

《数学建模及其 MATLAB 实现》第二次课程作业

李鹏达 10225101460

学校共 1000 名学生,235 人住在 A 宿舍,333 人住在 B 宿舍,432 人住在 C 宿舍. 学生们要组织一个 10 人委员会, 试用下列办法分配各宿舍的委员数:

1. 按比例分配取整数的名额后, 剩下的名额按惯例分给小数部分较大者.
2. 书中的 Q 值方法.
3. d'Hondt 方法: 将 A, B, C 各宿舍的人数用正整数相除, 其商数如下表:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|------------|--------------|------------|------------|-------------|-----|
| A | <u>235</u> | <u>117.5</u> | 78.3 | 58.75 | ... | ... |
| B | <u>333</u> | <u>166.5</u> | <u>111</u> | 83.25 | ... | ... |
| C | <u>432</u> | <u>216</u> | <u>144</u> | <u>108</u> | <u>86.4</u> | ... |

将所得商数从大到小取前 10 个 (10 为席位总数), 数字下标以横线, 表中 A, B, C 行有横线的数分别为 2, 3, 5, 这就是 3 个宿舍分配的席位. 你能解释这种方法的道理吗?

如果委员会从 10 人增至 15 人, 用以上 3 种方法再分配名额. 将 3 种方法两次分配的结果列表比较.

解答:

(一) 试用下列办法分配各宿舍的委员数.

1. 按比例分配取整数的名额后, 剩下的名额按惯例分给小数部分较大者.

| 宿舍 | 学生人数 | 比例 (%) | 比例分配的席位 | 参照惯例的结果 |
|----|------|--------|---------|---------|
| A | 235 | 23.5 | 2.35 | 3 |
| B | 333 | 33.3 | 3.33 | 3 |
| C | 432 | 43.2 | 4.32 | 4 |
| 总和 | 1000 | 100 | 10 | 10 |

按比例分配取整数的名额后, A, B, C 三宿舍的席位为 2, 3, 4, 小数部分 $0.35 > 0.33 > 0.32$, 所以将剩下的名额分给小数部分较大者, 即 A 宿舍增加一个名额, 最终结果为 3, 3, 4.

2. 书中的 Q 值方法.

| 宿舍 | 学生人数 | 比例 (%) | 比例分配的席位 | $Q(Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)})$ | 结果 |
|----|------|--------|---------|-------------------------------------|----|
| A | 235 | 23.5 | 2.35 | 9204.17 | 2 |
| B | 333 | 33.3 | 3.33 | 9240.75 | 3 |
| C | 432 | 43.2 | 4.32 | 9331.2 | 5 |
| 总和 | 1000 | 100 | 10 | / | 10 |

按比例分配取整数的名额后, A, B, C 三宿舍的席位为 2, 3, 4, 根据公式 $Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$, 计算出 Q 值分别作为 9204.17, 9240.75, 9331.2, 将剩余的席位分配给 Q 值最大的宿舍 C, 最终结果为 2, 3, 5.

3. d'Hondt 方法.

这种方法在每一轮次中计算商数

$$quot = \frac{P}{s+1}$$

其中, P 为该宿舍的人数, s 为该宿舍已拥有的席位数. 每一轮次中, 将商数最大的宿舍分配一个席位, 然后重新计算该宿舍的商数, 进行下一轮次的分配. 重复这个过程, 直到分配完所有的席位.

比较显然的是, 某个宿舍在获得一个席位后, 其 s 会增加, 从而导致下一轮次的商数减小, 在下一轮次中更难获得席位.

在这种算法下, 由于我们总是选择商数更大的宿舍, 而 s 不断增加, 这种方法可以使最小的单位席位数代表的人数 ($\min_i \frac{P}{s_i}$) 尽可能大, 从而使得分配结果更加公平.

这种方法不满足准则一, 反例如下:

| 单位 | 人数 | 比例 (%) | 结果 |
|----|------|--------|-----|
| 1 | 936 | 93.6 | 95 |
| 2 | 47 | 4.7 | 4 |
| 3 | 17 | 1.7 | 1 |
| 总和 | 1000 | 100 | 100 |

这种方法满足准则二, 因为如果增加席位数, 在分配时只会增加从大到小取商数的个数, 不会出现比增加席位数之前分配的席位数更少的情况.

(二) 如果委员会从 10 人增至 15 人, 用以上 3 种方法再分配名额. 将 3 种方法两次分配的结果列表比较.

1. 比例加惯例

| 宿舍 | 学生人数 | 比例 (%) | 比例分配的席位 | 参照惯例的结果 |
|----|------|--------|---------|---------|
| A | 235 | 23.5 | 3.52 | 4 |
| B | 333 | 33.3 | 5 | 5 |
| C | 432 | 43.2 | 6.48 | 6 |
| 总和 | 1000 | 100 | 15 | 15 |

2. Q 值法

| 宿舍 | 学生人数 | 比例 (%) | 比例分配的席位 | $Q(Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)})$ | 结果 |
|----|------|--------|---------|-------------------------------------|----|
| A | 235 | 23.5 | 3.52 | 4602.08 | 4 |
| B | 333 | 33.3 | 5 | 3696.3 | 5 |
| C | 432 | 43.2 | 6.48 | 4443.43 | 6 |
| 总和 | 1000 | 100 | 15 | / | 15 |

3. d'Hondt 方法

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 席位数 |
|---|------------|--------------|-------------|--------------|-------------|-----------|--------------|-----|-----|
| A | <u>235</u> | <u>117.5</u> | <u>78.3</u> | 58.75 | 47 | ... | ... | ... | 3 |
| B | <u>333</u> | <u>166.5</u> | <u>111</u> | <u>83.25</u> | <u>66.6</u> | 55.5 | ... | ... | 5 |
| C | <u>432</u> | <u>216</u> | <u>144</u> | <u>108</u> | <u>86.4</u> | <u>72</u> | <u>61.71</u> | ... | 7 |

对比如下表所示:

| 宿舍 | 学生人数 | 比例 (%) | 10 席 比例席位 | 比例 加惯例 | Q 值法 | d'Hondt 方法 | 15 席 比例席位 | 比例 加惯例 | Q 值法 | d'Hondt 方法 |
|----|------|--------|--------------|-----------|------|---------------|--------------|-----------|------|---------------|
| A | 235 | 23.5 | 2.35 | 3 | 2 | 2 | 3.52 | 4 | 4 | 3 |
| B | 333 | 33.3 | 3.33 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| C | 432 | 43.2 | 4.32 | 4 | 5 | 5 | 6.48 | 6 | 6 | 7 |
| 总和 | 1000 | 100 | 10 | 10 | 10 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 |

值得注意的一点是, d'Hondt 方法倾向于将剩余席位分配给人数更多的宿舍 (事实上, 这种分配方式在现实世界的选举中常用于分配议会席位, 它对大党有利, 可以鼓励团结, 减少碎片化)。