

《数学建模及其 MATLAB 实现》第一次课程作业

李鹏达 10225101460

1. 课堂上讨论了椅子腿连线呈正方形的情况, 试讨论椅子腿连线呈矩形的情况.

解答:

如图 1 所示, 设椅子腿连线呈矩形 $ABCD$. 设对角线 AC 与 BD 的交点为 O , BC 的中点为 E . 以 O 为原点, OE 的方向为 x 轴, 建立平面直角坐标系. 设 OE 与 x 轴的夹角为 θ , 则可以用 θ 来表示椅子的位置. 例如, 椅子绕 O 旋转角度 θ 后, 矩形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置.

根据矩形的对称性, 设 A, B 两脚离地面的距离之和为 $f(\theta)$, C, D 两脚离地面的距离之和为 $g(\theta)$. 由假设 2, f 和 g 都是连续函数. 由假设 3, 椅子在任何位置至少有三只脚着地, 所以对于任意的 θ , $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零. 当 $\theta = 0$ 时, 不妨设 $g(0) = 0, f(0) > 0$, 而当椅子旋转 180° 后, AB 与 CD 互换, 于是 $f(\pi) = 0, g(\pi) > 0$.

设 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 则 $h(0) > 0, h(\pi) < 0$. 由连续函数的性质, 存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$, 使得 $h(\theta_0) = 0$. 即存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$, 使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$, 即椅子在 θ_0 位置时, 两脚离地面的距离相等.

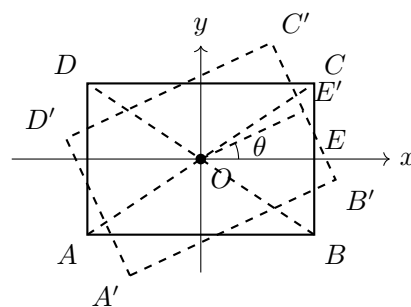


图 1: 椅子腿的连线呈矩形

2. 在实物交换模型中, 无差别曲线族表现为下凸. 请分析, 无差别曲线族表现为上凸代表什么?

解答:

如图 2 所示, 设无差别曲线族表现为上凸. 取同一条曲线上的两点 P_1 和 P_2 ($P_{1x} < P_{2x}$), 做如图所示的切线三角形.

在 P_1 处, 其占有的 x 较少, y 较多, $\Delta x > \Delta y$, 说明他倾向于用较多的 x 换较少的 y ; 而在 P_2 处, 其占有的 x 较多, y 较少, $\Delta x < \Delta y$, 说明他倾向于用较少的 x 换较多的 y .

在这种情况下, 他占有的 x 越少, 反而愿意用更多的 x 换取更少的 y , 这种“物以稀为贱, 物以多为贵”的情况, 在实际中是不合理的.

因此, 无差别曲线族表现为上凸, 代表了一种不合理的情况.

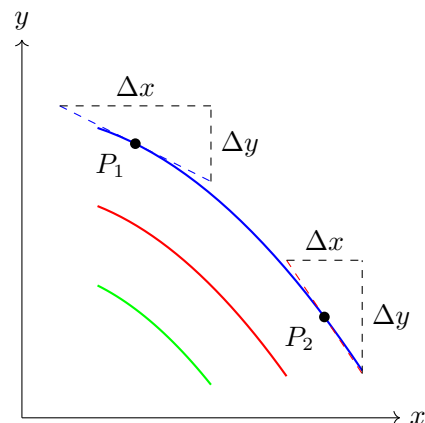


图 2: 上凸无差别曲线族