李群与李代数

AnderK

李代数基础

第3讲中的一部分运算

外积$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$写成矩阵相乘的形式$\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{a}^\wedge=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}$

群的概念：$G=(A,\cdot)$，集合A对运算$\cdot$满足：1、封闭；2、有结合律；3、有单位元；4、逆运算。

李群的引出

对任意旋转矩阵R，我们有$RR^T=I$，若R是时间的函数，对等式两侧关于时间求导得到

$$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}(t)^{\mathrm{T}}=0$$

从而$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}=-\left(\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$，即：$\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}(t)^{\mathrm{T}}$是反对称矩阵。对任意反对称矩阵，可以找到与之唯一对应的向量（前面叉积部分我们可以用$\boldsymbol{a}^\wedge=\boldsymbol{A}$得到反对称矩阵），即：$\boldsymbol{A}^\vee=\boldsymbol{a}$.可以形象得记住，$\wedge$是把向量展开放大为矩阵，$\vee$是把矩阵缩小为向量。

回到$\dot{R}(t)R(t)^T$，我们将与之对应的三维向量记为$\phi(t)$，即：$\dot{R}(t)R(t)^T=\phi(t)^\wedge$，等式两侧右乘$R(t)$消去$R(t)^T$，得到旋转矩阵求导的表达式：$\dot{\boldsymbol{R}}(t)=\phi(t)^\wedge\boldsymbol{R}(t)=\begin{bmatrix}0 & -\phi_3 & \phi_2\\ \phi_3 & 0 & -\phi_1\\ -\phi_2 & \phi_1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{R}(t)$

即：$\phi(t)^\wedge$反应了导数性质。

那么这么好的向量\反对称矩阵该怎么算出来呢？通过在t=0附近对R(t)泰勒展开并求解微分方程，得到

$$\boldsymbol{R}(t)=\exp\left(\phi_0^\wedge t\right)$$

即：旋转矩阵**R**和它的反对称矩阵通过指数关系发生了关联。

李代数的定义

李代数描述了李群在单位元附近的正切空间。李代数由集合$\mathbb{V}$、数域$\mathbb{F}$和二元运算$[,]$组成，并满足：

1、封闭性；

2、双线性（$[a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]=a[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}]+b[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}],\quad[\boldsymbol{Z},a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y}]=a[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]+b[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}]$）；

3、自反性；

4、雅可比等价（$\forall\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathbb{V},[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]]+[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]]+[\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]]=\mathbf{0}$）；

这样，这种二元运算就被称为李括号，三维向量叉积$\times$就是一种李括号。

李代数$\mathfrak{so}(3)$

ϕ事实上是一种李代数。ϕ_1,ϕ_2的李括号为$[\phi_1,\phi_2]=(\phi_1^\wedge\phi_2^\wedge-\phi_2^\wedge\phi_1^\wedge)^\vee=(\mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2-\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_1)^\vee$

关于$\mathfrak{so}(3)$：它是一个由三维向量组成的集合（也可以说是反对称矩阵，不加区别），它的元素与中$SO(3)$旋转矩阵可以通过指数映射（$\boldsymbol{R}=\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)$）确定。

李代数$\mathfrak{se}(3)$

$\mathfrak{se}(3)$位于$\mathbb{R}^6$中：$\mathfrak{se}(3)=\left\{\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\rho\\ \phi\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6,\boldsymbol{\rho}\in\mathbb{R}^3,\boldsymbol{\phi}\in\mathfrak{so}(3),\boldsymbol{\xi}^\wedge=\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}\right\}$

$\mathfrak{se}(3)$的元素叫$\boldsymbol{\xi}$，是一个六维向量，前三维平移（与变换矩阵中的平移不同），后三维旋转（是$\mathfrak{so}(3)$元素）。在$\mathfrak{se}(3)$中$\wedge$含义为：

$$\boldsymbol{\xi}^\wedge=\begin{bmatrix}\phi^\wedge & \rho\\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

即：六维向量转为四维矩阵。

李代数对应的李括号为：$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2]=(\boldsymbol{\xi}_1^\wedge\boldsymbol{\xi}_2^\wedge-\boldsymbol{\xi}_2^\wedge\boldsymbol{\xi}_1^\wedge)^\vee$

由此我们知道了，用李群中的一个元素对应的李代数中的元素，乘以它本身，就得到了它的导数。

指数与对数映射

$SO(3)$上的指数映射

计算：$\exp(\phi^\wedge)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\phi^\wedge)^n$很不方便，需要简便方法。

对于$\boldsymbol{a}^\wedge$有如下2个性质：

1、$\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge=\begin{bmatrix}-a_2^2-a_3^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & -a_1^2-a_3^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & -a_1^2-a_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}$

2、$\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge=\boldsymbol{a}^\wedge\left(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}\right)=-\boldsymbol{a}^\wedge$

这样可以处理$\boldsymbol{a}^\wedge$的高阶项，从而

$$\begin{aligned}
&\exp(\phi^\wedge)=\exp(\theta\boldsymbol{a}^\wedge)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\theta\boldsymbol{a}^\wedge)^n\\
&=\boldsymbol{I}+\theta\boldsymbol{a}^\wedge+\frac{1}{2!}\theta^2\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge+\frac{1}{3!}\theta^3\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge+\frac{1}{4!}\theta^4(\boldsymbol{a}^\wedge)^4+\cdots\\
&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge+\theta\boldsymbol{a}^\wedge+\frac{1}{2!}\theta^2\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge-\frac{1}{3!}\theta^3\boldsymbol{a}^\wedge-\frac{1}{4!}\theta^4(\boldsymbol{a}^\wedge)^2+\cdots\\
&=\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\underbrace{\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\right)}_{\sin\theta}\boldsymbol{a}^\wedge-\underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\cdots\right)}_{\cos\theta}\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge\\
&=\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge+\boldsymbol{I}+\sin\theta\boldsymbol{a}^\wedge-\cos\theta\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge\\
&=(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}^\wedge\boldsymbol{a}^\wedge+\boldsymbol{I}+\sin\theta\boldsymbol{a}^\wedge\\
&=\cos\theta\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}+\sin\theta\boldsymbol{a}^\wedge.
\end{aligned}$$

最后的结果就是罗德里格斯公式（Rodrigues' s Formula）。而罗德里格斯公式是描述向量旋转的，这说明$\mathfrak{so}(3)$实际上就是由旋转向量组成的空间，指数映射就是罗德里格斯公式。由此$\mathfrak{so}(3)$中任意的向量可以对应到一个$SO(3)$的旋转矩阵。那么，怎么通过旋转矩阵求得对应的向量呢？（这里需要明确，一个旋转矩阵对应的向量一定不是唯一的，但是如果把旋转角度固定在$\pm\pi$之间，那么这种对应才是一一的）我们需要定义对数映射，这样就可以把中的旋$SO(3)$转矩阵对应到$\mathfrak{so}(3)$中。

定义对数映射：

$$\phi = \ln(\boldsymbol{R})^{\vee} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{I})^{n+1}\right)^{\vee}$$

同指数映射一样，我们一定不会通过计算无穷级数来求映射的结果。

在第3讲中，基于罗德里格斯公式（Rodrigues' s Formula），我们知道了旋转矩阵$\boldsymbol{R}$、旋转角θ和旋转轴$\boldsymbol{a}$之间的关系：

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\boldsymbol{R}) &= \cos\theta \operatorname{tr}(\boldsymbol{I}) + (1-\cos\theta)\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\right) + \sin\theta \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{a}^{\wedge}\right) \\ &= 3\cos\theta + (1-\cos\theta) \\ &= 1 + 2\cos\theta \end{aligned}$$

因此旋转角$\theta = \arccos\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{R})-1}{2}$

旋转轴在旋转前后不变，因此$\boldsymbol{R}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$，这说明$\boldsymbol{a}$是$\boldsymbol{R}$的特征向量，归一化之后求出旋转轴。有了旋转角和旋转轴，我们已经求得$\boldsymbol{\phi}$。

另外有一种求$\boldsymbol{a}^{\wedge}$的办法是利用轴角表达的物理含义（形式和罗德里格斯公式很像，但是有一个符号不同），根据：

$$\boldsymbol{R}^T = \cos\theta\boldsymbol{I} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^T - \sin\theta\hat{\boldsymbol{a}}$$

求得$\boldsymbol{a}^{\wedge} = \frac{\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^T}{2\sin\theta}$。这样，我们也就求得了$\boldsymbol{\phi}$。

由上面的讨论我们知道了，旋转矩阵的导数可以由旋转向量指定，这样微积分运算在旋转矩阵中就可行了。

SE(3)上的指数映射

书上没有进行推导，我也不想(会)推导了，直接给出结果：

$$\begin{aligned} \exp\left(\boldsymbol{\xi}^{\wedge}\right) &= \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\phi^{\wedge}\right)^n & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\left(\phi^{\wedge}\right)^n \rho \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \end{aligned}$$

式中的$\boldsymbol{R}$是$SO(3)$的元素，是$\mathfrak{se}(3)$中的旋转部分，$\boldsymbol{T}$右上角的$\boldsymbol{J}$的表达式为：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^{\wedge}$$

回想到$\boldsymbol{\xi}^{\wedge} = \begin{bmatrix} \phi^{\wedge} & \boldsymbol{\rho} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$，我们发现，经过指数映射后，平移部分发生了一次以$\boldsymbol{J}$为系数矩阵的线性变换。

为了求$\mathbb{R}^6$中的$\mathfrak{se}(3)$，我们不必用对数映射。$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \rho \\ \phi \end{bmatrix}$中的旋转部分可以由$T$中的$R$求得，如果把$T$右上角部分记作$\boldsymbol{t}$，则有如下关系

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\rho}$$

式中的$\boldsymbol{J}$可以由$\boldsymbol{\phi}$得到，解线性方程就可以算出$\boldsymbol{\rho}$。

BCH公式与近似

两个李代数指数映射乘积的完整形式由Baker-Campbell-Hausdorff公式（BCH公式）给出。展开式如下：

$$\ln(\exp(\boldsymbol{A})\exp(\boldsymbol{B})) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] + \frac{1}{12}[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]] - \frac{1}{12}[\boldsymbol{B}, [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]] + \cdots$$

忽略二次以上的项，得到线性近似表达为：

$$\ln\left(\exp(\phi_1^\wedge)\exp(\phi_2^\wedge)\right)^\vee \approx \begin{cases} J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1 + \phi_2 & \text{当 } \phi_1 \text{ 为小量}, \\ J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2 + \phi_1 & \text{当 } \phi_2 \text{ 为小量}. \end{cases}$$

这可以理解为：当旋转矩阵R_2左乘了一个小旋转矩阵R_1之后，可以近似看作它的李代数ϕ_2加上一项小旋转矩阵的李代数进行线性变换之后的$J_l(\phi_2)^{-1}\phi_1$；或者当旋转矩阵R_1右乘了一个小旋转矩阵R_2之后，可以近似看作它的李代数ϕ_1加上一项小旋转矩阵的李代数进行线性变换之后的$J_r(\phi_1)^{-1}\phi_2$。

事实上，J_l就是之在$\mathfrak{se}(3)$进行指数映射时T中项$J\rho$的J，表达式为：

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J} = \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} + \frac{1-\cos\theta}{\theta}\boldsymbol{a}^\wedge$$

它的逆为：

$$\boldsymbol{J}_l^{-1} = \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2}\cot\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \frac{\theta}{2}\boldsymbol{a}^\wedge$$

而$J_r(\phi) = J_l(-\phi)$。

这样，李代数的加法和李群上带左右雅可比的乘法就联系上了。

对于$SE(3)$，有类似的BCH近似：

$$\exp(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge) \approx \exp\left(\left(\mathcal{J}_l^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right)$$
$$\exp(\boldsymbol{\xi}^\wedge)\exp(\Delta\boldsymbol{\xi}^\wedge) \approx \exp\left(\left(\mathcal{J}_r^{-1}\Delta\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}\right)^\wedge\right)$$

李代数的加法本就是定义完善的，在确定和李群之间的联系之后，就可以开始求导了。

我们主要关注位姿的变化，对位姿求导的思路有两种，一种是用李代数表示姿态然后求导，还有一种是对李群左乘、右乘微小扰动旋转矩阵，对该扰动求导。

李代数求导

按照导数的定义，对空间点$\boldsymbol{p}$旋转之后：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\exp(\phi^\wedge)\boldsymbol{p}\right)}{\partial\boldsymbol{\phi}} &= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp((\boldsymbol{\phi}+\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\exp\left((\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\right)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{\left(\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\right)\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p} - \exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\boldsymbol{\phi}} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{(\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi})^\wedge\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p}}{\delta\phi} \\
&= \lim_{\delta\boldsymbol{\phi}\to 0}\frac{-(\exp(\boldsymbol{\phi}^\wedge)\boldsymbol{p})^\wedge\boldsymbol{J}_l\delta\boldsymbol{\phi}}{\delta\phi} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^\wedge\boldsymbol{J}_l.
\end{aligned}$$

在推导过程中，第三行是泰勒展开，第五行是把叉乘交换顺序取反。

扰动模型求导（左乘）

设左扰动的李代数为$\boldsymbol{\varphi}$，则对空间点$\boldsymbol{p}$进行左乘扰动之后，对扰动的李代数求导得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})}{\partial\boldsymbol{\varphi}} &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\exp(\boldsymbol{\varphi}^{\wedge})\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{p}-\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varphi}^{\wedge})\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{p}-\exp(\boldsymbol{\phi}^{\wedge})\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} \\ &= \lim_{\varphi\to 0}\frac{\boldsymbol{\varphi}^{\wedge}\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{\varphi}} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}} = -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p})^{\wedge}\end{aligned}$$

$SE(3)$上的李代数求导

假设空间点$\boldsymbol{p}$经过一次变化T（对应李代数）得到Tp，当给T左乘一个扰动$\Delta\boldsymbol{T}=\exp(\delta\boldsymbol{\xi}^{\wedge})$，记扰动项的李代数为$\delta\boldsymbol{\xi}=[\delta\boldsymbol{\rho},\delta\boldsymbol{\phi}]^{T}$：

$$\frac{\partial(\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})}{\partial\delta\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}+\boldsymbol{t})^{\wedge} \\ \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{p})^{\odot}$$

最后的结果就定义为算符$\odot$。

推导过程中用到了矩阵求导，规则如下：

$$\frac{\mathrm{d}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}}{\mathrm{d}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}y}\end{bmatrix}$$