《数学建模及其 MATLAB 实现》第三次课程作业

不买贵的 只买对的

李鹏达 10225101460

- **效用函数**

在经济学中, 使用**效用**来描述人们商品消费、服务消费所获得的生理、心理上的满足程度. 我们使用**效用函数** $U(x)$ 来表示某种商品数量 x 所带来的效用. 效用函数 $U(x)$ 的变化率 $\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$ 称为**边际效用**, 它表示商品数量 x 增加一个单位时效用函数的增量.

式 1 是一个典型的效用函数表达式.

$$U(x) = ax^{\alpha}, a > 0, 0 < \alpha < 1 \tag{1}$$

在理性消费的情况下, 效用函数和边际效用有以下性质:

1. $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} > 0 \tag{2}$$

2. **边际效用递减**
$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} < 0 \tag{3}$$

- **无差别曲线**

我们可以用 $U(x,y)$ 表示两种商品的组合效用函数, 其中 x, y 分别表示两种商品的数量. 在 $x-y$ 平面上, 将一系列 $U(x,y)$ 相等的点连结, 就得到了**无差别曲线**. 在同一条无差别曲线上, 线上的所有点对应的效用函数都等于同一个常数 u.

两种商品的效用函数 $U(x,y)$ 也具有效用函数和边际效用的性质.

1. $$\frac{\partial U}{\partial x} > 0, \frac{\partial U}{\partial y} > 0 \tag{4}$$

2. $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} < 0 \tag{5}$$

式 6 是一个典型的两种商品的效用函数表达式.

$$U(x,y) = ax^{\alpha}y^{\beta}, a > 0, 0 < \alpha, \beta < 1 \tag{6}$$

无差别曲线有以下性质:

1. **下降 (斜率为负)**

   因为 $U(x,y) = u$ 不变, 所以 x 增加时, y 必须减少, 以保持效用不变. x 增加一个单位时, y 减少的单位数称为 x 对 y 的**边际替代率**.

   考虑无差别曲线上一点 (x,y), 边际替代率可以用 $-\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示, 当 $\Delta x \to 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 当使用 Δx 替换 $-\Delta y$ 时, 效用不变, 即 $\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x = -\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial U/\partial x}{\partial U/\partial y} < 0 \tag{7}$$

2. **下凸 (凸向原点)**

   随着 x 增加, x 对 y 的边际替代率递减, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) < 0 \tag{8}$$

   所以有

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} > 0 \tag{9}$$

3. **互不相交**

   如果两条无差别曲线 $U(x,y) = u_1$ 和 $U(x,y) = u_2 (u_1 \neq u_2)$ 相交, 则在交点处, 两个效用函数相等, 即 $u_1 = u_2$, 这与假设矛盾. 所以两条无差别曲线互不相交.

- **效用最大化模型**

设有两种商品甲、乙, 单价的分别为 p_1, p_2, 消费者准备付出的钱为 s, 效用函数为 $U(x,y)$, 则消费者的效用最大化模型可以表示为

$$\begin{aligned} &\max U(x,y) \\ &\text{s.t.} \quad p_1 x + p_2 y = s \end{aligned} \tag{10}$$

引入拉格朗日乘子 λ, 构造

$$L(x,y,\lambda) = U(x,y) - \lambda(p_1 x + p_2 y - s) \tag{11}$$

由

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \tag{12}$$

可以得到

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\lambda p_1=0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}-\lambda p_2=0, \quad p_1 x+p_2 y=s \tag{13}$$

解得

$$\lambda=\frac{\partial U / \partial x}{p_1}=\frac{\partial U / \partial y}{p_2} \tag{14}$$

所以当

$$\frac{\partial U / \partial x}{\partial U / \partial y}=\frac{p_1}{p_2} \tag{15}$$

时, 可以取得最优解. 此时, 两种商品的边际效用比等于两种商品的价格比.
这个模型可以推广到 n 种商品的情况, 即

$$\begin{aligned} & \max U\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \\ & \text{s.t.} \quad p_1 x_1+p_2 x_2+\cdots+p_n x_n=s \end{aligned} \tag{16}$$

此时, 效用最大化的条件为

$$\frac{\partial U / \partial x_1}{p_1}=\frac{\partial U / \partial x_2}{p_2}=\cdots=\frac{\partial U / \partial x_n}{p_n} \tag{17}$$

- **不买贵的, 只买对的**

在实际问题中, 我们需要确定消费者对各商品的效用函数或边际效用, 进而使用效用最大化模型确定消费者的最优消费组合. 我们可以通过两种方法确定消费者的效用函数或边际效用.

第一种方法是基于效用函数的权重比例分配法.

假设效用函数为 $U(x_1, x_2, x_3)=a x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$, 其中各参数满足 $a>0$ 且 $0<\alpha, \beta, \gamma<1$. 根据消费者对不同商品的偏好程度确定参数 α, β, γ, 然后通过效用最大化条件, 使得不同商品的边际效用与价格的比例相等, 即满足

$$p_1 x_1: p_2 x_2: p_3 x_3=\alpha: \beta: \gamma .$$

根据这个比例分配预算, 从而确定各商品的购买量.

第二种方法是基于边际效用递增分析法.

首先确定消费者对每单位商品带来的效用增量, 即计算边际效用, 反映消费者的偏好程度. 将每种商品的边际效用除以该商品的价格, 用以衡量效用增加的性价比. 然后通过这种性价比最大化原则分配预算, 以实现效用最大化.