc} + \cdots$$

이를 이용해서 이차항 T_{bc} 를 generator T_b, T_c 와 $f^a{}_{bc}$ 로 계산할 수 있다.

$$U(T(\theta))U(T(\phi)) = U(T(f^a(\theta, \phi)))$$

$$(1 + i\theta^a T_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c T_{bc} + \cdots)(1 + i\phi^a T_a + \frac{1}{2}\phi^b\phi^c T_{bc} + \cdots)$$

$$= (1 + i(\theta^a + \phi^a + f^a{}_{bc}\theta^b\phi^c + \cdots)T_a + \frac{1}{2}(\theta^b + \phi^b + \cdots)(\theta^c + \phi^c + \cdots)T_{bc} + \cdots)$$

좌변을 전개해서 우변과 비교해보자. θ, ϕ의 order대로 정리하면,

$$(\text{좌변})\ 1 + i\theta^a T_a + i\phi^a T_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c T_{bc} + \frac{1}{2}\phi^b\phi^c T_{bc} - \theta^a\phi^b T_a T_b + \cdots$$

$$(\text{우변})\ 1 + i(\theta^a + \phi^a)T_a + \frac{1}{2}(\theta^b\theta^c + \phi^b\phi^c + \theta^b\phi^c + \theta^c\phi^b)T_{bc} + if^a{}_{bc}\theta^b\phi^c T_a + \cdots$$

차수대로 정리하면,

$$-\theta^b\phi^c T_b T_c = \frac{1}{2}\theta^b\phi^c(T_{bc} + T_{cb}) + \theta^b\phi^c(if^a{}_{bc}T_a)$$

한편, U를 θ^b로 먼저 미분하고 θ^c로 미분하든, 거꾸로하든 결과는 같으므로 $T_{bc} = T_{cb}$이고,

$$T_{bc} = -T_bT_c - if^a{}_{bc}T_a$$

$$T_{cb} = -T_cT_b - if^a{}_{cb}T_a$$

T_b 와 T_c 의 commutator $[T_b, T_c]$ 는

$$[T_b, T_c] = T_bT_c - T_cT_b = (-T_{bc} - if^a{}_{bc}T_a) - (-T_{cb} - if^a{}_{cb}T_a) = i(f^a{}_{cb} - f^a{}_{bc})T_a = iC^a{}_{bc}T_a$$

이때 위와 같은 commuatation relation을 Lie algebra라고 하고 $C^a{}_{bc}$ 를 Lie algebra의 structure constant 라고 한다.

Lie Algebra?

$$[\![g_a, g_b]\!] = if^a{}_{bc}g_a$$

Lie bracket에 두 generator를 넣으면 generator들의 선형결합을 준다. Lie algebra는 다음의 세 조건을 만족한다.

$$\text{Linearity} \quad [\![a_1v_1 + a_2v_2, w]\!] = a_1[\![v_1, w]\!] + a_2[\![v_2, w]\!]$$

$$\text{Antisymmetry} \quad [\![v, w]\!] = -[\![w, v]\!]$$

$$\text{Jacobi Identity} \quad [\![[\![a, b]\!], c]\!] + [\![[\![b, c]\!], a]\!] + [\![[\![c, a]\!], b]\!] = 0$$