风险价值（VaR）和条件风险价值（CVaR）

VaR 和 CVaR 的定义

VaR 是一定置信水平α下（比如：99%），投资组合面临的最大损失，具体地，我们用收益率分布的$1-\alpha$百分位数来定义 VaR：

$$VaR(\alpha) = -F_r^{-1}(1-\alpha)$$

其中：$F_r(\bullet)$为组合收益率的累积分布函数

上面的定义是从收益分布的左尾定义 VaR。有时候，我们需要从收益分布的右尾定义 VaR：

$$VaR(\alpha) = F_r^{-1}(\alpha)$$

由于 VaR 不具有次可加性，即组合的 VaR 可能超过组合中各资产的加权平均 VaR，因此，具有次可加性特点的 CVaR 常常被用来衡量组合的风险。CVaR 衡量了一定置信水平α下发生损失超过 VaR 时的平均损失。具体地，其定义如下：

$$CVaR(\alpha) = -E(r \mid r \le -VaR) = -\frac{\int_{-\infty}^{-VaR} z f_r(z)dz}{F_r(-VaR)} = -\frac{\int_{-\infty}^{-VaR} z f_r(z)dz}{1-\alpha}$$

同样可以从右尾角度来定义 CVaR：

$$CVaR(\alpha) = \frac{\int_{VaR}^{\infty} z f_r(z)dz}{1-\alpha}$$

其中：$f_r(\bullet)$为组合收益率的概率密度函数

基于 Cornish-Fisher 展开式的 VaR 和 CVaR

Cornish-Fisher 展开式将标准化之后的组合收益r^*（$r^* = (r-\mu_p)/\sigma_p$）的百分位数α近似表示为

$$q = c(\alpha) + \frac{1}{6}\left[c(\alpha)^2 - 1\right]s_p + \frac{1}{24}\left[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)\right][k_p - 3] - \frac{1}{36}\left[c(\alpha)^3 - 5c(\alpha)\right]s_p^2$$

其中：μ_p为组合收益的均值，σ_p为组合收益的标准差，$c(\alpha)$为标准正态分布α百分位数，s_p为组合收益的偏度，k_p为组合收益的峰度

因此，组合收益r的百分位数α近似为：$\mu_p + \sigma_p q$，即$VaR(1-\alpha) = -[\mu_p + \sigma_p q]$

组合的 CVaR 为：

$$\begin{aligned} CVaR(1-\alpha) = &-\sigma_p (M_1 + \frac{1}{6}(M_2 - 1)s_p \\ &+ \frac{1}{24}(M_3 - 3M_1)(k_p - 3) - \frac{1}{36}(2M_3 - 5M_1)s_p^2) \end{aligned}$$

其中：$M_i=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{c(\alpha)}x^i f(x)dx$，$i=1,2,3$；$f(.)$为标准正态分布的概率密度函数

基于正态分布的 VaR 和 CVaR

$$VaR(1-\alpha)=-[\mu_p+\sigma_p c(\alpha)]$$

$$CVaR(1-\alpha)=-[\mu_p-\frac{\sigma_p}{\alpha}f(c(\alpha))]$$

基于历史模拟的 VaR 和 CVaR

用组合收益率的历史观测值的经验分布来计算 VaR 和 CVaR

下面给出基于历史模拟、正态分布和 Cornish-Fisher 展开式计算 VaR 和 CVaR 的 Matlab 函数。

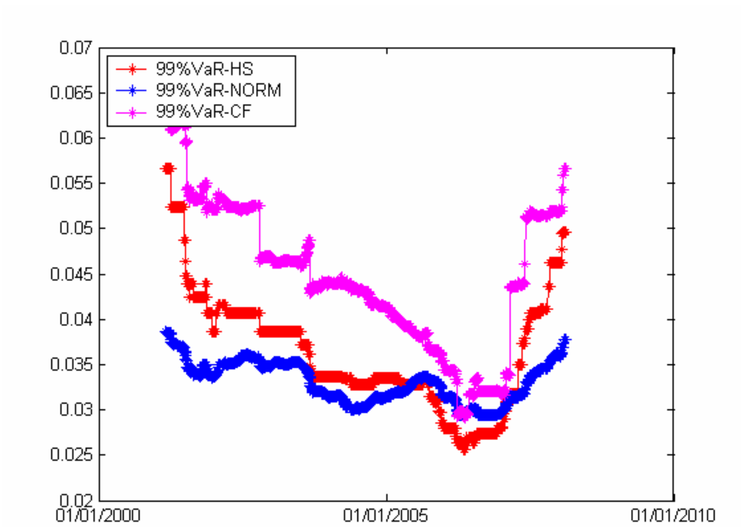
```
function [VaR,CVaR]=var_cvar(r,alpha,method)
n=length(r);
mu=mean(r);
sigma=std(r);
switch method
case 'hs'
VaR=-prctile(r,alpha*100);
CVaR=-(mean(r(r<=-VaR)));
case 'norm'
q_alpha=norminv(alpha,mu,sigma);
VaR=-(q_alpha);
CVaR=-(mu-sigma*normpdf((q_alpha-mu)/sigma,0,1)/alpha);
case 'cf'
nr=(r-mu)/sigma;
s=skewness(nr);
k=kurtosis(nr)-3;
q=norminv(alpha);
VaR=-(mu+sigma*(q+1/6*(q^2-1)*s+1/24*(q^3-3*q)*k-1/36*(2*q^3-5*q)*s^2));
syms x
m1=double(int(x*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
m2=double(int(x^2*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
m3=double(int(x^3*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
CVaR=-(mu+sigma*(m1+1/6*(m2-1)*s+1/24*(m3-3*m1)*k-1/36*(2*m3-5*m1)*s^2));
end
```

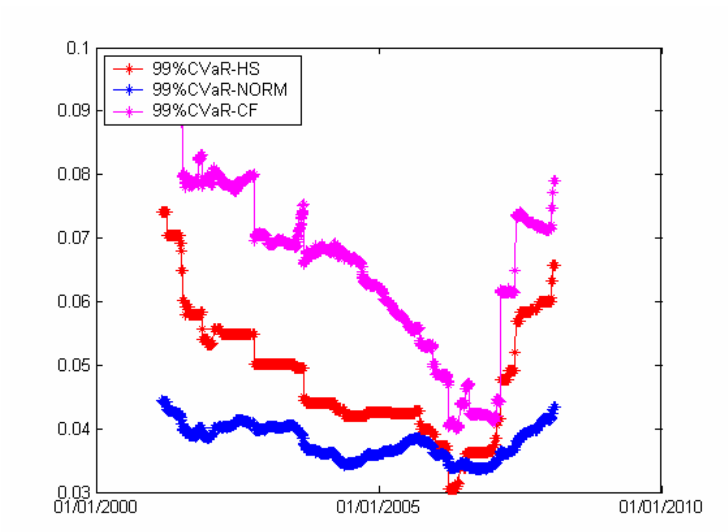
下面以 1997-1-2 到 2008-2-13 期间上证综合指数的日收益为例，计算其 99%VaR 和 CVaR。数据如下表所示，第一列为日期，第二列为上证综合指数的收盘价。文件名为'shindex.xls'。

	A	B	C	D	E	F
1	1997-1-2	919.44				
2	1997-1-3	899.61				
3	1997-1-6	876.5				
4	1997-1-7	898.17				
5	1997-1-8	896.41				
6	1997-1-9	906.98				
7	1997-1-10	918.4				
8	1997-1-13	929.52				
9	1997-1-14	907.85				
10	1997-1-15	916.72				
11	1997-1-16	915.01				
12	1997-1-17	919.85				
13	1997-1-20	933.28				
14	1997-1-21	929.11				
15	1997-1-22	942.44				
16	1997-1-23	945.8				
17	1997-1-24	953.92				
18	1997-1-27	959.06				
19	1997-1-28	956.31				
20	1997-1-29	962.1				
21	1997-1-30	960.17				
22	1997-1-31	964.74				

```
clear
x=xlsread('shindex');
x(:,1)=x2mdate(x(:,1));
x(1:1526,:)=[];
p=x(:,2);
date=x(:,1);
r=price2ret(p);
M=1000;
alpha=0.01;
ndate=date(2+M:end);
method='hs';
for i=1:length(r)-M
    a=r(i:i+M);
    [VaR1(i),CVaR1(i)]=var_cvar(a,alpha,method);
end
method='norm';
for i=1:length(r)-M
    a=r(i:i+M);
    [VaR2(i),CVaR2(i)]=var_cvar(a,alpha,method);
end
method='cf';
for i=1:length(r)-M
    a=r(i:i+M);
    [VaR3(i),CVaR3(i)]=var_cvar(a,alpha,method);
end
h=figure(1);
```

```
set(h,'color','w')
plot(ndate,VaR1','r-*')
hold on
plot(ndate,VaR2','b-*')
plot(ndate,VaR3','m-*')
datetick('x',23)
legend('99%VaR-HS','99%VaR-NORM','99%VaR-CF',2)
h=figure(2);
set(h,'color','w')
plot(ndate,CVaR1','r-*')
hold on
plot(ndate,CVaR2','b-*')
plot(ndate,CVaR3','m-*')
datetick('x',23)
legend('99%CVaR-HS','99%CVaR-NORM','99%CVaR-CF',2)
```





极值理论与风险价值（VaR）和条件风险价值（CVaR）

极值理论

考虑随机变量 X，其概率密度函数和累积分布函数分别为 $f(x)$ 和 $F(x)$，$X_1, X_2, ..., X_n$ 为其独立同分布的随机变量序列

定义

$$X_{\max,n} = \max(X_1, X_2, ..., X_n)$$

$$X_{\min,n} = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$$

则称 $X_{\max,n}$ 和 $X_{\min,n}$ 为序列 $X_1, X_2, ..., X_n$ 的极值，显然我们有

$$X_{\min,n} = -\max(-X_1, -X_2, ..., -X_n)$$

因此，以下讨论中极值单指 $X_{\max,n}$

则：

$X_{\max,n}$ 的分布函数为：$[F(x)]^n$，概率密度函数为 $n[F(x)]^{n-1} f(x)$

$X_{\min,n}$ 的分布函数为：$1-[1-F(x)]^n$，概率密度函数为 $n[1-F(x)]^{n-1} f(x)$

如果随机变量 X 的分布未知，则可以用 $X_{\max,n}$ 的渐进分布，广义极值（GEV）分布来近似表示 $X_{\max,n}$ 的分布（Jenkinson，1955)

。具体地，$X_{\max,n} \xrightarrow{d} H_{\max}(X_{\max,n})$

其中：$H_{\max}(\bullet)$ 为广义极值分布函数，

$$H_{\max}(X_{\max,n}; \xi_{\max,n}, \mu_{\max,n}, \sigma_{\max,n}) = \exp\{-[1+\xi_{\max,n}(\frac{X_{\max,n}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}\}$$

其中：$1+\xi_{\max,n}((X_{\max,n}-\mu_{\max,n})/\sigma_{\max,n}) \geq 0$

相应地其概率密度函数

$$h_{\max}(X_{\max,n}; \xi_{\max,n}, \mu_{\max,n}, \sigma_{\max,n}) = \frac{1}{\sigma_{\max,n}}[1+\xi_{\max,n}(\frac{X_{\max,n}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-(1+\xi_{\max,n})/\xi_{\max,n}}$$
$$\times\exp\{-[1+\xi_{\max,n}(\frac{X_{\max,n}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}\}$$

$X_{\max,n}$ 的渐进分布还可以用广义帕累托分布（GPD）$G_{\max}(x)$ 来表示（Pickands，1975）

$$G_{\max}(x) = 1+\ln(H_{\max}(x))$$

即

$$G_{\max}(X_{\max,n};\xi_{\max,n},\mu_{\max,n},\sigma_{\max,n})=1-[1+\xi_{\max,n}(\frac{X_{\max,n}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}$$

相应地，其概率密度函数为：

$$g_{\max}(X_{\max,n};\xi_{\max,n},\mu_{\max,n},\sigma_{\max,n})=\frac{1}{\sigma_{\max,n}}[1+\xi_{\max,n}(\frac{X_{\max,n}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-(1+\xi_{\max,n})/\xi_{\max,n}}$$

渐进分布的参数估计方法

（1）非线性回归方法

Gumbel (1958)提出了使用非线性回归方法估计广义极值分布和广义帕累托分布中的参数$(\xi_{\max,n},\mu_{\max,n},\sigma_{\max,n})$。

已知$X_{\max,n}$的N个观测值：$X_{\max}^1,X_{\max}^2,...,X_{\max}^N$，其顺序统计量序列为$\tilde{X}_{\max}^1,\tilde{X}_{\max}^2,...,\tilde{X}_{\max}^N$，且满足$\tilde{X}_{\max}^1\le\tilde{X}_{\max}^2\le...\le\tilde{X}_{\max}^N$，显然$\tilde{X}_{\max}^r,r=1,2,...,N$为随机变量，其概率密度函数为：

$$f(x;N,r)=\frac{x^{r-1}(1-x)^{N-r}}{B(r,N-r+1)},\quad 0\le x\le 1$$

其中：$B(\bullet)$为贝塔函数。

相应地，$\tilde{X}_{\max}^r$的均值为$\int_0^1\frac{x^r(1-x)^{N-r}}{B(r,N-r+1)}dx=\frac{r}{N+1}$

同样，$H_{\max}(\tilde{X}_{\max}^r)$也为$[0,1]$区间上的随机变量，其均值为：

$$E[H_{\max}(\tilde{X}_{\max}^r)]=E[\exp\{-[1+\xi_{\max,n}(\frac{\tilde{X}_{\max}^r-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}\}]$$

令

$$E[\exp\{-[1+\xi_{\max,n}(\frac{\tilde{X}_{\max}^r-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}\}]=\frac{r}{N+1},\quad r=1,2,...,N$$

则我们可以建立以下回归方程估计广义极值分布的参数$(\xi_{\max,n},\mu_{\max,n},\sigma_{\max,n})$

$$y=-\frac{1}{\xi_{\max,n}}\ln(1+\xi_{\max,n}(\frac{\tilde{X}_{\max}^r-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}}))+\varepsilon$$

其中：$y=\ln(-\ln(\frac{r}{N+1}))$。给定观测值$(\ln(-\ln(\frac{r}{N+1})),\tilde{X}_{\max}^r)$，$r=1,2,...,N$，广义极值分布中的参数估计可以通过最小化回归方程中残差平方和得到。

类似地，令

$$E(G_{\max}(\tilde{X}^r_{\max})) = E(1-[1+\xi_{\max,n}(\frac{\tilde{X}^r_{\max}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}) = \frac{r}{N+1}，\quad r=1,2,...,N$$

则我们可以建立以下回归方程估计广义帕累托分布中的参数 $(\xi_{\max,n},\mu_{\max,n},\sigma_{\max,n})$

$$y = -\frac{1}{\xi_{\max,n}}\ln(1+\xi_{\max,n}(\frac{\tilde{X}^r_{\max}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})) + \varepsilon$$

其中：$y=\ln(1-\frac{r}{N+1})$。给定观测值 $(\ln(1-\frac{r}{N+1}),\tilde{X}^r_{\max})$，$r=1,2,...,N$，广义帕累托分布中的参数估计可以通过最小化回归方程中残差平方和得到。

（2）极大似然估计方法

给定 $X_{\max,n}$ 的 N 个观测值：$X^1_{\max},X^2_{\max},...,X^N_{\max}$，如果 $X_{\max,n}$ 服从广义极值分布，则相应其对数似然函数为：

$$LnL_H = -N\ln\sigma_{\max,n} - N(\frac{1+\xi_{\max,n}}{\xi_{\max,n}})\sum_{i=1}^{N}\ln[1+\xi_{\max,n}(\frac{X^i_{\max}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]$$
$$-\sum_{i=1}^{N}[1+\xi_{\max,n}(\frac{X^i_{\max}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]^{-1/\xi_{\max,n}}$$

最大化上面似然函数得到广义极值分布的参数估计。

类似地，如果服从广义帕累托分布，则相应其对数似然函数为：

$$LnL_G = -N\ln\sigma_{\max,n} - N(\frac{1+\xi_{\max,n}}{\xi_{\max,n}})\sum_{i=1}^{N}\ln[1+\xi_{\max,n}(\frac{X^i_{\max}-\mu_{\max,n}}{\sigma_{\max,n}})]$$

最大化上面似然函数得到广义帕累托分布的参数估计。

极值理论在风险价值（VaR）和条件风险价值（CVaR）的计算中的应用

给定组合收益率的 N 个观测序列：$r_1,r_2,...,r_N$，我们定义超过临界值 K 的收益率为极值 $X_{\max}$，比如可以定义超过均值 2 个标准差的收益率为 $X_{\max}$ 的观测值。我们记超过临界值 K 的收益率序列为 $y_1,y_2,...,y_n$，即 N 总观测值中有 n 个超过临界值 K。进一步，我们定义新的序列 $z_1,z_2,...,z_n$ 为极值序列，这里 $z_1=y_1-K,z_2=y_2-K,...,z_n=y_n-K$，应用该序列我们可以估计出广义极值分布的参数或者广义帕累托分布的参数。在估计出这些参数后，可以计算出组合的 VaR 和 CVaR。其原理如下：

定义

$$P(r_t \le K) = F(K)$$

$P(r_t \le K + z_t) = F(K + z_t)$

$F_{\max}(z_t) = \dfrac{F(K + z_t) - F(K)}{1 - F(K)}$

则当临界值K较高时，$F_{\max}(z_t)$应当接近广义极值分布或广义帕累托分布。

先考虑$F_{\max}(z_t)$足够接近广义极值分布的情形。

用n/N作为$1 - F(K)$的估计，我们得到

$F_{\max}(z_t) = \exp\{-[1 + \xi(\dfrac{z_t - \mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\} = \dfrac{F(K + z_t) - (1 - n/N)}{n/N}$

因此，$1 - F(K + z_t) = \dfrac{n}{N}\exp\{-[1 + \xi(\dfrac{z_t - \mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\}$

令$\dfrac{n}{N}\exp\{-[1 + \xi(\dfrac{z_t - \mu}{\sigma})]^{-1/\xi}\} = \alpha$，得到

$VaR_z^{GEV}(\alpha) = \mu + \dfrac{\sigma}{\xi}\{[-\ln(1 - (1 - \alpha)N/n)]^{-\xi} - 1\}$

$VaR_r(\alpha) = K + VaR_z^{GEV}(\alpha)$

其中：$VaR_r(\alpha)$表示组合收益分布α置信水平下的 VaR，$VaR_z^{GEV}(\alpha)$表示极值分布α置信水平下的 VaR。

相应地，我们得到$CVaR_r(\alpha)$为：

$CVaR_r(\alpha) = K + \dfrac{1}{1 - \alpha}\int_0^{1-\alpha} VaR_z^{GEV} x dx$

考虑$F_{\max}(z_t)$足够接近广义帕累托分布的情形。类似地可以得到

$VaR_z^{GPD}(\alpha) = \mu + \dfrac{\sigma}{\xi}([(1 - \alpha)N/n)]^{-\xi} - 1)$

$VaR_r(\alpha) = K + VaR_z^{GPD}(\alpha)$

$CVaR_r(\alpha) = K + \dfrac{1}{1 - \alpha}\int_0^{1-\alpha} VaR_z^{GPD} x dx$

注意：以上我们得到的$VaR_r(\alpha)$和$CVaR_r(\alpha)$是基于右尾的$VaR_r(\alpha)$和$CVaR_r(\alpha)$。如果要得到左尾的$VaR_r(\alpha)$和$CVaR_r(\alpha)$，则只需将收益率的N个观测序列：$r_1, r_2, ..., r_N$改成$-r_1, -r_2, ..., -r_N$，其余步骤不变即得到基于左尾的$VaR_r(\alpha)$和$CVaR_r(\alpha)$。

下面我们给出基于 GPD 的非线性回归方法估计组合收益 VaR 和 CVaR 的 Matlab 函数。

```
function [var,cvar]=var_cvar_extreme_GPD(r,alpha)
%calculate VaR and CVaR based on extreme theory in which generalized Parato
%distribution is employed.
%In detail, see Bali, T. G., 2003, An extreme value approach to estimating volatility and value at risk, Journal of Business 76, 83-108.
r=-r;
N=length(r);
K=mean(r)+2*std(r);
rr=r(find(r>K));
rr=rr-K;
n=length(rr);
x=sort(rr);
y=log(1-(1:n)/(n+1))';
para=[-(std(x)/(max(x)-mean(x))+std(x)/(min(x)-mean(x)))/2;mean(x);std(x)];
[para,standard_error,covariance,t_statistics,R_square]=nonlinearregression(y,x,'extreme_GPD',para);
var=para(2)+para(3)/para(1)*((alpha*N/n)^(-para(1))-1)+K;
cvar=quad(@int_fun_GPD,0,alpha,[],[],[para;N;n])/alpha+K;
```

上面的程序需要调用以前我们使用过的函数 nonlinearregression 之外，还需要调用以下函数：

```
function f=extreme_GPD(para,x)
eta=para(1);
mu=para(2);
sigma=para(3);
f=-1/eta*log(1+eta/sigma*(x-mu));

function f=int_fun_GPD(x,para)
eta=para(1);
mu=para(2);
sigma=para(3);
N=para(4);
n=para(5);
f=mu-sigma/eta+sigma/eta*(x*N/n).^(-eta);
```

均值-方差有效前沿与均值-VaR 及均值-CVaR 有效前沿

均值-方差前沿组合（不允许卖空）

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}W^T V W \\
&s.t.\quad W^T e = E(r_p) \\
&\qquad\ \ W^T 1 = 1 \\
&\qquad\ \ W \ge 0
\end{aligned}$$

均值-VaR 前沿组合（不允许卖空）

$$\min VaR$$

$$s.t.\quad W^T e = E(r_p)$$

$$W^T 1 = 1$$

$$W \geq 0$$

均值-CVaR 前沿组合（不允许卖空）

$$\min CVaR$$

$$s.t.\quad W^T e = E(r_p)$$

$$W^T 1 = 1$$

$$W \geq 0$$

下面我们从上海股票市场任意取了 5 只股票 2000-1-28 到 2009-3-28 期间的月度数据，分别计算基于最小化方差、99%VaR 和 CVaR 的前沿组合。具体数据如下表所示，文件名为 monthly_data_stock.xls。

	A	B	C	D	E	F
1	2000-01-28	9.15	3.47	1.05	5.05	5.61
2	2000-02-29	9.19	3.55	1.09	5.9	6.34
3	2000-03-31	9.21	3.63	1.12	5.98	5.85
4	2000-04-28	9.13	3.81	1.19	6.17	6
5	2000-05-31	8.57	4.15	1.33	6.79	5.93
6	2000-06-30	8.6	3.95	1.37	7.19	6.07
7	2000-07-31	8.84	4.41	1.52	8.48	6.42
8	2000-08-31	8.55	3.97	1.64	7.62	6
9	2000-09-29	7.94	3.65	1.43	6.87	5.72
10	2000-10-31	7.83	3.68	1.43	7.09	5.69
11	2000-11-30	8.08	3.9	1.48	7.42	5.82
12	2000-12-29	7.63	3.81	1.45	7.26	5.72
13	2001-01-19	7.64	4.02	1.58	8.15	5.92
14	2001-02-28	7.3	3.96	1.56	8.11	6.03
15	2001-03-30	7.71	4.13	1.61	8.43	6.25
16	2001-04-30	7.39	3.94	1.57	8.3	5.96
17	2001-05-31	7.35	3.89	1.62	8.5	5.97

基于正态分布的前沿组合

```
clear
x=xlsread('monthly_data_stock');
r=price2ret(x(:,2:end));
n=size(r,2);
IW=ones(n,1)/n;%set initial value for weight
method='norm'
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%expected returns, std, VaR and CVaR for individual stocks
e=mean(r);
```

```
stdev=std(r);
for i=1:n
[var(i),cvar(i)]=var_cvar(r(:,i),0.01,method);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Aeq=[ones(1,n);e];
options=optimset('largescale','off');
ER=linspace(min(e),max(e),20);
V=cov(r);
%%%%%%%%%%minimize VaR or CVaR
for i=1:length(ER)
Beq=[1;ER(i)];
W(:,i)=fmincon(@var_cvar_min_fun,IW,[],[],Aeq,Beq,zeros(n,1),ones(n,1),[],optio
ns,r,0.01,method,1);%min VaR
nW(:,i)=fmincon(@var_cvar_min_fun,IW,[],[],Aeq,Beq,zeros(n,1),ones(n,1),[],opti
ons,r,0.01,method,2);%min CVaR
sigma(i)=sqrt(W(:,i)'*V*W(:,i));
nsigma(i)=sqrt(nW(:,i)'*V*nW(:,i));
[VaR(i),CVaR(i)]=var_cvar(weight_portfolio(W(:,i),r),0.01,method);%VaR and CVaR
based on minimizing VaR
[nVaR(i),nCVaR(i)]=var_cvar(weight_portfolio(nW(:,i),r),0.01,method);%VaR  and
CVaR based on minimizing CVaR
end
%%%%%%%%%%minimize Variance
for i=1:length(ER)
Beq=[1;ER(i)];
[W1(:,i),fv(i)]=quadprog(V,[],[],[],Aeq,Beq,zeros(n,1),ones(n,1),IW,options);
fv(i)=sqrt(fv(i)*2);%standard deviation
[VaR1(i),CVaR1(i)]=var_cvar(weight_portfolio(W1(:,i),r),0.01,method);
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
h=figure(1);
set(h,'color','w')
plot(sigma,ER,'-o')%ER-VaR frontier
hold on
plot(fv,ER,'r-*')%ER-sigma frontier
plot(nsigma,ER,'k-square')%ER-CVaR frontier
xlabel('Sigma')
ylabel('ER')
plot(stdev,e,'kpentagram')
legend('ER-VaR Frontier', 'ER-sigma Frontier','ER-CVaR Frontier','individual
stocks',2)

h=figure(2);
```

```
set(h,'color','w')
plot(VaR,ER,'-o')%ER-VaR frontier
hold on
plot(VaR1,ER,'r-*')%ER-sigma frontier
plot(nVaR,ER,'k-square')%ER-CVaR frontier
xlabel('VaR')
ylabel('ER')
plot(var,e,'kpentagram')
legend('ER-VaR  Frontier','ER-sigma  Frontier','ER-CVaR  Frontier','individual
stocks',2)

h=figure(3);
set(h,'color','w')
plot(CVaR,ER,'-o')%ER-VaR frontier
hold on
plot(CVaR1,ER,'r-*')%ER-sigma frontier
plot(nCVaR,ER,'k-square')%ER-CVaR frontier
xlabel('CVaR')
ylabel('ER')
plot(cvar,e,'kpentagram')
legend('ER-VaR  Frontier','ER-sigma  Frontier','ER-CVaR  Frontier','individual
stocks',2)
```

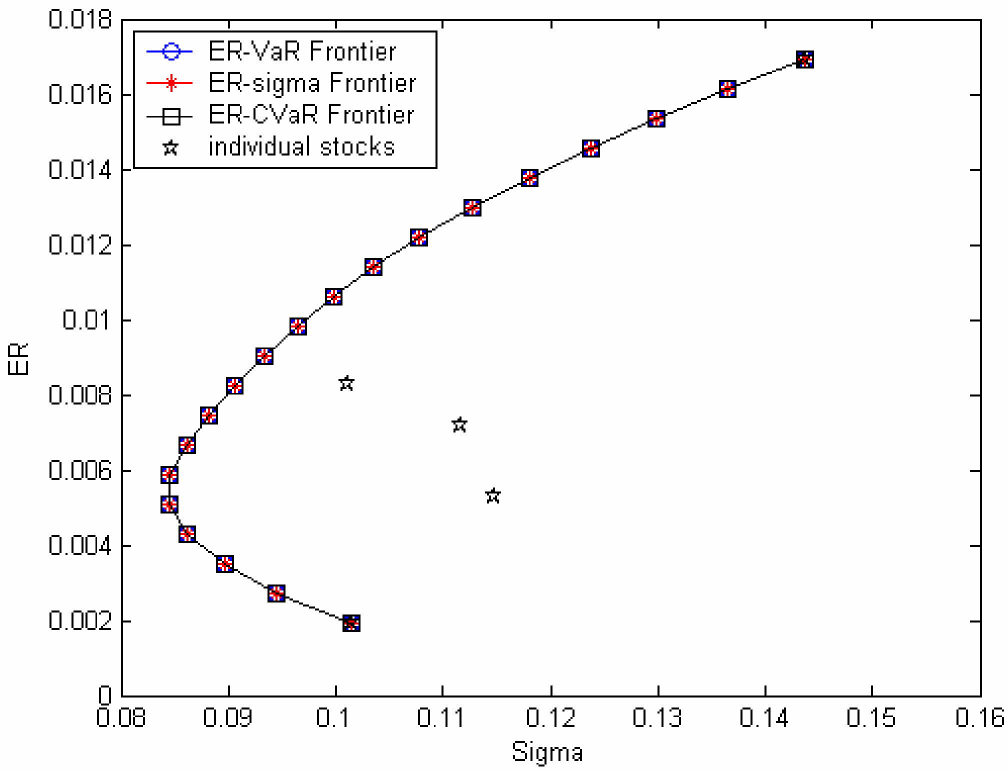
运行上面的程序，我们得到基于正态分布计算 VaR 和 CVaR 的前沿组合。

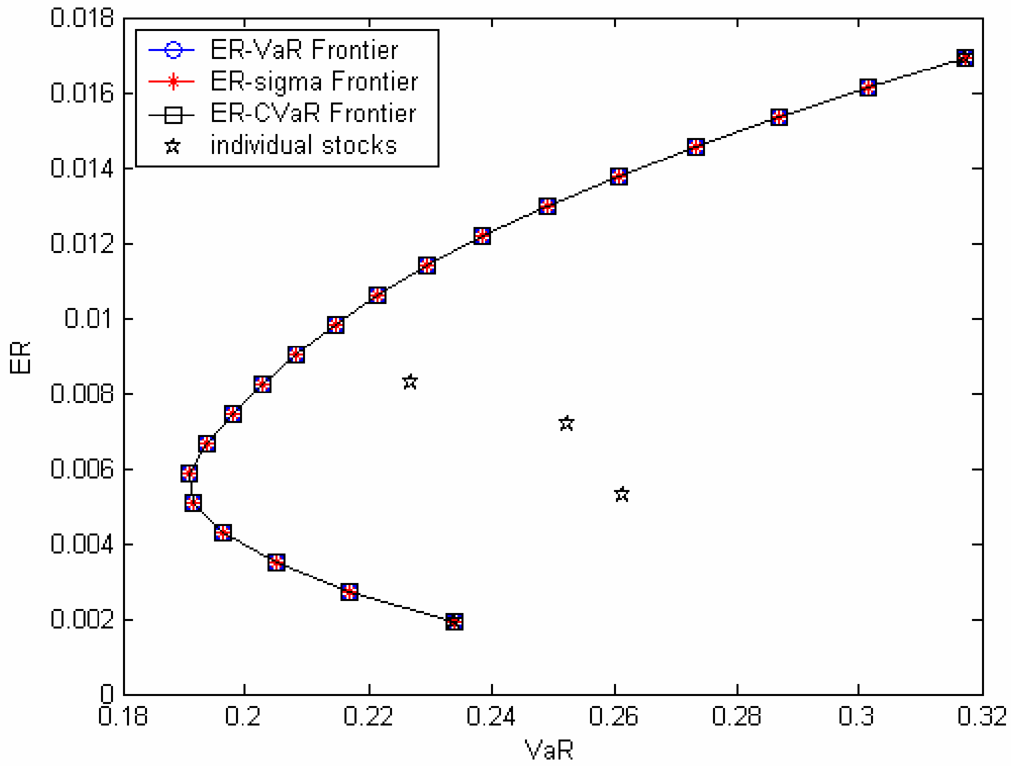
上面的程序用到了以下辅助函数 weight_portfolio 和 var_cvar_min_fun：

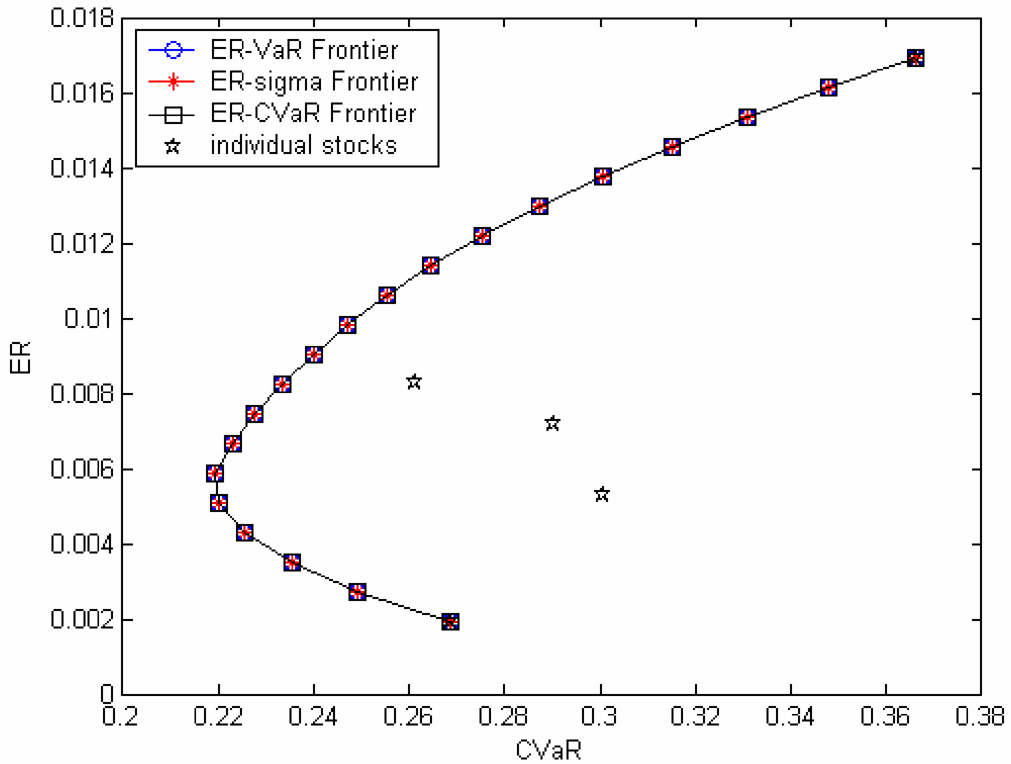
```
function f=weight_portfolio(W,r)
W=W(:);
if length(W)~=size(r,2)
    error('W does not match r');
end
N=size(r,1);
A=repmat(W',N,1);
f=A.*r;
f=sum(f,2);
function f=var_cvar_min_fun(w,r,alpha,method,num)
for i=1:length(w)
a(:,i)=w(i)*r(:,i);
end
r=sum(a,2);
n=length(r);
mu=mean(r);
sigma=std(r);
switch method
case 'hs'
VaR=-prctile(r,alpha*100);
```

```
CVaR=-(mean(r(r<=-VaR)));
case 'norm'
    q_alpha=norminv(alpha,mu,sigma);
    VaR=-(q_alpha);
    CVaR=-(mu-sigma*normpdf((q_alpha-mu)/sigma,0,1)/alpha);
case 'cf'
nr=(r-mu)/sigma;
s=skewness(nr);
k=kurtosis(nr)-3;
q=norminv(alpha);
VaR=-(mu+sigma*(q+1/6*(q^2-1)*s+1/24*(q^3-3*q)*k-1/36*(2*q^3-5*q)*s^2));
syms x
m1=double(int(x*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
m2=double(int(x^2*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
m3=double(int(x^3*1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2),-inf,q))/alpha;
CVaR=-(mu+sigma*(m1+1/6*(m2-1)*s+1/24*(m3-3*m1)*k-1/36*(2*m3-5*m1)*s^2));
end
if num==1
    f=VaR;
else
    f=CVaR;
end
```

因为收益假定为正态分布，因此，最小化 VaR 或 CVaR 与最小化方差是等价的。

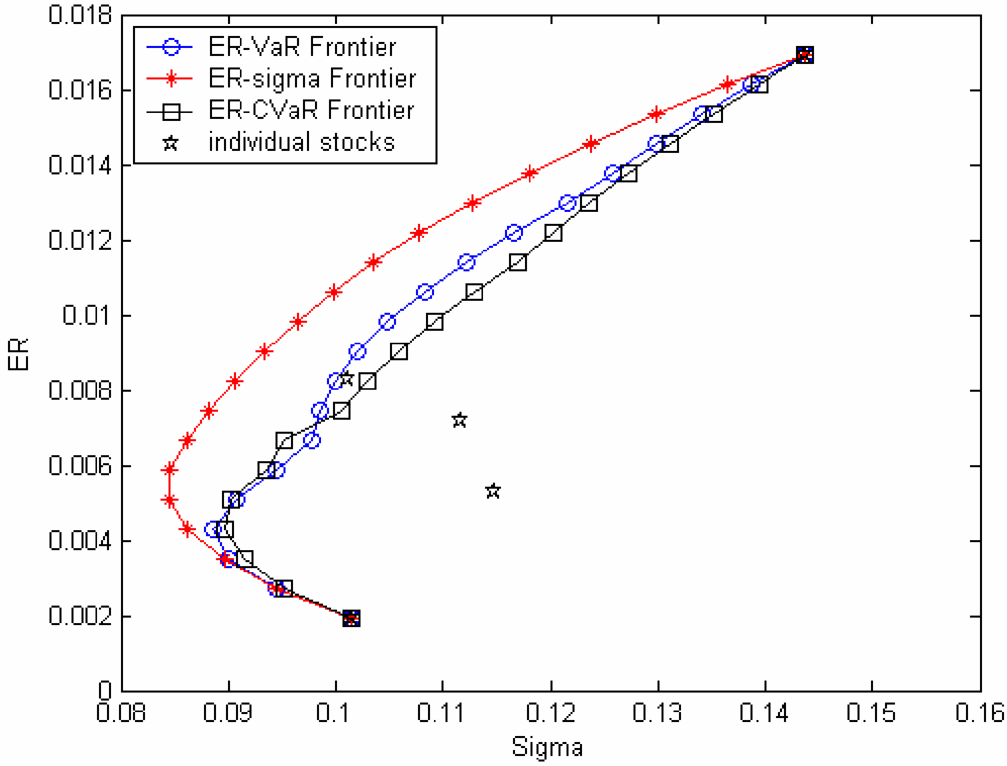


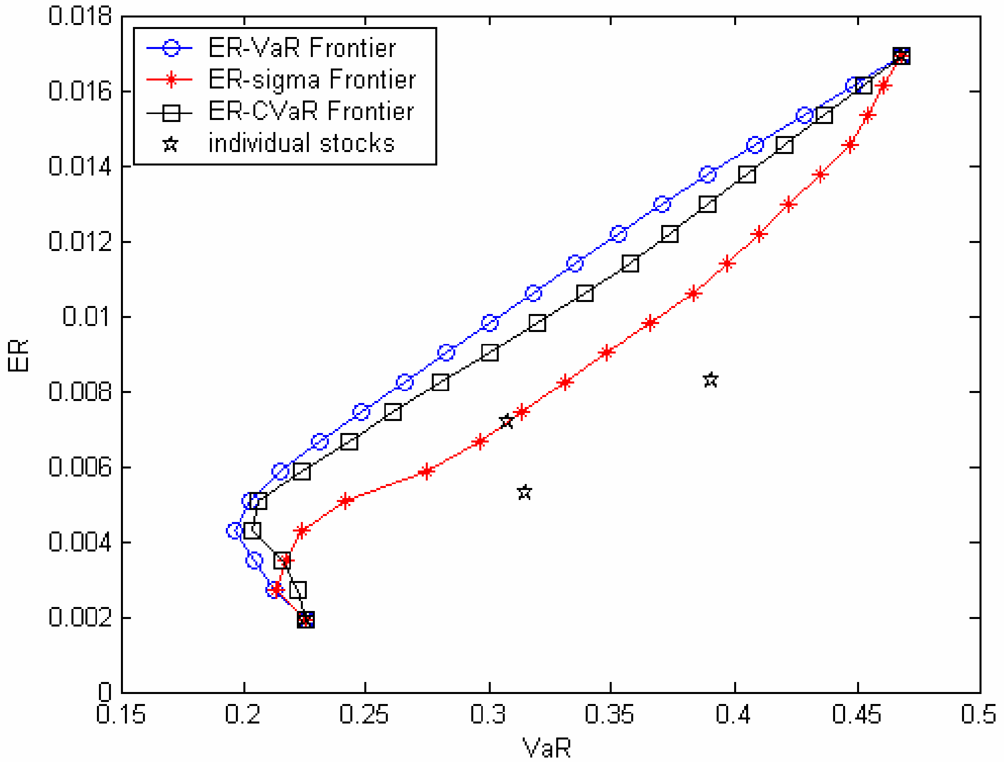


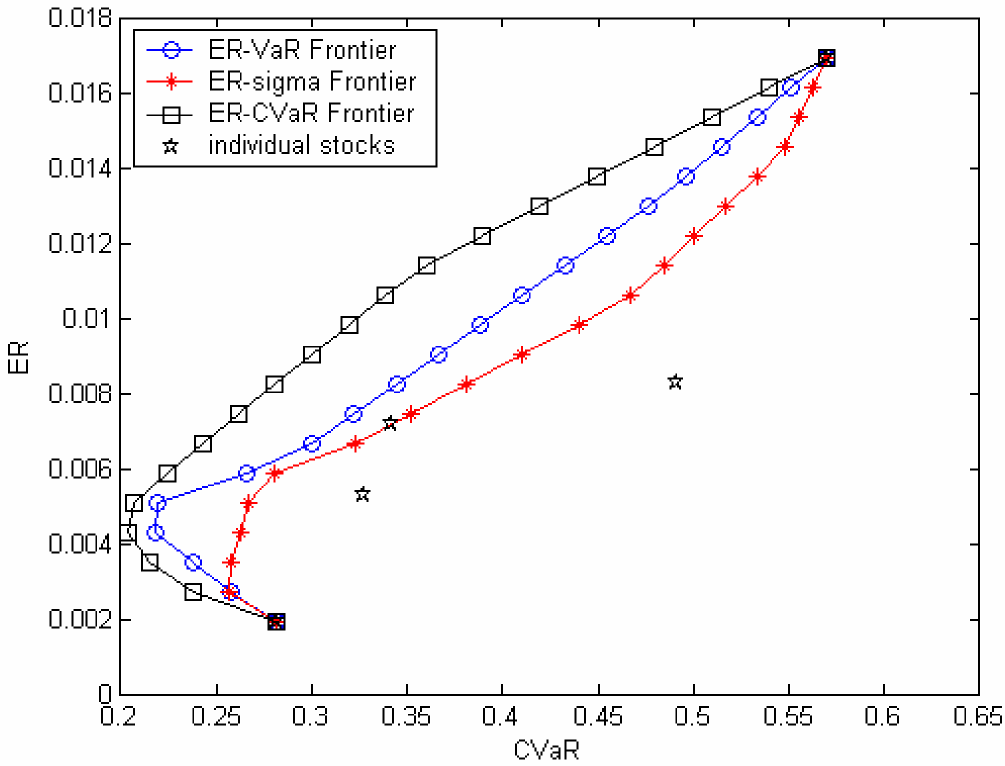


基于历史模拟的前沿组合

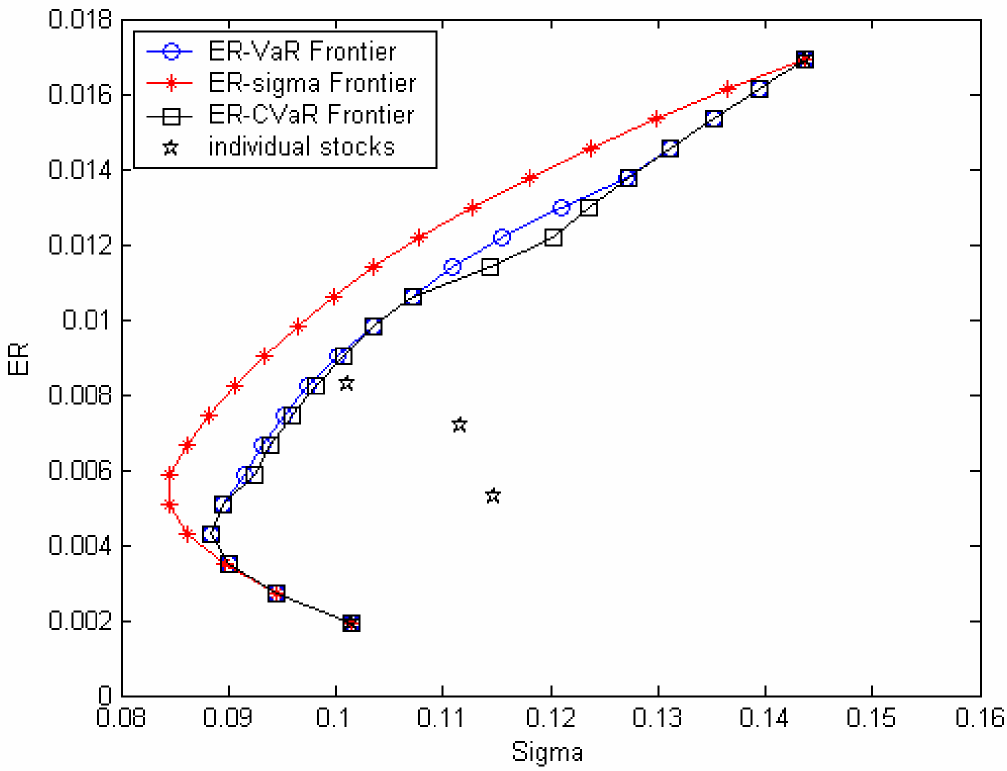
将上述程序中的 method 赋值由'norm'改为'hs'，得到基于历史模拟计算 VaR 和 CVaR 的前沿组合

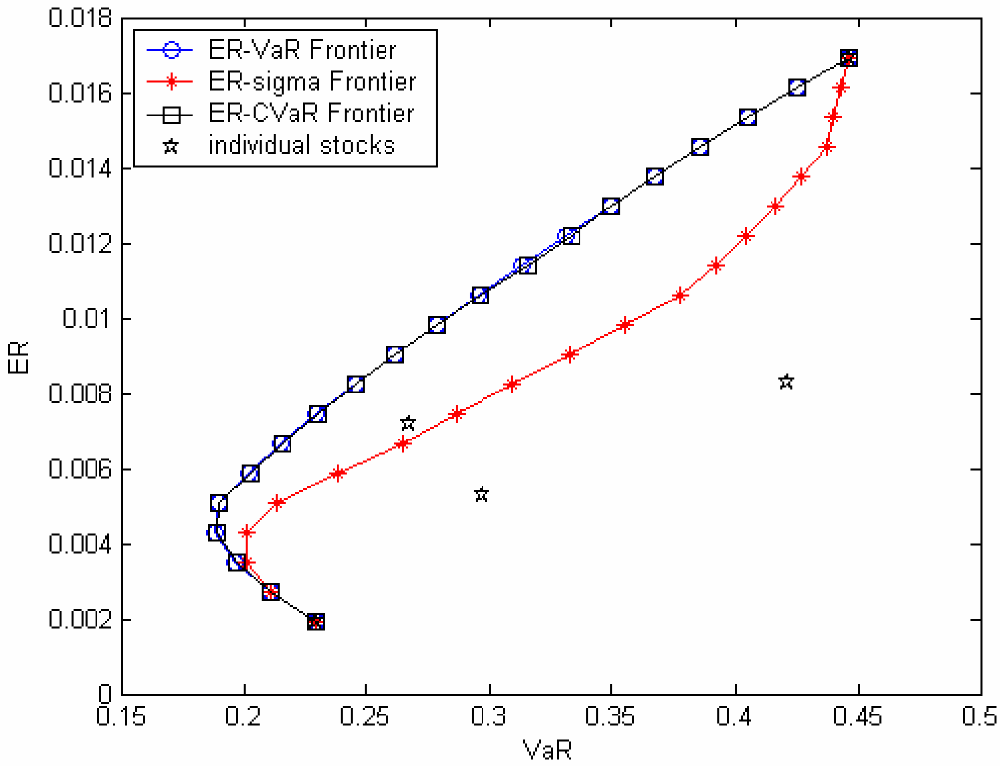

ER-VaR Frontier
ER-sigma Frontier
ER-CVaR Frontier
individual stocks
ER
Sigma
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.08
0.09
0.1
0.11
0.12
0.13
0.14
0.15
0.16

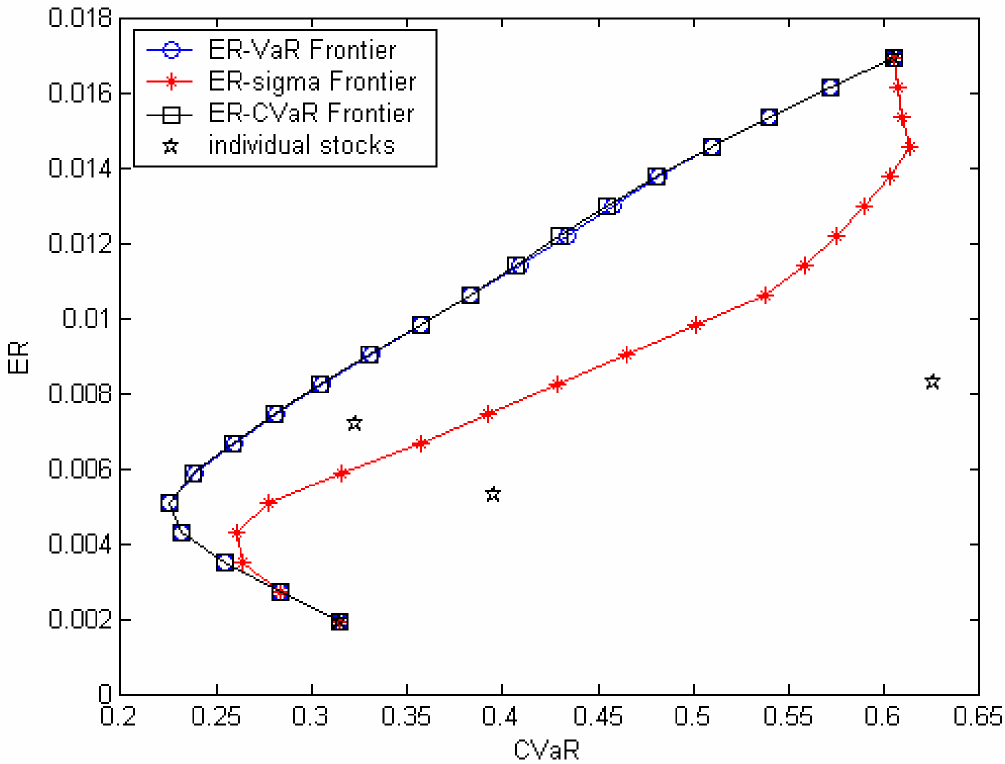

ER-VaR Frontier
ER-sigma Frontier
ER-CVaR Frontier
individual stocks
ER
VaR
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5



将上述程序中的 method 赋值由'norm'改为'cf'，得到基于 Cornish-Fisher 展开式计算 VaR 和 CVaR 的前沿组合




ER-VaR Frontier
ER-sigma Frontier
ER-CVaR Frontier
individual stocks
ER
VaR
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5


ER-VaR Frontier
ER-sigma Frontier
ER-CVaR Frontier
individual stocks
ER
CVaR
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65