

《数学建模及其 MATLAB 实现》第五次课程作业

李鹏达 10225101460

考古专家如何判定一件文物的年代？收藏家如何鉴别一件画作、字帖、艺术品等的真伪？通常使用放射性元素测年方法。

请做一个调研，寻找一个艺术品或文物鉴别的案例，然后详细分析其中的微分方程建模及求解过程。

• 案例

2021 年 3 月 23 日上午，据央视新闻消息，四川省文物考古研究院联合北京大学对 6 个坑的 73 份炭屑样品使用碳 14 年代检测方法进行了分析，对年代分布区间进行了初步判定。其中 K4 坑年代最有可能是公元前 1199 年至公元前 1017 年，也就是距今约 3200 年至 3000 年，这就印证了三星堆新发现的 4 号坑碳 14 检测的年代区间属于商代晚期。

• 分析

^{14}C 测年法的原理基于 ^{14}C 同位素的放射性衰变。 ^{14}C 测年法利用 ^{14}C 的放射性衰变原理来测定有机物的年龄。 ^{14}C 在生物体内与 ^{12}C 保持一定比例，但在生物死亡后， ^{14}C 开始衰变成 ^{14}N 。通过测量样品中 ^{14}C 与 ^{12}C 的比值，结合 ^{14}C 的半衰期，可以推算出样品的年龄。

放射性同位素衰变时，单位时间内衰变的同位素数量与同位素的数量成正比，这个关系可以用微分方程表示为

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

其中， N 为同位素的数量， λ 为衰变常数。

设 N_0 为初始时刻的同位素数量， $N(t)$ 为 t 时刻的同位素数量，那么该微分方程的解为

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

对于 ^{14}C ，其半衰期为 5730 年，即

$$N(5730) = N_0 e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} N_0$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$$

假设被测样品的 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 原始比值与大气中的 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比值 r 相同，即 $N_0/N_{12} = r$ ，那么

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$
$$= r N_{12} e^{-\lambda t}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{N(t)}{N_{12}} &= re^{-\lambda t} \\ &= re^{-\lambda t} \\ t &= -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N(t)}{rN_{12}} \\ &= \frac{5730}{\ln 2} \ln \frac{rN_{12}}{N(t)}\end{aligned}$$

因此，通过测量样品中 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 的比值，结合大气中的 $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ 比值，可以推算出样品的年龄.