李群与李代数

AnderK

李代数基础

第3讲中的一部分运算

外积
$$m{a} imesm{b}$$
写成矩阵相乘的形式 $m{a}^{\wedge}m{b}$,其中 $m{a}^{\wedge}=egin{bmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{bmatrix}$

群的概念: $G=(A,\cdot)$,集合A对运算·满足: 1、封闭; 2、有结合律; 3、有单位元; 4、逆运算。

李群的引出

对任意旋转矩阵R,我们有 $RR^T = I$,若R是时间的函数,对等式两侧关于时间求导得到

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)^{\mathrm{T}} = 0$$

从而 $\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}=-\left(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$,即: $\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}$ 是反对称矩阵。对任意反对称矩阵,可以找到与之唯一对应的向量(前面叉积部分我们可以用 $\boldsymbol{a}^{\wedge}=\boldsymbol{A}$ 得到反对称矩阵),即: $\boldsymbol{A}^{\vee}=\boldsymbol{a}$.可以形象得记住, \wedge 是把向量展开放大为矩阵, \vee 是把矩阵缩小为向量。

回到 $\dot{R}(t)R(t)^T$,我们将与之对应的三维向量记为 $\phi(t)$,即: $\dot{R}(t)R(t)^T=\phi(t)^\wedge$,等式两侧右乘R(t)消去 $R(t)^T$,得到旋转矩阵求导的表达式: $\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\phi(t)^\wedge\boldsymbol{R}(t)=\begin{bmatrix}0&-\phi_3&\phi_2\\\phi_3&0&-\phi_1\\-\phi_2&\phi_1&0\end{bmatrix}\boldsymbol{R}(t)$

即: $\phi(t)^{\wedge}$ 反应了导数性质。

那么这么好的向量\反对称矩阵该怎么算出来呢?通过在t=0附近对R(t)泰勒展开并求解微分方程,得到

$${m R}(t) = \expig(\phi_0^\wedge tig)$$

即:旋转矩阵R和它的反对称矩阵通过指数关系发生了关联。

李代数的定义

李代数描述了李群在单位元附近的正切空间。李代数由集合♡、数域『和二元运算[,]组成,并满足:

- 1、封闭性;
- 2、 \mathbf{Z} 线性 $([a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \quad [\mathbf{Z}, a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}] = a[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] + b[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}])$;
- 3、自反性;
- 4、雅可比等价($\forall X, Y, Z \in \mathbb{V}, [X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$);

这样,这种二元运算就被称为李括号,三维向量叉积×就是一种李括号。

李代数50(3)

 ϕ 事实上是一种李代数。 ϕ_1,ϕ_2 的李括号为 $[\phi_1,\phi_2]=(\phi_1^\wedge\phi_2^\wedge-\phi_2^\wedge\phi_1^\wedge)^\vee=(\mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2-\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_1)^\vee$

关于 $\mathfrak{so}(3)$: 它是一个由三维向量组成的集合(也可以说是反对称矩阵,不加区别),它的元素与中SO(3)旋转矩阵可以通过指数映射($\mathbf{R}=\exp(\phi^\wedge)$)确定。

李代数50(3)

$$\mathfrak{se}(3)$$
位于 \mathbb{R}^6 中: $\mathfrak{se}(3)=\left\{oldsymbol{\xi}=egin{bmatrix}
ho\ \phi\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6,oldsymbol{
ho}\in\mathbb{R}^3,oldsymbol{\phi}\in\mathfrak{so}(3),oldsymbol{\xi}^\wedge=egin{bmatrix}\phi^\wedge&
ho\ \mathbf{0}^\mathrm{T}&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4 imes4}
ight\}$

 $\mathfrak{se}(3)$ 的元素叫 ξ ,是一个六维向量,前三维平移(与变换矩阵中的平移<mark>不同</mark>),后三维旋转(是 $\mathfrak{so}(3)$ 元素)。在 $\mathfrak{se}(3)$ 中 \wedge 含义为:

$$oldsymbol{\xi}^\wedge = egin{bmatrix} \phi^\wedge &
ho \ \mathbf{0}^\mathrm{T} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 imes 4}$$

即: 六维向量转为四维矩阵。

李代数对应的李括号为: $[\xi_1, \xi_2] = (\xi_1^{\wedge} \xi_2^{\wedge} - \xi_2^{\wedge} \xi_1^{\wedge})^{\vee}$

由此我们知道了,用李群中的一个元素对应的李代数中的元素,乘以它本身,就得到了它的导数。

指数与对数映射

SO(3)上的指数映射

计算: $\exp(\phi^\wedge) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} (\phi^\wedge)^n$ 很不方便,需要简便方法。

对于 a^{\wedge} 有如下2个性质:

1,
$$m{a}^\wedgem{a}^\wedge = egin{bmatrix} -a_2^2 - a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \ a_1a_2 & -a_1^2 - a_3^2 & a_2a_3 \ a_1a_3 & a_2a_3 & -a_1^2 - a_2^2 \end{bmatrix} = m{a}m{a}^{ ext{T}} - m{I}$$

2,
$$m{a}^\wedgem{a}^\wedgem{a}^\wedge=m{a}^\wedge\left(m{a}m{a}^{
m T}-m{I}
ight)=-m{a}^\wedge$$

这样可以处理 a^{\wedge} 的高阶项,从而

$$\exp(\phi^{\wedge}) = \exp(\theta \boldsymbol{a}^{\wedge}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\theta \boldsymbol{a}^{\wedge})^{n}$$

$$= \boldsymbol{I} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!} \theta^{2} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{3!} \theta^{3} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{4!} \theta^{4} (\boldsymbol{a}^{\wedge})^{4} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} + \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} + \frac{1}{2!} \theta^{2} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{3!} \theta^{3} \boldsymbol{a}^{\wedge} - \frac{1}{4!} \theta^{4} (\boldsymbol{a}^{\wedge})^{2} + \cdots$$

$$= \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^{3} + \frac{1}{5!} \theta^{5} - \cdots\right)}_{\sin \theta} \boldsymbol{a}^{\wedge} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!} \theta^{2} + \frac{1}{4!} \theta^{4} - \cdots\right)}_{\cos \theta} \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge}$$

$$= \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} - \cos \theta \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge}$$

$$= (1 - \cos \theta) \boldsymbol{a}^{\wedge} \boldsymbol{a}^{\wedge} + \boldsymbol{I} + \sin \theta \boldsymbol{a}^{\wedge}$$

$$= \cos \theta \boldsymbol{I} + (1 - \cos \theta) \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \sin \theta \boldsymbol{a}^{\wedge}.$$

最后的结果就是罗德里格斯公式(Rodrigues's Formula)。而罗德里格斯公式是描述向量旋转的,这说明 $\mathfrak{so}(3)$ 实际上就是由旋转向量组成的空间,指数映射就是罗德里格斯公式。由此 $\mathfrak{so}(3)$ 中任意的向量可以对应到一个SO(3)的旋转矩阵。那么,怎么通过旋转矩阵求得对应的向量呢?(这里需要明确,一个旋转矩阵对应的向量一定不是唯一的,但是如果把旋转角度固定在 $\pm\pi$ 之间,那么这种对应才是一一的)我们需要定义对数映射,这样就可以把中的旋SO(3)转矩阵对应到 $\mathfrak{so}(3)$ 中。

定义对数映射:

$$\phi = \ln(oldsymbol{R})^ee = \left(\sum_{n=0}^\infty rac{(-1)^n}{n+1} (oldsymbol{R} - oldsymbol{I})^{n+1}
ight)^ee$$

同指数映射一样,我们一定不会通过计算无穷级数来求映射的结果。

在第3讲中,基于罗德里格斯公式(Rodrigues's Formula),我们知道了旋转矩阵 \mathbf{R} 、旋转角 θ 和旋转轴 \mathbf{a} 之间的关系:

$$egin{aligned} \operatorname{tr}(oldsymbol{R}) &= \cos heta \operatorname{tr}(oldsymbol{I}) + (1 - \cos heta) \operatorname{tr}(oldsymbol{a} oldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) + \sin heta \operatorname{tr}(oldsymbol{a}^{\wedge}) \ &= 3 \cos heta + (1 - \cos heta) \ &= 1 + 2 \cos heta \end{aligned}$$

因此旋转角 $heta=rccosrac{\operatorname{tr}(oldsymbol{R})-1}{2}$

旋转轴在旋转前后不变,因此Ra=a,这说明a是R的特征向量,归一化之后求出旋转轴。有了旋转角和旋转轴,我们已经求得 ϕ 。

另外有一种求 a^\wedge 的办法是利用轴角表达的物理含义(形式和罗德里格斯公式很像,但是有一个符号不同),根据:

$$oldsymbol{R}^T = \cos heta oldsymbol{I} + (1 - \cos heta) oldsymbol{a} oldsymbol{a}^T - \sin heta \hat{oldsymbol{a}}$$

求得 $a^{\wedge} = \frac{R - R^T}{2 \sin \theta}$ 。这样,我们也就求得了 ϕ 。

由上面的讨论我们知道了,旋转矩阵的导数可以由旋转向量指定,这样微积分运算在旋转矩阵中就可行了。

SE(3)上的指数映射

书上没有进行推导,我也不想(会)推导了,直接给出结果:

$$egin{aligned} \expig(oldsymbol{\xi}^{\wedge}ig) &= egin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} rac{1}{n!} (\phi^{\wedge})^n & \sum_{n=0}^{\infty} rac{1}{(n+1)!} (\phi^{\wedge})^n
ho \ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \ &\triangleq egin{bmatrix} oldsymbol{R} & oldsymbol{J} oldsymbol{
ho} \ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = oldsymbol{T} \end{aligned}$$

式中的R是SO(3)的元素,是 $\mathfrak{se}(3)$ 中的旋转部分,T右上角的J的表达式为:

$$oldsymbol{J} = rac{\sin heta}{ heta} oldsymbol{I} + \left(1 - rac{\sin heta}{ heta}
ight) oldsymbol{a} oldsymbol{a}^{ ext{T}} + rac{1 - \cos heta}{ heta} oldsymbol{a}^{\wedge}$$

回想到 $m{\xi}^\wedge=egin{bmatrix}\phi^\wedge&m{
ho}\\m{o}^\mathrm{T}&0\end{bmatrix}$,我们发现,经过指数映射后,平移部分发生了一次以 $m{J}$ 为系数矩阵的线性变换。

为了求 \mathbb{R}^6 中的 $\mathfrak{se}(3)$,我们不必用对数映射。 $\pmb{\xi}=\begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}$ 中的旋转部分可以由T中的R求得,如果把T右上角部分记作 \pmb{t} ,则有如下关系

$$t = J\rho$$

式中的J可以由 ϕ 得到,解线性方程就可以算出 ρ 。

BCH公式与近似

两个李代数指数映射乘积的完整形式由Baker-Campbell-Hausdorff公式(BCH公式)给出。展开式如下:

$$\ln(\exp(\bm{A})\exp(\bm{B})) = \bm{A} + \bm{B} + \frac{1}{2}[\bm{A}, \bm{B}] + \frac{1}{12}[\bm{A}, [\bm{A}, \bm{B}]] - \frac{1}{12}[\bm{B}, [\bm{A}, \bm{B}]] + \cdots$$

忽略二次以上的项,得到线性近似表达为:

$$\ln\left(\exp(\phi_1^\wedge)\exp(\phi_2^\wedge)
ight)^eepprox egin{cases} J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1+\phi_2 & ext{if }\phi_1 ext{ 为小量,}\ J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2+\phi_1 & ext{if }\phi_2 ext{ 为小量.} \end{cases}$$

这可以理解为: 当旋转矩阵 R_2 左乘了一个小旋转矩阵 R_1 之后,可以近似看作它的李代数 ϕ_2 加上一项小旋转矩阵的李代数进行线性变换之后的 $J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1$; 或者当旋转矩阵 R_1 右乘了一个小旋转矩阵 R_2 之后,可以近似看作它的李代数 ϕ_1 加上一项小旋转矩阵的李代数进行线性变换之后的 $J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2$ 。

事实上, J_l 就是之在 $\mathfrak{se}(3)$ 进行指数映射时T中项 $J\rho$ 的J, 表达式为:

$$oldsymbol{J}_l = oldsymbol{J} = rac{\sin heta}{ heta} oldsymbol{I} + \left(1 - rac{\sin heta}{ heta}
ight) oldsymbol{a} oldsymbol{a}^{ ext{T}} + rac{1 - \cos heta}{ heta} oldsymbol{a}^{\wedge}$$

它的逆为:

$$oldsymbol{J}_l^{-1} = rac{ heta}{2} \mathrm{cot} \, rac{ heta}{2} oldsymbol{I} + \left(1 - rac{ heta}{2} \mathrm{cot} \, rac{ heta}{2}
ight) oldsymbol{a} oldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - rac{ heta}{2} oldsymbol{a}^{\wedge}$$

而 $J_r(\phi) = J_l(-\phi)$ 。

这样,李代数的加法和李群上带左右雅可比的乘法就联系上了。

对于SE(3),有类似的BCH近似:

$$egin{aligned} \exp(\Delta oldsymbol{\xi}^\wedge) \exp(oldsymbol{\xi}^\wedge) & \exp\Big(ig(\mathcal{J}_l^{-1}\Delta oldsymbol{\xi} + oldsymbol{\xi}\Big)^\wedge\Big) \ \exp(oldsymbol{\xi}^\wedge) \exp(\Delta oldsymbol{\xi}^\wedge) & \exp\Big(ig(\mathcal{J}_r^{-1}\Delta oldsymbol{\xi} + oldsymbol{\xi}\Big)^\wedge\Big) \end{aligned}$$

李代数的加法本就是定义完善的,在确定和李群之间的联系之后,就可以开始求导了。

我们主要关注位姿的变化,对位姿求导的思路有两种,一种是用李代数表示姿态然后求导,还有一种是对李群左乘、右乘微小扰动旋转矩阵,对该扰动求导。

李代数求导

按照导数的定义,对空间点p旋转之后:

$$egin{aligned} rac{\partial \left(\exp(\phi^{\wedge}) oldsymbol{p}
ight)}{\partial oldsymbol{\phi}} &= \lim_{\delta oldsymbol{\phi} o 0} rac{\exp((oldsymbol{\phi} + \delta oldsymbol{\phi})^{\wedge}) oldsymbol{p} - \exp(oldsymbol{\phi}^{\wedge}) oldsymbol{p}}{\delta oldsymbol{\phi}} \ &= \lim_{\delta oldsymbol{\phi} o 0} rac{\left(oldsymbol{I} + \left(oldsymbol{J}_{l} \delta oldsymbol{\phi}
ight)^{\wedge} \right) \exp(oldsymbol{\phi}^{\wedge}) oldsymbol{p} - \exp(oldsymbol{\phi}^{\wedge}) oldsymbol{p}}{\delta oldsymbol{\phi}} \ &= \lim_{\delta oldsymbol{\phi} o 0} rac{\left(oldsymbol{J}_{l} \delta oldsymbol{\phi}
ight)^{\wedge} \exp(oldsymbol{\phi}^{\wedge}) oldsymbol{p}}{\delta oldsymbol{\phi}} \ &= \lim_{\delta oldsymbol{\phi} o 0} rac{-\left(\exp(oldsymbol{\phi}^{\wedge}) oldsymbol{p}
ight)^{\wedge} oldsymbol{J}_{l} \delta oldsymbol{\phi}}{\delta oldsymbol{\phi}} = -(oldsymbol{R} oldsymbol{p})^{\wedge} oldsymbol{J}_{l}. \end{aligned}$$

在推导过程中, 第三行是泰勒展开, 第五行是把叉乘交换顺序取反。

扰动模型求导 (左乘)

设左扰动的李代数为 φ ,则对空间点p进行左乘扰动之后,对扰动的李代数求导得到:

$$egin{aligned} rac{\partial (m{R}m{p})}{\partial m{arphi}} &= \lim_{arphi o 0} rac{\exp(m{arphi}^\wedge) \exp(m{\phi}^\wedge) m{p} - \exp(m{\phi}^\wedge) m{p}}{m{arphi}} \ &= \lim_{arphi o 0} rac{(m{I} + m{arphi}^\wedge) \exp(m{\phi}^\wedge) m{p} - \exp(m{\phi}^\wedge) m{p}}{m{arphi}} \ &= \lim_{arphi o 0} rac{m{arphi}^\wedge m{R}m{p}}{m{arphi}} = \lim_{arphi o 0} rac{-(m{R}m{p})^\wedge m{arphi}}{m{arphi}} = -(m{R}m{p})^\wedge \end{aligned}$$

SE(3)上的李代数求导

假设空间点p经过一次变化T(对应李代数)得到Tp,当给T左乘一个扰动 $\Delta T=\exp(\delta \boldsymbol{\xi}^\wedge)$,记扰动项的李代数为 $\delta \boldsymbol{\xi}=[\delta \boldsymbol{\rho},\delta \boldsymbol{\phi}]^T$:

$$rac{\partial (m{T}m{p})}{\partial \delta m{\xi}} = \left[egin{array}{cc} m{I} & -(m{R}m{p} + m{t})^\wedge \ m{0}^{
m T} \end{array}
ight] \stackrel{
m def}{=} (m{T}m{p})^\odot$$

最后的结果就定义为算符⊙。

推导过程中用到了矩阵求导, 规则如下:

$$\frac{\mathrm{d} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}{\mathrm{d} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y} \end{bmatrix}$$