《数学建模及其 MATLAB 实现》第六次课程作业

李鹏达 10225101460

确定下列各方程的平衡点属于什么类型, 并用 Matlab 或 Python 绘制相图（相轨线）, 并确定平衡点的稳定性.

(1)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x \\ \frac{dy}{dt} = -3y \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

(4)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

解答:

(1) 解 $\begin{cases} -2x = 0 \\ -3y = 0 \end{cases}$ 得平衡点为 $P(0,0)$.

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, 特征方程为 $|A - \lambda I| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3 \quad (p = 5, q = 6)$.

这是一个稳定的结点.

其相图如下所示:

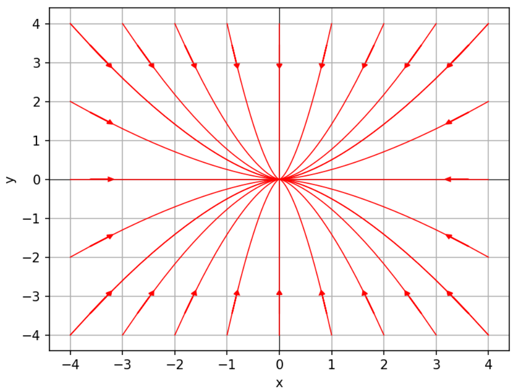

图 1: (1) 的相图

(2) 解 $\begin{cases} 3x = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ 得平衡点为 $P(0,0)$.

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 特征方程为 $|A - \lambda I| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 \quad (p = -6, q = 9)$.

这是一个不稳定退化结点.

其相图如下所示:

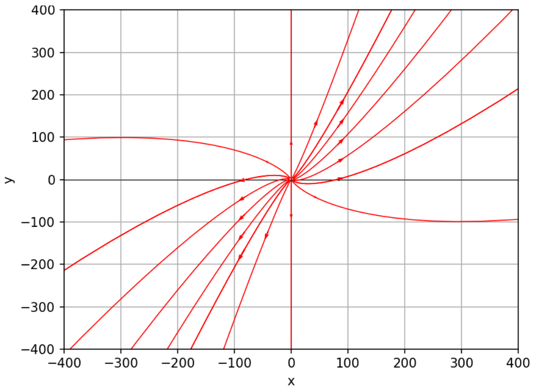

图 2: (2) 的相图

(3) 解 $\begin{cases} y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$ 得平衡点为 $P(0,0)$.

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, 特征方程为 $|A - \lambda I| = 0$, 即

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \quad (p = 0, q = 1)$.

平衡点类型为中心, 稳定性为不稳定.

其相图如下所示:

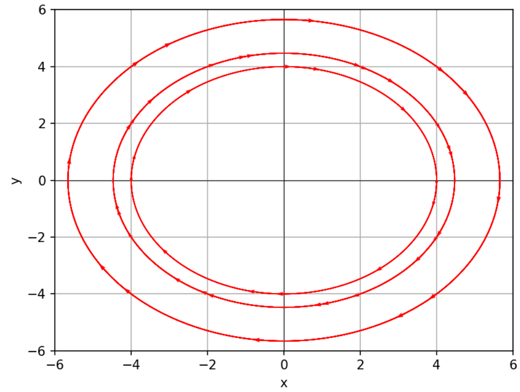

图 3: (3) 的相图

(4) 解 $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$ 得平衡点为 $P(0,0)$.

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 特征方程为 $|A-\lambda I|=0$, 即

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+3=0$$

解得特征值 $\lambda_1=\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \lambda_2=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (p=-5, q=3)$.

这是一个不稳定结点.

其相图如下所示:

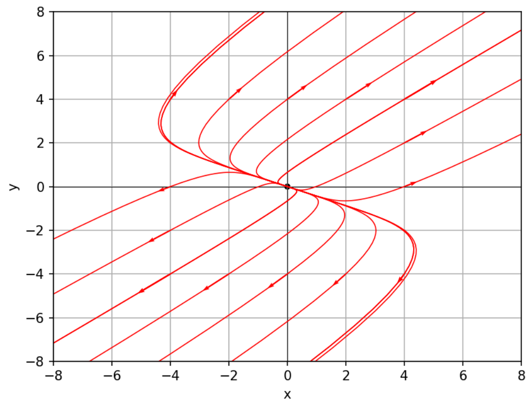

图 4: (4) 的相图