Z3 使用教程

摘要：本教程提供了对**可满足性模理论**（Satisfiability Modulo Theories，SMT）求解器 Z3 的介绍，并描述了其基本功能及通过 Python 语言 API 使用 Z3 的方法。

一、 简要介绍

可满足性模理论（Satisfiability Module Theory，SMT）是指在某些背景理论（比如算术、位向量、数组和非解释函数等背景理论及其组合）下，对给定一阶逻辑公式可满足性的判断问题。我们说某个公式是可满足的（Satisfiable），当且仅当该公式存在至少一组赋值使其成真。比如有如下公式：

1. 长度为 $length$ 的数组 a 为升序排列：$\forall i, j. 0 \le i < j < length \Rightarrow a[i] \le a[j]$
2. 长度为 $length$ 的数组 a 中存在值为 key 的元素：$\exists i. 0 \le i < length \Rightarrow a[i] = key$
3. 加法交换律：$\forall a,b,c,d. a = d \wedge b = c \Rightarrow a + b = c + d$
4. 一般算术：$\forall a,b. a > 0 \wedge b > 1 \Rightarrow a + b < 1$（永假式，不可满足）
5. 基本算数性质：$\forall x, y, z. x = y \Rightarrow x + z = y + z$

以上 1、2 公式，属于数组理论（Array Theory），定义了基本算术运算（如 $\le$）以及数组的读写（如 $a[i]$）。而 3、4、5 这三个公式，则属于算术理论（Arithmetic Theory），定义了比较以及加减法等运算（如 $+,>$）。对于上述 SMT 问题，可以使用 SMT 求解器求解。倘若公式可满足，还将输出一组令公式可满足的解。比如例子中第 1 个公式是可

满足的，可满足的解可为 $length = 3$ 且 $a = [1, 2, 3]$；第 2 个公式也是可满足的，可满足的解可为 $length = 2$，$key = 3$ 且 $a = [1, 3]$；第 3 个公式是永真的；第 4 个公式则是不可满足的，即不存在可满足的解。

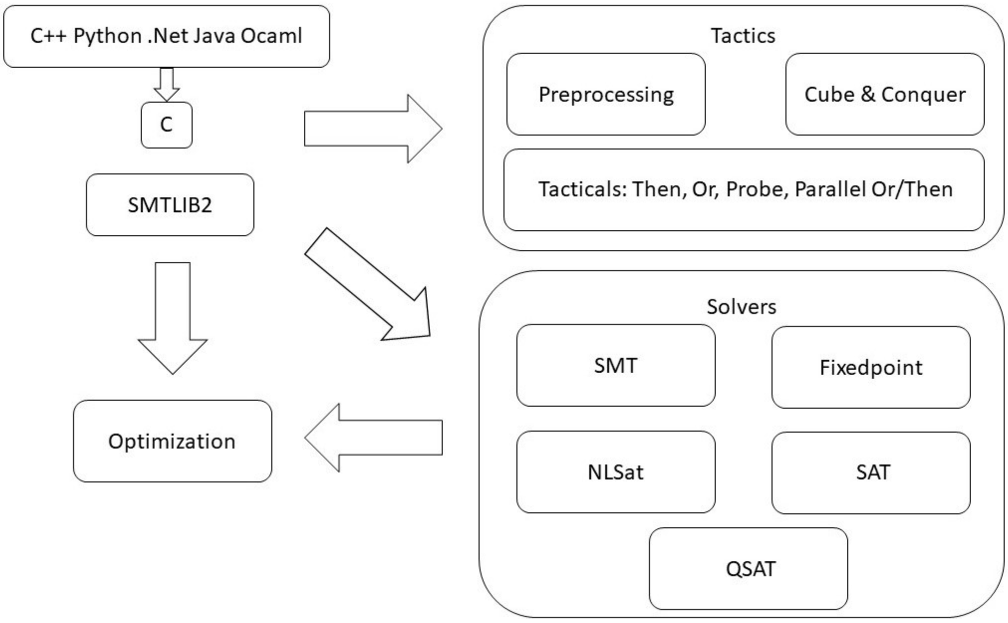


图 1：Z3 系统架构

Z3 是由微软公司开发的一款 SMT 求解器，上图 1 显示了其系统架构。使用者可以通过 SMT-LIB2 脚本与 Z3 进行交互，这些脚本以文本文件或管道形式提供给 Z3；也可以使用高级编程语言的 API 调用（如左上角所示），这些高级编程语言以 C 的 API 为代理进行调用。后续教程中着重于使用 Python 前端作为与 Z3 接口的方式。

更多资源：

1. Z3 github 仓库：https://github.com/z3prover/z3
2. Z3 python 程序示例：
   https://github.com/Z3Prover/doc/tree/master/programmingz3/code
3. Z3 编程介绍：
   http://theory.stanford.edu/~nikolaj/programmingz3.html

二、 Z3 的安装

推荐第 2 种，方便快捷!!

1、从源码安装（仅展示 GNU/Linux 系统），系统要求：GNU/Linux，比如 Ubuntu。（以下例程基于 Ubuntu 20.04 LTS amd64）

```
#安装依赖
sudo apt update
sudo apt install git make python3 python3-pip

#在 Ubuntu 上进行编译
git clone https://github.com/Z3Prover/z3.git
cd z3
python3 scripts/mk_make.py --python
cd build
make
sudo make install
```

使用方式：

```
# example.py 文件为待求解的脚本（也可以使用 python3 的交互式方式）
python3 ../examples/python/example.py
```

z3/examples/python/example.py 为求解公式 $\exists x, y \in R. x+y>5, x>1, y>1$ 的脚本，结果中 sat 表示可满足，其中一组解为 $[y=4, x=2]$。

2、下载二进制文件、解压运行即可。

1）GNU/Linux 系统，比如 Ubuntu：

```
sudo apt update
sudo apt install python3 python3-pip
wget https://github.com/Z3Prover/z3/releases/download/z3-4.8.10/z3-4.8.10-x64-ubuntu-18.04.zip
unzip z3-4.8.10-x64-ubuntu-18.04.zip
sudo cp -R z3-4.8.10-x64-ubuntu-18.04/* /usr/local/
```

使用方式：

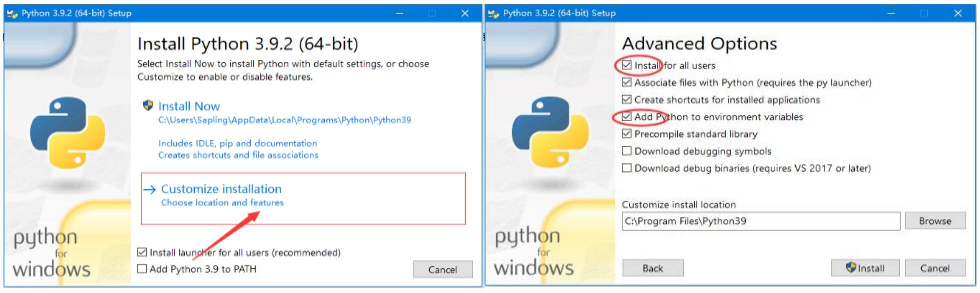
```
# example.py 文件为待求解的脚本（也可以使用 python3 的交互式方式）
python3 /usr/local/bin/python/example.py
```

/usr/local/bin/python/example.py 为求解公式 $\exists x,y \in R.x+y>5, x>1, y>1$ 的脚本，结果中 sat 表示可满足，其中一组解为 $[y=4, x=2]$。

2）Windows 系统：

a）如果系统中已经安装 python3，则跳过此步骤：

```
# 下载地址 https://www.python.org/ftp/python/3.9.2/python-3.9.2-amd64.exe，
（32 位地址 https://www.python.org/ftp/python/3.9.2/python-3.9.2.exe）
# 接着图形化安装，过程中注意下图勾选的地方
# 完成后，打开 cmd 键入“python -V”出现版本信息则表明安装正确
```



b）安装 z3：

```
# 下载地址 https://github.com/Z3Prover/z3/releases/download/z3-4.8.10/z3-4.8.10-x64-win.zip，（32 位地址 https://github.com/Z3Prover/z3/releases/download/z3-4.8.10/z3-4.8.10-x86-win.zip）
# 解压缩包，比如至 C:\Program Files (x86)\z3-4.8.10-x64-win
# 然后配置 PATH
    a）编辑 path，添加 C:\Program Files (x86)\z3-4.8.10-x64-win\bin
    b）新建 PYTHONPATH，值为 C:\Program Files (x86)\z3-4.8.10-x64-win\bin\python
```

使用方式（打开 cmd，键入下述命令）：

```
# example.py 文件为待求解的脚本（也可以使用 python3 的交互式方式）
python "C:\Program Files (x86)\z3-4.8.10-x64-win\bin\python\example.py"
```

example.py 为求解公式 $\exists x, y \in R. x + y > 5, x > 1, y > 1$ 的脚本，结果中 sat 表示可满足，其中一组解为 $[y = 4, x = 2]$。

3）MacOS 系统：

```
# 下载地址 https://github.com/Z3Prover/z3/releases/download/z3-4.8.10/z3-4.8.10-x64-osx-10.15.7.zip
# 其余步骤请参考 1）
```

三、 实例介绍

1、命题逻辑公式的基础是原子变量和逻辑连接词。以下是 Z3 接受的命题逻辑公式示例：

```
from z3 import *
Tie, Shirt = Bools('Tie Shirt')
s = Solver()
s.add(Or(Tie, Shirt),
      Or(Not(Tie), Shirt),
      Or(Not(Tie), Not(Shirt)))
print(s.check())
print(s.model())
```

该示例求解公式 $(Tie \vee Shirt) \wedge (\neg Tie \vee Shirt) \wedge (\neg Tie \vee \neg Shirt)$，其中添加了两个布尔常量 Tie 和 $Shirt$。然后，创建一个 $Solver$ 对象并添加三个约束。调用 $s.check()$ 会得出可满足性结论（即：$sat / unsat$）。该例中结果为 sat，进而使用 $s.model()$ 获取满足约束的解，结果 Tie 为 $False$，$Shirt$ 为 $True$。为了方便起见，Z3 的 Python API 包含一些快速求解函数，比如函数

solve() 用于设置求解器、添加约束、检查可满足性并输出满足约束的解（如果 *sat* 的情况下）。以下程序与上述程序等价：

```
from z3 import *
Tie, Shirt = Bools('Tie Shirt')
solve(Or(Tie, Shirt),
      Or(Not(Tie), Shirt),
      Or(Not(Tie), Not(Shirt)))
```

2、命题逻辑是 Z3 可以处理的重要但较小的公式子集，Z3 还可以求解算数理论的公式，以下为示例：

```
from z3 import *
x, y = Int('x'), Int('y')
solver = Solver()
solver.add(x + y == 42)
solver.add(x - 6 * y < 2)
solver.add(x % 2 == 1)
if solver.check() == sat:
  m = solver.model()
  print(m[x], m[y])
```

该示例为求解满足公式 $x+y==42, x-6y<2, x\%2==1$ 整数解 x, y 的程序。如果满足的话，则打印出整型变量 x, y 的值。

3、Z3 还可以求解结合了多种理论（例如数组理论和算术理论）的公式，以下为示例：

```
from z3 import *
x, y, z = Ints('x y z')
A = Array('A', IntSort(), IntSort())
f = Function('f', IntSort(), IntSort())
fml = Implies(x + 2 == y, f(Store(A, x, 3)[y - 2]) == f(y - x + 1))
solve(fml)
```

该公式 $Implies\left(x + 2 == y, f\left(Store(A, x, 3)[y - 2]\right) == f(y - x + 1)\right)$ 恒真，无论整数常量 x、y、z，数组 A，函数 f 为任何值/函数。注意 z 没有出现在公式中，但是声明中 z 表示一个可能用到的整数常量。

上面程序使用到的功能如下：

1）使用函数 $Ints()$ 创建两个整型变量 x, y，类似的函数有 $Bools(), Reals()$；

2）$A = Array('A', IntSort(), IntSort())$ 用于创建类型为整型的数组；

3）$f = Function('f', IntSort(), IntSort())$ 用于创建从整型到整型的函数；

4）$Implies(a,b)$ 表示 a 蕴含 b，类似函数有 $And(a,b)$、$Or(a,b)$、$Not(a)$；

5）$Store(A, x, 3)$ 将由数组 A 生成一个新数组，且新数组下标 x 处的值为3，其余部分同原数组。

此时可以手动证明上述结论。在 $x+2==y$ 的假设下，有 $y-2==x$、$y-x==2$，所以 $f\left(Store(A, x, 3)[y - 2]\right) == f(y - x + 1)$ 将变换为 $f\left(Store(A, x, 3)[x]\right) == f(3)$，进而为 $f(3) == f(3)$，这将是一个恒等式，故上述结论成立。

4、更多示例请参考如下地址：

https://github.com/Z3Prover/doc/tree/master/programmingz3/code