

Kalman Filter

Grundlagen

P.Schön, C.Thein

26.05.2024

Einleitung

Vereinfachte Erklärung

Joystick example

EXAMPLES

Zusammenfassung

Was ist das Kalman Filter?

Das Kalman Filter ist ein mathematisches Verfahren zur iterativen Schätzung von Parametern zur Beschreibung von Systemzuständen.

Dabei wird wiederholt eine Vorhersage über einen Parameterwert abgegeben, mit dem fehleranfälligen Messwert kombiniert, und erneut genutzt um daraus eine Vorhersage zu treffen.

Vorhersage

1. Den nächsten Zustand darstellen: $\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1}$
2. Die Fehlerkovarianz vorausberechnen: $P_k = AP_{k-1}A^T + Q$

Korrektur

3. Den Kalman Gain berechnen: $K_k = P_k H^T (HP_k H^T + R)^{-1}$
4. Die Schätzung mit z_k aktualisieren: $\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - H\hat{x}_k)$
5. Die Fehlerkovarianz aktualisieren: $P_k = (I - K_k H)P_k$

Kalman explained

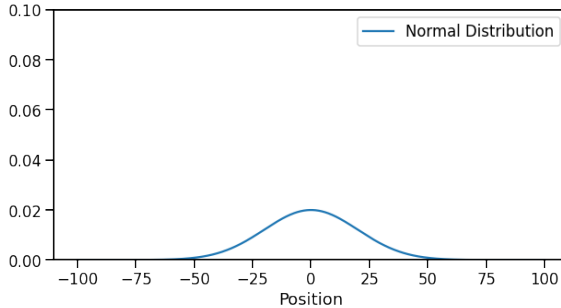


Fig.: Start Position at t_0

Kalman explained

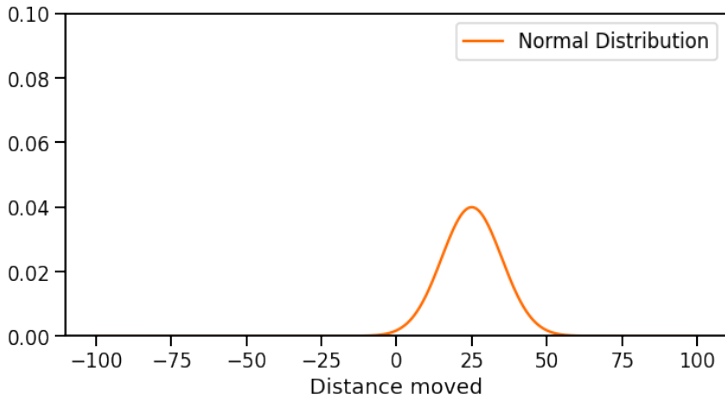


Fig.: Calculated Position at t_1

Kalman explained

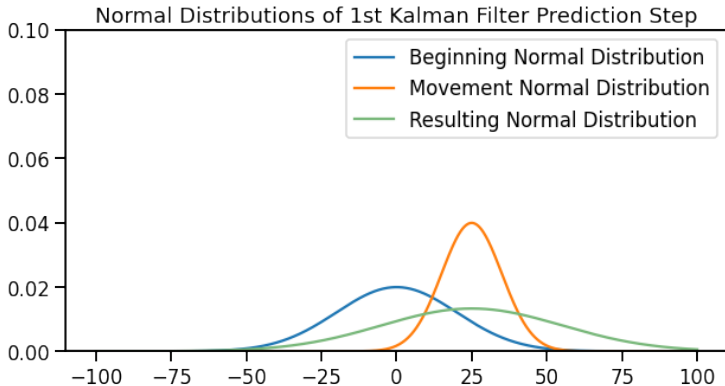


Fig.: Predicted Position at t_1

Kalman explained

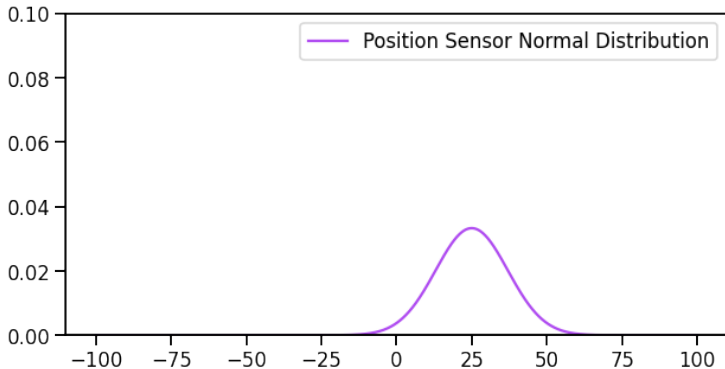


Fig.: Messured Sensor Data of Postion at t_1

Kalman explained

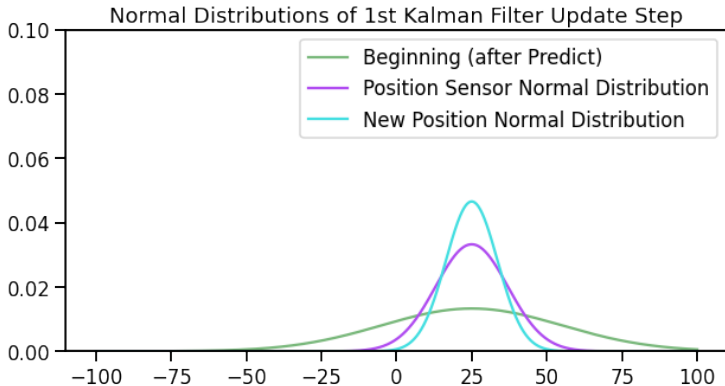


Fig.: Correction of the Kalman Gain after Measurement at t_1

Takeaways

- The precision sinks with the prediction
- The precision grows with the correction

State Representation

We define the state vector x to include the position and velocity of the mouse in both x and y directions

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

where:

- x is the position on the x -axis
- y is the position on the y -axis
- v_x is the velocity in the x -direction
- v_y is the velocity in the y -direction

Formulate the Transition Model

The state transition model describes how the state evolves from one time step to the next. If we assume a constant velocity model, the state transition can be expressed as:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k$$

where w_k represents the process noise, assumed to be Gaussian with zero mean and covariance Q .

..... Create the Transition Matrix

The transition matrix A for a constant velocity Model is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Δt is the time intervall between measurements.

Observation Model

The observation model relates the state to the measurements:

$$z_k = Hx_k + v_k$$

where v_k represents the measurement noise, assumed to be Gaussian with zero mean and covariance R .

The observation matrix H for direct measurement of position is:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prediction Step

The prediction step estimates the next state and its uncertainty:

- Predict the state:

$$x_{k+1} = Ax_k$$

- Predict the error covariance:

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q$$

Correction Step

The correction step updates the state estimate with the new measurement:

- Compute the Kalman gain:

$$K_k = P_k H^T (H P_k H^T + R)^{-1}$$

- Update the state estimate:

$$x_k = x_k + K_k (z_k - H x_k)$$

- Update the error covariance:

$$P_k = (I - K_k H) P_k$$

Kalman Filter

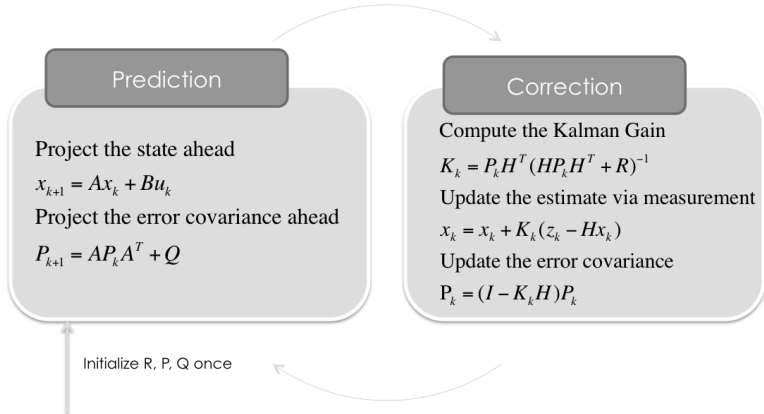


Fig.: Iterative Nature of the Kalman filter

Cheat Sheet - Math Symbols

Zeichen	Bedeutung
k	Zeitintervall der Messwerte / Iteration
z_k	gemessene Geschwindigkeit des Sensors
x_k	Wert der aktuellen Schätzung
x_{k-1}	Wert der vorherigen Schätzung
P_k	Wert der aktuellen Fehlerkovarianz
P_{k-1}	Wert der vorherigen Fehlerkovarianz
R	Varianz der Messergebnisse
Q	Process noise covariance
A	Transition Matrix
H	Observation Matrix
B^*u_{k-1}	Control signal

- **Fettgedruckt**
- *Kursiv*
- Unterstrichen
- Monospaced

- Erster Punkt
- Zweiter Punkt
- Dritter Punkt

- Inline: $E = mc^2$
- Displayed:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Bilder einfügen



Fig.: Ein Beispielbild

In dieser Präsentation haben wir die grundlegenden Elemente von LaTeX vorgestellt, darunter:

- Textformatierung
- Aufzählungen und Listen
- Mathematische Ausdrücke
- Bilder einfügen