《数学建模及其 MATLAB 实现》第七次课程作业

李鹏达 10225101460

1. 在食饵-捕食者系统中, 如果在食饵方程 $\dot{x}(t) = x(r - ay) = rx - axy$ 中增加自身阻滞作用的 logistic 项, 而方程 $\dot{y}(t) = y(-d + bx) = -dy + bxy$ 不变, 讨论平衡点及稳定性, 解释其意义.

解答:

食饵方程中增加自身阻滞作用的 logistic 项, 将增长率 r 替换为 $r(x) = r^*\left(1 - \frac{x}{N}\right)$, 其中 r^* 为最大增长率, N 为环境容纳. 则食饵方程变为

$$\dot{x}(t) = x\left[r^*\left(1 - \frac{x}{N}\right) - ay\right] = r^*x - \frac{r^*}{N}x^2 - axy$$

微分方程组变为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r^*x - \frac{r^*}{N}x^2 - axy \\ \dot{y}(t) = -dy + bxy \end{cases}$$

令 $\dot{x} = \dot{y} = 0$, 解方程组

$$\begin{cases} r^*x - \frac{r^*}{N}x^2 - axy = 0 \\ -dy + bxy = 0 \end{cases}$$

得平衡点 $P_1(0,0)$, $P_2(N,0)$, $P_3(\frac{d}{b}, \frac{r^*}{a}(1 - \frac{d}{bN}))$.

方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} r^* - \frac{2r^*}{N}x - ay & -ax \\ by & bx - d \end{bmatrix}$$

(1) 对于平衡点 $P_1(0,0)$,

$$A|_{P_1} = \begin{bmatrix} r^* & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

$q = -r^*d < 0$, 故平衡点 P_1 是不稳定的.

(2) 对于平衡点 $P_2(N,0)$,

$$A|_{P_2} = \begin{bmatrix} -r^* & -aN \\ 0 & bN - d \end{bmatrix}$$

$p = r^* - (bN - d)$, $q = -r^*(bN - d)$.

此时, 稳定条件为 $bN - d < 0$. 这说明了当食饵的种群数量达到环境容纳量时, 捕食者的增长率 $y(bN - d)$ 仍小于 0, 食饵的种群数量达到最大值也不能供养捕食者, 最终达到一个食饵数量维持在环境容纳量、捕食者灭绝的稳定状态.

(3) 对于平衡点 $P_3(\frac{d}{b}, \frac{r^*}{a}(1-\frac{d}{bN}))$,

$$A|_{P_3} = \begin{bmatrix} -\frac{dr^*}{bN} & -\frac{ad}{b} \\ \frac{r^*}{a}\left(b-\frac{d}{N}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$p = \frac{dr^*}{bN} > 0$, $q = \frac{dr^*}{b}\left(b-\frac{d}{N}\right)$.

此时, 稳定条件为 $b-\frac{d}{N} > 0$, 即 $bN-d>0$. 这说明了当食饵的种群数量达到环境容纳量时, 捕食者的增长率 $y(bN-d)$ 大于 0, 食饵的种群数量达到最大值时可以供养捕食者, 最终达到一个食饵数量维持在一个稳定值、捕食者数量维持在一个稳定值的稳定状态.

在这种情况下, 由于我们给食饵引入了自身阻滞作用, 使得食饵不在无限制地增长, 系统最后达到的平衡状态取决于食饵能否供养捕食者. 若食饵不能供养捕食者, 则最终食饵数量维持在环境容纳量, 捕食者灭绝; 若食饵能供养捕食者, 则最终食饵数量维持在一个稳定值, 捕食者数量维持在一个稳定值.

2. 如果在食饵和捕食者方程中都增加 logistic 项, 即下列方程, 讨论平衡点及稳定性.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \\ \dot{x}_2(t) = r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

解答:

令 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$, 解方程组

$$\begin{cases} r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

得平衡点 $P_1(0,0)$, $P_2(N_1,0)$, $P_3(\frac{N_1(1+\sigma_1)}{1+\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1+\sigma_1\sigma_2})$.

方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} r_1\left(1-\frac{2x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) & -\sigma_1\frac{r_1x_1}{N_2} \\ \sigma_2\frac{r_2x_2}{N_1} & r_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

(1) 对于平衡点 $P_1(0,0)$,

$$A|_{P_1} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{bmatrix}$$

$q=-r_1r_2<0$, 故平衡点 P_1 是不稳定的.

(2) 对于平衡点 $P_2(N_1,0)$,

$$A|_{P_2} = \begin{bmatrix} -r_1 & -\sigma_1\frac{N_1r_1}{N_2} \\ 0 & r_2(\sigma_2-1) \end{bmatrix}$$

$p = r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$, $q = -r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$.

此时, 稳定条件为 $\sigma_2 - 1 < 0$, 即 $\sigma_2 < 1$. 而 σ_2 反映的使食饵供养捕食者的能力, 当 $\sigma_2 < 1$ 时, 食饵不能供养捕食者, 最终达到一个食饵数量维持在环境容纳量、捕食者灭绝的平衡状态.

(3) 对于平衡点 $P_3(\frac{N_1(1+\sigma_1)}{1+\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1+\sigma_1\sigma_2})$,

$$A|_{P_3} = \begin{bmatrix} -\frac{r_1(\sigma_1+1)}{1+\sigma_1\sigma_2} & -\frac{\sigma_1 r_1 N_1(1+\sigma_1)}{N_2(1+\sigma_1\sigma_2)} \\ \frac{r_2\sigma_2 N_2(\sigma_2-1)}{N_1(1+\sigma_1\sigma_2)} & -\frac{r_2(\sigma_2-1)}{1+\sigma_1\sigma_2} \end{bmatrix}$$

$p = \frac{r_1(\sigma_1+1)+r_2(\sigma_2-1)}{1+\sigma_1\sigma_2} > 0$, $q = \frac{r_1 r_2(\sigma_2-1)(\sigma_1+1)}{(1+\sigma_1\sigma_2)}$.

此时, 稳定条件为 $\sigma_2 - 1 > 0$, 即 $\sigma_2 > 1$. 而 σ_2 反映的使食饵供养捕食者的能力, 当 $\sigma_2 > 1$ 时, 食饵能供养捕食者, 最终达到一个食饵数量维持在一个稳定值、捕食者数量维持在一个稳定值的平衡状态.

在这种情况下, 由于我们给食饵和捕食者都引入了自身阻滞作用, 使得食饵和捕食者都不在无限制地增长, 系统最后达到的平衡状态取决于食饵对捕食者的供养能力 σ_2. 若 $\sigma_2 < 1$, 食饵不能供养捕食者, 则最终食饵数量维持在环境容纳量, 捕食者灭绝; 若 $\sigma_2 > 1$, 食饵能供养捕食者, 则最终食饵数量维持在一个稳定值, 捕食者数量维持在一个稳定值.

3. 在 SIR 模型中设定不同的参数 λ, μ 和初始值 $s(0), i(0)$, 编程计算 $s(t)$ 和 $i(t)$ 并作图. 需包含 $\sigma s(0) > 1$ 和 $\sigma s(0) < 1$ 的设定, 分析这两种情况下患者比例 $i(t)$ 的不同变化.

(1) $\sigma s(0) > 1$

选取的参数为 $\lambda = 0.5, \mu = 0.1, s(0) = 0.8, i(0) = 0.2$.

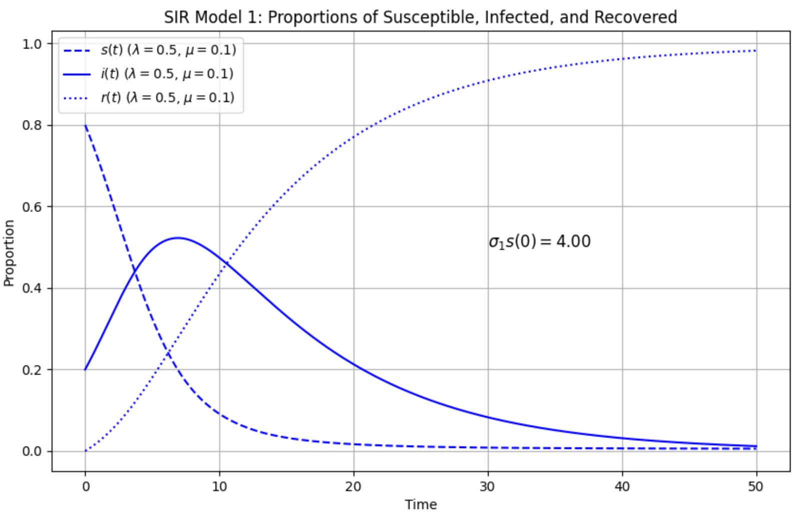

图 1: $\sigma s(0) > 1$

从图中可以看出, 当 $\sigma s(0) > 1$ 时, 患者比例 $i(t)$ 随时间的增加先增加后减少, 最终趋于 0. 这是因为当 $\sigma s(0) > 1$ 时, 疾病传播速度大于恢复速度, 疾病会迅速传播, 但随着患者的增多, 易感者的数量减少, 疾病传播速度减慢, 最终感染者数量减少到 0.

(2) $\sigma s(0) < 1$

选取的参数为 $\lambda = 0.05, \mu = 0.1, s(0) = 0.8, i(0) = 0.2$.

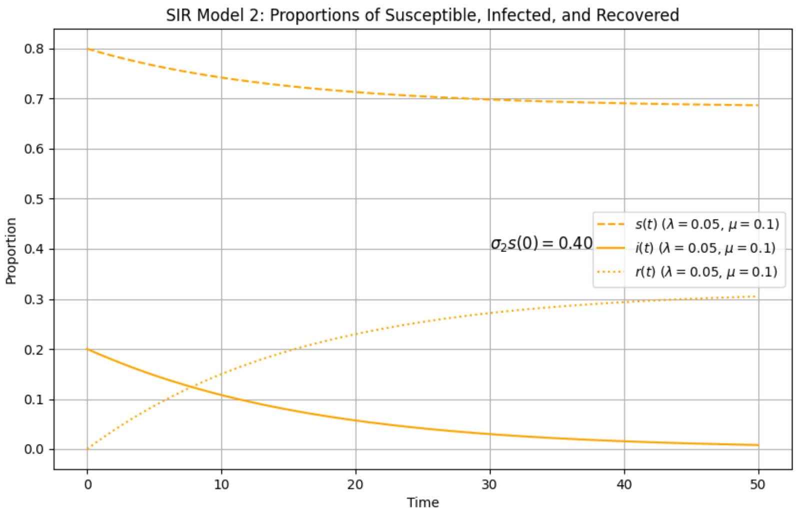

图 2: $\sigma s(0) < 1$

从图中可以看出, 当 $\sigma s(0) < 1$ 时, 患者比例 $i(t)$ 随时间的增加先增加后减少, 最终趋于 0. 这是因为当 $\sigma s(0) < 1$ 时, 疾病传播速度小于恢复速度, 疾病传播缓慢, 疾病无法蔓延, 患者比例逐渐减少, 最终感染者数量减少到 0.