矩阵

行列式

二元线性方程组的求解：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

矩阵

行列式

看起来好像有些规律呀

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 即为二阶行列式。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}(i = 1, 2; j = 1, 2)$ 称为元素。
i代表行标，j代表列标。

矩阵

三阶行列式

二阶看起来挺容易就算出来了，三阶的呢?

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

矩阵

行列式

计算行列式：$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$D=1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4$$

$$-1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3)$$

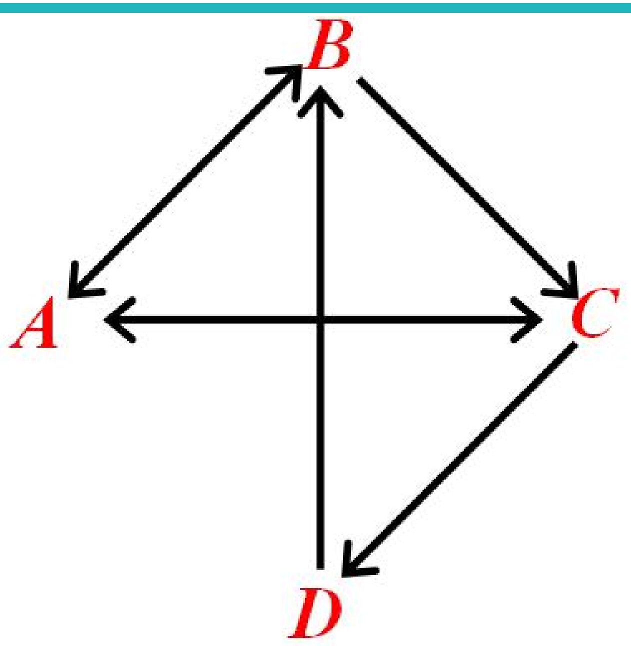
$$=-4-6+32-4-8-24$$

$$=-14.$$

矩阵

矩阵和数据之间的关系。

A B C D代表四座城市，它们之间可通行的关系：



如果有表格的形式来表示：

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

矩阵

行列式与矩阵的区别

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素	■行数不等于列数 ■共有$m\times n$个元素 ■本质上就是一个数表

矩阵

何为矩阵?

输入的数据就是矩阵，对数据做任何的操作都是矩阵的操作了。

	A	B	C	D
1	80	75	75	78
2	98	70	85	84
3	90	75	90	90
4	88	70	82	80

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 80 & 75 & 75 & 78 \\ 98 & 70 & 85 & 84 \\ 90 & 75 & 90 & 90 \\ 88 & 70 & 82 & 80 \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵的组成

矩阵是由行和列来组成的：

$$A=\begin{array}{cccc|l} \multicolumn{4}{c|}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{第一行} \\ \longrightarrow \text{第二行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{第一列} & \text{第二列} & & & \end{array}$$

矩阵的特殊形式行向量与列向量：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

矩阵

方阵是什么

行和列一样就是方阵啦，一般叫做n阶方阵。

$$A = A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

矩阵

- 几种特别的东东

上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵

- 几种特别的东东

对角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

应用于降维操作

单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵

同型矩阵和矩阵相等是一个事吗？

两个矩阵行列数相同的时候称为同型矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

在同型的前提下，并且各个元素相等，这就是矩阵相等了：

$$a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, m; \ j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵

矩阵基本运算

有两个m*n的矩阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$

加法减法：

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵基本运算

数乘运算，数λ与矩阵A的乘积

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵的乘法

两个商场，三种电视机，求销售额？ （A的列数和B的行数要相等）

$$A=\begin{array}{ll}\begin{pmatrix}12 & 8 & 10\\ 14 & 9 & 6\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{百佳}\\ \text{华润}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{长虹} & \text{康佳} & \text{创维}\end{array} & \end{array}\qquad B=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\\ 3.5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{长虹}\\ \text{康佳}\\ \text{创维}\end{array}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}12 & 8 & 10\\ 14 & 9 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.5\\ 3\\ 3.5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}12\times 2.5+8\times 3+10\times 3.5\\ 14\times 2.5+9\times 3+6\times 3.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}89\\ 83\end{pmatrix}$$

矩阵

- 乘法没有交换律

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

但是可以这么玩：

$$(AB)C=A(BC)$$

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

矩阵

- 方程该怎么玩？A为系数矩阵，X是未知数矩阵，B是常数矩阵。

$$AX = b \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵转置

就调换一下：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

公式由来了：

$$(A^T)^T=A$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

$$(\lambda A)^T=\lambda A^T$$

$$(AB)^T=B^TA^T \Rightarrow (A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$$

矩阵

对称矩阵

如果满足$A^T = A$那么A就是对阵矩阵。

$$a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵

逆矩阵

A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B，使得：AB=BA=I（单位阵）

记作：$B = A^{-1}$

性质（可逆前提）：$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

矩阵

矩阵的秩

对于一个S*N的矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$

矩阵A的每一行可以看作一个N维向量：$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ \ i=1,2,\cdots,s$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 叫作A的行向量

矩阵A的每一列可以看作一个S维向量：$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix},\ \ j=1,2,\cdots,n$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 叫作A的列向量

矩阵

矩阵的秩

秩表示什么呢?

行向量组: $\alpha_1=(1,1,3,1),\ \alpha_2=(0,2,-1,4),$
$\alpha_3=(0,0,0,5),\ \alpha_4=(0,0,0,0).$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&2&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

求其极大线性无关组假设有: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

$$\begin{cases}k_1=0,\\k_1+2k_2=0,\\3k_1-k_2=0,\\k_1+4k_2+5k_3=0\end{cases}$$

解得: $k_1=k_2=k_3=0$ 即: α_1, α_2, α_3 线性无关

矩阵

矩阵的秩

由于含有零向量，比线性相关。

所以向量组: α_1 , α_2 , α_3 , α_4 的秩为3

对于列向量组同理可得: $\beta_3 = \frac{7}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 + 0\beta_4$ 但 β_1 , β_2 , β_4 线性无关

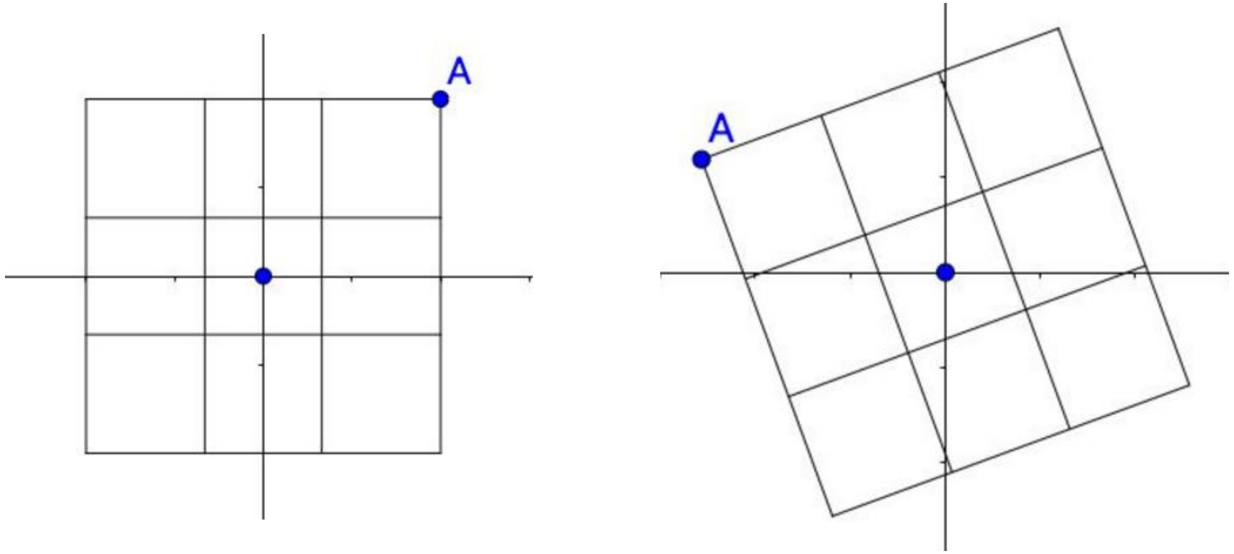
所以向量组: β_1 , β_2 , β_3 , β_4 的秩为3

矩阵的行秩=列秩

矩阵

秩该怎么理解

可以对二维图形进行旋转，比如用旋转矩阵：$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

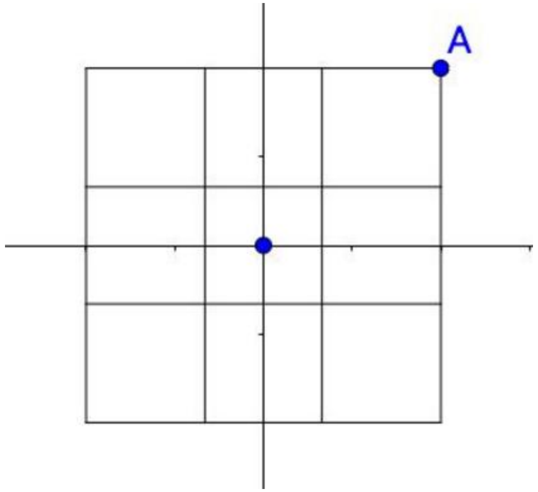


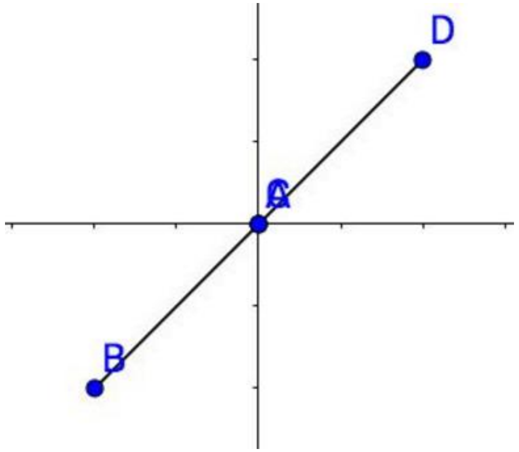
变换后依然是二维的，所以旋转矩阵的秩为2

矩阵

秩该怎么理解

如果通过这样的矩阵：$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$





变换后是一维的，所以矩阵的秩为1

矩阵

秩该怎么理解

矩阵中最大不相关向量的个数就是秩了。

比如咱们家中有很多张照片（N），但是一家只有三口（R），我们就把R当做矩阵的秩。

矩阵

向量的内积

设有n维向量： $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

[x,y] = x1 y1 + x2 y2 + … + xn yn，此时我们就把[x,y]叫做向量的内积。

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x^T y$$

对称性：[x, y] = [y, x]

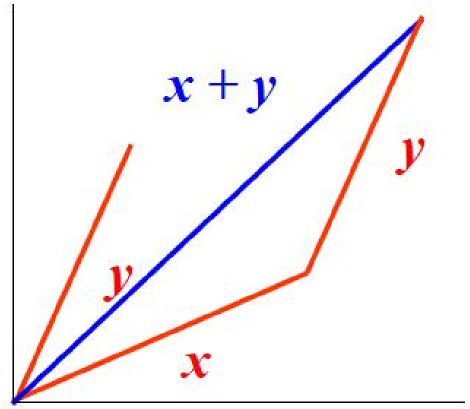
线性性质：[λ x, y] = λ[x, y].

[x + y, z] = [x, z] + [y, z]

矩阵

向量的长度

- n维向量x的长度: $\| x \| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$
- 当 $\| x \| = 1$ 称为单位向量。
- 齐次性: $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$
- 三角不等式: $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$



矩阵

向量的正交

两两正交的非零向量组成的向量组成为正交向量组。

若 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 是两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 线性无关。

例： 已知3 维向量空间R^3中两个向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量a_3，使a_1, a_2, a_3 两两正交.

矩阵

向量的正交

显然$a_1 \perp a_2$.

设$a_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ ，若$a_1 \perp a_3$ ， $a_2 \perp a_3$ ，则

$$[a_1, a_3] = a_1^{\mathrm{T}} a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$[a_2, a_3] = a_2^{\mathrm{T}} a_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

向量的正交

$$Ax=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}$

从而有基础解系$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，令 $a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

矩阵

规范正交基

n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间$V \subset R^n$ 中的向量，
满足

- $e_1, e_2, \ldots, e_r$是向量空间 V 中的一个基；
- $e_1, e_2, \ldots, e_r$两两正交；
- $e_1, e_2, \ldots, e_r$都是单位向量，

则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个规范正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个规范正交基