

第八章、经济增长 I: 资本积累与人口增长

康明石



暨南大學經濟學院
SCHOOL OF ECONOMICS, JINAN UNIVERSITY

《宏观经济学》第 7 课

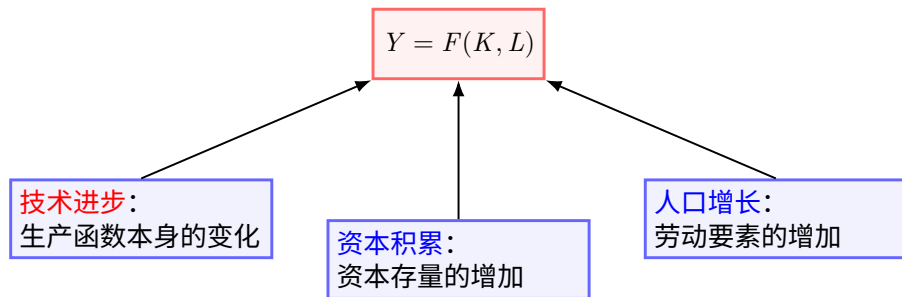
第三篇 增长理论：超长期中的经济

古典学派的“索洛模型” (Solow Model):

- 建立在古典模型的基础之上。
- 它保持了价格弹性和市场出清的假设
- 但不再将资本存量 K 、劳动力 L 和技术知识 $F(\cdot, \cdot)$ 设为给定，将它们调整为内生变量加以分析
- 增长理论旨在解释经济在几十年的时期如何演进
- 第八章：经济增长 I：资本积累与人口增长
- 第九章：经济增长 II：技术的进步

- 静态分析方法（供给与需求的均衡）
- 比较静态分析方法（外生冲击对模型均衡的影响，如收入变化对需求曲线冲击、财政政策的改变等）
- 动态分析方法（第三篇学习）

影响经济增长的因素



图：影响经济增长的三大因素

- 第八章：经济增长 I：资本积累与人口增长
- 第九章：经济增长 II：技术的进步

- 说明不同国家生活水平差异的原因
- 说明同一国家增长速度差异的原因
- 说明影响经济增长的要素
- 促进经济增长的政策手段

本篇主要从资本积累（储蓄）、人口增长和技术进步三方面对上述问题作出回答。

各国的人均收入差距

国别	人均收入（2020，美元）	国别	人均收入（2020，美元）
美国	53 329	印度尼西亚	3 111
日本	31 210	菲律宾	3 128
德国	38 426	印度	1 663
俄罗斯	8 119	越南	2 252
墨西哥	6 449	巴基斯坦	1 070
巴西	5 784	尼日利亚	1 712
中国	7 572	孟加拉国	1 999

图：数据为经过购买力调整过的收入水平，来源 world bank

8.1 资本积累：基本概念的介绍

8.2 资本的黄金律水平：人均消费最大化的稳定状态

8.3 人口增长：对基本模型的延伸

8.4 结论

1 8.1 资本积累

2 8.2 资本的黄金律水平

3 8.3 人口增长

4 8.4 结论

- 产品供给与生产函数:

$$Y = F(K, L)$$

- 假设 1: 生产函数具有规模报酬不变的性质: $\forall z > 0$,

$$zY = F(zK, zL)$$

- 令 $z = 1/L$,

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$$

- 令 $y = Y/L$, $k = K/L$, $y = Y/L$, 人均生产函数:

$$y = f(k)$$

假设 2：资本边际产出 (MPK) 递减，且资本的边际产出大于零

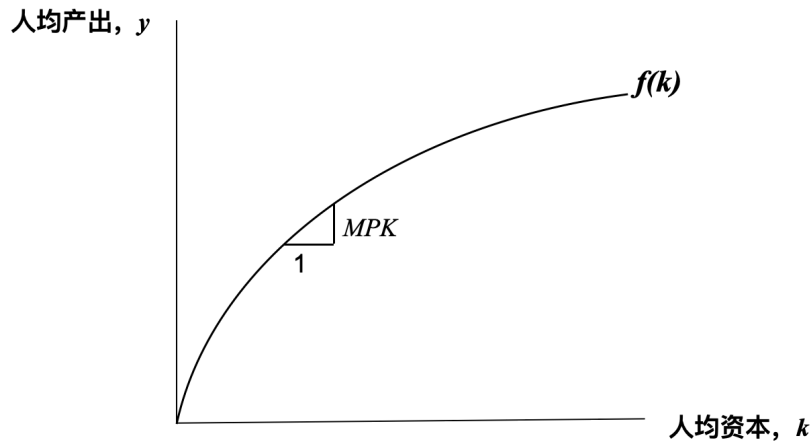
- 资本的边际产量大于零：

$$MPK = \frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial y}{\partial k} = f'(k) > 0$$

- 资本的边际产出递减：

$$\frac{\partial MPK}{\partial k} = f''(k) < 0$$

人均资本生产函数



- 产品被消费与投资需求：

$$y = c + i$$

注：这是每个工人平均的形式，且忽略了政府和外国部门。

- **假设 3：储蓄率 (s)，外生给定**

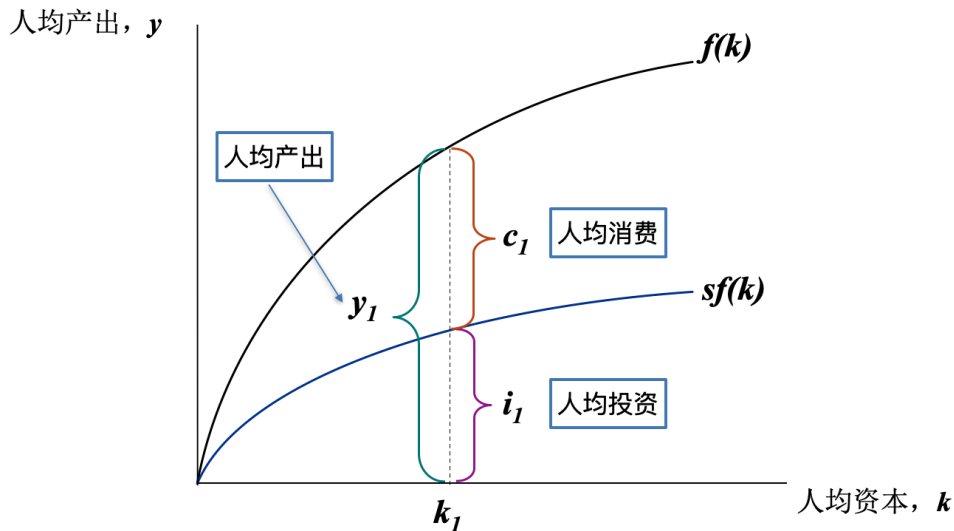
- 均衡下投资等于储蓄
- 每一单位的产出，有 s 的比例被储蓄（被用于投资）
- 每一单位的产出，有 $1 - s$ 的比例被消费

- 也就是说 $y = c + i$ 可以表示为

$$y = \underbrace{(1 - s)y}_{=: c} + \underbrace{sy}_{=: i}$$

- 由于 $y = f(k)$ ，因此 $i = sf(k)$ ， $c = (1 - s)f(k)$

产出在消费与投资间的分配（图）



资本存量的变化

影响资本存量变化的因素：

1. 投资 —— 引起 $k \uparrow$

$$\Delta k = i = sy$$

(用于新工厂与新设备的支出)

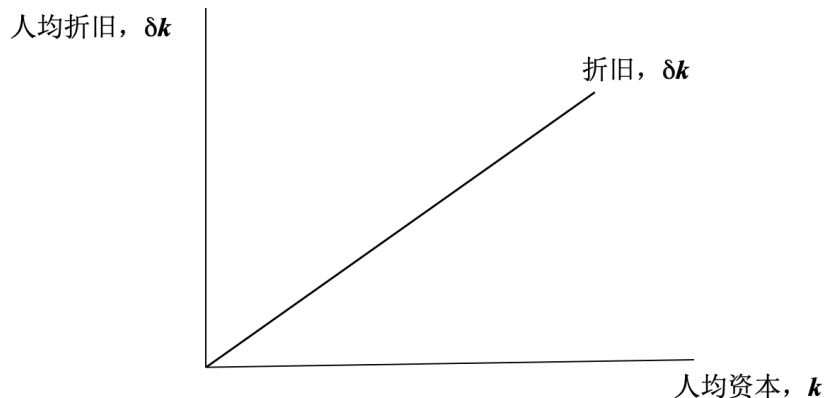
2. 折旧 —— 引起 $k \downarrow$

$$\Delta k = -\delta k$$

(原有资本的折损)

资本存量的变化

人均折旧量为 $\delta \times k$ ，即折旧率乘以人均资本存量



资本存量的动态变化

假设一个经济体的储蓄率为 s ，折旧率为 δ ，人均生产函数为 $f(\cdot)$

在第 t 期时

- 资本存量: k_t
- 人均产量: $y = f(k_t)$
- 投资量: $i_t = sy_t$
- 折旧量: δk_t

在第 $t + 1$ 期时

- 资本存量: $k_{t+1} = k_t + \underbrace{sf(k_t)}_{=: i_t} - \delta k_t$
- 人均产量: $y_{t+1} = f(k_{t+1})$

- 资本存量的变化 = 投资 - 折旧

$$\Delta k = sf(k) - \delta k$$

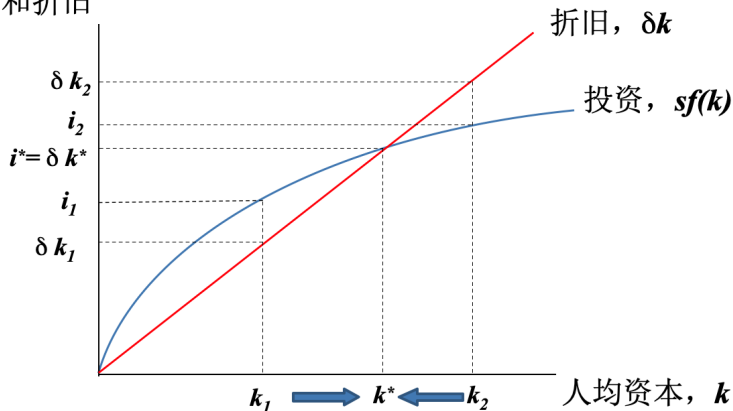
- 稳定状态，简称稳态：指投资和折旧刚好相互抵消， k 与 y 均不随着时间的推移而发生变化的状态。
- 我们通常用 k^* 来表示稳定状态的 k 。稳态条件：

$$sf(k^*) - \delta k^* = 0$$

稳定状态的性质

- 处于稳定状态的经济会**停留在稳态**
- 处于非稳定状态的经济将**走向稳态**
- 无论初始的资本如何，经济体**最终以稳态结束**

投资和折旧



趋近稳态：一个数字例子

- 生产函数：

$$Y = K^{0.5} L^{0.5}$$

- 储蓄率： $s = 0.3$ ；折旧率： $\delta = 0.1$
- 请问稳定状态的人均资本存量是多少？

- 如果初始资本为 4, $k_1 = 4$, 我们可以用资本存量的动态分析方法 (ppt 15 页) 分析经济体如何趋向稳态吗? (见本章附件 excel 表)
 - $k_1 = 4, \Delta k_1 = sf(k_1) - \delta k_1 = 0.2$
 - $k_2 = 4.2, \Delta k_2 = sf(k_2) - \delta k_2 \approx 0.195$
 -
 - $k_{99} = 8.96, \Delta k_{99} = sf(k_{99}) - \delta k_{99} \approx 0.002$
- 经济体会逐渐趋于稳态, 每一期的资本存量变化越来越小: 也就是说资本存量和产出的增长率也会越来越小。
- 根据我们目前学到的知识, 解释为什么通常越贫困的国家发展越快?

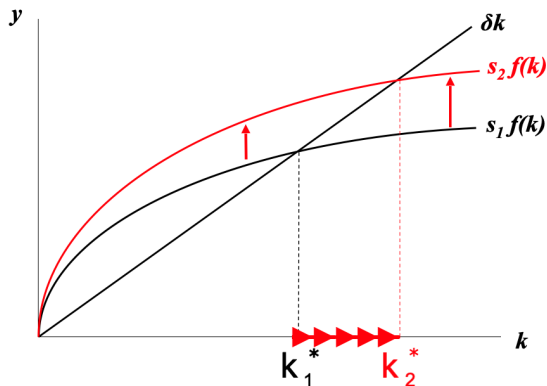
案例研究：日本和联邦德国增长的奇迹

- 第二次世界大战摧毁了日本和联邦德国的大量资本存量。（使 k 远远小于 k^* ）
- 二战以后，两个国家经历了记录上最迅速的增长。
 - 1948-1972 年，日本的人均 GDP 增长率为 8.2%，联邦德国的人均 GDP 增长率为 5.7%；
 - 而同期美国的增长率只有 2.2%

储蓄率如何影响增长？

当储蓄率 s 提高：

- 一段时间内，投资增长，经济增长率提高
- 新的稳定状态下，人均资本存量更多，人均产出水平更高；人均资本增长率恢复到零。

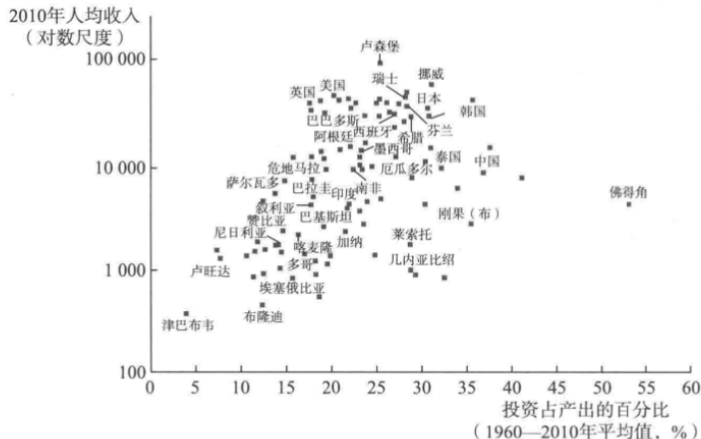


图：索洛模型表明：储蓄率 s 越高，经济的人均资本存量 k 越高，相应的稳态人均产出水平 y 也越高

案例研究：世界各地的储蓄率与人均收入

图 8—6 投资率与人均收入的国际证据

这幅散点图显示了约 100 个国家或地区的经验，每个点代表一个国家或地区。横轴表示一国（或地区）的投资率，纵轴表示该国（或地区）的人均收入。正如索洛模型所预测的，高投资与高人均收入相联系。这两个变量之间的相关系数为 0.28。资料来源：Alan Heston, Robert Summers, and Bettina Aten, Penn World Table Version 7.1, Center for International Comparisons of Productions, Income and Prices at the University of Pennsylvania, July 2012.



1 8.1 资本积累

2 8.2 资本的黄金律水平

3 8.3 人口增长

4 8.4 结论

高储蓄率的代价

储蓄率越高越好吗？

$$y = \underbrace{c}_{=(1-s)y} + \underbrace{i}_{=sy}$$

- 如果你关心的是产出，答案是肯定的，储蓄率越高，产出越大
- 如果你关心的是消费，那就不一定了
 - 储蓄率不能过高，不然用于消费的产出过少
 - 储蓄率不能过低，不然产出总量过少

资本的黄金律水平（定义）

资本的黄金律水平（Golden Rule Level of Capital）：

使得稳态下人均消费最大化的稳态资本存量 k^* ，表示为 k_{gold}^*

消费可以表示为

$$\begin{aligned}c &= y - i \\&= f(k) - sf(k) \\&= f(k) - \delta k\end{aligned}$$

其中最后一个等式是由于：稳态下，投资等于折旧。

资本的黄金律水平不能过高也不能过低：

- 若人均资本存量过低，人均产量 $f(k)$ 过少
- 若人均资本存量过高，资本折旧 δk 过多

资本的黄金律水平（条件）

- 因此，稳态消费可以表示为：

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*$$

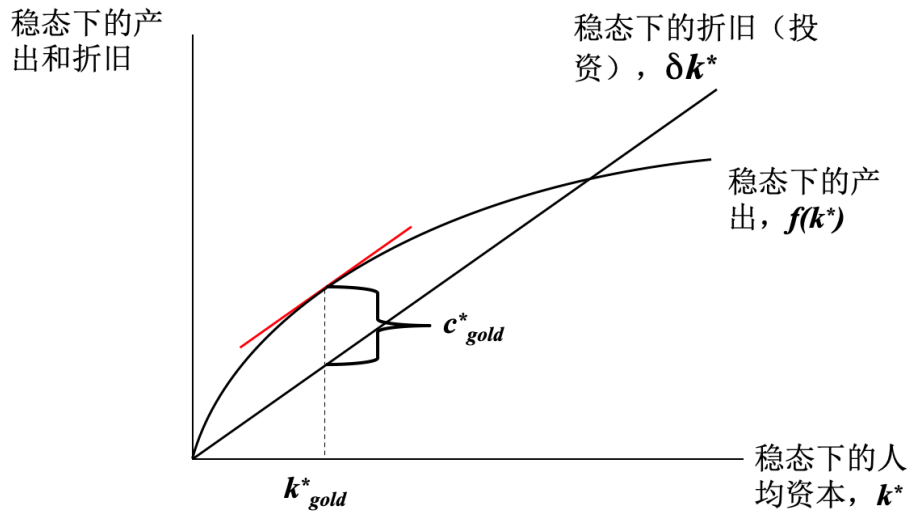
- 稳态下的消费最大化必然满足以下条件：

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = f'(k^*) - \delta = 0 \iff MPK = \delta$$

- 达到资本黄金律水平的（充分必要）条件是：

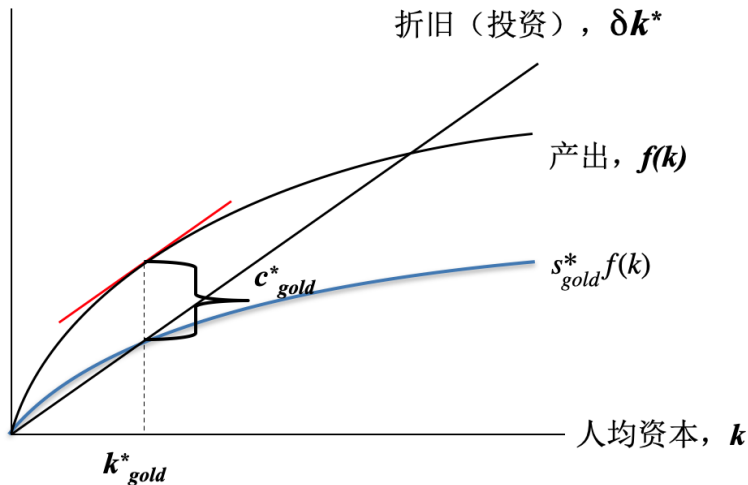
资本的边际生产率等于折旧率 什么确保了一阶条件的充分必要性？

资本的黄金律水平（图）



资本的黄金律水平（图）

产出和折旧



黄金律水平必须有一个合适的储蓄率 s^*_{gold} 支持

如何找出 s_{gold}^*

寻找资本的黄金律水平的稳态本质上是寻找到一个合适的储蓄率 s_{gold}^* 。
我们可以通过一下三步达成：

1. 找到 k_{gold}^* 的过程与储蓄率 s 无关：

$$f'(k_{gold}^*) = \delta. \quad (1)$$

2. 在给定储蓄率 s 的情况下，稳态资本量由：

$$sf(k^*) - \delta k^* = 0 \quad (2)$$

决定。

3. 将 (1) 中求得的 k_{gold}^* 带入 (2)，求取 s_{gold}^* 。

如何找出 s_{gold}^* (A big picture)

在介绍资本的黄金律水平时，我们计算消费的方式如下：

$$\begin{aligned}c &= y - i \\&= f(k) - sf(k) \\&= f(k) - \delta k\end{aligned}$$

最后一个等式运用了稳态的条件：

投资等于折旧 $sf(k) = \delta k$ ，也就是上页中的 (2)。

上页中的三步可以看做：

1. 找到让 $c = f(k) - \delta k$ 最大化的 k_{gold}^*
2. 而上步中找到的 k_{gold}^* 是否为稳态 k^* 需要有一个储蓄率支持
3. 找到让稳态成立的储蓄率

寻找黄金律稳定状态：一个数字例子

- 生产函数：

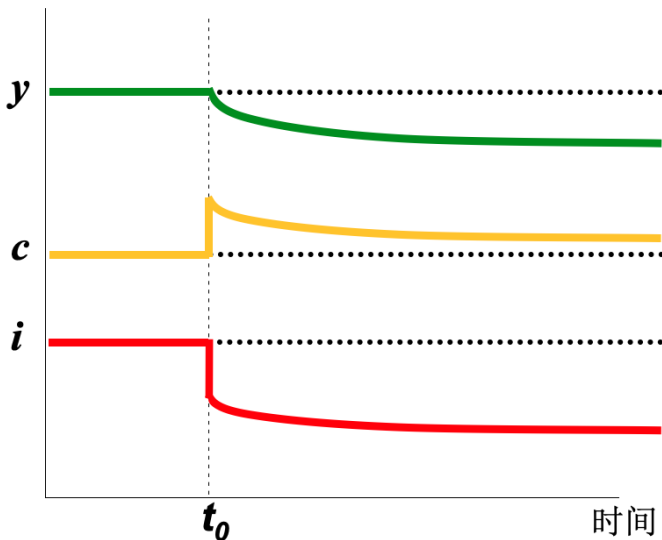
$$Y = K^{0.5} L^{0.5}$$

- 折旧率 $\delta = 0.1$

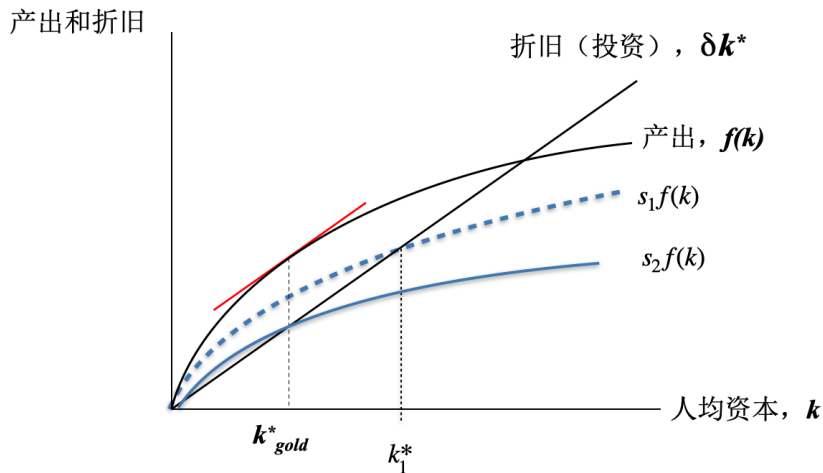
1. 请问资本的黄金律水平是多少？
2. 对应的储蓄率又是多少？

向黄金律稳定状态的过渡 (以资本过多为起点)

- 如果 $k > k_{gold}^*$, 为了达到黄金律水平, 需要降低储蓄率 $s \downarrow$
- 储蓄率 $s \downarrow$ 导致当期的消费 $c = (1 - s)y$ 增加、当期的投资 $i = sy$ 减少
- 在向黄金律转变的过程中, 消费始终大于原来的水平



向黄金律稳定状态的过渡 (以资本过多为起点)

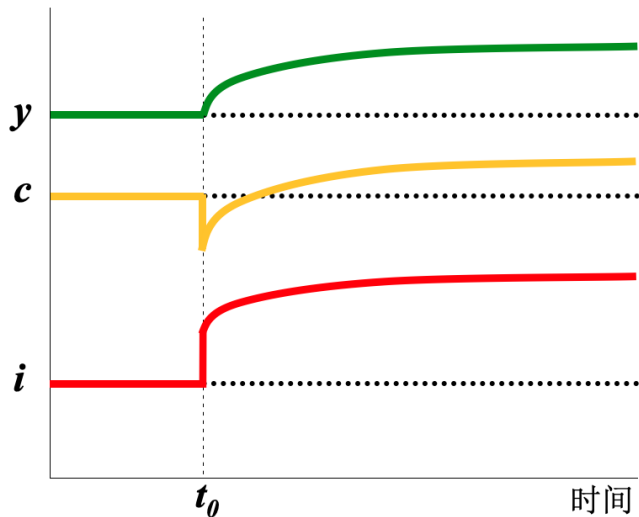


向黄金律稳定状态的过渡 (以资本过多为起点)

1. 储蓄率 $s \downarrow$ ，导致消费 $c \uparrow$ ，投资 $i \downarrow$
2. 储蓄率 $s \downarrow$ 后，投资小于折旧 ($sy < \delta k$)，人均资本存量会逐渐减少，导致产出 $y \downarrow$ ，消费和投资也逐渐减少 ($c = (1 - s)y$ 、 $i = sy$)
3. 达到黄金率稳态时，尽管产出和投资减少了，但消费必然会大于储蓄率变化之前 (回想黄金律的定义)

向黄金律稳定状态的过渡 (以资本过多为起点)

- 如果 $k < k_{gold}^*$, 为了达到黄金律水平, 需要增加储蓄率 s
- 储蓄率 $s \uparrow$ 导致当期的消费 $c = (1 - s)y$ 减少、当期的投资 $i = sy$ 增加
- 在向黄金律转变的过程中, 消费最终会高于原本水平



向黄金律稳定状态的过渡 (以资本过多为起点)

1. 储蓄率 $s \uparrow$, 导致消费 $c \downarrow$, 投资 $i \uparrow$
2. 储蓄率 $s \uparrow$ 后, 投资大于折旧 ($sy > \delta k$), 人均资本存量会逐渐增加, 导致产出 $y \uparrow$, 消费和投资也逐渐增加 ($c = (1 - s)y$ 、 $i = sy$)
3. 消费虽然最初减少了, 但达到黄金率稳态时, 消费必然会大于储蓄率变化之前

1 8.1 资本积累

2 8.2 资本的黄金律水平

3 8.3 人口增长

4 8.4 结论

人口增长对人均资本积累的影响

由于人均资本的定义为

$$k = \frac{K}{L}$$

人均资本的变化率 = 总资本的变化率 - 人口增长率

- 当人口不变时,

$$\Delta k/k = \text{人均资本的变化率} = \text{总资本的变化率} = (sf(k) - \delta k)/k$$

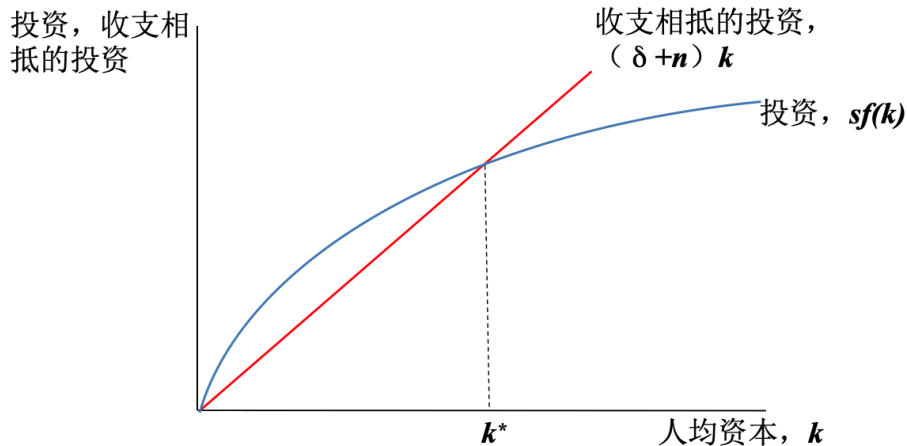
- 当人口增长率为 n 时,

$$\underbrace{\frac{\Delta k}{k}}_{\text{人均资本变化率}} = \underbrace{\frac{sf(k) - \delta k}{k}}_{\text{总资本变化率}} - \underbrace{n}_{\text{人口增长率}} \implies \Delta k = sf(k) - \delta k - nk$$

- 因此存在人口增长时, 稳态条件为:

$$sf(k) = (\delta + n)k$$

人口增长对人均资本积累的影响



人口增长在三个方面改变了基本索洛模型

1. 它使我们更接近于解释持续的经济增长：即经济体达到稳态后由于人口的增长仍然会继续增长。
2. 人口增长对为什么有些国家富有而另一些国家贫困提供了另一种解释。
3. 人口增长影响了我们决定黄金律资本水平的标准。

有人口增长的稳态与黄金律

- 稳定状态的人均消费：

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

- 消费最大化的稳态资本满足：

$$MPK = \delta + n$$

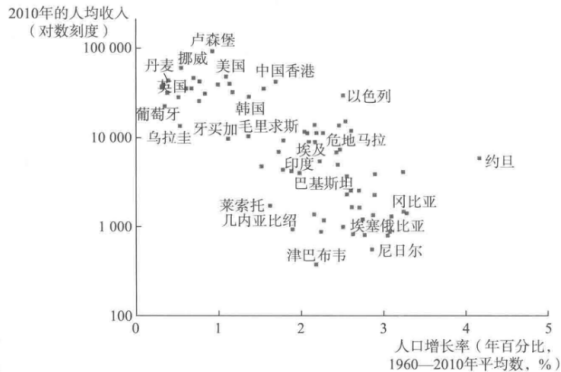
- Take-away：之前求稳态与黄金律的方法适用，**唯一的区别是将折旧率由 δ 替换为 $\delta + n$**

案例研究：世界各国的人口增长

图 8—13 人口增长与人均收入的国际证据

本图是大约 100 个国家或地区数据的散点图。它表明，正如索洛模型所预言的，人口增长率高的国家或地区往往有低的人均收入水平。这两个变量之间的相关系数为 -0.74 。

资料来源：Alan Heston, Robert Summers, and Bettina Aten, Penn World Table Version 7.1, Center for International Comparisons of Productions, Income, and Prices at the University of Pennsylvania, July 2012.



关于人口增长的其他观点

- 马尔萨斯强调人口与自然资源的相互作用：

人口的增长速度远高于食物的增长速度，于是人类将永远生活在贫困中。

缺点：没有看到人类的创造性足以抵消人口增长的影响

- 克莱默强调人口与技术的相互作用：

人口越多，从事研发的人就越多，而技术是可以共享的。因而人口越多的社会技术进步越快，经济增长越快。

- 1 8.1 资本积累
- 2 8.2 资本的黄金律水平
- 3 8.3 人口增长
- 4 8.4 结论

1. 索洛增长模型：开启了宏观经济体中的动态分析
2. 增长过程是资本积累过程；储蓄率有着关键的作用
3. 资本的黄金律水平：强调消费而非产出（但产出间接决定了消费）
4. 人口增长也是影响经济增长的重要因素

回顾视频：

- 索洛模型介绍
- 稳定状态