函数

函数的定义

- 量和量之间的关系如：$A=\pi r^2$
- $y=f(x)$ 其中x是自变量，y是因变量。
- 函数在 x_0 处取得的函数值 $y_0=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$
- 符号只是一种表示，也可以：$y=g(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=\psi(x)$

函数

几种函数

分段函数：$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

反函数：$\mathrm{h}=\frac{1}{2}g t^2 \rightarrow h=h（t） \quad \mathrm{t}=\sqrt{\frac{2\mathrm{h}}{\mathrm{g}}} \rightarrow t=t（h）$

显函数与隐函数：$y=x^2+1$ F(x,y)=0 $3x+y-4=0$

函数

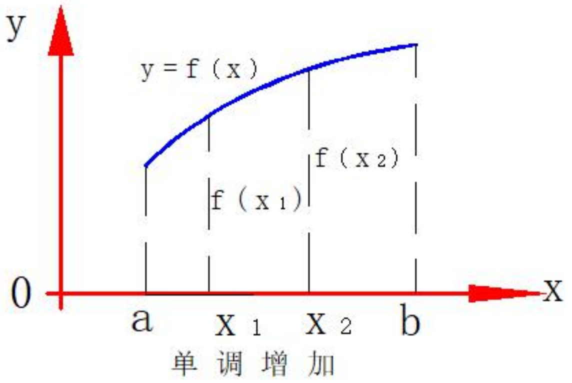
几种特性

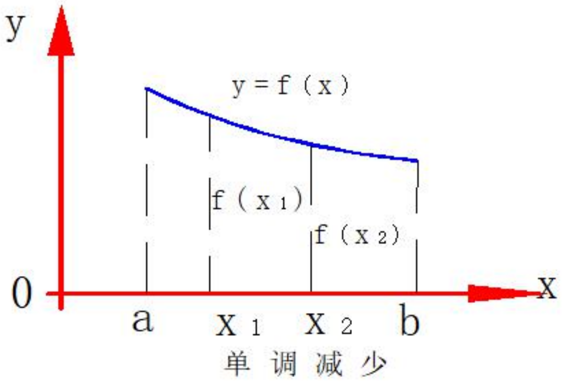
奇偶性，偶函数：$f(-x) = f(x)$ y轴对称　$f(x)= x^2$　$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

奇函数：$f(-x) = - f(x)$ 原点对称　$f(x)= x^3$　$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = - f(x)$

周期性：$f(x+T) = f(x)$

单调性：





极限

数列

按照一定次数排列的一列数：$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ ，其中u_n叫做通项。

对于数列$\{u_n\}$，如果当n无限增大时，其通项无限接近于一个常数A，则称该数列以A为极限或称数列收敛于A，否则称数列为发散。

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A, \text{或} \quad u_n \to A \ (n \to \infty)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} 2^n \text{ 不存在}$$

极限

极限

符号表示：

$x\to\infty$ 表示“当 $|x|$ 无限增大时”；

$x\to+\infty$ 表示“当 x 无限增大时”；

$x\to-\infty$ 表示“当 x 无限减少时”；

$x\to x_0$ 表示“当 x 从 x_0 的左右两侧无限接近于 x_0 时”；

$x\to x_0^+$ 表示“当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时”；

$x\to x_0^-$ 表示“当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时”；

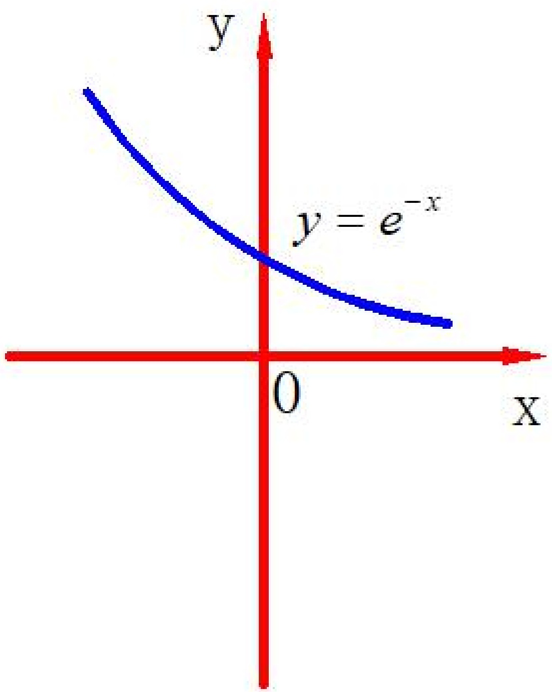
极限

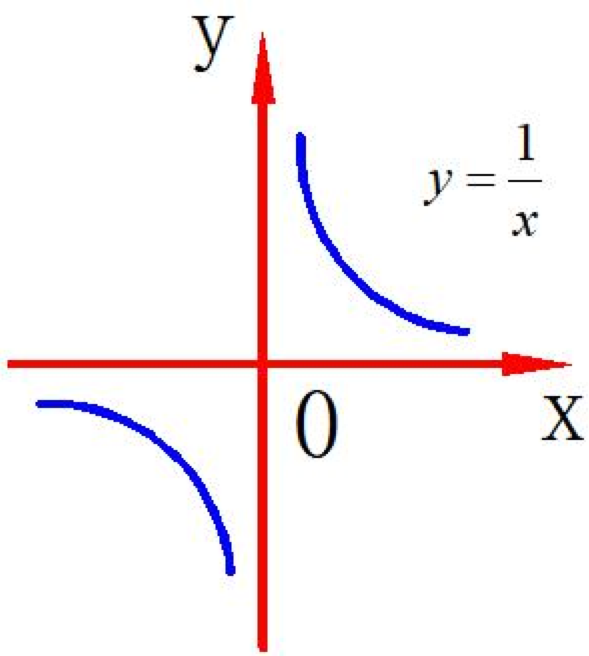
极限

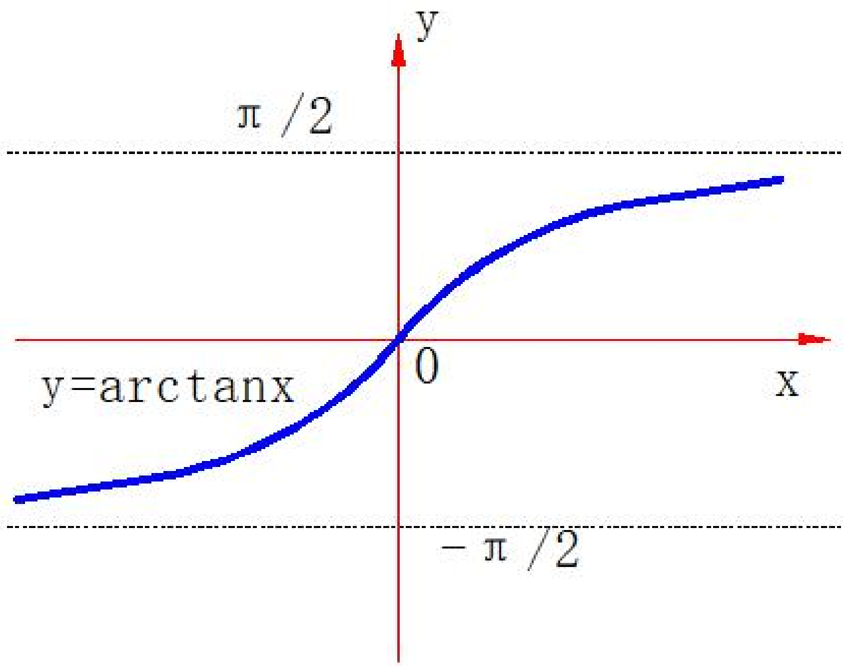
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$







极限

极限

函数在x0的邻域内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,或 $f(x)\to A(x\to x_0)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

左右极限：函数在左半邻域/右半邻域内有定义 $(x_0, x_0+\delta)$ $(x_0-\delta, x_0)$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)\text{或 } f(x_0+0)=A$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(x\to x_0^-)\text{或 } f(x_0-0)=A$$

极限

极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 的充要条件是 } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x + 1 & x > 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 的极限

解：
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$$

左右极限存在但不相等，

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ 不存在

极限

极限

无穷小：以零为极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\text{，则 }\frac{1}{x}\text{ 是 }x\to\infty\text{时的无穷小。}$$

$$\lim_{x\to 2}(3x-6)=0\text{，则 }3x-6\text{ 是 }x\to 2\text{的无穷小。}$$

基本性质：

1.有限个无穷小的代数和仍是无穷小

2.有限个无穷小的积仍是无穷小

3.有界变量与无穷小的积仍是无穷小

4.无限个无穷小之和不一定是无穷小。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}$$

$$=\frac{1}{2}$$

极限

极限

无穷小的商不一定是无穷小。

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty$$

极限有无穷小的关系：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件 $f(x)=A+\alpha(x)$

其中 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小。

极限

极限

无穷大：并不是一个很大的数，是相对于变换过程来说。

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ 或 } f(x) \to \infty (x \to x_0)$$

无穷小和无穷大的关系：在自变量的变换的同一过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小。

极限

极限

无穷小的比较：$\alpha=\alpha(x)$，$\beta=\beta(x)$ 都是无穷小

$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=0$， 则称β是比α高阶无穷小

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\infty$， 则称β是比α低阶无穷小

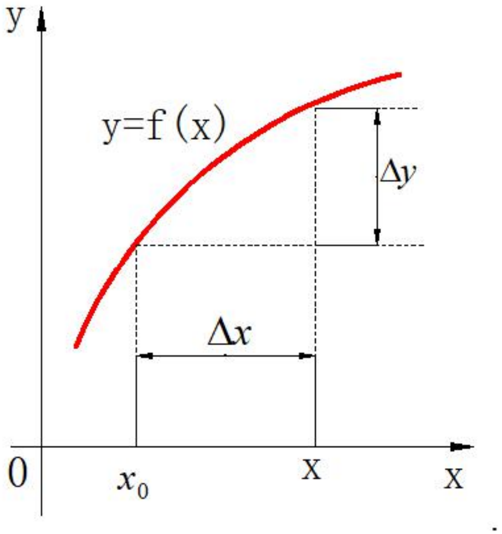
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$ 则称β与α是同阶无穷小

函数的连续性

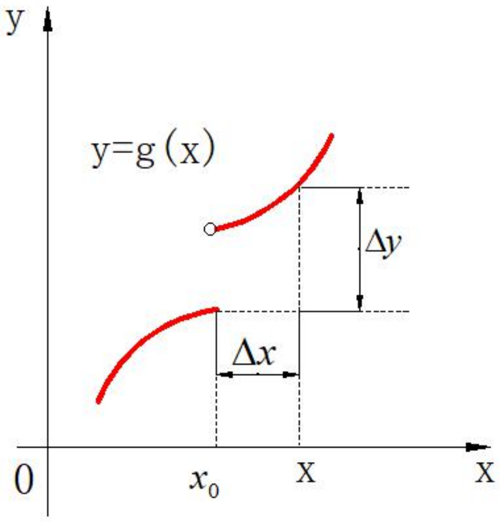
函数的连续性

设函数 y = f (x)在点x。的某邻域内有定义，如果当自变量的改变量△x趋近于零时，相应函数的改变量△y也趋近于零，则称y = f (x)在点 x。处连续。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$



当$\Delta x \to 0$时,$\Delta y \to 0$;



当$\Delta x \to 0^+$时，Δy不能趋近于**0**

函数的连续性

函数的连续性

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，需要满足的条件：

1. 函数在该点处有定义
2. 函数在该点处极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在
3. 极限值等于函数值 $f(x_0)$

函数的连续性

函数的连续性

函数 $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性?

$$f(0)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1 \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$$

函数的连续性

函数的间断点

函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处不连续，则称其为函数的间断点。

3种情况为间断点：

1.函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义。

2.极限 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 不存在

3.满足前两点，但是 $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x)$

函数的连续性

函数的间断点

- 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左右极限存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点，否则为第二类间断点。

- 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 均存在，但不相等。

- 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$

函数的连续性

函数的间断点

函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的连续型?

在点 $x=2$，$x=1$处没有定义。

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

在X=1处是可去间断点

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$$

在X=2是第二类间断点

导数

导数

瞬时速度即变化率

平均速度：（速度）$\upsilon = \dfrac{s\,(\text{路程})}{t\,(\text{时间})}$ 但是如何表示瞬时速度呢？

瞬时经过路程：$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$

这一小段的平均速度：$\overline{\upsilon} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$

当 $\Delta t \to 0$ 时也就是瞬时速度了

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

导数

导数

如果平均变化率的极限存在，$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

则称此极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，$f'(x_0)$

$$y'\big|_{x=x_0}，\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad 或 \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

导数

导数

$$1)\ (C)' = 0 \qquad 2)\ (x^{\mu})' = \mu \cdot x^{\mu-1}$$

$$3)\ (\sin x)' = \cos x \qquad 4)\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$5)\ (\tan x)' = \sec^2 x \qquad 6)\ (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$7)\ (\sec x)' = \sec x \tan x \qquad 8)\ (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$9)\ (a^x)' = a^x \ln a \qquad 10)(e^x)' = e^x$$

$$11)(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad 12)(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$13)(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 14)(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15)(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad 16)(arc \cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

导数

- 导数

$$（1）(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2)\ (u\,v)' = u'v + u\,v'$$

$$(3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\ (v \neq 0)$$

$$(4)\ (Cu)' = Cu'$$

$$(5)\ \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}\ (C\text{为常数})$$