

PGS. TS. NGUYỄN PHONG ĐIỀN (Chủ biên)
TS. NGUYỄN QUANG HOÀNG – GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG
TS. NGUYỄN MINH PHƯƠNG

BÀI TẬP CƠ HỌC KỸ THUẬT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Lời nói đầu

Cơ học kỹ thuật là một môn học cơ sở trong chương trình đào tạo sinh viên đại học kỹ thuật. Ở Liên Xô trước đây và Liên bang Nga hiện nay, tên môn học này được gọi là Cơ học lý thuyết. Ở Mỹ, CHLB Đức, Anh, Canada, Nhật Bản, Singapore, Thái Lan,... tên môn học này được gọi là Cơ học kỹ thuật (Tiếng Anh: Engineering Mechanics).

Ở nước ta trước năm 1990, tên môn học này là Cơ học lý thuyết. Từ năm 1990 trở lại đây, tên môn học này ở Trường Đại học Bách khoa Hà Nội được gọi là Cơ học, Cơ học lý thuyết hoặc Cơ học kỹ thuật, ở Trường Đại học Xây dựng được gọi là Cơ học cơ sở, ở Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh được gọi là Cơ học lý thuyết. Để phù hợp với chủ trương Đại học của Việt nam hội nhập với Đại học khu vực và Đại học thế giới của Bộ Giáo dục và Đào tạo, hiện nay một số trường đại học đã gọi tên môn học này là Cơ học kỹ thuật.

Nội dung của môn học Cơ học kỹ thuật gồm ba phần: Tĩnh học vật rắn; Động học vật rắn; Động lực học vật rắn. Cuốn Bài tập Cơ học kỹ thuật này được viết tương ứng với cuốn sách Cơ học kỹ thuật của GS. TSKH. Nguyễn Văn Khang (NXB Giáo dục Việt Nam năm 2009).

Để học tốt môn học này sinh viên cần phải làm các bài tập. Mỗi bài tập cơ học là một mô hình của một vấn đề kỹ thuật nào đó. Do đó người học vừa phải nắm vững kiến thức toán học và cơ học, vừa phải có tư duy về kỹ thuật tương đối tốt. Để giúp cho sinh viên dễ dàng hơn trong việc giải các bài tập, chúng tôi phân chia cuốn sách này thành hai phần: Phần một gồm các bài tập và đáp số, phần hai là các

lời giải và hướng dẫn giải. Cuốn sách có tổng cộng 435 bài tập được chia thành 20 chương. Hầu hết các bài tập đã có lời giải hoặc hướng dẫn giải. Tuy nhiên nếu chưa thực sự cần thiết, sinh viên không nên xem ngay phần lời giải.

Cuốn sách này không chỉ là tài liệu học tập cần thiết cho sinh viên của Trường Đại học Bách khoa Hà Nội mà còn là tài liệu học tập bổ ích cho sinh viên của tất cả các trường đại học trong toàn quốc.

Trong quá trình biên soạn sách không tránh khỏi các thiếu sót, các tác giả mong muốn nhận được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp và của các em sinh viên để có điều kiện sửa chữa, hoàn thiện hơn trong các lần tái bản sau. Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về địa chỉ: PGS. TS. Nguyễn Phong Điền, Bộ môn Cơ học ứng dụng, Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội hoặc theo địa chỉ E-mail: dien@mail.hut.edu.vn hoặc công ty CP sách Đại học – Dạy nghề, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

Hà Nội, ngày 10 tháng 6 năm 2010

Các tác giả

MỤC LỤC

Phần I. Tóm tắt lý thuyết và bài tập	7
Chương 1. Cân bằng của vật rắn phẳng	9
Chương 2. Cân bằng của vật rắn không gian	29
Chương 3. Cân bằng của vật rắn khi có ma sát	39
Chương 4. Trọng tâm vật rắn	51
Chương 5. Động học của điểm	59
Chương 6. Chuyển động cơ bản của vật rắn	65
Chương 7. Chuyển động tương đối của điểm	71
Chương 8. Chuyển động song phẳng của vật rắn	79
Chương 9. Động học vật rắn không gian	91
Chương 10. Động lực học chất điểm	107
Chương 11. Các đặc trưng hình học khối lượng	113
Chương 12. Cơ sở phương pháp động lượng	121
Chương 13. Cơ sở phương pháp năng lượng	137
Chương 14. Nguyên lý công ảo	149
Chương 15. Nguyên lý d'Alembert	157
Chương 16. Nguyên lý d'Alembert-Lagrange và phương trình Lagrange II	167
Chương 17. Động lực học vật rắn không gian	177
Chương 18. Va chạm giữa các vật rắn	189
Chương 19. Động lực học chuyển động tương đối	198
Chương 20. Dao động tuyến tính	206
Phần II. Hướng dẫn giải và lời giải	213
Chương 1	215
Chương 2	230
Chương 3	237
Chương 4	247
Chương 5	250
Chương 6	256

Chương I

CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Lực và ngẫu lực

Một lực được xác định bởi các yếu tố: Điểm đặt, hướng tác dụng và độ lớn (tính theo N hoặc kN).

Mômen đại số của lực đối với một tâm được xác định bởi:

$$\bar{m}_O(\vec{F}) = \pm Fd, \quad (1.1)$$

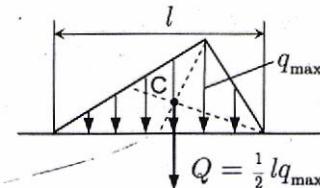
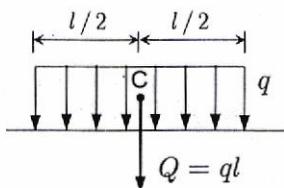
trong đó: ta quy ước dấu cộng nếu lực quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ, dấu trừ nếu lực quay quanh O thuận chiều kim đồng hồ.

Ngẫu lực là một hệ gồm hai lực song song, ngược chiều và có cùng độ lớn. Độ lớn của ngẫu lực được xác định bởi mômen đại số \bar{m} theo hệ thức:

$$\bar{m} = \pm Fd = \pm F'd, \quad (1.2)$$

trong đó: quy ước về dấu giống như trường hợp mômen đại số của lực.

Hệ lực phân bố được xác định bởi cường độ và quy luật phân bố của các lực thành phần. Hệ lực phân bố song song có hợp lực \vec{Q} đặt tại trọng tâm của diện tích phân bố. Hai hệ lực phân bố đơn giản nhất được biểu diễn trên hình sau.



Hệ lực phẳng

Hệ lực là tập hợp các lực tác dụng lên cùng một vật rắn. Hệ lực song song phẳng và hệ lực đồng quy phẳng là những trường hợp đặc biệt.

Véc-tơ chính \vec{R}' của hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ có dạng:

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (1.3)$$

Mô-men chính của hệ lực phẳng $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ đối với tâm O được xác định bởi:

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_k) \quad (1.4)$$

Định lý Varignon: Khi hệ lực phẳng có hợp lực, mô-men của hợp lực đối với một điểm O bất kỳ bằng tổng mô-men của các lực thành phần đối với điểm O.

$$\bar{m}_O(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_k) \text{ với } \vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n) \quad (1.5)$$

Định lý về thu gọn hệ lực: Thu gọn hệ lực phẳng về tâm O tùy ý ta được một lực và một ngẫu lực. Lực đặt tại O và được biểu diễn bởi véc-tơ chính của hệ lực. Ngẫu lực có mô-men đại số bằng mô-men chính của hệ lực đối với tâm O.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{R}'_O, \bar{M}_O) \quad (1.6)$$

Cân bằng của vật rắn phẳng tự do

Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn phẳng tự do:

$$\vec{R}' = 0 \text{ và } \bar{M}_O = 0 \quad (1.7)$$

Các phương trình cân bằng:

Dạng 1: $\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0.$ (1.8)

Dạng 2: $\sum_{k=1}^n F_{k\Delta} = 0, \sum_{k=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0.$ (1.9)

với Δ là trục bất kỳ không vuông góc với AB.

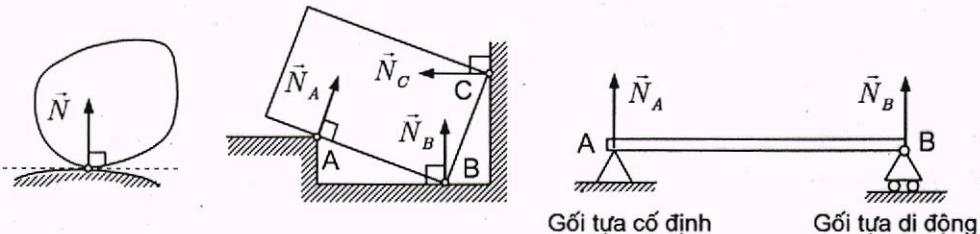
Dạng 3: $\sum_{k=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^n \bar{m}_C(\vec{F}_k) = 0.$ (1.10)

trong đó các điểm A, B, C không thẳng hàng.

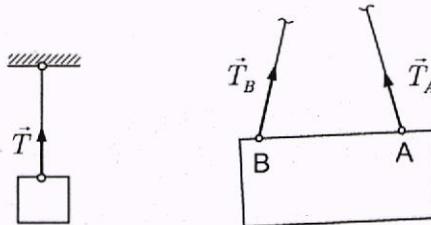
Vật rắn chịu tác dụng của hệ lực phẳng đặc biệt (đồng quy hoặc song song) có tối đa hai phương trình cân bằng độc lập.

Phản lực liên kết của một số liên kết phẳng

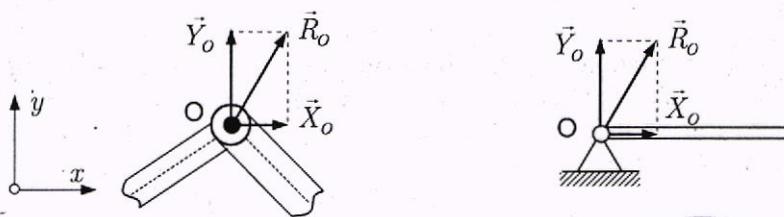
Liên kết tựa (không ma sát): Phản lực liên kết tựa có phương vuông góc với đường tựa (hoặc mặt tựa) và có chiều hướng về phía vật khảo sát.



Liên kết dây mềm (nhẹ và không giãn). Phản lực liên kết dây (sức căng dây) có phương dọc theo dây và có chiều hướng ra phía ngoài vật khảo sát.



Liên kết bản lề phẳng. Phản lực liên kết bản lề phẳng \vec{R}_o có phương, chiều và độ lớn chưa xác định. Trong các bài toán cân bằng của vật rắn phẳng, lực này thường được phân thành 2 thành phần vuông góc với nhau (có chiều chưa xác định).

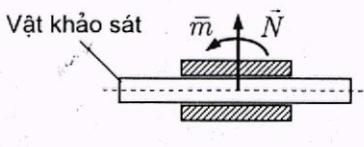


Liên kết thanh. Với giả thiết thanh có trọng lượng không đáng kể và chỉ chịu kéo nén, phản lực liên kết có phương nằm dọc theo đường nối giữa hai điểm liên kết và có chiều chưa xác định.

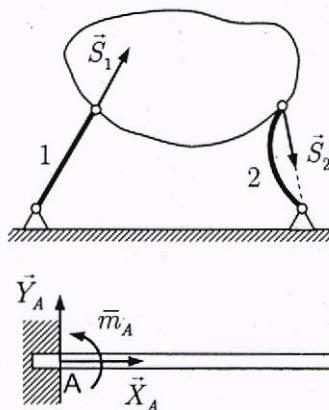
Liên kết ngầm phẳng. Phản lực liên kết được phân tích làm 3 thành phần: 2 thành phần lực vuông góc với nhau và 1 ngẫu lực (chiều của lực và ngẫu lực chưa xác định).

Liên kết rãnh trượt (máng trượt).

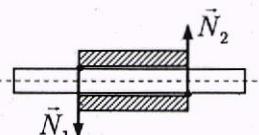
Nếu rãnh trượt có chiều dài đủ lớn, ta có thể phân tích phản lực liên kết theo hai quan điểm: quy về dạng ngầm hoặc quy về hai liên kết tựa ở hai đầu (xem hình vẽ). Chiều các thành phần lực và ngẫu lực chưa xác định.



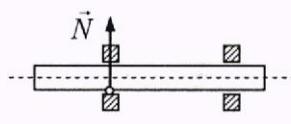
Quy về liên kết ngầm



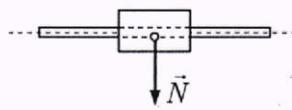
Quy về 2 liên kết tựa



Nếu rãnh trượt là ngắn, phản lực liên kết là một lực có phương vuông góc với đường trượt như hình vẽ và có chiều chưa xác định.

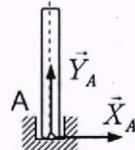


Rãnh trượt ngắn



Con trượt

Liên kết bản lề cối phẳng (ở chặn). Phản lực liên kết gồm hai thành phần vuông góc \vec{X}_A và \vec{Y}_A , trong đó thành phần \vec{Y}_A có phương vuông góc với mặt bị chặn.



II. BÀI TẬP

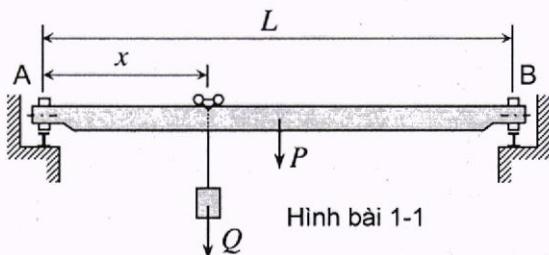
done

1-1. Cầu trục trọng lượng P có thể di chuyển được nhờ bánh xe A , B chạy trên hai thanh đường ray chữ I. Khoảng cách giữa hai bánh xe $AB = L$. Tời nâng đặt trên dầm của cầu trục và đang giữ vật nặng trọng lượng Q ở vị trí cách A một đoạn x . Tìm phản lực liên kết tại A và B .

Đáp số:

$$N_A = Q - \frac{Qx}{L} + \frac{P}{2};$$

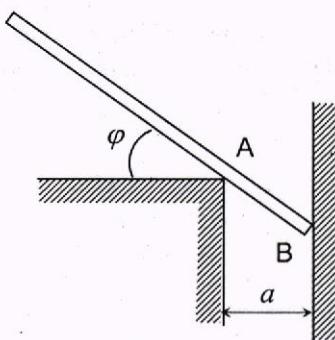
$$N_B = \frac{Qx}{L} + \frac{P}{2}.$$



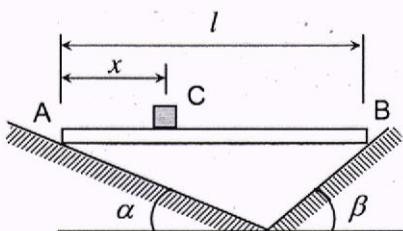
Hình bài 1-1

1-2. Một thanh thẳng đồng chất trọng lượng P chiều dài $4a$ tựa trên cạnh của một góc vuông tại A và tường nhẵn tại B . Tìm góc nghiêng φ khi thanh ở vị trí cân bằng. Xác định phản lực tại A và B khi đó.

Đáp số: $\cos \varphi = \sqrt[3]{0,5}$; $N_A = \frac{P}{\sqrt[3]{0,5}}$; $N_B = \frac{P}{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{1 - \sqrt[3]{0,25}}$.



Hình bài 1-2



Hình bài 1-3

1-3. Một thanh có chiều dài l và trọng lượng không đáng kể được đặt nằm ngang giữa hai mặt phẳng nghiêng nhau. Tại vị trí x trên thanh, người ta đặt một vật C mang trọng lượng P . Tìm x để thanh cân bằng ở vị trí nằm ngang. Xác định phản lực tại A và B khi đó.

$$\text{Đáp số: } x = l \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; N_A = P \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; N_B = P \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

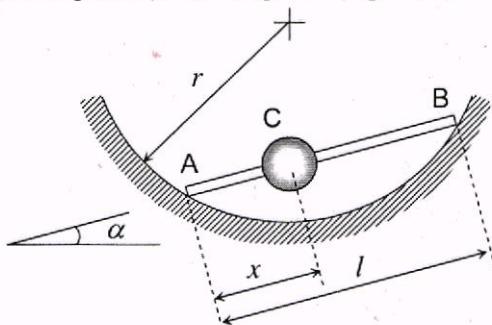
1-4. Một thanh có chiều dài $l = \sqrt{2}r$ và trọng lượng không đáng kể được đặt trên một chòm cầu nhẵn bán kính r . Trên thanh có gắn một vật nặng có trọng lượng P .

- a) Tìm vị trí của vật nặng (khoảng cách x) sao cho thanh cân bằng ở vị trí nghiêng với phương nằm ngang một góc $\alpha = 15^\circ$.
- b) Tìm phản lực tại A và B khi đó.

Đáp số:

$$a) x = \frac{l}{\sqrt{3} + 1};$$

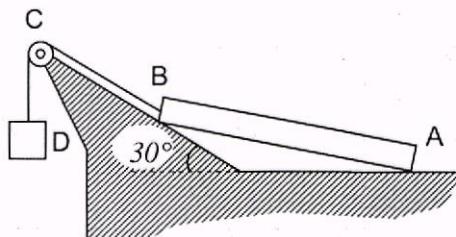
$$b) N_A = \frac{\sqrt{3}P}{2}; N_B = \frac{P}{2}.$$



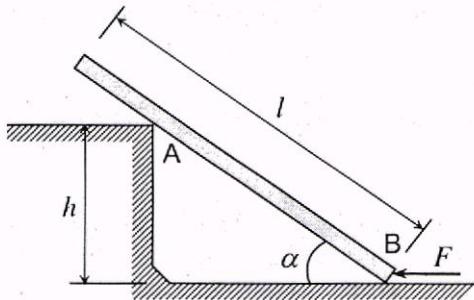
Hình bài 1-4

1-5. Thanh AB đồng chất, trọng lượng P đặt trên nền gấp khúc như hình vẽ. Một sợi dây vắt qua ròng rọc có một đầu nối với thanh tại B , đầu kia treo vật nặng D có trọng lượng Q đủ để giữ cho thanh đứng cân bằng. Cho biết đoạn dây BC song song với mặt nghiêng của nền. Tìm Q và phản lực tại A và B .

$$\text{Đáp số: } Q = \frac{P}{4}; N_A = \frac{P}{2}; N_B = \frac{\sqrt{3}P}{4}.$$



Hình bài 1-5



Hình bài 1-6

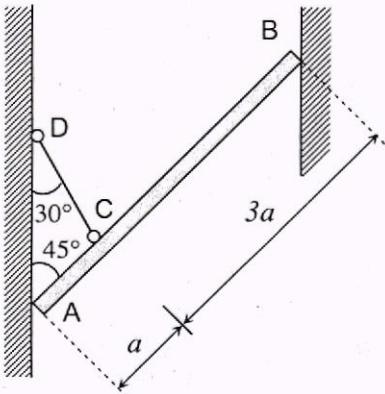
1-6. Một thanh đồng chất khối lượng m , chiều dài l đặt trên một bậc thang có độ cao h . Để giữ thanh cân bằng ở vị trí nghiêng với phương nằm ngang một góc α , người ta tác dụng vào điểm B trên thanh một lực F theo phương ngang. Tìm độ lớn của lực F , phản lực liên kết tại A và B . Bỏ qua ma sát trượt.

Đáp số:

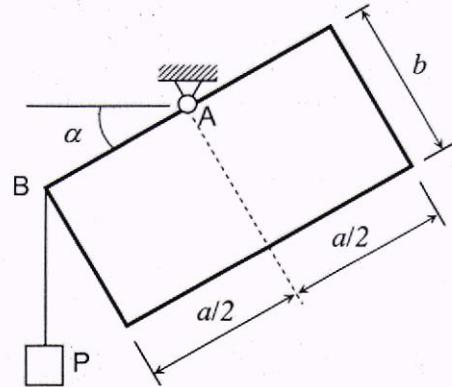
$$F = \frac{mgl \sin^2 \alpha \cos \alpha}{2h}; N_A = \frac{mgl \sin \alpha \cos \alpha}{2h}; N_B = mg \left(1 - \frac{l \sin \alpha \cos^2 \alpha}{2h}\right).$$

1-7. Một thanh đồng chất trọng lượng P được giữ tựa trên hai mặt tường nhẵn thẳng đứng nhờ dây CD tại vị trí như hình vẽ. Tìm phản lực tại A, B và sức căng của dây CD.

Đáp số: $N_A = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} P; N_B = \frac{3 - \sqrt{3}}{12} P; T = \frac{2\sqrt{3}}{3} P.$



Hình bài 1-7



Hình bài 1-8

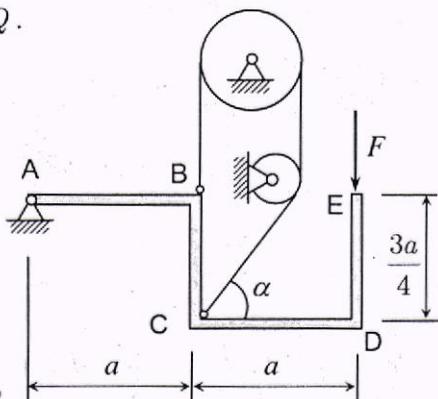
1-8. Một tấm đồng chất hình chữ nhật chiều dài a , chiều rộng b , trọng lượng Q được treo lên trần nhờ bản lề tại A. Tại điểm B trên tấm người ta buộc một sợi dây, đầu dây treo vật nặng trọng lượng P .

- Tìm quan hệ giữa a và b sao cho tấm cân bằng ở vị trí $\alpha = 30^\circ$.
- Tìm phản lực tại A khi tấm ở vị trí này.

Đáp số: a) $\frac{a}{b} = \frac{Q}{\sqrt{3}P}$; b) $X_A = 0; Y_A = P + Q$.

1-9. Một dầm gấp khúc ABCDE liên kết với nền thông qua bản lề tại A và được giữ bởi một sợi dây không giãn vắt qua ròng rọc, nối với dầm tại hai điểm B và C. Dầm chịu tác dụng một lực thẳng đứng F . Cho biết $\tan \alpha = 4/3$. Tìm phản lực tại A và sức căng của dây.

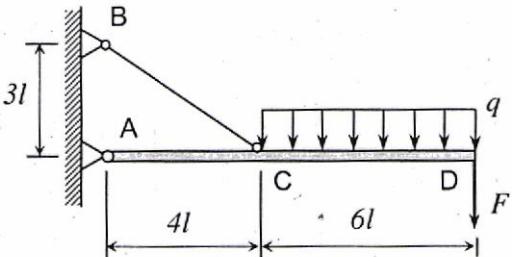
Đáp số: $X_A = -\frac{8}{15} F; Y_A = -\frac{3}{5} F; T = \frac{8}{9} F$.



Hình bài 1-9

1-10. Thanh AD được giữ nằm ngang nhờ bản lề A và dây BC . Thanh chịu tác dụng của một hệ lực phân bố đều có cường độ q và chịu một lực tập trung $F = 3ql$ theo phương thẳng đứng tại điểm D . Xác định phản lực tại A và sức căng của dây.

Đáp số: $X_A = 24ql$; $Y_A = -9ql$; $T = 30ql$.

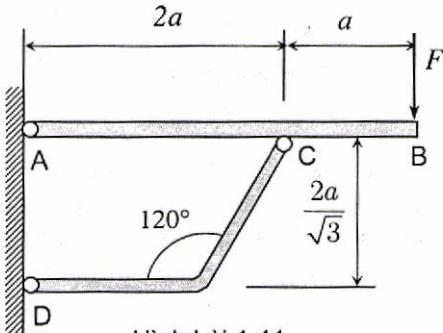


Hình bài 1-10

1-11. Thanh AB liên kết với tường nhờ bản lề A và được giữ nằm ngang nhờ thanh gấp khúc CD . Thanh chịu tác dụng một lực F thẳng đứng tại đầu B . Bỏ qua trọng lượng của các thanh.

Hãy xác định phương chiêu và độ lớn của phản lực liên kết tại A .

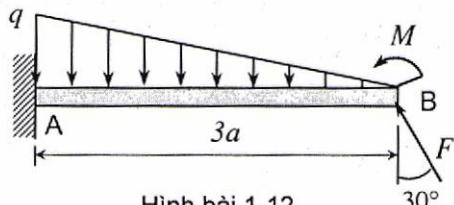
Đáp số: $X_A = \frac{-3\sqrt{3}F}{2}$; $Y_A = \frac{-F}{2}$.



Hình bài 1-11

1-12. Dầm AB chiều dài $3a$ được ngầm chặt vào tường tại A . Dầm chịu tác dụng của một hệ lực phân bố tam giác dọc theo chiều dài AB , lực tập trung F và một ngẫu lực M đặt tại B . Cho biết cường độ lực phân bố tại A là q , lực F nghiêng với phương thẳng đứng một góc 30° . Xác định phản lực tại A . Bỏ qua trọng lượng của dầm.

Đáp số: $X_A = \frac{F}{2}$; $Y_A = \frac{3aq}{2} - F \frac{\sqrt{3}}{2}$; $m_A = \frac{3a^2q}{2} - \frac{3\sqrt{3}Fa}{2} - M$.

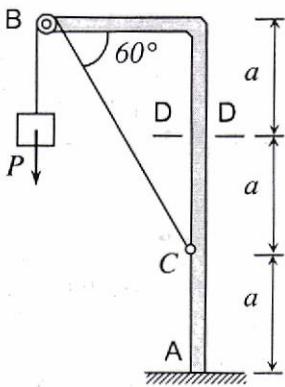


Hình bài 1-12

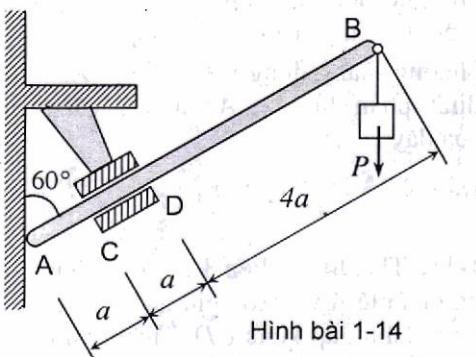
1-13. Một khung hình chữ L ngược được chôn chặt xuống nền tại A , đầu B lắp ròng rọc. Người ta vòng qua ròng rọc một sợi dây, một đầu treo vật nặng trọng lượng P , một đầu buộc với khung tại C . Tìm phản lực tại A và nội lực tại mặt cắt $D-D$ trên khung. Bỏ qua trọng lượng của khung.

Đáp số:

$X_A = 0$; $Y_A = P$; $m_A = \frac{2Pa}{\sqrt{3}}$; $X_D = \frac{P}{2}$; $Y_D = P \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $m_D = Pa \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$.



Hình bài 1-13



Hình bài 1-14

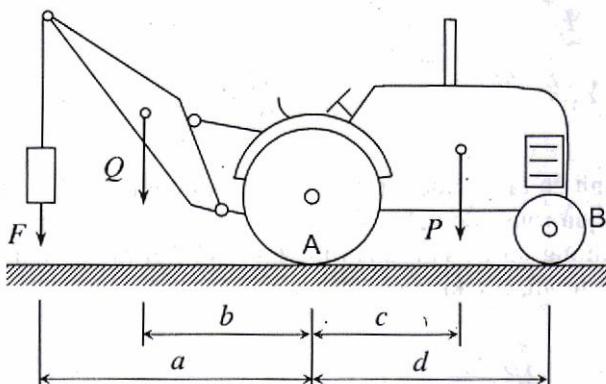
1-14. Thanh AB được lồng vào trụ CD ở vị trí nghiêng với phương thẳng đứng một góc 60° . Đầu A của thanh tựa vào tường, đầu B treo vật nặng trọng lượng P . Xác định phản lực tại A và phản lực từ trụ CD lên thanh (quy về hai liên kết tựa).

$$\text{Đáp số: } N_A = \frac{P}{\sqrt{3}}; \quad N_C = \frac{5P}{\sqrt{3}}; \quad N_D = \frac{7P}{\sqrt{3}}.$$

1-15. Một máy kéo có trọng lượng P , bộ phận bốc hàng có trọng lượng Q đang nâng một vật nặng trọng lượng F . Các kích thước cho trên như hình vẽ.

- Tìm điều kiện giữa P , Q và F để bánh B của máy kéo không bị nhắc khỏi mặt đất.
- Tìm phản lực liên kết tại điểm tiếp xúc A khi hệ ở trạng thái cân bằng.

$$\text{Đáp số: a) } F \leq \frac{cP - bQ}{a}; \quad \text{b) } N_A = \frac{(a+d)F + (b+d)Q + (d-c)P}{d}.$$



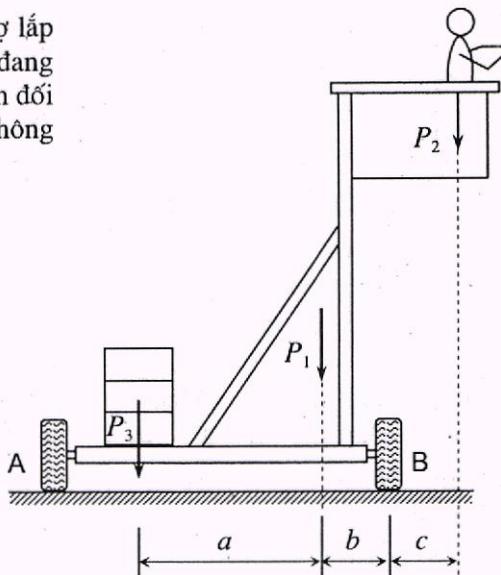
Hình bài 1-15

1-16. Một xe nâng người dùng để hỗ trợ lắp đặt thiết bị trên cao có trọng lượng P_1 đang nâng một người trọng lượng P_2 . Xác định đối trọng P_3 được đặt ở trên xe sao cho xe không bị lật.

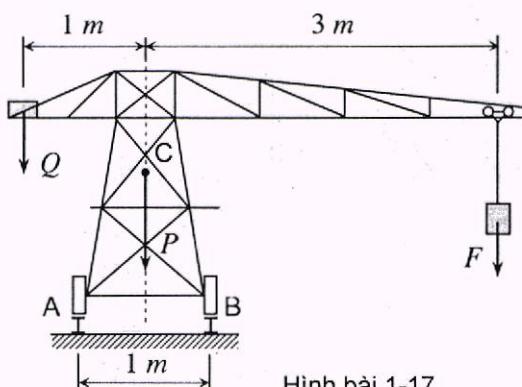
$$\text{Đáp số: } P_3 \geq \frac{cP_2 - bP_1}{a + b}.$$

1-17. Cân trục trọng lượng P di chuyển được nhờ bánh xe A, B chạy trên hai đường ray. Trọng tâm cân trục nằm trên đường trung trực của AB . Vật cần nâng có trọng lượng F . Một đối trọng được đặt tại phía đối diện với vật nâng. Các kích thước cho trên hình vẽ. Xác định trọng lượng Q của đối trọng để cân trục không bị lật.

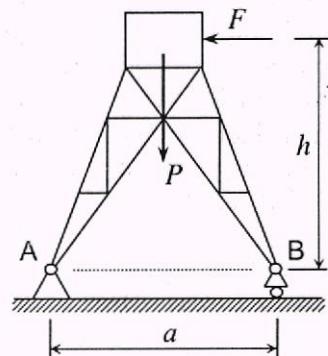
$$\text{Đáp số: } \frac{5F - P}{3} \leq Q \leq P.$$



Hình bài 1-16



Hình bài 1-17



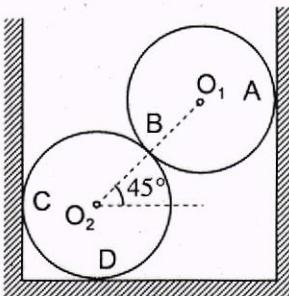
Hình bài 1-18

1-18. Bể nước trọng lượng P được đặt trên hai chân tháp. Tại A là gối cố định, tại B là gối di động. Ở tầm cao h có lực tác dụng của gió F nằm ngang. Tìm khoảng cách a giữa hai chân tháp để tháp không bị lật.

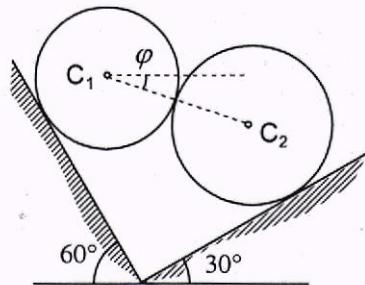
$$\text{Đáp số: } a \geq \frac{2Fh}{P}.$$

1-19. Trong một hộp có hai trụ đồng chất cùng bán kính R , cùng trọng lượng P nằm chồng lên nhau như hình vẽ (đường nối hai tâm trụ nghiêng với đường nằm ngang một góc 45°). Tìm các phản lực của hộp tác dụng lên các trụ và lực tương hỗ giữa hai trụ khi cân bằng.

$$\text{Đáp số: } N_A = P; N_B = \sqrt{2}P; N_C = P; N_D = 2P.$$



Hình bài 1-19



Hình bài 1-20

- 1-20.** Hai khối trụ đồng chất tâm C_1 và C_2 nằm chong lên nhau trong một góc vuông như hình vẽ. Trọng lượng của hai trụ lần lượt là $P_1 = 10 \text{ N}$, $P_2 = 30 \text{ N}$. Tìm góc nghiêng φ của đoạn nối hai tâm C_1C_2 và lực tương hỗ giữa hai trụ khi hệ cân bằng.

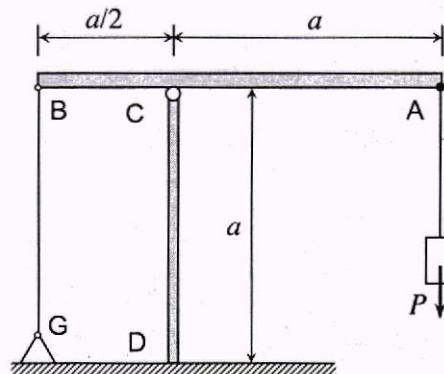
Đáp số: $\varphi = 0^\circ$; $N = 10\sqrt{3} \text{ N}$.

- 1-21.** Một côn trục gồm côn AB gắn với tháp CD thông qua khớp bản lề tại C . Chân tháp được giữ cố định với nền để tháp luôn thẳng đứng. Côn AB được giữ nằm ngang nhờ dây BG . Giả thiết AB và CD được xem là vật đồng chất có trọng lượng trên một đơn vị chiều dài là ρ . Tìm phản lực tại C , D và sức căng của dây khi côn trục đang giữ vật có trọng lượng P ở trên cao.

Đáp số:

$$X_C = 0; Y_C = 3P + \frac{9}{4}\rho a; S = 2P + \frac{3}{4}\rho a$$

$$X_D = 0; Y_D = 3P - \frac{13}{4}\rho a; m_D = 0.$$

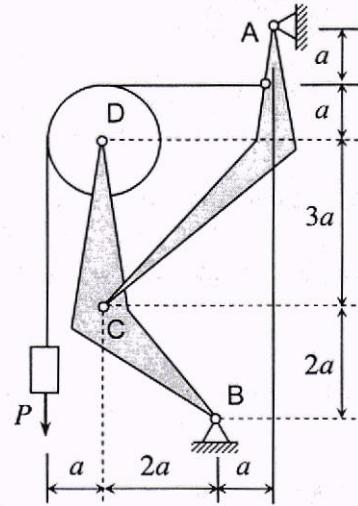


Hình bài 1-21

- 1-22.** Cho cơ cấu gồm hai thanh dầm gấp khúc AC , BD và ròng rọc D liên kết với nhau thông qua các khớp bản lề như hình vẽ. Một sợi dây vắt qua ròng rọc, một đầu treo vật nặng trọng lượng P , một đầu nối với dầm AC . Tìm phản lực tại A , B và C .

Đáp số: $X_A = \frac{5P}{16}$; $Y_A = \frac{-13P}{16}$; $X_B = \frac{-5P}{16}$;

$$Y_B = \frac{29P}{16}; X_C = \frac{11P}{16}; Y_C = \frac{13P}{16}.$$

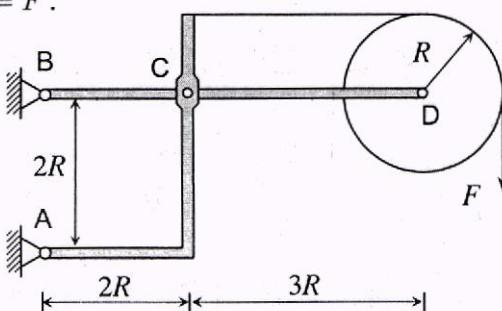


Hình bài 1-22

1-23. Tìm lực liên kết tại các khớp cho cơ cấu như hình vẽ.

Đáp số:

$$X_A = 3F; Y_A = 2,5F; X_B = -3F; Y_B = -1,5F; X_C = 4F; Y_C = 2,5F; \\ X_D = F; Y_D = F.$$

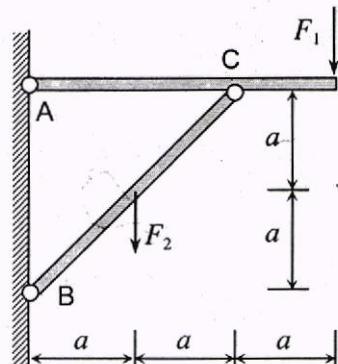


Hình bài 1-23

1-24. Cho hệ gồm 2 thanh liên kết với nhau và với tường thông qua các khớp bản lề như hình vẽ, đồng thời hệ chịu tác dụng của hai lực $F_1 = F$ và $F_2 = 2F$. Tìm phản lực tại A, B và C.

Đáp số:

$$X_A = \frac{-5F}{2}; Y_A = \frac{-F}{2}; X_B = \frac{5F}{2}; Y_B = \frac{7F}{2}; \\ X_C = \frac{5F}{2}; Y_C = \frac{3F}{2}.$$

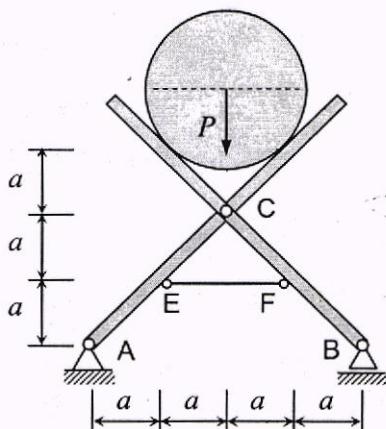


Hình bài 1-24

1-25. Hai thanh dầm liên kết với nền thông qua bản lề tại A, gối tựa di động tại B, đồng thời liên kết với nhau nhờ bản lề tại C. Ngoài ra, hai dầm được giữ với nhau bằng dây EF. Trên hai dầm đặt một thùng bia có trọng lượng P. Tìm phản lực tại các điểm A, B, C và sức cung của dây. Bỏ qua trọng lượng của cả hai dầm.

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = N_B = \frac{P}{2}; \\ X_C = \frac{5}{2}P; Y_C = 0; T = 2P.$$



Hình bài 1-25

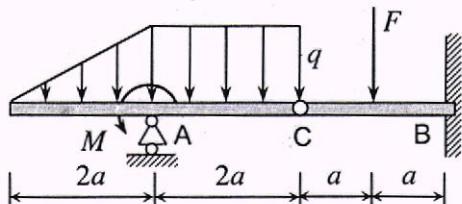
1-26. Hệ hai dầm nối với nhau bằng khớp bản lề tại C, bị ngầm tại B và được đỡ bởi gối tựa di động tại A. Hệ chịu tác dụng của các lực và ngẫu lực như trên hình vẽ. Tìm phản lực tại A, B và C.

$$\text{Đáp số: } N_A = \frac{7qa}{3} + \frac{M}{2a};$$

$$X_B = 0; Y_B = \frac{2qa}{3} - \frac{M}{2a} + F;$$

$$m_B = \frac{-4qa^2}{3} + M - aF;$$

$$X_C = 0; Y_C = \frac{-2qa}{3} + \frac{M}{2a}.$$

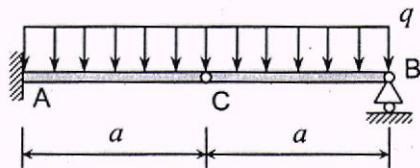


Hình bài 1-26

1-27. Hệ hai dầm liên kết với nhau nhờ bản lề tại C, bị ngầm tại A và được đỡ bởi gối tựa di động tại B. Hệ chịu tác dụng của lực phân bố đều có cường độ q . Tìm phản lực tại A, B và C.

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = 1,5qa; m_A = -qa^2; N_B = 0,5qa; X_C = 0; Y_C = 0,5qa.$$



Hình bài 1-27

1-28. Cầu gồm dầm AB trọng lượng P nối với dầm BC trọng lượng Q nhờ bản lề B và chịu liên kết như hình vẽ. Từ giữa dầm cầu AB đến cuối dầm cầu BC có một đoàn tàu đang đỡ, trọng lượng xem như phân bố đều với cường độ q . Xác định phản lực các gối A, C, D và lực tác dụng tương hỗ tại B.

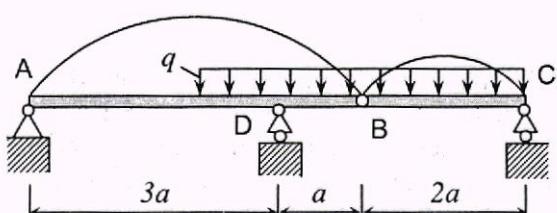
Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = \frac{2P - Q - 2aq}{6};$$

$$X_B = 0; Y_B = \frac{Q + 2aq}{2}$$

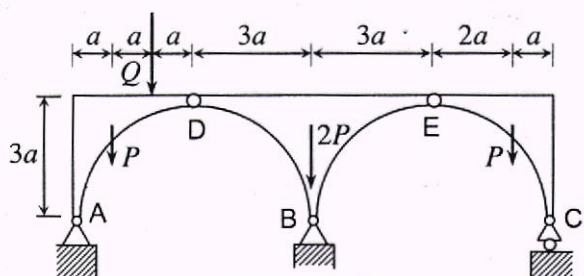
$$N_C = \frac{Q + 2aq}{2};$$

$$N_D = \frac{2P + 2Q + 10aq}{3}.$$



Hình bài 1-28

1-29. Cho mô hình cầu có kết cấu và chịu lực như hình vẽ. Hãy xác định phản lực tại gối A, B và C theo các trị số các lực P , Q .



Hình bài 1-29

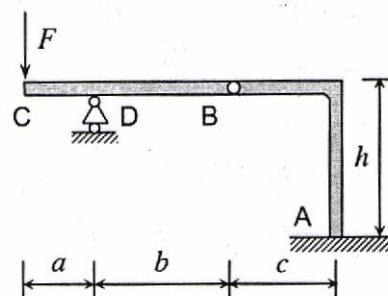
Đáp số: $X_A = \frac{Q}{3}$; $Y_A = \frac{2(P+Q)}{3}$; $X_B = -\frac{Q}{3}$; $Y_B = \frac{Q+8P}{3}$; $N_C = \frac{2P}{3}$.

1-30. Một hệ khung gồm hai dầm thép AB và BC nối với nhau bằng khớp bản lề tại B . Hệ khung bị ngầm tại A , được đỡ bởi gối tựa di động tại D và chịu tác dụng của lực F theo phương thẳng đứng tại C . Tìm phản lực tại A , B và D .

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = -\frac{a}{b}F; m_A = \frac{ac}{b}F;$$

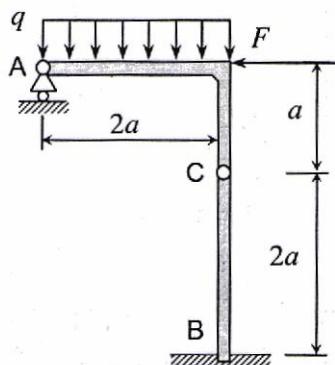
$$X_B = 0; Y_B = \frac{a}{b}F; N_D = \frac{a+b}{b}F.$$



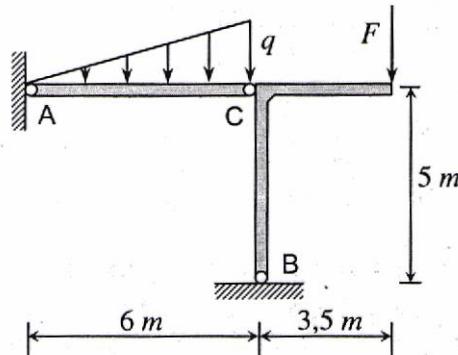
Hình bài 1-30

1-31. Hệ khung dầm chịu lực gồm hai dầm AC và CB liên kết với nhau và với nền như hình vẽ. Dầm AC chịu tác dụng của hệ lực phân bố cường độ q và lực tập trung $F = 4qa$. Tìm phản lực tại A , B và C .

Đáp số: $N_A = 3qa$; $X_B = 4qa$; $Y_B = -qa$; $m_B = -8qa^2$; $X_C = 4qa$; $Y_C = -qa$.



Hình bài 1-31



Hình bài 1-32

1-32. Cho hệ khung gồm hai dầm liên kết với nhau, liên kết với tường và nền thông qua các khớp bản lề tại C , A và B . Hệ chịu tác dụng của một hệ lực phân bố tam giác có cường độ lớn nhất $q = 4,5 \text{ kN/m}$ và một lực tập trung $F = 2 \text{ kN}$ tại vị trí biểu diễn trên hình vẽ. Tìm phản lực tại A , B và C .

Đáp số:

$$X_A = -1,4 \text{ kN}; Y_A = 4,5 \text{ kN}; X_B = 1,4 \text{ kN}; Y_B = 11 \text{ kN};$$

$$X_C = 1,4 \text{ kN}; Y_C = 9 \text{ kN}.$$

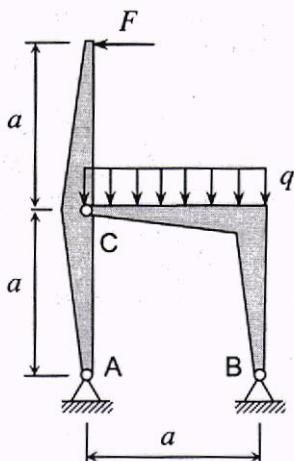
1-33. Cho hệ gồm 2 khung có trọng lượng không đáng kể liên kết với nhau bằng khớp bản lề tại C và liên kết với nền thông qua các gối cố định A, B. Hệ chịu tác dụng của các ngoại lực như hình vẽ. Tìm phản lực liên kết tại A, B và C.

Đáp số:

$$X_A = -F; Y_A = 2F + \frac{qa}{2};$$

$$X_B = 2F; Y_B = -2F + \frac{qa}{2};$$

$$X_C = -2F; Y_C = 2F + \frac{qa}{2}.$$



Hình bài 1-33

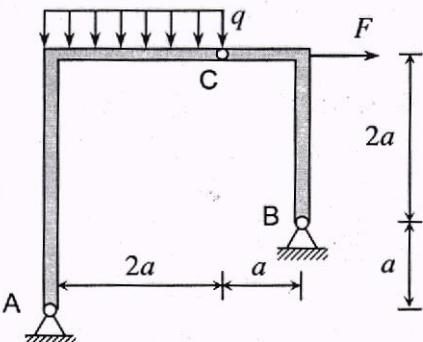
1-34. Cho hệ gồm 2 khung liên kết với nhau bằng khớp bản lề tại C và liên kết với nền thông qua các gối cố định A, B. Hệ chịu tác dụng của các ngoại lực như hình vẽ. Cho biết $qa = 3F$. Tìm phản lực liên kết tại A, B và C.

Đáp số:

$$X_A = \frac{2F}{7}; Y_A = \frac{24F}{7};$$

$$X_B = \frac{-9F}{7}; Y_B = \frac{18F}{7};$$

$$X_C = \frac{2F}{7}; Y_C = \frac{-18F}{7}.$$



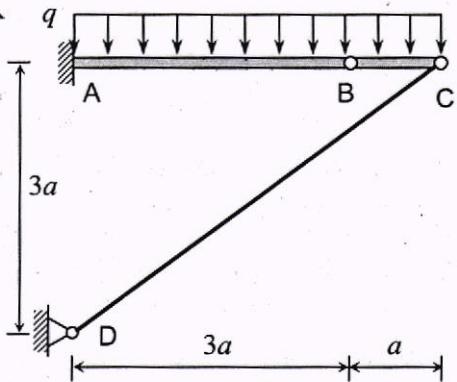
Hình bài 1-34

1-35. Tìm lực liên kết tại các điểm A và C cho hệ chịu lực như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng của các dầm AB, CB và của thanh CD.

Đáp số:

$$X_A = -\frac{2qa}{3}; Y_A = \frac{7qa}{2}; m_A = 6qa^2;$$

$$S_{CD} = \frac{5}{6}qa.$$



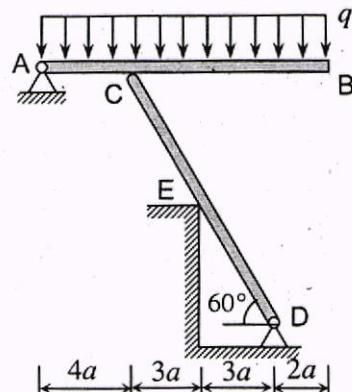
Hình bài 1-35

1-36. Thanh AB nằm ngang liên kết với nền tại A , tựa trên đầu thanh CD tại C và chịu lực phân bố đều cường độ q dọc theo chiều dài. Thanh CD dựa vào một góc vuông ở vị trí nghiêng với phương ngang góc 60° , đầu thanh liên kết với nền tại D . Bỏ qua trọng lượng của hai thanh. Tìm phản lực liên kết tại A, C, D và E .

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = -6aq; N_C = 18aq;$$

$$X_D = -9\sqrt{3}aq; Y_D = 9aq; N_E = 18aq.$$



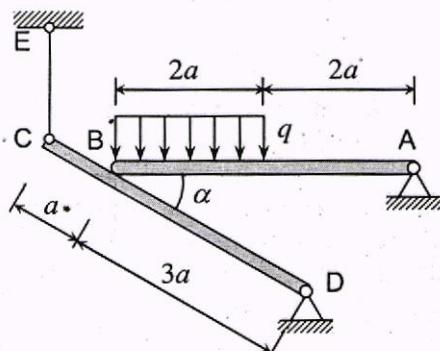
Hình bài 1-36

1-37. Thanh AB nằm ngang chịu liên kết với nền tại bản lề A , đầu B đặt tựa trên thanh CD và chịu lực phân bố cường độ q như hình vẽ. Dây CE có vị trí thẳng đứng. Góc nghiêng của thanh CD so với phương ngang là α . Tìm phản lực tại A, B, C và D . Bỏ qua trọng lượng 2 thanh.

Đáp số:

$$X_A = \frac{-3aq}{2} \operatorname{tg}\alpha; Y_A = \frac{aq}{2}; N_B = \frac{3aq}{2\cos\alpha};$$

$$T_C = \frac{9aq}{8\cos^2\alpha}; X_D = \frac{3aq}{2} \operatorname{tg}\alpha; Y_D = \frac{3aq}{2} - \frac{9aq}{8\cos^2\alpha}.$$



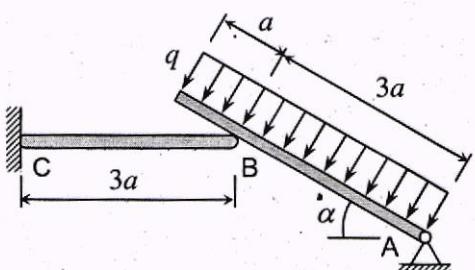
Hình bài 1-37

1-38. Thanh AB dựa nghiêng vào thanh BC tại điểm B và chịu lực phân bố đều cường độ q trên toàn bộ chiều dài. Thanh CB được giữ nằm ngang nhờ ngàm tại C . Cho biết kích thước và vị trí các thanh như trên hình vẽ. Tìm phản lực tại A, B và C .

Đáp số:

$$X_A = \frac{4aq \sin \alpha}{3}; Y_A = \frac{4aq \cos \alpha}{3}; N_B = \frac{8aq}{3};$$

$$X_C = \frac{8aq \sin \alpha}{3}; Y_C = \frac{8aq \cos \alpha}{3}; m_C = 8a^2 q \cos \alpha.$$

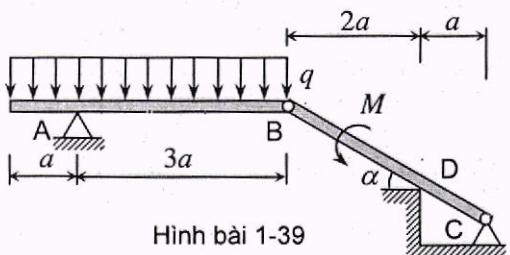


Hình bài 1-38

1-39. Cho hệ hai thanh chịu liên kết như hình vẽ. Thanh BC được đặt nghiêng so với phương nằm ngang một góc α và chịu tác dụng của một ngẫu lực có mômen M . Thanh AB được đỡ nằm ngang trên gối tựa tại A và chịu lực phân bố đều cường độ q trên toàn bộ chiều dài thanh. Bỏ qua trọng lượng các thanh. Tìm phản lực tại A, B, C và D .

$$\text{Đáp số: } X_B = 0; Y_B = \frac{4aq}{3}; X_C = -\left(\frac{M}{a} + 4aq\right) \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$Y_C = \frac{4aq}{3} - \left(\frac{M}{a} + 4aq\right) \cos^2 \alpha; N_D = \left(\frac{M}{a} + 4aq\right) \cos \alpha.$$

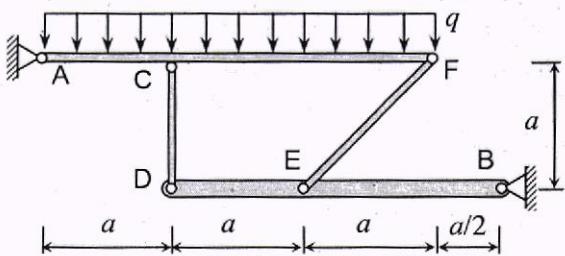


Hình bài 1-39

1-40. Cho cơ hệ gồm 4 thanh liên kết với nhau và với tường bằng các bản lề như hình vẽ. Thanh AF chịu tác dụng của hệ lực phân bố đều dọc theo chiều dài với cường độ lực phân bố q . Bỏ qua trọng lượng của các thanh. Xác định phản lực liên kết tại A, B và ứng lực trong hai thanh CD, EF

Đáp số:

$$X_A = -\frac{15aq}{8}; Y_A = \frac{9aq}{4}; X_B = \frac{15aq}{8}; Y_B = \frac{3aq}{4}; S_{CD} = \frac{9aq}{8}; S_{EF} = -\frac{15\sqrt{2}aq}{8}.$$



Hình bài 1-40

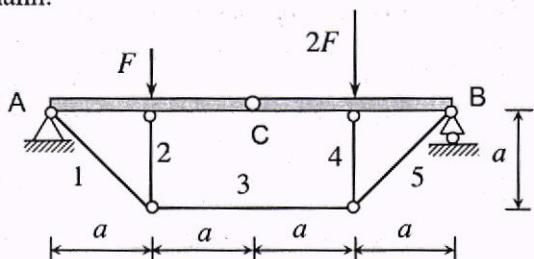
1-41. Cho hệ dầm - thanh chịu tác dụng của các ngoại lực như hình vẽ. Tim lực liên kết tại A, B, C và ứng lực trong các thanh.

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = \frac{5F}{4}; N_B = \frac{7F}{4};$$

$$X_C = \frac{3F}{2}; Y_C = \frac{F}{4}; S_1 = S_5 = \frac{3F}{\sqrt{2}};$$

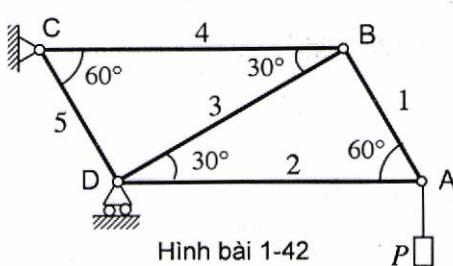
$$S_2 = -S_3 = S_4 = \frac{-3F}{2}.$$



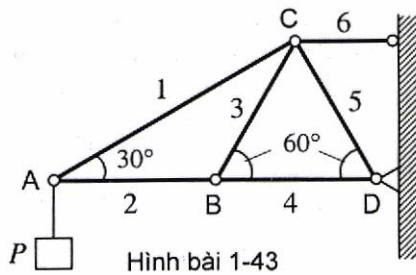
Hình bài 1-41

1-42. Vật nặng trọng lượng P được treo vào nút A của hệ khung gồm 5 thanh nối với nhau như hình vẽ. Tim ứng lực các thanh.

Đáp số: $S_1 = \frac{2P}{\sqrt{3}}$; $S_2 = \frac{-P}{\sqrt{3}}$; $S_3 = -2P$; $S_4 = \frac{4P}{\sqrt{3}}$; $S_5 = \frac{-8P}{3}$.



Hình bài 1-42



Hình bài 1-43

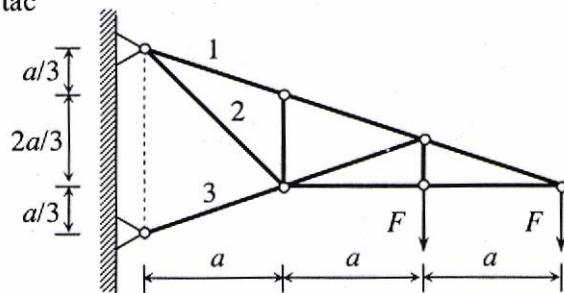
1-43. Tại nút A của hệ khung gồm 6 thanh có treo vật nặng trọng lượng P . Tìm ứng lực các thanh.

Đáp số: $S_1 = 2P$; $S_2 = -\sqrt{3}P$; $S_3 = 0$; $S_4 = -\sqrt{3}P$; $S_5 = \frac{-2P}{\sqrt{3}}$; $S_6 = \frac{4P}{\sqrt{3}}$.

1-44. Tìm ứng lực các thanh 1, 2, 3 cho mô hình hệ dàn thanh chịu lực tác dụng như hình vẽ.

Đáp số:

$$S_1 = \frac{3\sqrt{10}F}{2}; S_2 = \frac{-3\sqrt{2}F}{4}; \\ S_3 = \frac{-5\sqrt{10}F}{4}.$$

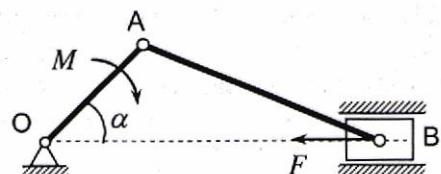


Hình bài 1-44

1-45. Cơ cấu của động cơ đốt trong có chiều dài tay quay $OA = r$, chiều dài thanh truyền $AB = l$. Pít-tông B chịu tổng áp lực hơi là F . Tìm momen M tác dụng lên tay quay để hệ cân bằng trong trường hợp tay quay nghiêng với phương ngang một góc α .

Đáp số:

$$M = Fr \sin \alpha \left[1 + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{(l/r)^2 - \sin^2 \alpha}} \right].$$



Hình bài 1-45

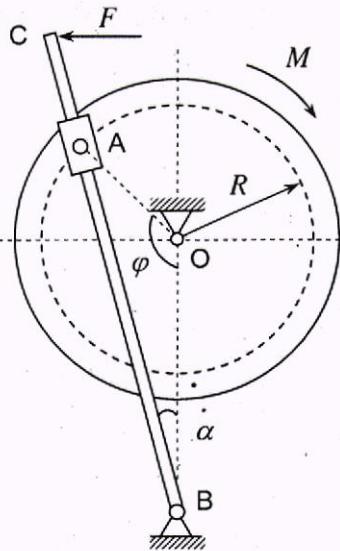
1-46. Cơ cấu culít của máy bào ngang gồm một bánh răng có thể chuyển động quay quanh tâm O , trên đó có lắp con trượt A cách tâm O một đoạn $OA = R$. Khi bánh răng chuyển động, con trượt A chuyển động dọc trên culít BC và làm cho culít

chuyển động lắc qua lại quanh vị trí thẳng đứng. Bánh răng chịu tác dụng của mômen M , còn culit chịu tác dụng của lực ngang F đặt tại C . Cho biết chiều dài $BC = l$. Hệ cân bằng tại vị trí ứng với các góc α và φ như hình vẽ. Bỏ qua ma sát và trọng lượng của các vật.

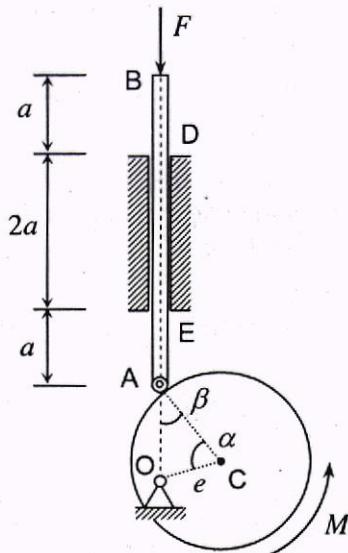
- Tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu tại vị trí đang khảo sát.
- Tìm phản lực liên kết tại B .

Đáp số: a) $M = \frac{-Fl \sin 2\alpha \cos(\varphi + \alpha)}{2 \sin \varphi}$;

b) $X_B = F \left[1 - \frac{l \sin \alpha \cos^2 \alpha}{R \sin \varphi} \right]$; $Y_B = -\frac{Fl \sin^2 \alpha \cos \alpha}{R \sin \varphi}$.



Hình bài 1-46



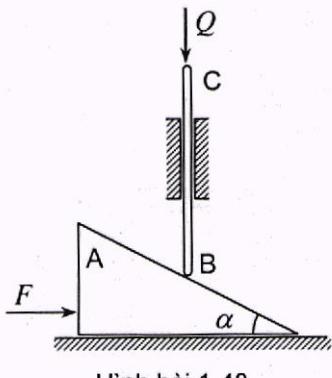
Hình bài 1-47

1-47. Một cam đĩa lệch tâm quay quanh tâm O dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M làm cho cần đẩy AB chuyển động dọc theo phương thẳng đứng. Khi hệ cân bằng tại vị trí ứng với các góc α và β như hình vẽ, tìm lực F và các phản lực liên kết tác dụng lên cần đẩy AB . Cho biết độ lệch tâm $OC = e$.

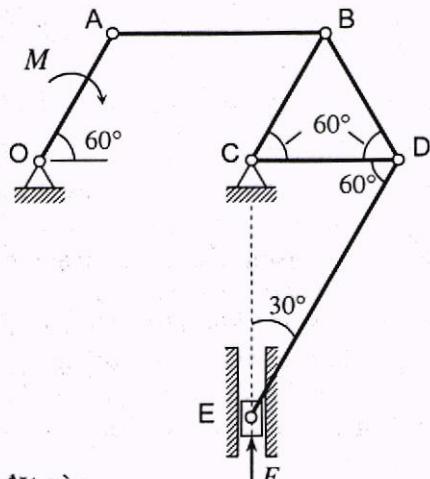
Đáp số: $F = \frac{M \cos \beta}{e \sin \alpha}$; $N_A = \frac{M}{e \sin \alpha}$; $N_E = \frac{3M \sin \beta}{2e \sin \alpha}$; $N_D = \frac{M \sin \beta}{2e \sin \alpha}$.

1-48. Cam A là khối lăng trụ thiết diện tam giác vuông trượt được theo mặt phẳng nhẵn nằm ngang dưới tác dụng của lực F đẩy cần BC trượt thẳng đứng lên phía trên. Biết góc nghiêng của mặt cam là α . Tìm lực Q phải đặt vào cần trượt BC để hệ có cân bằng.

Đáp số: $Q = F \cot \alpha$.



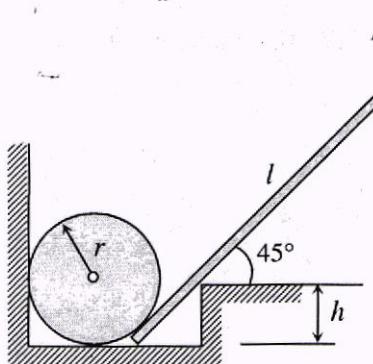
Hình bài 1-48



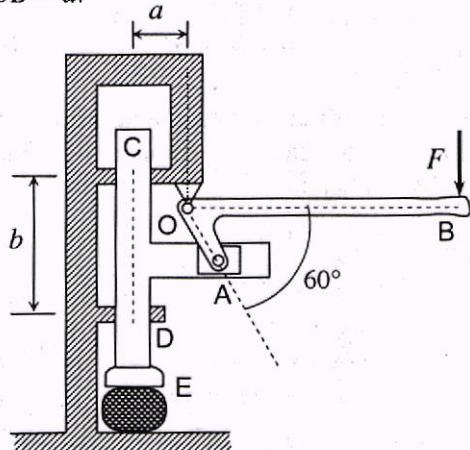
Hình bài 1-49

1-49. Cho cơ cấu như hình vẽ. Ngẫu lực M đặt vào tay quay OA truyền qua thanh AB , qua khung tam giác BCD , qua thanh DE đến Pit-tông E . Tìm lực F đặt tại pit-tông để hệ cân bằng. Biết $OA = CB = a$.

$$\text{Đáp số: } F = \frac{M}{a}.$$



Hình bài 1-50



Hình bài 1-51

1-50. Tay đòn chiều dài l tựa trên góc của một bậc thang có độ cao $h = r$. Để bẩy con lăn bán kính r , trọng lượng P lên cao, ta tác dụng vào đầu tay đòn một lực F theo phương thẳng đứng. Giả thiết trọng lượng tay đòn không đáng kể và bỏ qua ma sát trượt. Hãy tìm: a) Lực tác dụng của con lăn lên nền nằm ngang, b) Trị số của lực F để con lăn có thể nháy lên khỏi mặt nền ngang.

$$\text{Đáp số: a) } N = P - \frac{l}{2r} F; \text{ b) } F \geq \frac{2r}{l} P.$$

1-51. Cho cơ cấu máy ép như hình vẽ. Để ép vật, người ta tác dụng lực F vuông góc với tay đòn OB làm cho chày ép CD trượt dọc trên hai rãnh trượt C, D và ép xuống vật tại E . Cho biết khoảng cách từ đường tâm trực CD đến điểm O là a , khoảng

cách $CD = b$, $OA = e$, $OB = l$. Tại vị trí cân bằng tay đòn OB nằm ngang. Tìm phản lực tại A , C , D và E .

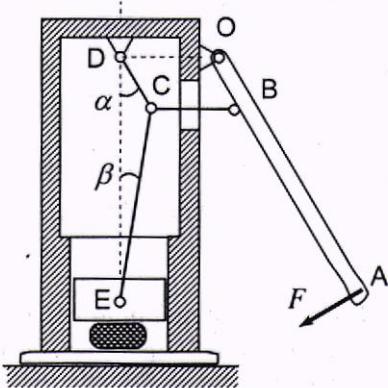
$$\text{Đáp số: } N_A = N_E = \frac{2Pl}{e}; N_C = -N_D = \frac{-Pl(2a + e)}{eb}.$$

1-52. Cho mô hình cơ cấu máy ép tay như hình vẽ. Lực F tác dụng vào đầu tay đòn OA sẽ truyền qua hệ các thanh CB , CD và CE đẩy đầu ép xuống dưới ép vào vật. Cho biết $OA = a$, $OB = b$, CB nằm ngang, $CD // OA$. Tìm lực ép xuống vật và ứng lực trong các thanh tại vị trí cân bằng của hệ ứng với các góc α và β .

Đáp số:

$$N_E = \frac{Fa \cos \beta}{b \sin(\alpha + \beta)}; S_{CB} = \frac{Fa}{b \cos \alpha};$$

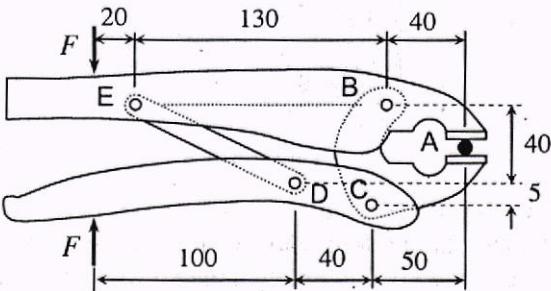
$$S_{CD} = \frac{Fa \cos \beta}{b \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}; S_{CE} = \frac{Fa}{b \sin(\alpha + \beta)}.$$



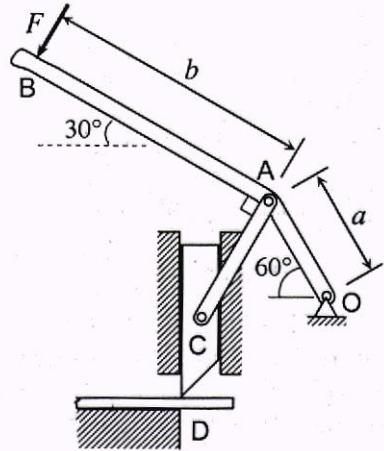
Hình bài 1-52

1-53. Một chiếc kìm có cấu tạo và kích thước tiêu chuẩn tính theo mm như hình vẽ. Tác dụng lên cán kìm hai lực ngược chiều nhau có cùng độ lớn F . Tìm lực tác dụng lên vật bị kẹp tại A.

$$\text{Đáp số: } N_A = \frac{137}{12} F.$$



Hình bài 1-53



Hình bài 1-54

1-54. Máy cắt kim loại có mô hình như hình vẽ. Lực F đặt vào tay đòn OAB truyền lực qua thanh AC xuống dao cắt làm dao trượt thẳng đứng trên rãnh trượt và cắt xuống tấm vật liệu. Tìm lực cắt tại đầu mũi dao.

$$\text{Đáp số: } N_D = \frac{F(\sqrt{3}a + 2b)}{2a}.$$

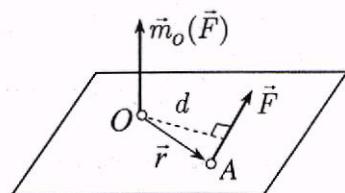
Chương 2

CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHÔNG GIAN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Mômen của lực đối với một điểm và một trục

Véc-tơ mô-men $\vec{m}_o(\vec{F})$ của lực \vec{F} đối với điểm O có phương vuông góc với mặt phẳng chứa điểm O và lực \vec{F} , có chiều sao cho nhìn từ đầu mút của véc-tơ xuống mặt phẳng này ta thấy lực \vec{F} quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ, có trị số bằng Fd .

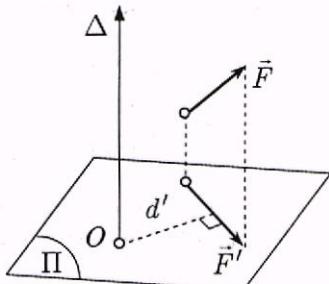


Ta có công thức tính véc-tơ mô-men dưới dạng:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.1)$$

Mô-men của lực đối với một trục. Mô-men của lực \vec{F} đối với trục Δ là mô-men đại số của lực \vec{F}' đối với điểm O

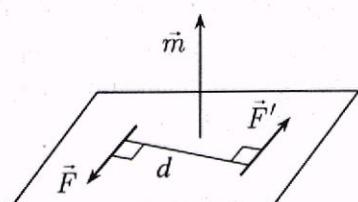
$$\bar{m}_\Delta(\vec{F}) = \bar{m}_o(\vec{F}') = \pm F'd', \quad (2.2)$$



trong đó: \vec{F}' là véc-tơ hình chiếu của lực \vec{F} lên mặt phẳng Π vuông góc với trục Δ , O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng Π , d' là khoảng cách từ O đến \vec{F}' . Khi $\vec{F} \parallel \Delta$ hoặc khi \vec{F} cắt trục Δ thì $\bar{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$.

Véc-tơ mô-men của ngẫu lực

Mô-men của ngẫu lực $\vec{m}(\vec{F}, \vec{F}')$ (hoặc \vec{m}) có phương vuông góc với mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực, có chiều sao cho nhìn từ đầu mút véc-tơ xuống mặt phẳng ngẫu lực thấy chiều quay ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ, trị số $|\vec{m}| = Fd$.



Thu gọn hệ lực không gian về một tâm

Véc-tơ chính \vec{R}' của hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ có dạng:

$$\vec{R}' = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (2.3)$$

Véc-tơ mô-men chính \vec{M}_O của hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ đối với tâm O được xác định bởi:

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k) \quad (2.4)$$

Các hình chiếu của véc-tơ mô-men chính lên các trục của một hệ tọa độ Decartes:

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_k), M_{Oy} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_k), M_{Oz} = \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_k). \quad (2.5)$$

Định lý về thu gọn hệ lực không gian: Thu gọn hệ lực không gian về tâm O tùy ý ta được một lực và một ngẫu lực. Lực đặt tại O và được biểu diễn bởi véc-tơ chính của hệ lực. Ngẫu lực có véc-tơ mô-men bằng véc-tơ mô-men chính của hệ lực đối với tâm O.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{R}'_O, \vec{M}_O) \quad (2.6)$$

Cân bằng của vật rắn không gian tự do

Điều kiện cân bằng tổng quát của vật rắn không gian tự do:

$$\vec{R}' = \vec{0} \text{ và } \vec{M}_O = \vec{0} \quad (2.7)$$

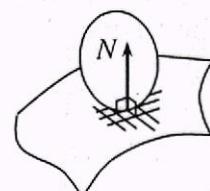
Các phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, & \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0, & \sum_{k=1}^n F_{kz} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n \bar{m}_x(\vec{F}_k) &= 0, & \sum_{k=1}^n \bar{m}_y(\vec{F}_k) &= 0, & \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

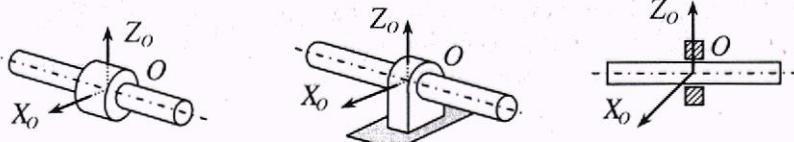
Vật rắn chịu tác dụng của hệ lực không gian đặc biệt (đồng quy hoặc song song) có tối đa ba phương trình cân bằng độc lập.

Phản lực liên kết của một số liên kết không gian

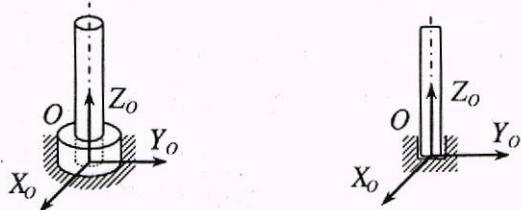
Liên kết tựa. Vật rắn khảo sát tựa lên vật gây liên kết. Phản lực liên kết tựa có phương vuông góc với mặt tiếp xúc (tron nhẵn), chiều hướng vào vật.



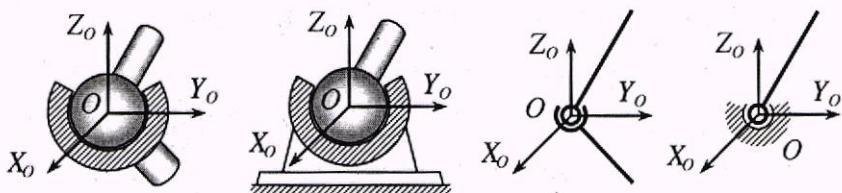
Liên kết bản lề trụ (ổ trụ). Phản lực liên kết được phân tích làm 2 thành phần lực vuông góc với nhau đồng thời vuông góc với đường tâm trực. Chiều các thành phần lực chưa xác định.



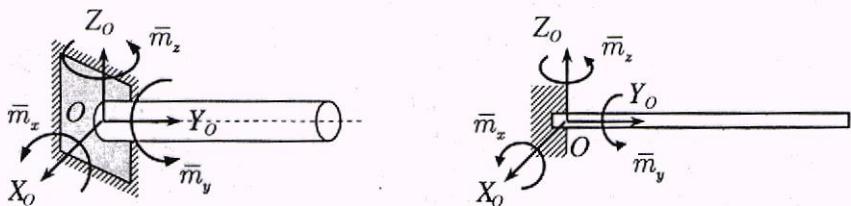
Liên kết bán lề cối (đè cối). Phản lực liên kết gồm ba thành phần lực $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{Z}_O$ như trên hình vẽ.



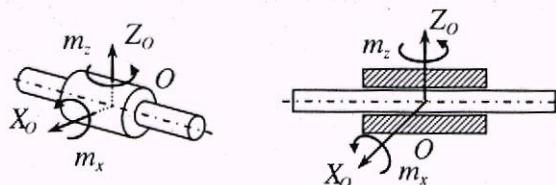
Liên kết bán lề cầu (khớp cầu). Vật chịu liên kết và vật gây liên kết có thể quay tương đối với nhau qua tâm O của khớp cầu. Phản lực liên kết bán lề cầu đi qua tâm O, với phương chiều chưa xác định, khi tính toán thường được phân thành ba thành phần vuông góc với nhau như minh họa trên hình vẽ.



Liên kết ngàm không gian. Phản lực liên kết được phân tích làm 6 thành phần gồm: 3 thành phần lực vuông góc với nhau và 3 ngẫu lực tương ứng có mặt phẳng tác dụng vuông góc với 3 thành phần lực trên. Chiều các thành phần lực và ngẫu lực chưa xác định.



Liên kết ngàm trượt. Phản lực được phân tích làm 4 thành phần gồm 2 thành phần lực có phương vuông góc với nhau, đồng thời vuông góc với đường tâm trực và 2 thành phần ngẫu lực tương ứng có mặt phẳng tác dụng vuông góc với 2 thành phần lực trên. Chiều các thành phần lực và ngẫu lực chưa xác định.

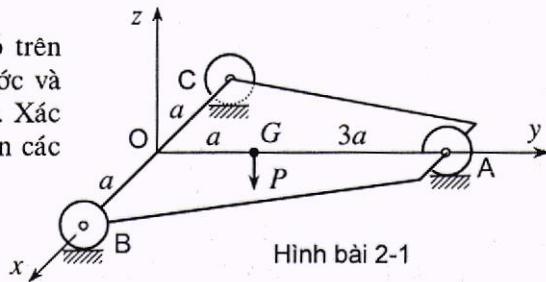


II. BÀI TẬP

2-1. Xe ba bánh trọng lượng P di chuyển trên mặt đường nằm ngang có kích thước và vị trí trọng tâm G như trên hình vẽ. Xác định phản lực từ đường tác dụng lên các bánh xe.

Đáp số:

$$N_A = \frac{P}{4}; N_B = N_C = \frac{3P}{8}.$$



Hình bài 2-1

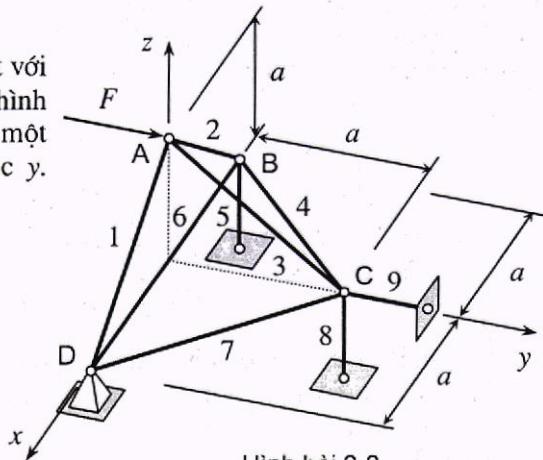
2-2. Một hệ dàn gồm 9 thanh liên kết với nhau và liên kết với nền như trên hình vẽ. Nút A của hệ chịu tác dụng của một lực F có phương song song với trục y . Xác định ứng lực trong các thanh.

Đáp số:

$$S_1 = S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}; S_3 = -\sqrt{2}F;$$

$$S_4 = S_7 = 0; S_5 = -S_6 = \frac{F}{2};$$

$$S_8 = S_9 = -F.$$



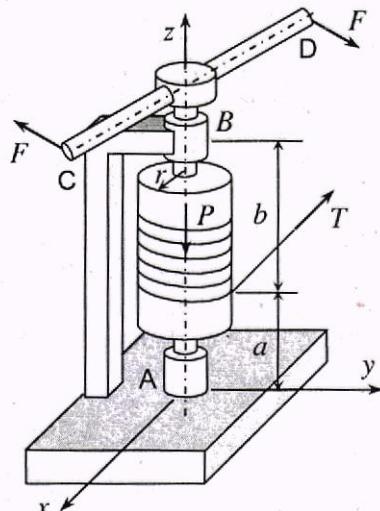
Hình bài 2-2

2-3. Một thiết bị dùng để kéo vật gồm một trục quay được giữ thẳng đứng nhờ bản lề cối tại A và bản lề trụ tại B , đầu trục lắp tay quay CD vuông góc và đối xứng qua trục trung, thân trục lắp tang tời bán kính r có quấn dây. Cho biết đoạn dây ngoài phần bị quấn vào tang tời có phương song song với trục x và có sức căng là T , khoảng cách $CD=2R$, trọng lượng của toàn bộ phần quay là P . Tìm lực F tác dụng vào hai đầu tay quay theo phương vuông góc với mặt phẳng chứa tay quay và trục z để hệ cân bằng, phản lực tại A và B .

Đáp số:

$$F = \frac{Tr}{2R}; X_A = \frac{Tb}{a+b}; Y_A = 0; Z_A = P;$$

$$X_B = \frac{Ta}{a+b}; Y_B = 0.$$



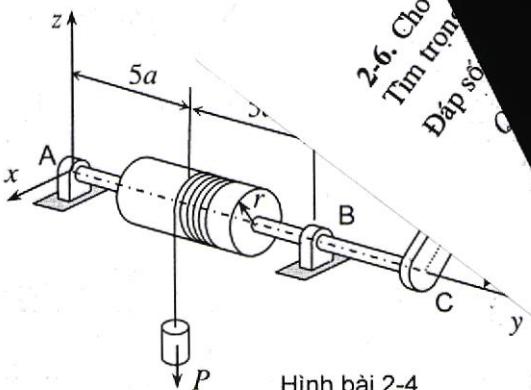
Hình bài 2-3

2-4. Một thiết bị dùng để nâng vật gồm một trục nằm ngang có thể quay quanh hai ổ trục A và B, trên đó lắp tảng tời bán kính r có quấn dây dùng để treo vật nặng, đồng thời tay quay CD được hàn chặt với trục. Xác định lực F tác dụng vào tay quay theo phương vuông góc với mặt phẳng chứa trục y và CD để vật được giữ cân bằng tại vị trí tay quay nghiêng với phương thẳng đứng một góc 30° . Tìm phản lực tại A và B.

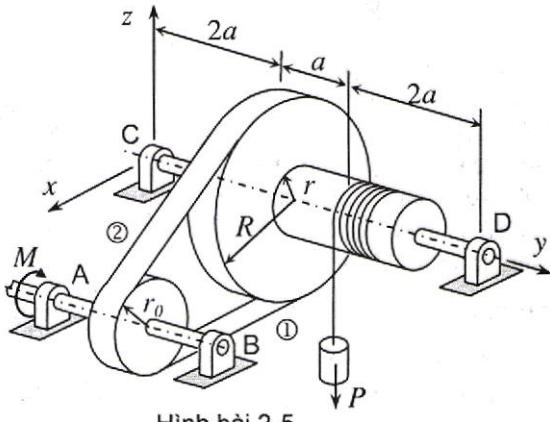
Đáp số:

$$F = \frac{Pr}{l}; X_A = -\frac{\sqrt{3}Pr}{4l}; Z_A = \frac{P}{2} \left[1 - \frac{r}{2l} \right]; X_B = \frac{3\sqrt{3}Pr}{4l}; Z_B = \frac{P}{2} \left[1 + \frac{3r}{2l} \right]$$

2-5. Thiết bị tời nâng sử dụng bộ truyền dai gồm bánh dẫn bán kính r_0 lắp trên trục AB liên hệ với bánh bị dẫn lắp trên trục CD thông qua một sợi dai. Bánh bị dẫn là một trục bậc có đường kính trục lớn là R , đường kính trục nhỏ r , trên đó có quấn dây dùng để treo vật nặng như hình vẽ. Biết nhánh 1 của dây dai nằm ngang, nhánh 2 nghiêng với mặt phẳng nằm ngang một góc 30° , sức căng của nhánh dây 1 lớn gấp hai lần sức căng nhánh dây 2.



Hình bài 2-4



Hình bài 2-5

- Tìm ngẫu lực M cần tác dụng vào trục bánh dẫn để trọng lượng P được giữ cân bằng.
- Xác định sức căng của hai nhánh dây dai và phản lực của ổ trục C, D.

Đáp số:

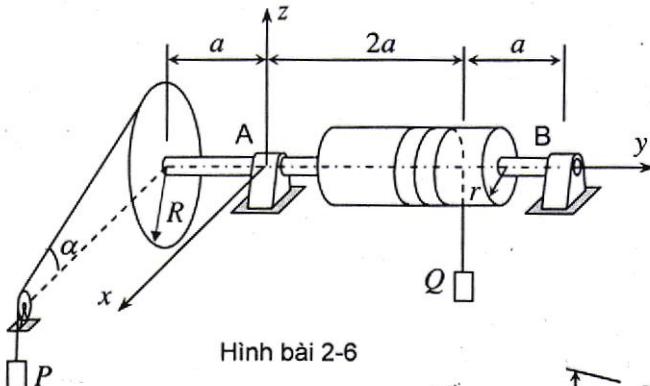
$$a) M = \frac{Pr}{R} r_0;$$

$$b) T_1 = \frac{Pr}{R}; T_2 = \frac{2Pr}{R}; X_C = \frac{-3(4 + \sqrt{3})Pr}{10R}; Z_C = \frac{(3r + 4R)P}{10R}; \\ X_D = \frac{-(4 + \sqrt{3})Pr}{5R}; Z_D = \frac{(r + 3R)P}{5R}.$$

cấu như hình vẽ. Biết các kích thước a , r , R , góc α và trọng lượng P . Tính trọng lượng Q và phản lực liên kết tại A và B khi hệ cân bằng.

$$Y = \frac{PR}{r}; X_A = \frac{-4P\cos\alpha}{3}; Z_A = \frac{P(R + 4r \sin \alpha)}{3r}$$

$$X_B = \frac{P\cos\alpha}{3}; Z_B = \frac{P(2R - r \sin \alpha)}{3r}.$$



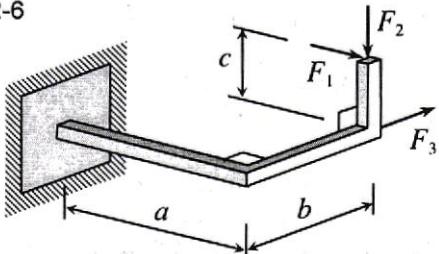
Hình bài 2-6

2-7. Một dầm gấp khúc một đầu được chôn chặt vào tường như hình vẽ. Dầm chịu các lực tác dụng F_1 , F_2 và F_3 . Tìm phản lực từ tường tác dụng lên dầm.

Đáp số:

$$X = F_3; Y = -F_1; Z = F_2$$

$$m_x = cF_1 + aF_2; m_y = bF_2; m_z = bF_1 - aF_3.$$



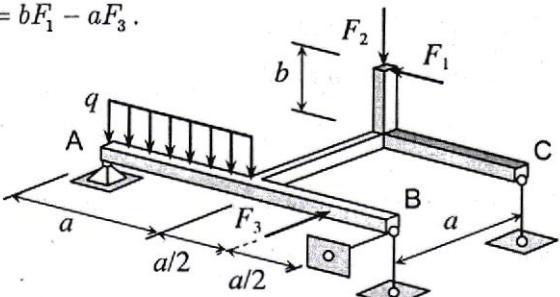
Hình bài 2-7

2-8. Một khung không gian chịu tác dụng của hệ các lực bao gồm lực phân bố hình chữ nhật cường độ q , lực F_1 , F_2 và F_3 có phương, chiều như hình vẽ. Xác định phản lực liên kết tại A , B và C .

Đáp số:

$$X_A = -\frac{F_1}{2} + \frac{F_3}{4}; Y_A = F_1; Z_A = \frac{3qa}{4} + \frac{F_1b}{2a} + \frac{F_2}{2};$$

$$X_B = \frac{F_1}{2} + \frac{3F_3}{4}; Z_B = \frac{qa}{4} - \frac{F_1b}{2a} - \frac{F_2}{2}; Z_C = F_2.$$



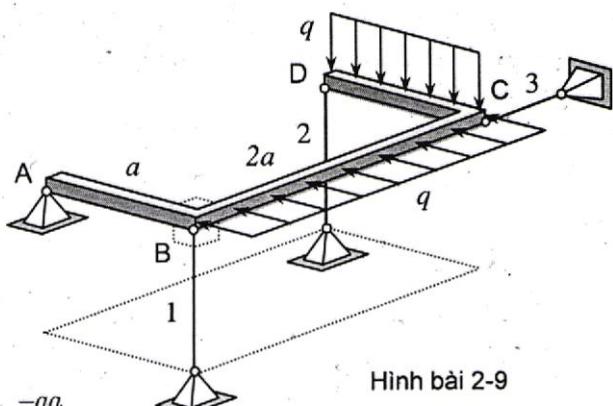
Hình bài 2-8

2-9. Khung $ABCD$ liên kết với nền thông qua khớp cầu tại A và được giữ bởi ba thanh tại các điểm B, C, D . Khung chịu tác dụng của hai hệ lực phân bố hình chữ nhật như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng của khung và các thanh. Tìm phản lực tại A và ứng lực trong các thanh.

Đáp số:

$$X_A = 2qa; Y_A = 2qa; Z_A = \frac{-qa}{2};$$

$$S_1 = \frac{-qa}{2}; S_2 = -qa; S_3 = -2qa.$$



Hình bài 2-9

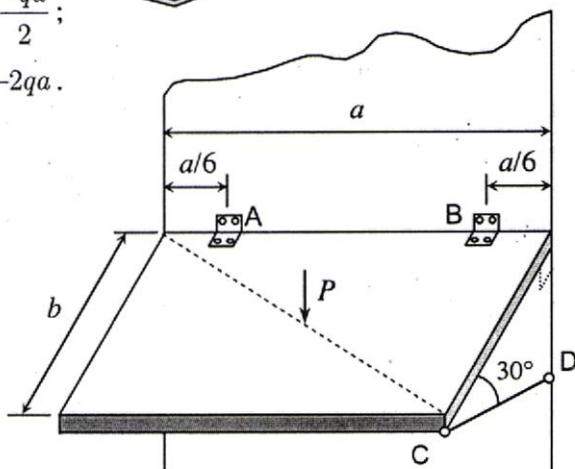
2-10. Một tấm đồng chất hình chữ nhật, trọng lượng P , liên kết với tường nhờ hai khớp bản lề tại A và B , đồng thời được giữ nằm ngang nhờ thanh CD . Tìm phản lực tại A, B và ứng lực trong thanh CD .

Đáp số:

$$X_A = \frac{\sqrt{3}P}{8}; Z_A = \frac{5P}{8};$$

$$X_B = \frac{-5\sqrt{3}P}{8}; Z_B = \frac{-P}{8};$$

$$S = -P.$$



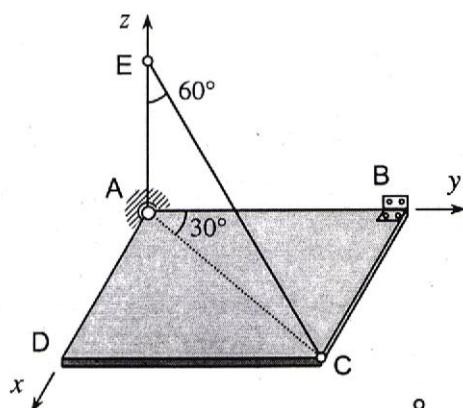
Hình bài 2-10

2-11. Một tấm đồng chất hình chữ nhật, trọng lượng $200N$ mắc vào tường nhờ gối cầu A và bản lề B và được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ dây CE nghiêng 60° với đường thẳng đứng AE . Biết đường chéo AC nghiêng 30° với cạnh AB . Tìm phản lực tại A, B và sức căng của dây.

Đáp số:

$$T = 200 N; X_A = 50\sqrt{3} N; Y_A = 150 N;$$

$$Z_A = 100 N; X_B = Z_B = 0 N; Y_A = 150 N.$$

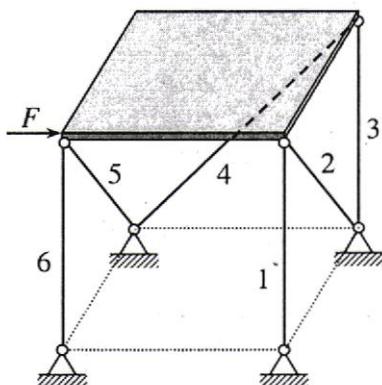


Hình bài 2-11

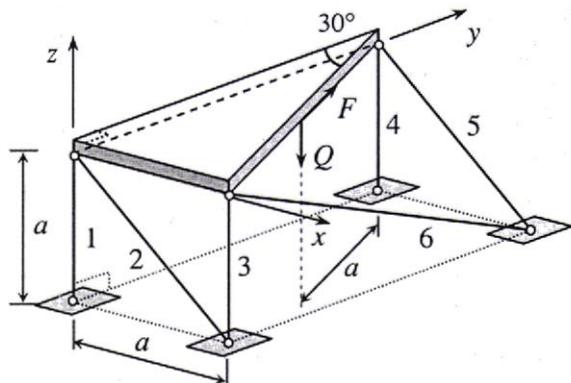
2-12. Tấm gỗ trọng lượng không đáng kể chịu lực F và được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ 6 thanh không trọng lượng như hình vẽ. Toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.

Đáp số:

$$S_1 = -S_3 = -S_6 = F; \quad S_2 = -S_4 = -S_5 = -\sqrt{2}F.$$



Hình bài 2-12



Hình bài 2-13

2-13. Một tấm trọng lượng không đáng kể có dạng tam giác vuông được giữ bởi 6 thanh và chịu tác dụng của các lực F và Q . Tìm ứng lực trong các thanh.

Đáp số:

$$S_1 = -\frac{F}{2}; \quad S_2 = \frac{F}{\sqrt{2}}; \quad S_3 = \frac{F - Q}{2}; \quad S_4 = \frac{-Q}{2}; \quad S_5 = 0; \quad S_6 = -F.$$

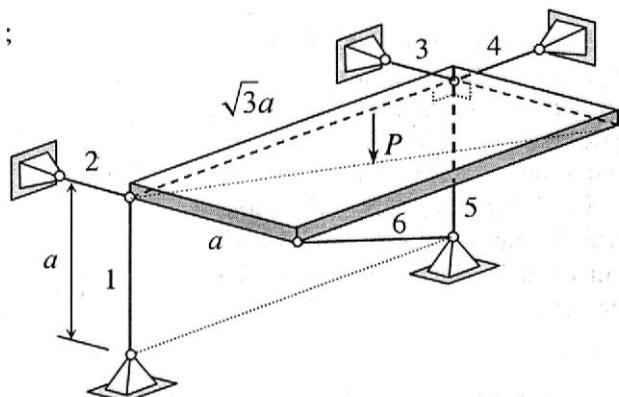
2-14. Một tấm đồng chất hình chữ nhật trọng lượng P được giữ bởi 6 thanh không trọng lượng như hình vẽ. Tìm ứng lực trong các thanh.

Đáp số:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = 0; \quad S_3 = \frac{-P}{2};$$

$$S_4 = \frac{-\sqrt{3}P}{2}; \quad S_5 = \frac{-P}{2};$$

$$S_6 = \frac{-\sqrt{5}P}{2}.$$

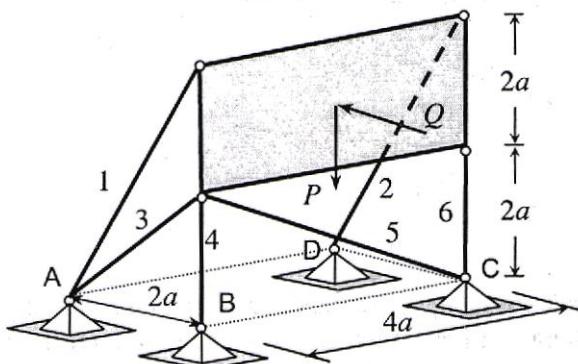


Hình bài 2-14

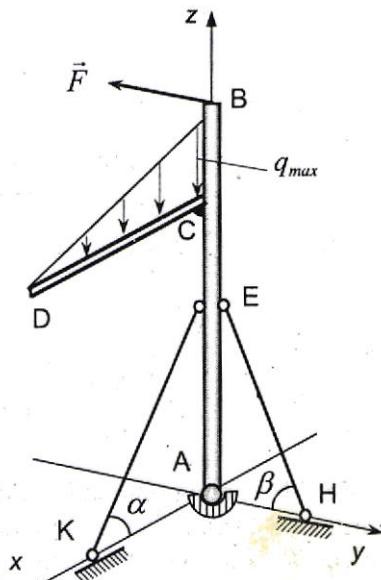
2-15. Một biển quảng cáo được giữ bởi 6 thanh như hình vẽ. Biển mang trọng lượng P và chịu lực của gió Q tác dụng vuông góc với bề mặt. Tim ứng lực trong các thanh.

$$\text{Đáp số: } S_1 = 0; \quad S_2 = \frac{-\sqrt{5}Q}{2}; \quad S_3 = \frac{-\sqrt{2}Q}{2}; \quad S_4 = \frac{-P + Q}{2};$$

$$S_5 = 0; \quad S_6 = \frac{-P}{2} + Q.$$



Hình bài 2-15



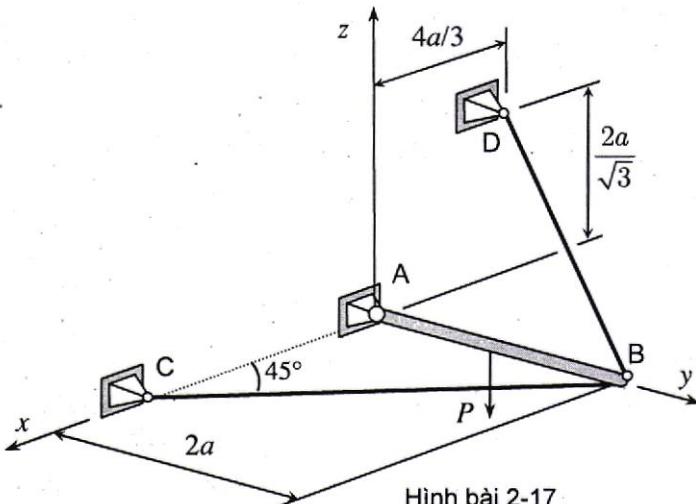
Hình bài 2-16

2-16. Cột AB có trọng lượng $P = 5\text{kN}$ cân bằng ở vị trí thẳng đứng như hình vẽ. Thanh CD có trọng lượng nhẹ không đáng kể được gắn cứng với AB, CD song song với trục x. Hệ lực phân bố theo quy luật tam giác có phương thẳng đứng, cường độ tại C là $q_{max} = 30\text{N/cm}$. Lực $F = 1000\text{N}$ đặt tại B, phương của \vec{F} song song với trục y. Cho biết các khoảng cách $AE = EB = 2BC = CD = 120\text{cm}$, các góc $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Xác định phản lực liên kết tại bản lề cầu A và ứng lực trong các thanh EK, EH.

Đáp số:

$$S_{EH} = 4000 \text{ N}, S_{EK} = -600\sqrt{2} \text{ N}, X_A = 600 \text{ N}, Y_A = -1000 \text{ N}, Z_A \approx 9664 \text{ N}.$$

2-17. Thanh AB đồng chất, chiều dài $2a$, trọng lượng P được dựng vuông góc với tường nhờ gối cầu A và hai thanh (không trọng lượng) BC và BD . Vị trí của điểm liên kết giữa thanh với tường biểu diễn trên hình vẽ. Tìm phản lực tại A và ứng lực trong các thanh.

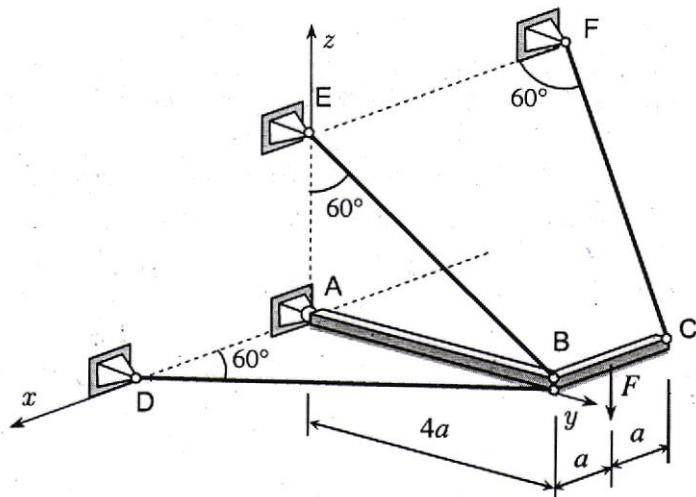


Hình bài 2-17

Đáp số:

$$X_A = 0; Y_A = \frac{5\sqrt{3}P}{6}; Z_A = \frac{P}{2}; S_{BC} = \frac{\sqrt{6}P}{3}; S_{BD} = \frac{2\sqrt{3}P}{3}.$$

2-18. Một khung hình chữ L liên kết với tường thông qua bản lề cầu tại A và được giữ bởi 3 thanh. Khung chịu tác dụng của lực F theo phương thẳng đứng tại trung điểm BC. Cho biết AB vuông góc với tường, BC//AD//EF. Bỏ qua trọng lượng của khung và các thanh. Tim phản lực tại A và ứng lực trong các thanh.



Hình bài 2-18

Đáp số:

$$X_A = -\frac{F}{\sqrt{3}}; Y_A = (2 + \sqrt{3})F; Z_A = 0; S_{BD} = \frac{4F}{\sqrt{3}}; S_{BE} = F; S_{CF} = \frac{2F}{\sqrt{3}}.$$

Chương 3

CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHI CÓ MA SÁT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

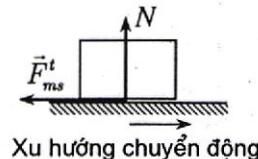
Ma sát trượt

Ma sát trượt tĩnh. Ma sát trượt được gọi là tĩnh khi giữa hai vật thể mới chỉ xuất hiện xu hướng chuyển động trượt tương đối, nhưng chúng vẫn ở trạng thái cân bằng tương đối với nhau.

Ma sát trượt động. Ma sát trượt được gọi là ma sát trượt động khi hai vật thể có chuyển động trượt tương đối với nhau.

Định luật Coulomb về ma sát trượt tĩnh. Lực ma sát trượt tĩnh có phương tiếp tuyến với mặt tiếp xúc, có hướng ngược với xu hướng trượt của vật và có độ lớn bị chặn trên

$$F_{ms}^t \leq \mu_0 N, \quad (3.1)$$



trong đó: N là phản lực pháp tuyến và μ_0 là hệ số ma sát trượt tĩnh.

Định luật Coulomb về ma sát trượt tĩnh cho phép ta xác định điều kiện cân bằng của vật rắn trên mặt tựa có ma sát.

Lực ma sát trượt tĩnh là một loại phản lực liên kết và có thể được tính toán từ các phương trình cân bằng tĩnh học.

Định luật Coulomb về ma sát trượt động. Lực ma sát trượt động có hướng ngược với hướng chuyển động và có độ lớn :

$$F_{ms}^d = \mu N, \quad (3.2)$$

trong đó: N là phản lực pháp tuyến và μ là hệ số ma sát trượt động.

Ma sát lăn

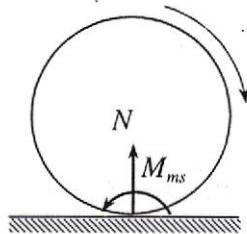
Ma sát lăn tĩnh. Ma sát lăn tĩnh xuất hiện khi giữa hai vật thể mới chỉ xuất hiện xu hướng chuyển động lăn tương đối (chúng vẫn ở trạng thái cân bằng tương đối với nhau).

Ma sát lăn động. Ma sát lăn được gọi là ma sát lăn động khi hai vật thể có chuyển động tương đối là lăn.

Định luật Coulomb về ma sát lăn tĩnh. Ngẫu lực ma sát lăn tĩnh có chiều ngược với xu hướng lăn và có độ lớn bị chặn trên

$$M_{ms}^t \leq k_0 N, \quad (3.3)$$

trong đó: N là phản lực pháp tuyến và k_0 là hệ số ma sát lăn tĩnh.



Định luật Coulomb về ma sát lăn động. Ngẫu lực ma sát lăn động có chiều ngược với chiều chuyển động lăn và có độ lớn:

$$M_{ms}^d = kN, \quad (3.4)$$

trong đó: N là phản lực pháp tuyến và k là hệ số ma sát lăn động.

Ngẫu lực ma sát lăn tĩnh là ngẫu lực liên kết thụ động. Ngẫu lực ma sát trượt động là ngẫu lực chủ động.

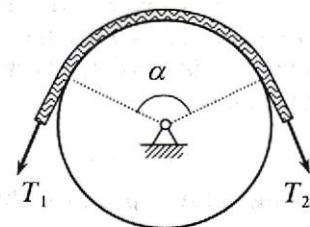
Trong một số bài toán cân bằng của vật rắn, ta có thể phải tính đến cả lực ma sát trượt tĩnh và ngẫu lực ma sát lăn tĩnh.

Trong một số mô hình cơ học, nếu phản lực pháp tuyến có chiều chưa xác định thì định luật ma sát trượt tĩnh và ma sát lăn tĩnh được biểu diễn dưới dạng:

$$F_{ms}^t \leq \mu_0 |N|, \quad M_{ms}^t \leq k_0 |N| \quad (3.5)$$

Công thức Euler về ma sát trượt của dây

Xét mô hình cơ học của dây vắt qua một trụ tròn nhu trên hình vẽ. Ta ký hiệu T_1 và T_2 là sức căng của hai nhánh dây, μ_0 là hệ số ma sát trượt tĩnh, μ là hệ số ma sát trượt động và α là góc ôm của dây trên trụ.



- Nếu $T_1 \geq T_2$, điều kiện để giữa dây và trụ không xảy ra trượt là:

$$T_1 \leq T_2 e^{\mu_0 \alpha} \quad (3.6)$$

(Trong trường hợp có hiện tượng trượt tương đối, ta có quan hệ $T_1 = T_2 e^{\mu \alpha}$).

- Nếu $T_1 \leq T_2$, điều kiện để giữa dây và trụ không xảy ra trượt là:

$$T_2 \leq T_1 e^{\mu_0 \alpha} \quad (3.7)$$

(Trong trường hợp có hiện tượng trượt tương đối, ta có quan hệ $T_2 = T_1 e^{\mu \alpha}$).

II. BÀI TẬP

3-1. Một chiếc hòm có trọng lượng P đặt trên nền nằm ngang không nhẵn. Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa hòm và nền là μ_0 . Tìm lực F nhỏ nhất tác dụng vào hòm theo phương nghiêng với phương nằm ngang một góc α để có thể kéo hòm xê dịch.

$$\text{Đáp số: } F_{\min} = \frac{\mu_0 P}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$$

3-2. Một vật có hình dạng khối lập phương, đồng chất, trọng lượng P được đặt nghiêng tựa trên tường và nền không nhẵn. Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa khối lập phương với tường cũng như với nền ngang là $\mu_0 = 0,3$. Tìm góc nghiêng α khi khối lập phương ở trạng thái sắp trượt.

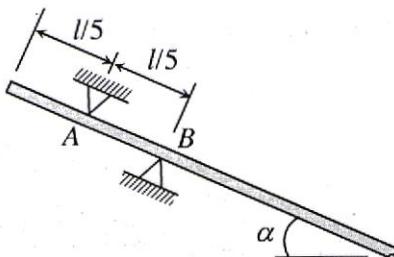
$$\text{Đáp số: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \mu_0}{1 + \mu_0} = \frac{7}{13}, \quad \alpha = 28,3^\circ.$$

3-3. Một dầm đồng chất có chiều dài l và trọng lượng P được đặt nghiêng trên hai gối tựa A và B . Đầu dầm bên phải treo vật nặng trọng lượng $Q = 2P$. Do lực ma sát trượt tại A và B , dầm được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng với phương ngang một góc α . Cho biết hệ số ma sát trượt tại A và B là μ_0 .

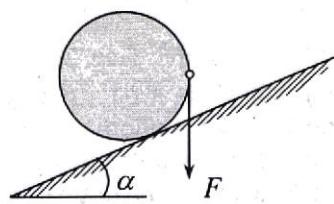
a) Xác định phản lực pháp tuyến tại A và B .

b) Với giá trị nào của μ_0 thì thanh ở trạng thái sắp trượt?

$$\text{Đáp số: a) } N_A = 6,5P \cos \alpha; \quad N_B = 9,5P \cos \alpha; \quad b) \quad \mu_0 = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha}{16}.$$

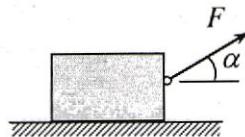


Hình bài 3-3

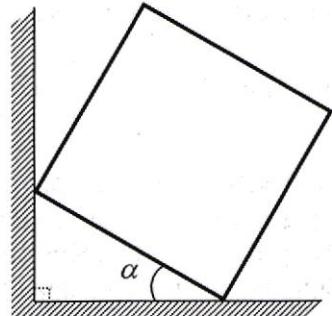


Hình bài 3-4

3-4. Một con lăn đồng chất trọng lượng P được giữ đứng yên trên mặt phẳng nghiêng bằng một lực F tác dụng theo phương thẳng đứng. Cho biết góc nghiêng của mặt phẳng so với phương ngang là α , hệ số ma sát trượt tĩnh giữa con lăn với



Hình bài 3-1



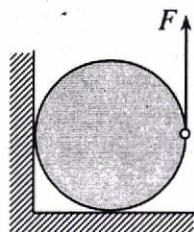
Hình bài 3-2

mặt phẳng là μ_0 và bỏ qua ma sát lăn. Xác định F và μ_0 theo P và α .

Đáp số: $F = P \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}; \mu_0 \geq \operatorname{tg} \alpha.$

3-5. Tìm lực F cần thiết theo phương thẳng đứng phải đặt vào con lăn đồng chất trọng lượng P để con lăn ở trạng thái sắp chuyển động. Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa con lăn với tường thẳng đứng cũng như nền ngang là μ_0 . Bỏ qua ma sát lăn.

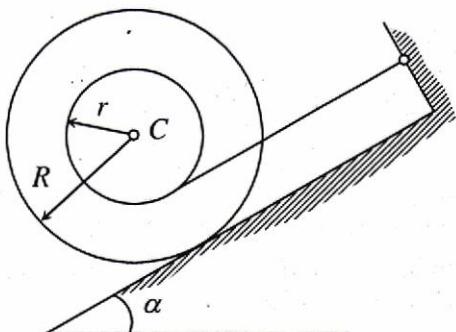
Đáp số: $F = P \frac{\mu_0(1 + \mu_0)}{1 + \mu_0 + 2\mu_0^2}.$



Hình bài 3-5

3-6. Một con lăn hai tầng trọng lượng P , tầng trong bán kính r , được quấn quanh bằng một sợi dây mềm (dầu dây nối cố định với tường) tầng ngoài bán kính R đặt trên mặt phẳng nghiêng. Cho biết góc giữa mặt phẳng nghiêng so với phương ngang là α , phần dây nối giữa tường với con lăn song song với mặt phẳng nghiêng. Bỏ qua ma sát lăn.

- Khi con lăn đứng yên, xác định sức căng của dây và lực ma sát giữa con lăn với nền.
- Tìm hệ số ma sát trượt μ_0 giữa con lăn với mặt phẳng nghiêng để không xảy ra hiện tượng trượt.

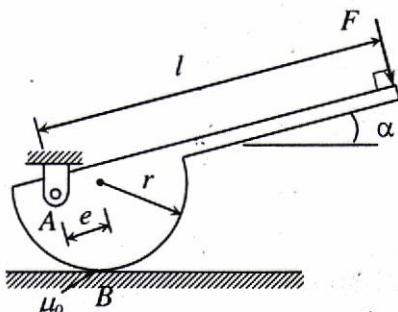


Hình bài 3-6

Đáp số: a) $T = \frac{R}{R - r} P \sin \alpha; F_{ms} = \frac{r}{R - r} P \sin \alpha;$ b) $\mu_0 \geq \frac{r}{R - r} \operatorname{tg} \alpha.$

3-7. Một cam đĩa lệch tâm đặt ở vị trí nghiêng với phương nằm ngang một góc α . Tim độ lệch tâm e nhỏ nhất sao cho dưới tác dụng của lực F , tại điểm tiếp xúc B nhận được một phản lực pháp tuyến có độ lớn N . Biết rằng hệ số ma sát trượt tĩnh giữa cam với nền là μ_0 . Bỏ qua ma sát lăn.

Đáp số: $e = \frac{\frac{Fl}{N} - \mu_0 r}{\cos \alpha - \mu_0 \sin \alpha}.$



Hình bài 3-7

3-8. Cơ cấu tời kéo sử dụng bộ truyền bánh răng lắp trên hai trục A và B. Bánh răng 1 có bán kính vòng lăn r_1 ăn khớp với bánh răng 2 có bán kính vòng lăn R_2 . Góc ăn khớp của hai bánh răng là α . Bánh răng 2 gắn với tời kéo có bán kính r_2 , trên tời quấn dây dùng để kéo vật nặng trọng lượng P trên mặt phẳng nghiêng góc β so với phương nằm ngang. Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa vật với mặt nghiêng là μ_0 , dây kéo vật song song với mặt nghiêng, bỏ qua trọng lượng của các bánh răng.

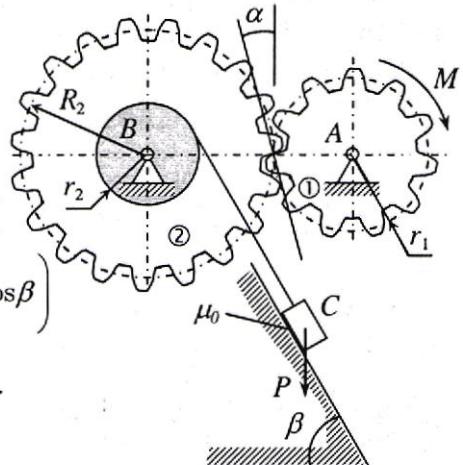
a) Tìm trị số mômen cần thiết M của ngẫu lực tác dụng vào bánh răng 1 để vật nặng ở trạng thái sắp trượt lên cao.

b) Tìm phản lực tại ổ trục B.

$$\text{Đáp số: a)} M = \frac{Pr_1 r_2 (\sin \beta + \mu_0 \cos \beta)}{R_2}$$

$$\text{b)} X_B = P(\sin \beta + \mu_0 \cos \beta) \left(\frac{r_2 \sin \alpha}{R_2 \cos \alpha} - \cos \beta \right)$$

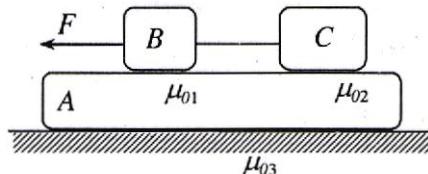
$$Y_B = P(\sin \beta + \mu_0 \cos \beta) \left(\sin \beta - \frac{r_2}{R_2} \right).$$



Hình bài 3-8

3-9. Tấm phẳng A đặt trên nền nằm ngang, trên tấm đặt hai vật nặng B và C được nối với nhau bằng một sợi dây. Trọng lượng của tấm A là P_A , trọng lượng của vật B và C lần lượt là P_B và P_C . Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa tấm A với vật B, vật C và với nền lần lượt là μ_{01} , μ_{02} và μ_{03} . Tìm lực F tác dụng theo phương ngang vào vật B để hệ ở trạng thái cân bằng.

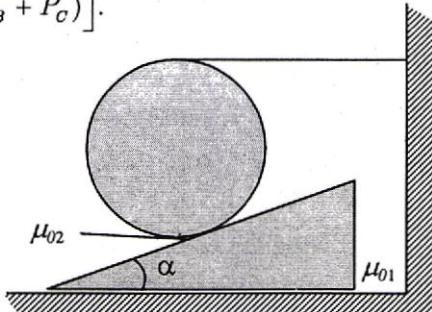
$$\text{Đáp số: } F \leq \min \left[\mu_{01} P_B + \mu_{02} P_C, \mu_{03} (P_A + P_B + P_C) \right].$$



Hình bài 3-9

3-10. Một con lăn trọng lượng P đặt trên một nêm có trọng lượng Q và được giữ bởi một sợi dây nằm ngang như hình vẽ. Cho biết góc nghiêng của nêm là α . Tìm hệ số ma sát trượt tĩnh giữa nêm với mặt phẳng ngang μ_{01} và giữa nêm với con lăn μ_{02} để hệ cân bằng. Bỏ qua ma sát lăn.

$$\text{Đáp số: } \mu_{01} \geq \frac{P \sin \alpha}{(P+Q)(1+\cos \alpha)}; \mu_{02} \geq \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha}.$$

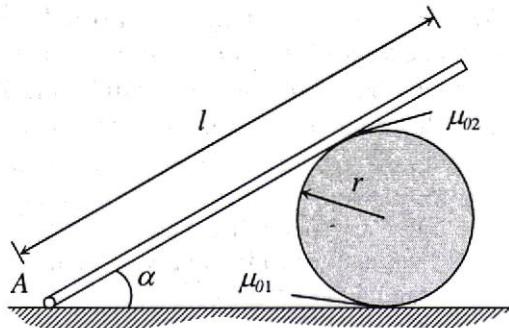


Hình bài 3-10

3-11. Một thanh đồng chất trọng lượng Q , chiều dài l đặt trên một con lăn đồng chất trọng lượng P , bán kính r . Thanh được liên kết với nền bởi bản lề tại A và nghiêng với phương nằm ngang một góc α . Tìm hệ số ma sát trượt tĩnh giữa con lăn với nền μ_{01} và giữa con lăn với thanh μ_{02} để hệ cân bằng. Bỏ qua ma sát lăn.

Đáp số:

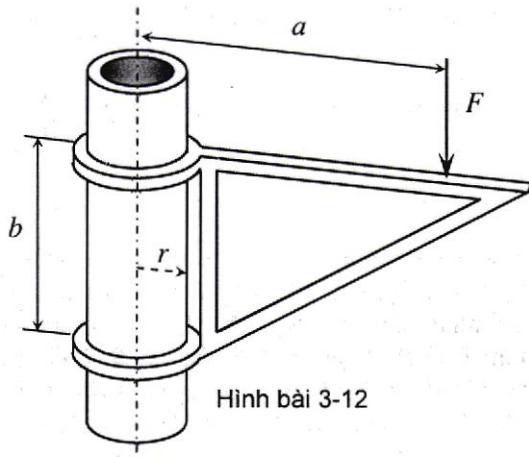
$$\mu_{01} \geq \left[\frac{P}{Q} \frac{2r}{l} \cot^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha \cot \frac{\alpha}{2} \right]^{-1}; \quad \mu_{02} \geq \left[\cos \alpha \cot \frac{\alpha}{2} \right]^{-1}$$



Hình bài 3-11

3-12. Một khung trọng lượng không đáng kể được lồng vào một trụ đặt thẳng đứng không nhẵn có bán kính mặt ngoài là r . Khoảng cách giữa hai vòng tròn trên khung là b . Tìm hệ số ma sát trượt μ_0 giữa khung với trụ để khung không bị trượt khi chịu tác dụng của một lực F thẳng đứng có độ lớn tùy ý đặt cách tâm trụ một đoạn là a .

$$\text{Đáp số: } \mu_0 \geq \frac{b}{2a}.$$

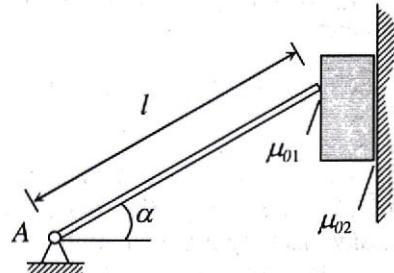


Hình bài 3-12

3-13. Một vật trọng lượng Q được giữ chặt trên tường nhờ một thanh đồng chất trọng lượng P đặt nghiêng với phương ngang một góc α . Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa vật với thanh là μ_{01} và giữa vật với tường là μ_{02} .

- Tìm trọng lượng cho phép của vật nặng để hệ cân bằng.
- Tìm điều kiện với góc α để xảy ra hiện tượng tự hâm.

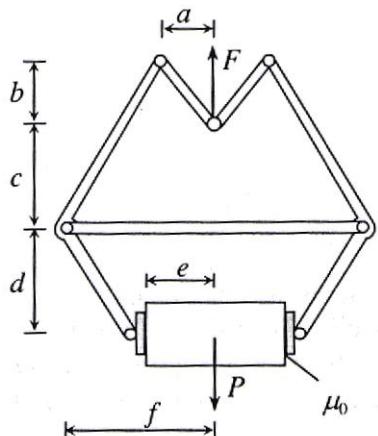
$$\text{Đáp số: a) } Q \leq P \frac{\mu_{01} + \mu_{02}}{2(\tan \alpha - \mu_{01})}; \text{ b) } \tan \alpha < \mu_{01}.$$



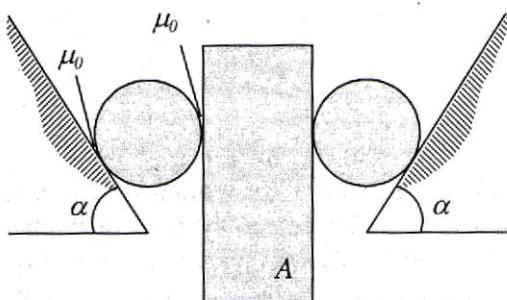
Hình bài 3-13

3-14. Cho một cơ cấu kẹp như hình vẽ. Tìm hệ số ma sát trượt tĩnh μ_0 giữa má kẹp với vật nặng để cơ cấu có thể nhấc vật trọng lượng P tùy ý lên cao.

$$\text{Đáp số: } \mu_0 \geq \frac{bd}{ac + be}.$$



Hình bài 3-14



Hình bài 3-15

3-15. Một thiết bị kẹp giữ vật A gồm hai chặn kẹp cố định có góc nghiêng α và hai con lăn cùng kích thước, cùng trọng lượng P . Nhờ ma sát mà vật A bị giữ chặt giữa hai con lăn. Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa con lăn với chặn kẹp cũng như với vật A là μ_0 . Bỏ qua ma sát lăn.

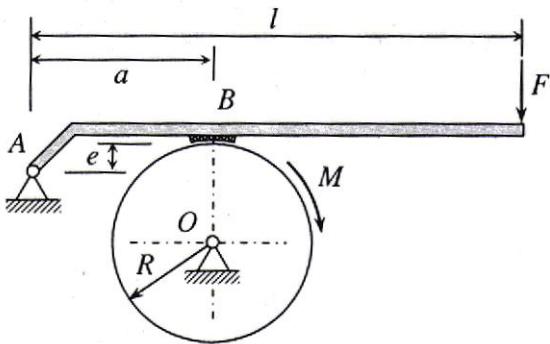
- a) Tìm trọng lượng Q của vật A để hệ cân bằng.
- b) Với giá trị nào của μ_0 thì hiện tượng tự hãm xảy ra?

$$\text{Đáp số: a) } Q \leq \frac{2\mu_0 \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_0(1 + \sin \alpha)} P; \text{ b) } \mu_0 \geq \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

3-16. Cho mô hình cơ cấu phanh tay như hình vẽ. Để hãm bánh phanh O dưới tác dụng của một ngẫu lực có mômen bằng M , người ta đặt một lực vào đầu tay đòn làm cho má phanh ép vào bánh phanh tại B . Biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa má phanh với bánh phanh là μ_0 . Các kích thước của hệ cho trên hình vẽ. Tìm trị số F của lực để cơ cấu cân bằng trong hai trường hợp:

- a) Mômen M ngược chiều kim đồng hồ.
- b) Mômen M thuận chiều kim đồng hồ.

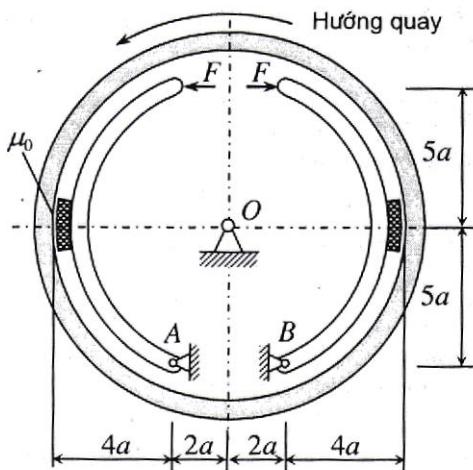
$$\text{Đáp số: a) } F \geq \frac{M(a + \mu_0 e)}{\mu_0 l R}; \text{ b) } F \geq \frac{M(a - \mu_0 e)}{\mu_0 l R}.$$



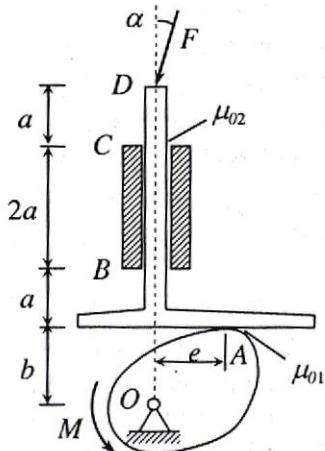
Hình bài 3-16

3-17. Cơ cấu phanh tang trống gồm một tang trống có thể quay quanh tâm O cố định và hai má phanh có thể quay quanh hai bản lề cố định tại A và B . Tác dụng lực đẩy F vào hai đầu má phanh sẽ làm cho má phanh ép sát vào tang trống và tạo ra mômen phanh. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa má phanh và tang trống là μ . Xác định mômen phanh tạo ra trong quá trình phanh.

$$\text{Đáp số: } M = \frac{600\mu}{25 - 16\mu^2} Fa.$$



Hình bài 3-17



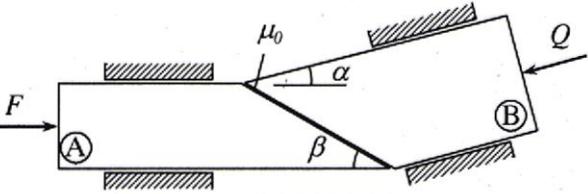
Hình bài 3-18

3-18. Cho cơ cấu cam cần đẩy, đáy bằng chịu tác dụng của lực F tại D theo phương nghiêng với phương thẳng đứng một góc α . Dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen là M , cam quay quanh trục O sẽ đẩy cần chuyển động tịnh tiến theo rãnh trượt thẳng đứng. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa cần đẩy với cam là μ_{01} và giữa cần đẩy

với rãnh trượt là μ_{02} . Tại vị trí như trên hình vẽ, xác định mômen cần đặt vào cam để cắn dây ở trạng thái sắp trượt lên cao.

$$\text{Đáp số: } M = \frac{2aF(e + \mu_{01}b)(\mu_{02} \sin \alpha + \cos \alpha)}{2a - \mu_{02}(e - 2\mu_{01}a)}$$

3-19. Lực nằm ngang F đặt vào nêm A làm cho nó có xu hướng trượt và đẩy nêm B lên cao theo máng trượt nghiêng góc α với mặt nằm ngang. Góc nghiêng của mặt tiếp xúc giữa hai nêm là $\beta < 90^\circ$. Cho biết hệ số ma sát tĩnh giữa hai nêm là μ_0 .

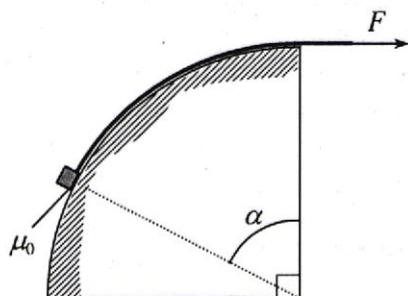


Hình bài 3-19

Tìm lực Q phải tác dụng dọc nêm B để có cân bằng và điều kiện xảy ra tự hãm.

$$\text{Đáp số: } Q \geq \frac{P[\sin(\alpha + \beta) + \mu_0 \cos(\alpha + \beta)]}{\sin \beta + \mu_0 \cos \beta}; \quad \sin(\alpha + \beta) \leq \mu_0 \cos(\alpha + \beta).$$

3-20. Vật nặng trọng lượng P gắn trên bờ mặt của một dây băng dẹt được giữ cân bằng trên mặt cong nhám (có dạng một phần tư cung tròn) tại vị trí vật nằm trên đường thẳng đi qua tâm cung tròn và nghiêng với phương thẳng đứng một góc α nhờ một lực tác dụng vào đầu kia của sợi dây. Cho biết hệ số ma sát tĩnh giữa mặt cong với dây là μ_0 . Tìm trị số F của lực.

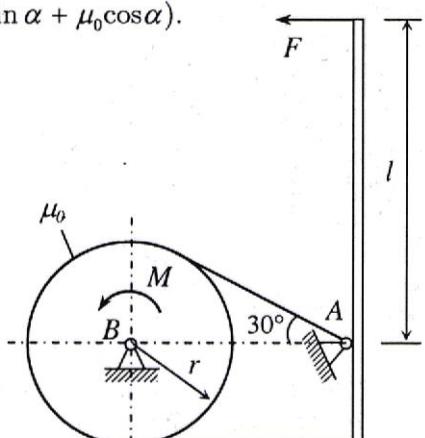


Hình bài 3-20

$$\text{Đáp số: } Pe^{-\mu_0 \alpha} (\sin \alpha - \mu_0 \cos \alpha) \leq F \leq Pe^{\mu_0 \alpha} (\sin \alpha + \mu_0 \cos \alpha).$$

3-21. Cho mô hình cơ cấu phanh sử dụng dây dai như hình vẽ. Để hãm bánh phanh khi chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M , người ta vòng qua nó một dây dai và nối hai đầu dây với tay đòn, đồng thời tại đầu tay đòn đặt một lực vuông góc với tay đòn. Biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa dây dai với bánh phanh là μ_0 . Tìm trị số F của lực để hệ cân bằng trong hai trường hợp:

- a) Ngẫu lực có chiều ngược chiều kim đồng hồ.
- b) Mômen có chiều thuận chiều kim đồng hồ.

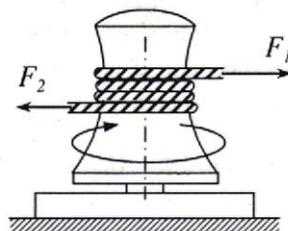


Hình bài 3-21

Đáp số: a) $F \geq \frac{M}{l(e^{\mu_0\alpha} - 1)}$; b) $F \geq \frac{Me^{\mu_0\alpha}}{l(e^{\mu_0\alpha} - 1)}$, với $\alpha = 7\pi/6$.

3-22. Một chiếc tời dùng để kéo thả dây cáp khi di chuyển ô tô trong quá trình sửa chữa có cấu tạo gồm đầu tời được truyền động thông qua một động cơ điện. Một sợi dây cáp quấn vài vòng xung quanh đầu tời, một đầu nối với thân xe, một đầu giữ bằng tay. Cho biết lực kéo ô tô lúc đó là F_1 , số vòng dây cáp quấn quanh đầu tời là n vòng, hệ số ma sát giữa tời và cáp là μ_0 . Tìm lực giữ bằng tay F_2 tại đầu dây để khi động cơ quay, thì tời sẽ kéo ô tô chuyển động.

Đáp số: $F_2 \geq F_1 e^{-2\pi n \mu_0}$.

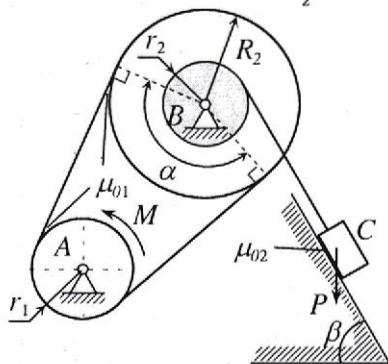


Hình bài 3-22

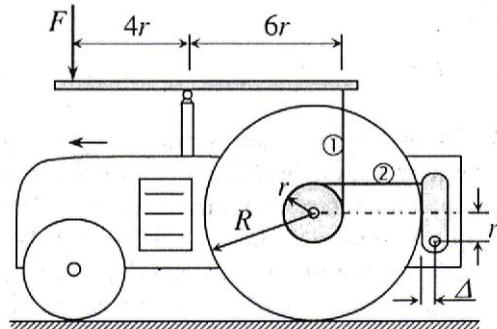
3-23. Thiết bị tời kéo sử dụng bộ truyền đai gồm bánh dẫn bán kính r_1 , bánh bị dẫn bán kính R_2 , tang tời bán kính r_2 gắn với bánh bị dẫn, vật nặng trọng lượng P được kéo trượt trên mặt phẳng nghiêng. Cho biết góc nghiêng của mặt phẳng là β , dây kéo vật song song với mặt nghiêng, hệ số ma sát trượt giữa dây đai và các bánh đai là μ_{01} , giữa vật và mặt phẳng là μ_{02} , góc ôm là α . Giả thiết bán kính $r_1 < R_2$.

Để hạn chế trượt giữa dây đai và bánh đai, dây đai được căng với sức căng ban đầu là T_0 . Tìm ngẫu lực M tác dụng vào bánh dẫn và sức căng T_0 để vật nặng đứng yên trên mặt phẳng nghiêng ở trạng thái sắp trượt lên cao.

Đáp số: $M = \frac{Pr_1 r_2 (\sin \beta + \mu_{02} \cos \beta)}{R_2}; T_0 \geq \frac{M(e^{\mu_{01}\alpha} + 1)}{2r_1(e^{\mu_{01}\alpha} - 1)}$.



Hình bài 3-23



Hình bài 3-24

3-24. Một chiếc xe lu đang chuyển động trên đường thì bị phanh bằng một lực vừa đủ F tác dụng lên cánh tay đòn khiến xe dừng ngay tại chỗ. Khi đó dây đai vắt qua một bánh trụ nhỏ bán kính r gắn cứng với bánh xe sẽ bị kéo căng và kéo má phanh từ sát vào bánh xe bán kính R . Cho biết hệ số ma sát trượt giữa dây đai và bánh trụ

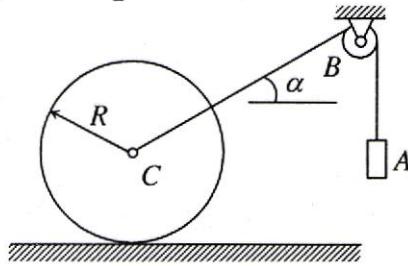
là μ_{01} , giữa má phanh với bánh xe là μ_{02} . Bỏ qua khối lượng của cánh tay đòn và dây dai.

- Tính sức căng của dây dai trên nhánh 1 và 2.
- Tính toán lực pháp tuyến tại điểm tiếp xúc giữa má phanh với bánh xe.
- Tính toán lực ma sát giữa bánh xe và mặt đường. Bỏ qua ma sát lăn.

Đáp số: a) $T_1 = \frac{2}{3}F$; $T_2 = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\pi\mu_{01}}F$; b) $N = \frac{4r}{3(\Delta\mu_{02} + r)}e^{\frac{3}{2}\pi\mu_{01}}F$;

c) $F_{ms} = \left[\frac{2r}{3R}(e^{\frac{3}{2}\pi\mu_{01}} - 1) + \frac{4r}{3(\Delta\mu_{02} + r)}\mu_{02}e^{\frac{3}{2}\pi\mu_{01}} \right]F$.

3-25. Một con lăn trọng lượng P , bán kính R được đặt trên nền nằm ngang. Một sợi dây nối tại tâm con lăn, vắt qua ròng rọc và đầu kia treo vật nặng trọng lượng Q . Cho biết giữa con lăn với nền có hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0 và hệ số ma sát lăn tĩnh là k_0 , đoạn dây CB nghiêng với phương ngang một góc α . Tìm trọng lượng Q để hệ cân bằng.

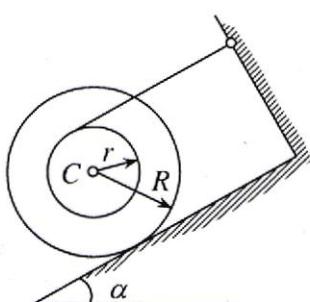


Hình bài 3-25

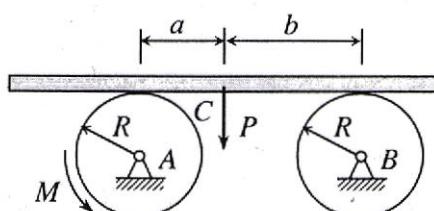
Đáp số: $Q \leq \min \left(\frac{\mu_0 P}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha}, \frac{k_0 P}{R \cos \alpha + k_0 \sin \alpha} \right)$.

3-26. Một con lăn hai tầng trọng lượng P , tầng trong bán kính r , được quấn quanh bằng một sợi dây mềm (đầu dây được giữ cố định), tầng ngoài bán kính R đặt trên mặt phẳng nghiêng (góc nghiêng α). Cho biết phần dây không bị quấn vào con lăn song song với mặt phẳng nghiêng, giữa con lăn với nền có hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0 và hệ số ma sát lăn tĩnh là k_0 . Tìm điều kiện của α để con lăn có thể đứng cân bằng trên mặt phẳng nghiêng.

Đáp số: $\alpha \leq \arctg \frac{(r+R)\mu_0 + k_0}{r}$.



Hình bài 3-26

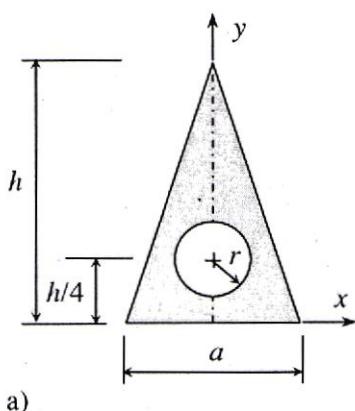


Hình bài 3-27

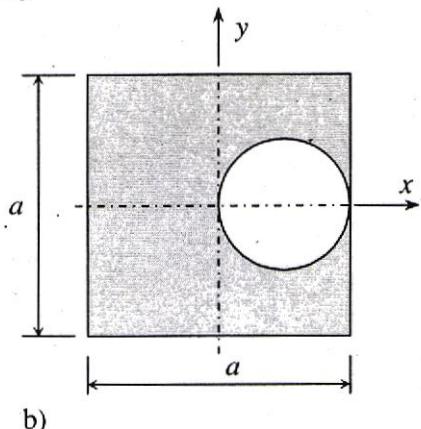
3-27. Một tấm phẳng trọng lượng P đặt nằm ngang trên hai quả lô giống nhau bán kính R , trọng lượng Q được lắp trên hai trục A và B . Cho biết giữa tấm và quả lô có hệ số ma sát trượt tĩnh là μ_0 và hệ số ma sát lăn tĩnh là k_0 . Tại vị trí đang xét, trọng tâm C của tấm cách trục A một đoạn a , cách trục B một đoạn b ($b > a$). Xác định ngẫu lực M tác dụng vào quả lô lắp trên trục A để tấm phẳng ở trạng thái bắt đầu chuyển động không trượt trên hai quả lô.

Đáp số: $k_0 P = M \leq \frac{P}{a+b} [k_0(b+k_0) + \mu_0 R(a-k_0)]$.

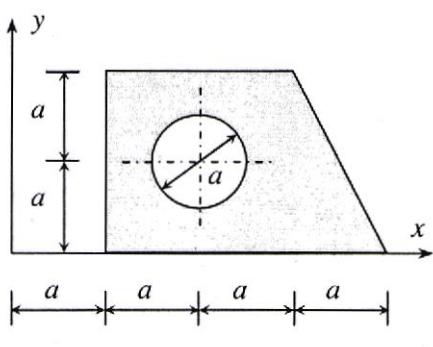
4-4. Xác định trọng tâm của các tấm phẳng đồng chất sau:



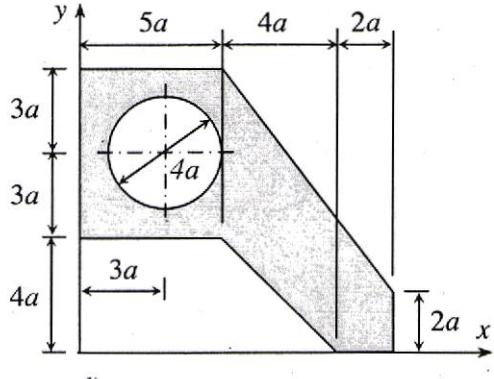
a)



b)



c)



d)

Hình bài 4-4

Đáp số:

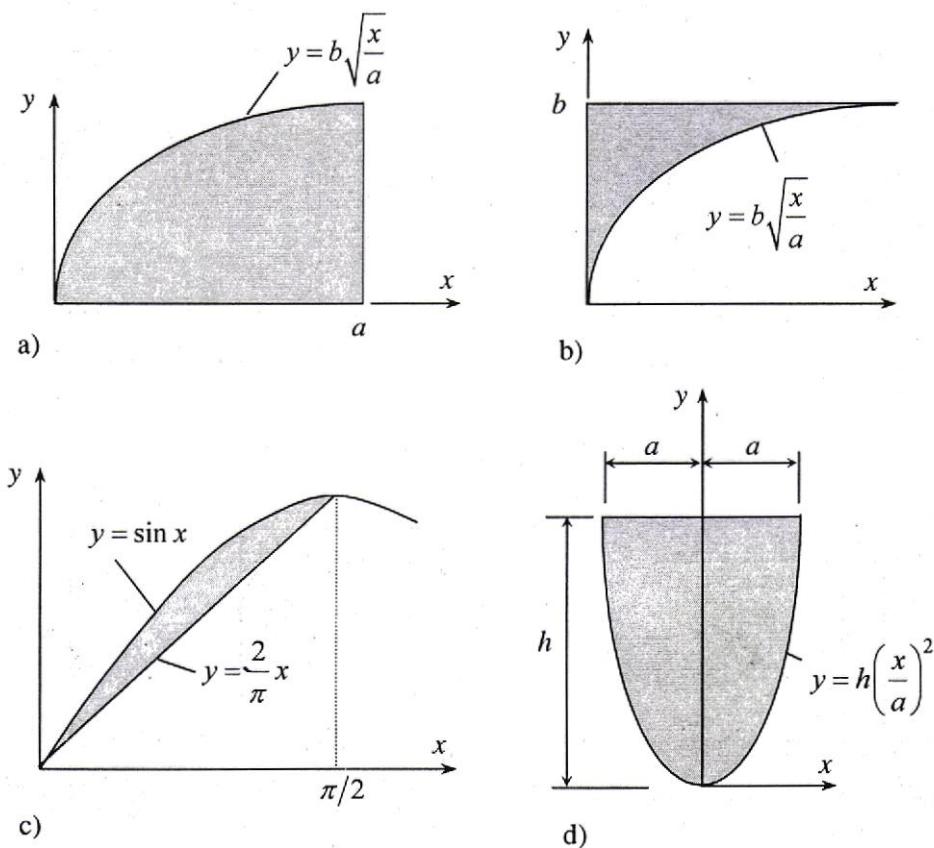
$$\text{a)} \quad x_C = 0; \quad y_C = \frac{h(2ah - 3\pi r^2)}{6(ah - 2\pi r^2)}.$$

$$\text{b)} \quad x_C = \frac{-a\pi}{4(16 - \pi)}; \quad y_C = 0.$$

$$\text{c)} \quad x_C = \frac{2(68 - 3\pi)a}{3(20 - \pi)}; \quad y_C = \frac{(56 - 3\pi)a}{3(20 - \pi)}.$$

$$\text{d)} \quad x_C \approx \frac{a(-865 + 36\pi)}{6(-29 + 2\pi)} = 5,516a; \quad y_C = \frac{a(-485 + 42\pi)}{3(-29 + 2\pi)} \approx 5,180a.$$

4-5. Tìm trọng tâm của tám đồng chất giới hạn bởi các đồ thị cho trên hình vẽ



Hình bài 4-5

Đáp số:

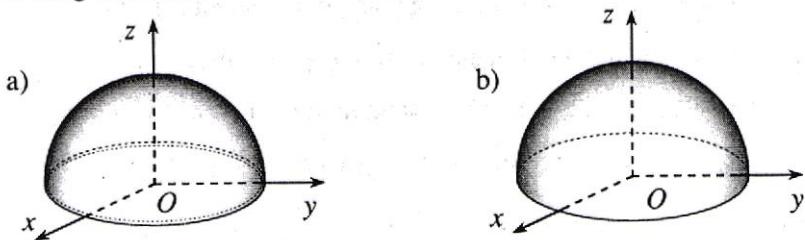
a) $x_C = \frac{3}{5}a; \quad y_C = \frac{3}{8}b.$

b) $x_C = \frac{3}{10}a; \quad y_C = \frac{3}{4}b.$

c) $x_C = \frac{12 - \pi^2}{3(4 - \pi)}; \quad y_C = \frac{\pi}{6(4 - \pi)}.$

d) $x_C = 0; \quad y_C = \frac{3}{5}h.$

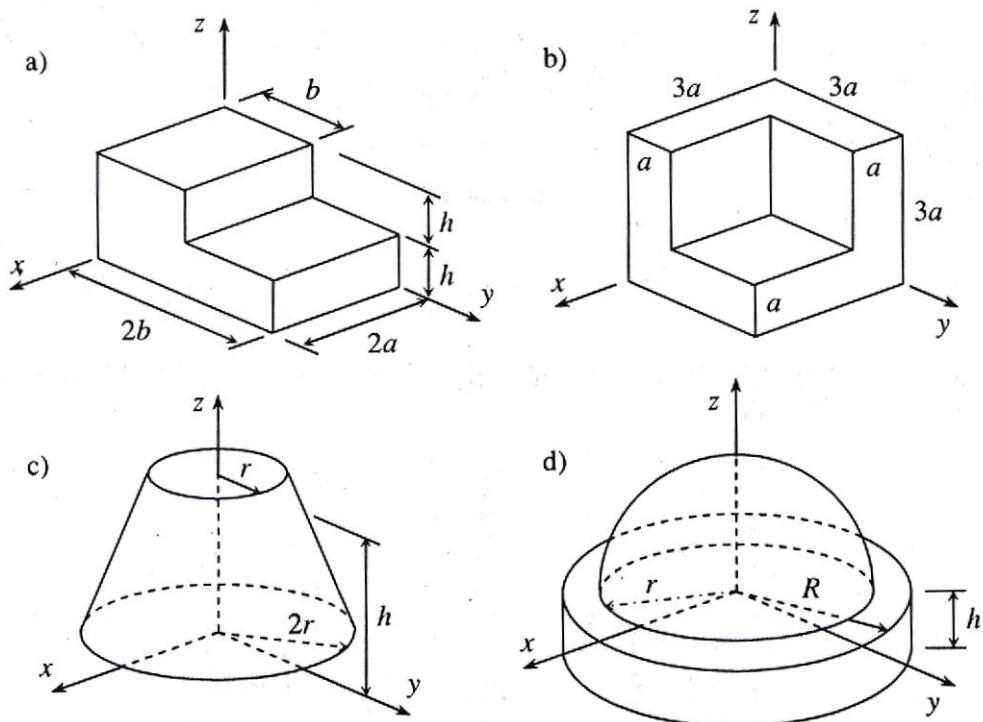
4-6. Xác định trọng tâm của bán cầu rỗng bề dày không đáng kể và bán cầu đặc đồng chất có cùng bán kính R .



Hình bài 4-6

Đáp số: a) $x_C = y_C = 0; z_C = \frac{R}{2}$. b) $x_C = y_C = 0; z_C = \frac{3R}{8}$.

4-7. Xác định trọng tâm của các khối đồng chất có kích thước như hình vẽ.



Hình bài 4-7

Đáp số:

$$\text{a) } x_C = a; \quad y_C = \frac{5b}{6}; \quad z_C = \frac{5h}{6}.$$

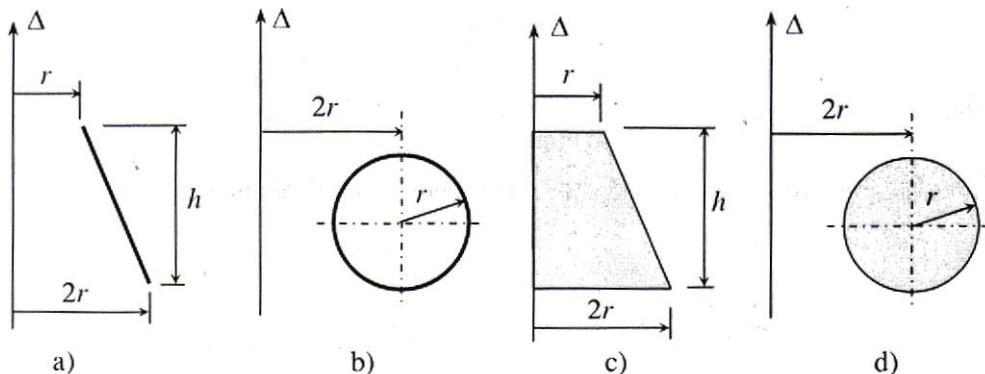
$$\text{b) } x_C = y_C = z_C = \frac{49a}{38}.$$

$$\text{c) } x_C = y_C = 0; \quad z_C = \frac{11h}{28}.$$

$$\text{d) } x_C = y_C = 0; \quad z_C = \frac{3(r^4 - 2h^2R^2)}{4(2r^3 + 3hR^2)}.$$

4-8. Dùng công thức Guldin xác định:

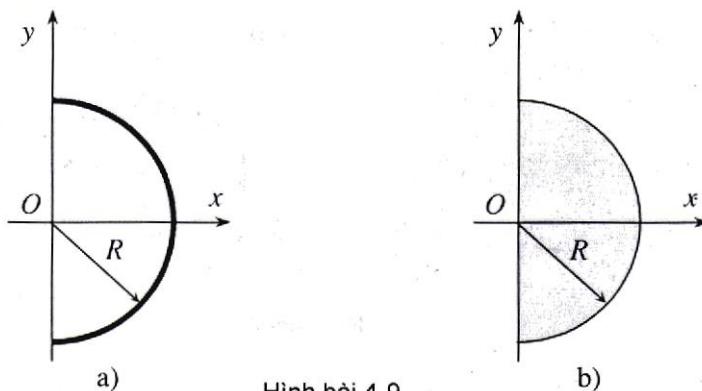
- Diện tích của mặt tạo bởi đường thẳng quay quanh trục Δ .
- Diện tích của mặt tạo bởi đường tròn quay quanh trục Δ .
- Thể tích của khối tạo bởi tám phẳng hình thang quay quanh trục Δ .
- Thể tích của khối tạo bởi tám tròn quay quanh trục Δ .



Hình bài 4-8

Đáp số: a) $A = 3\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$; b) $A = 8\pi^2 r^2$; c) $V = \frac{7\pi r^2 h}{3}$; d) $V = 4\pi^2 r^3$.

4-9. Dùng công thức Guldin xác định trọng tâm của nửa đường tròn và nửa tám tròn tâm O bán kính R .



Hình bài 4-9

Đáp số: a) $x_C = \frac{2R}{\pi}$; $y_C = 0$. b) $x_C = \frac{4R}{3\pi}$; $y_C = 0$.

Chương 5

CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

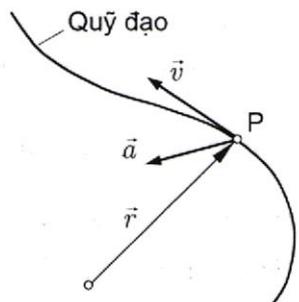
I. TQM TẮT LÝ THUYẾT

Vận tốc và gia tốc của điểm

Vécтор định vị: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\text{Vận tốc của điểm: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (5.1)$$

$$\text{Gia tốc của điểm: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (5.2)$$



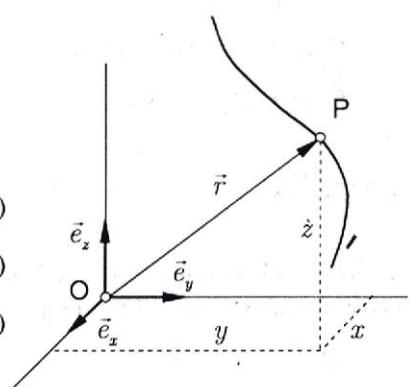
Tọa độ Descartes

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (5.3)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z \quad (5.4)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (5.5)$$

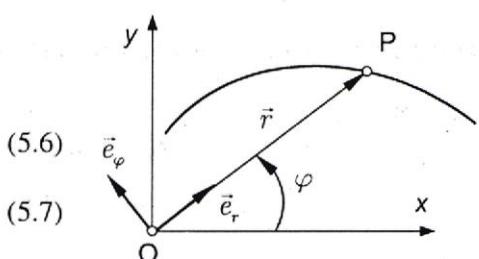


Tọa độ cực (quỹ đạo phẳng)

$$\vec{r} = r(t)\vec{e}_r, \varphi = \varphi(t)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (5.6)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \quad (5.7)$$



Tọa độ trục (quỹ đạo không gian)

$$r = r(t), \varphi = \varphi(t), z = z(t)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \quad (5.8)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (5.9)$$

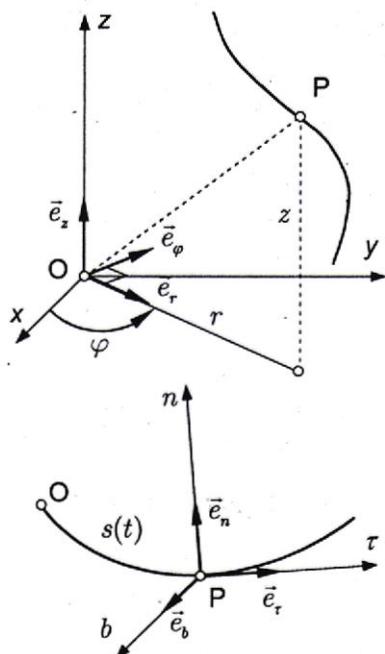
Tọa độ tự nhiên

$$s = s(t)$$

$$\vec{v} = v\vec{e}_\tau, \quad v = \dot{s} \quad (5.10)$$

$$\vec{a} = a^\tau\vec{e}_\tau + a^n\vec{e}_n, \quad a^\tau = \dot{v}, \quad a^n = \frac{v^2}{\rho} \quad (5.11)$$

ρ : Bán kính cong quỹ đạo tại P



Khảo sát tính chất của chuyển động

- Chuyển động đều: $a^\tau = 0$, chuyển động biến đổi: $a^\tau \neq 0$;
- Chuyển động thẳng: $a^n = 0$, chuyển động cong: $a^n \neq 0$;
- Chuyển động biến đổi đều: $a^\tau = \text{hằng số}$;
- Chuyển động cong đều: $a^n = \text{hằng số}$.

II. BÀI TẬP

5-1. Xác định phương trình quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm nếu phương trình chuyển động của điểm dưới dạng tọa độ Descartes được cho như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & x = t^3 + 2 \\ \text{b)} & x = 10 \cos \frac{2\pi}{5} t \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} y = 3 - t^3 & y = 10 \sin \frac{2\pi}{5} t \end{array}$$

Trong đó các tọa độ x, y tính bằng cm, biến thời gian t tính bằng giây.

Đáp số:

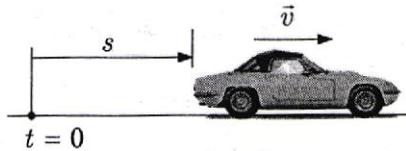
- $x + y = 5, v = 3t^2\sqrt{2}, a = 6t\sqrt{2};$
- $x^2 + y^2 = 100, v = 4\pi, a = 1,6\pi^2.$

5-2. Hai ô tô A và B đang ở vị trí kế tiếp nhau và chuyển động thẳng cùng một hướng. Xe A đang có vận tốc v_1 và bắt đầu chuyển động chậm dần đều với gia tốc a_1 , trong khi xe B vẫn giữ vận tốc v_2 không đổi. Hãy xác định khoảng cách d giữa hai xe tại thời điểm xe A dừng lại.

$$\text{Đáp số: } d = \left| \frac{2v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1} \right|.$$

5-3. Xe ô tô chuyển động trên đường thẳng có vận tốc thay đổi theo quy luật $v = 3t^2 + 2t$ m/s, trong đó t được tính bằng giây. Hãy xác định gia tốc của xe và quãng đường s xe đi được sau 3 s. Cho biết khi $t = 0$ thì $s = 0$.

$$\text{Đáp số: Gia tốc } a = 20 \text{ m/s}; s = 36 \text{ m.}$$



Hình bài 5-3

5-4. Một viên đạn được bắn theo phương thẳng đứng xuống nước với vận tốc ban đầu $v_0 = 60$ m/s. Khi chuyển động trong nước, viên đạn chuyển động chậm dần với gia tốc $a = -kv^3$ (m/s²) trong đó hệ số $k = 0,4$ và vận tốc của viên đạn v được tính bằng m/s. Hãy xác định vận tốc của viên đạn và khoảng cách viên đạn đi được tại thời điểm $t = 4$ s sau khi bắn.

$$\text{Đáp số: } v \approx 0,559 \text{ m/s}; s \approx 4,43 \text{ m.}$$

5-5. Quỹ đạo của điểm P trên mặt phẳng được xác định bởi phương trình $y^2 = 4kx$. Cho biết hình chiếu vận tốc của điểm P trên trục y là $v_y = \beta t$ với k, β là các hằng số. Hãy tìm các thành phần gia tốc của điểm P.

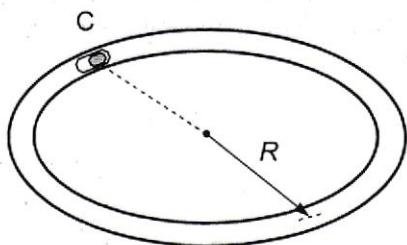
$$\text{Đáp số: } a_x = \frac{\beta}{2k} (\beta t^2 + y); a_y = \beta.$$

5-6. Điểm P chuyển động trên đường thẳng có vị trí được xác định bởi phương trình $s_p = at^3 + bt^2 + ct$, trong đó s_p được tính bằng cm và t bằng giây. Cho biết các hệ số $a = 1$, $b = -9$, $c = 15$. Hãy xác định giá trị lớn nhất của vận tốc và của gia tốc điểm P trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 10$ s.

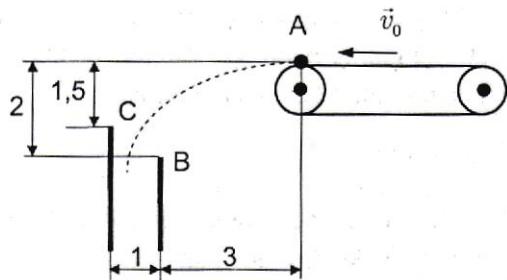
$$\text{Đáp số: } v_{\max} = 135 \text{ cm/s}; a_{\max} = 42 \text{ cm/s}^2.$$

5-7. Xe C chuyển động theo một đường tròn bán kính $R = 90$ m từ trạng thái đứng yên. Cho biết cứ sau một giây, vận tốc của xe lại tăng lên 2m/s . Hãy xác định khoảng thời gian để gia tốc của xe đạt được giá trị $2,4 \text{ m/s}^2$. Tính toán vận tốc của xe khi đó.

$$\text{Đáp số: } T \approx 5,46 \text{ s}; v \approx 10,93 \text{ m/s.}$$



Hình bài 5-7



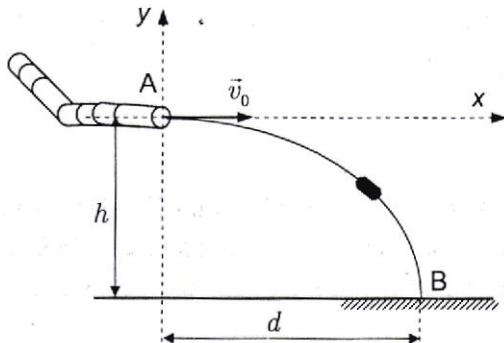
Hình bài 5-8

5-8. Xét một hạt vật liệu A đứng yên trên một băng tải vật liệu, băng tải chuyển động đều. Các kích thước trên hình vẽ được tính bằng mét. Hãy xác định vận tốc v_0 của băng tải để hạt vật liệu có thể rơi lọt vào khe chứa BC.

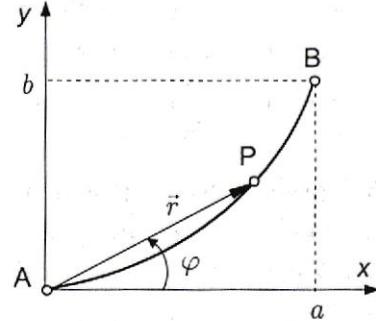
Đáp số: $4,698 \leq v_0 \leq 7,233$ m/s.

5-9. Một bao vật liệu trượt trong ống dẫn và đạt vận tốc $v_0 = 12$ m/s theo phương ngang khi ra khỏi miệng ống. Độ cao của miệng ống so với sàn là $h = 6$ m. Hãy xác định khoảng thời gian đến lúc bao chạm vào mặt sàn và khoảng cách d tính theo phương ngang từ miệng ống đến điểm rơi B.

Đáp số: $T \approx 1,11$ s; $d \approx 13,3$ m.



Hình bài 5-9



Hình bài 5-10

5-10. Điểm P chuyển động theo quỹ đạo parabol $y = b(x/a)^2$. Cho biết quy luật $\varphi = \arctan \omega_0 t$ trong đó φ là góc giữa trục x và vectơ định vị \vec{r} của điểm P như hình vẽ, a , b , ω_0 là các hằng số cho trước. Hãy xác định biểu thức vận tốc của điểm P, trị số vận tốc của điểm P khi đạt tới vị trí điểm B.

Đáp số: $v = \frac{a^2 \omega_0}{b} \sqrt{1 + 4\omega_0^2 t^2}$; $P \equiv B$: $v_p = \frac{a^2 \omega_0}{b} \sqrt{1 + 4 \frac{b^2}{a^2}}$.

5-11. Một điểm chuyển động trong mặt phẳng Oxy , gia tốc của điểm có hình chiếu trên hai trục là $a_x = 4 \text{ cm/s}^2$ và $a_y = 2t \text{ cm/s}^2$. Cho biết khi $t = 0$ điểm nằm tại gốc tọa độ, khi $t = 2 \text{ s}$ thì vectơ vận tốc của điểm tạo với trục x một góc 45° và có trị số $v = 12\sqrt{2} \text{ cm/s}$. Hãy xác định phương trình chuyển động của điểm.

Đáp số: $x = 2t^2 + 4t$, $y = \frac{t^3}{3} + 8t$.

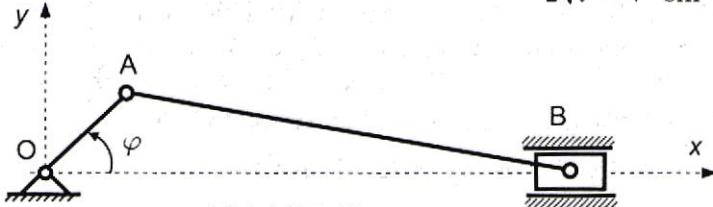
5-12. Xác định phương trình chuyển động của điểm M dưới dạng tọa độ tự nhiên $s = s(t)$ nếu biết phương trình chuyển động của M dưới dạng tọa độ Descartes như sau:

a) $x = 3t^2 + 5$, $y = 4t^2 + 3$ b) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$

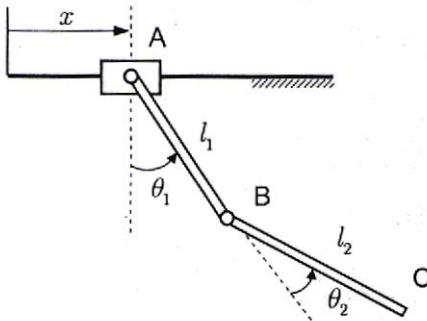
Đáp số: a) $s = 5t^2$, b) $s = \sqrt{3}(e^t - 1)$

5-13. Tay quay OA của cơ cấu tay quay - con trượt chuyển động theo quy luật $\varphi = \omega t$ với ω là hằng số. Cho biết các độ dài $OA = r$ và $AB = l$, hãy tìm phương trình chuyển động và vận tốc của con trượt B.

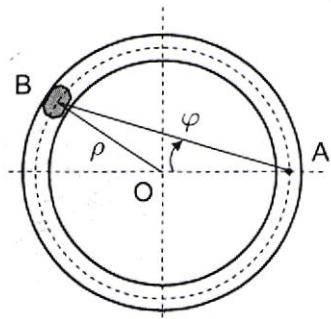
Đáp số: $x_B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}$, $v_B = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}$.



Hình bài 5-13



Hình bài 5-14



Hình bài 5-15

5-14. Con trượt A chuyển động theo phương ngang trong khi hai thanh $AB = l_1$ và $BC = l_2$ (cm) chuyển động trên mặt phẳng thẳng đứng. Cho biết khoảng cách

$x = 2 \sin(50t)$ cm, các góc $\theta_1 = 0, 2\pi \sin(50t)$; $\theta_2 = 0, 2\pi \sin(50t - \pi/3)$ rad. Hãy xác định các biểu thức vận tốc, gia tốc của điểm cuối C là hàm theo t .

Đáp số:

$$\dot{x}_C = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2), \dot{y}_C = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

$$\ddot{x}_C = \ddot{x} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\ddot{y}_C = l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

5-15. Xe ôtô B chuyển động theo một đường tròn có bán kính ρ và được quan sát bởi một người đứng tại vị trí điểm A như hình vẽ. Góc quan sát $\varphi = \varphi(t)$ là góc giữa bán kính ngang và đoạn AB. Hãy xác định các biểu thức vận tốc và gia tốc của xe là hàm theo φ , $\dot{\varphi}$ và $\ddot{\varphi}$.

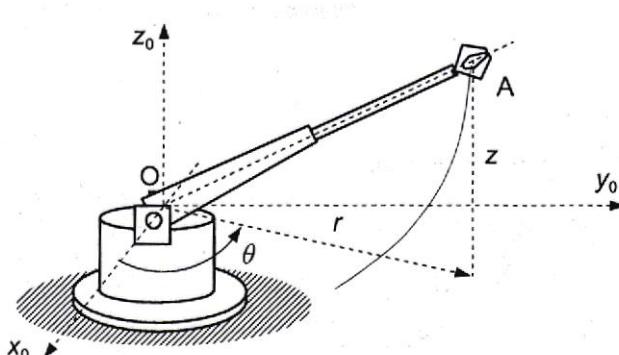
Đáp số:

$$\vec{v} = -2\rho\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_r + 2\rho\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_\varphi,$$

$$\vec{a} = -2\rho(\ddot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \vec{e}_r + 2\rho(\ddot{\varphi} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

5-16. Một robot mô tả trên hình vẽ được điều khiển để bàn kẹp A chuyển động theo một quỹ đạo định trước. Trong khi tọa độ z và góc quay θ thay đổi theo quy luật $\theta = 0,5t$ (rad) và $z = 3 \sin 4\theta$ (cm), khoảng cách $r = 90$ cm được giữ không đổi. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của bàn kẹp tại thời điểm $t = 3$ s.

Đáp số: $v_A \approx 45,37$ cm/s; $a_A \approx 22,75$ cm/s 2 .



Hình bài 5-16, 5-17

5-17. Sử dụng hình vẽ của bài 5-16. Quỹ đạo của bàn kẹp A được xác định theo quy luật $\theta = 0,5t$ (rad) và $z = 4t^2$ (cm), vận tốc $\dot{r} = 15$ cm/s là hằng số. Hãy xác định vận tốc và gia tốc bàn kẹp tại thời điểm $t = 3$ s với khoảng cách $r = 90$ cm.

Đáp số: $v_A \approx 53,16$ cm/s; $a_A \approx 28,20$ cm/s 2 .

Chương 6

CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RẮN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Khi vật rắn thực hiện chuyển động tịnh tiến, mọi điểm thuộc vật có quỹ đạo chuyển động giống nhau, vận tốc của các điểm thuộc vật bằng nhau, gia tốc các điểm bằng nhau.

Chuyển động của vật rắn tịnh tiến được khảo sát theo mô hình điểm (đã trình bày trong chương 5).

Vận tốc và gia tốc góc của vật quay quanh một trục cố định

Góc quay: $\varphi = \varphi(t)$

Vận tốc góc: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\omega = \dot{\varphi}$ (6.1)

Tốc độ n vòng/phút, $\omega = \frac{\pi n}{30}$ (rad/s) (6.2)

Gia tốc góc: $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{e}_z$, $\varepsilon = \ddot{\omega} = \ddot{\varphi}$ (6.3)

Khảo sát tính chất của chuyển động quay

Quay đều: $\varepsilon = 0$, quay biến đổi: $\varepsilon \neq 0$

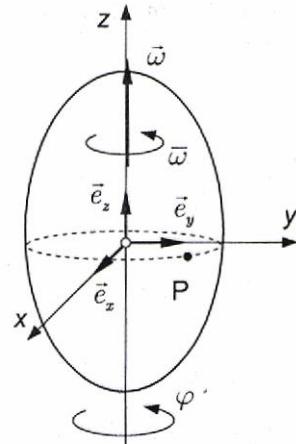
Quay biến đổi đều: $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{hằng số}$

- Quay nhanh dần đều: $\vec{\omega} \cdot \vec{\varepsilon}_0 > 0$ hoặc $\bar{\omega} \bar{\varepsilon}_0 > 0$

$$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon_0 (t - t_0) \quad (6.4)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 (t - t_0)^2 \quad (6.5)$$

- Quay chậm dần đều: $\vec{\omega} \cdot \vec{\varepsilon}_0 < 0$ hoặc $\bar{\omega} \bar{\varepsilon}_0 < 0$



$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon_0 (t - t_0) \quad (6.6)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 (t - t_0)^2 \quad (6.7)$$

Trong đó $\omega_0 = \omega(t_0)$, $\varphi_0 = \varphi(t_0)$.

Vận tốc và gia tốc của điểm P thuộc vật

$$\text{Vận tốc: } \vec{v}_P = R\omega \vec{e}_\tau \quad (6.8)$$

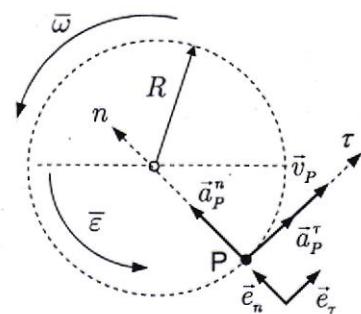
$$\text{Gia tốc: } \vec{a}_P = \vec{a}_P^\tau + \vec{a}_P^n \quad (6.9)$$

$$\vec{a}_P^\tau = \dot{v} \vec{e}_\tau = R\varepsilon \vec{e}_\tau$$

$$\vec{a}_P^n = R\omega^2 \vec{e}_n \quad (6.10)$$

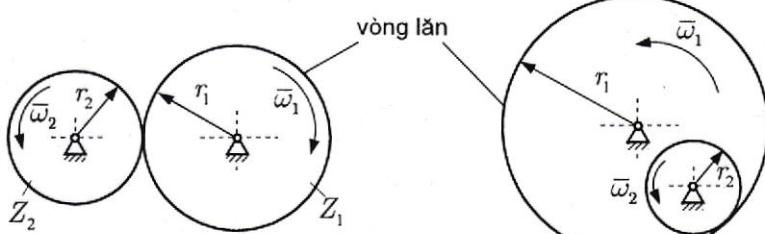
Vật quay nhanh dần, \vec{a}_P^τ cùng chiều \vec{v}_P

Vật quay chậm dần, \vec{a}_P^τ ngược chiều \vec{v}_P



Các hệ truyền động cơ khí đơn giản

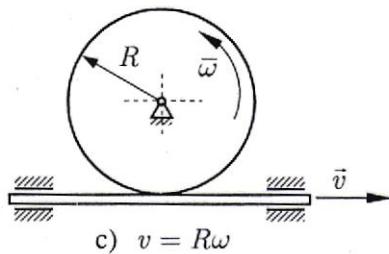
Truyền động bánh răng



$$a) \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$b) \frac{\bar{\omega}_1}{\bar{\omega}_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

Truyền động bánh răng-thanh răng



$$c) v = R\omega$$

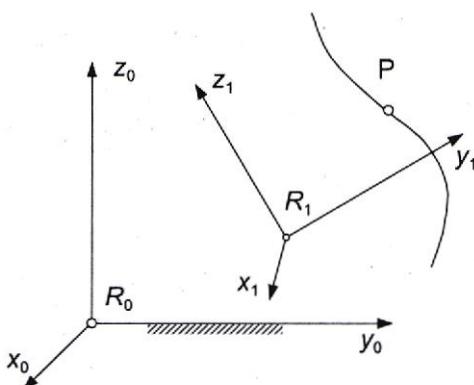
Chương 7

CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phân tích chuyển động

Hệ quy chiếu cố định $R_0 - \{x_0y_0z_0\}$, hệ quy chiếu động $R_1 - \{x_1y_1z_1\}$



Chuyển động tuyệt đối: Chuyển động của P được xác định trên hệ R_0 với vận tốc tuyệt đối \vec{v}_a và gia tốc tuyệt đối \vec{a}_a .

Chuyển động tương đối: Chuyển động của P được xác định trên hệ R_1 với vận tốc tương đối \vec{v}_r và gia tốc tương đối \vec{a}_r .

Chuyển động theo: Chuyển động của hệ R_1 đối với hệ R_0 có vận tốc góc theo $\vec{\omega}_e$ và gia tốc góc theo $\vec{\epsilon}_e$. Vận tốc \vec{v}_{P^*} và gia tốc \vec{a}_{P^*} xác định trên hệ R_0 của trung điểm P^* (một điểm thuộc hệ quy chiếu R_1 và có vị trí trùng với điểm P tại thời điểm khảo sát) được gọi là vận tốc theo $\vec{v}_e = \vec{v}_{P^*}$ và gia tốc theo $\vec{a}_e = \vec{a}_{P^*}$ của điểm P.

Định lý cộng vận tốc của điểm

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad (7.1)$$

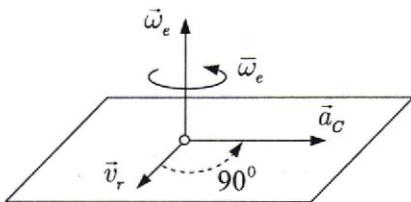
Định lý cộng gia tốc của điểm

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_C \quad (7.2)$$

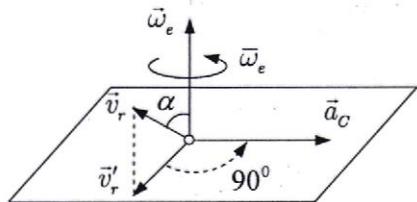
trong đó gia tốc Coriolis \vec{a}_C được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r. \quad (7.3)$$

Phương chiêu và trị số của gia tốc Coriolis \vec{a}_C được xác định nhờ hình vẽ dưới đây theo hai trường hợp.



$$\vec{v}_r \perp \vec{\omega}_e, a_C = 2\omega_e v_r$$



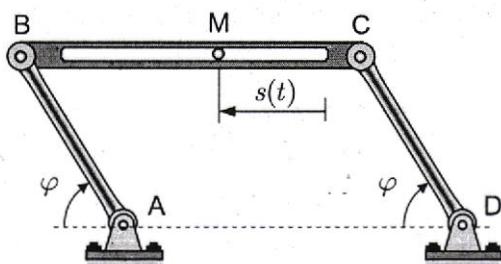
$$\angle(\vec{v}_r, \vec{\omega}_e) = \alpha, a_C = 2\omega_e v_r \sin \alpha$$

II. BÀI TẬP

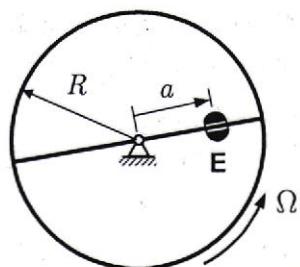
7-1. Tay quay AB của cơ cấu trên hình vẽ quay quanh trục cố định theo quy luật $\varphi = \pi t^2 / 16$ rad. Viên bi M chuyển động theo quy luật $s = t^2 / 8$ m trên rãnh thẳng của thanh truyền BC. Cho biết AB = DC = 0,5m. Hãy tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của M khi $t = 2$ s.

Đáp số: $v_a \approx 0,356$ m/s

$$a_a \approx 0,133 \text{ m/s}^2.$$



Hình bài 7-1



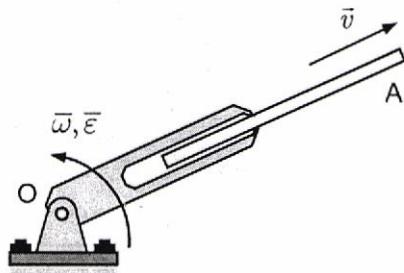
Hình bài 7-2

7-2. Đĩa tròn bán kính R quay đều với vận tốc góc Ω , điểm E trượt theo hướng đường kính của đĩa theo quy luật $a = R \sin \omega t$, trong đó ω là hằng số. Hãy tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm E.

Đáp số: $v_a = R \sqrt{\omega^2 \sin^2 \omega t + \Omega^2 \cos^2 \omega t}$,

$$a_a = R \sqrt{(\omega^4 + \Omega^4 + 2\omega^2\Omega^2) \sin^2 \omega t + 4\omega^2\Omega^2 \cos^2 \omega t}.$$

7-3. Cho mô hình kính thiên văn trên mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Một động cơ thủy lực điều chỉnh cho khoảng cách OA lớn dần với tốc độ $v = 0,5 \text{ m/s}$. Cho biết tại thời điểm khảo sát, kính quay xung quay trực qua O với vận tốc góc $\omega = 5 \text{ rad/s}$, gia tốc góc $\varepsilon = 1 \text{ rad/s}^2$ và khoảng cách OA = 1,5m. Hãy tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm cuối A.

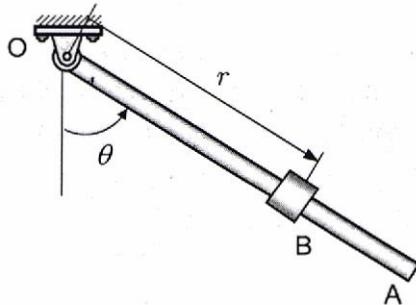


Hình bài 7-3

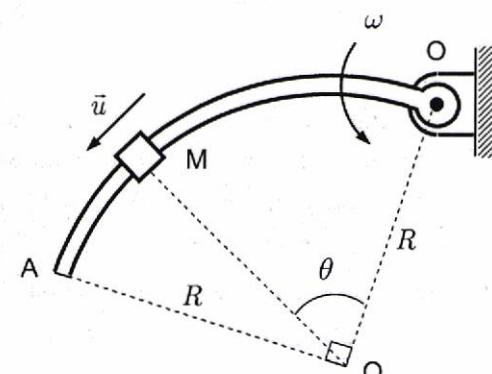
Đáp số: $v_a \approx 7,52 \text{ m/s}$; $a_a \approx 38,06 \text{ m/s}^2$.

7-4. Thanh OA quay xung quanh trục cố định qua O theo quy luật $\theta = t^3$ (rad). Tại cùng một thời điểm, con trượt B chuyển động dọc theo OA về phía đầu A với quy luật $r = 100t^2$ (mm), trong đó t được tính bằng giây. Hãy xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con trượt tại thời điểm $t = 1 \text{ s}$.

Đáp số: $v_a \approx 0,36 \text{ m/s}$; $a_a \approx 1,93 \text{ m/s}^2$.



Hình bài 7-4



Hình bài 7-5

7-5. Thanh OA có hình dạng một phần tư đường tròn bán kính R , quay đều xung quanh trục qua O với vận tốc góc ω . Con trượt M chuyển động với vận tốc tương đối u (so với thanh) là hằng số. Hãy xác định biểu thức vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối của M là hàm theo góc θ .

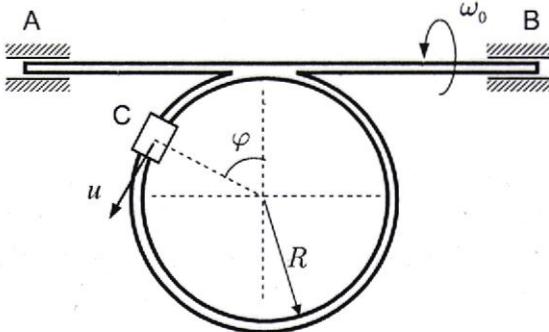
Đáp số: $v_{ax} = u + 2R\omega \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $v_{ay} = R\omega \sin \theta$

$$a_{ax} = -R\omega^2 \sin \theta, a_{ay} = 2u\omega + \frac{u^2}{R} + 2R\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

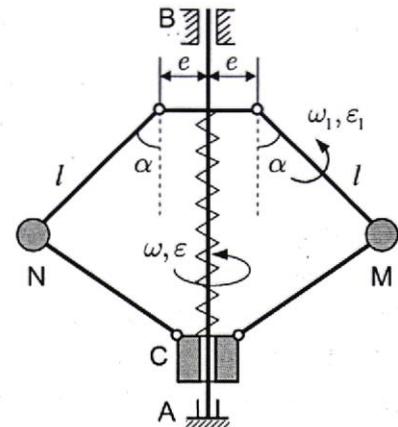
7-6. Vành tròn bán kính R quay đều quanh trục nằm ngang AB với vận tốc góc không đổi ω_0 . Con trượt C di chuyển trên vòng với vận tốc tương đối u là hằng số. Hãy xác định vận tốc và gia tốc (tuyệt đối) của con trượt C là hàm theo góc φ .

Đáp số: $v_a = \sqrt{u^2 + R^2\omega^2 (1 - \cos \varphi)^2}$,

$$a_a = \sqrt{\left[\frac{u^2}{R} \cos \varphi - R\omega^2 (1 - \cos \varphi) \right]^2 + 4u^2\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$



Hình bài 7-6

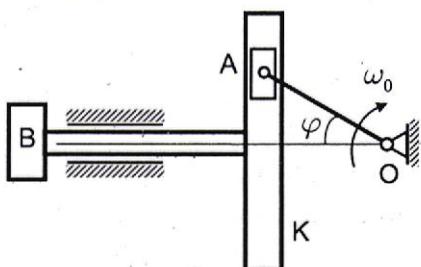


Hình bài 7-7

7-7. Cơ cấu điều tiết ly tâm gồm hai quả văng M, N và con chạy C. Tại thời điểm khảo sát với góc $\alpha = 45^\circ$, hệ quay xung quanh trục AB thẳng đứng với vận tốc góc $\omega = \pi / 2$ rad/s và gia tốc góc $\varepsilon = 1$ rad/s². Thanh treo quả văng có vận tốc góc $\omega_1 = \pi / 2$ rad/s và gia tốc góc $\varepsilon_1 = 0,4$ rad/s². Cho biết $l = 50$ cm, $e = 5$ cm, hãy xác định vận tốc và gia tốc của quả văng tại thời điểm đó.

Đáp số: $v_a \approx 100,9$ cm/s; $a_a \approx 293,7$ cm/s².

7-8. Tay quay OA = l , quay đều quanh O với vận tốc góc ω_0 , làm con trượt A chuyển động trong rãnh của culit K, tạo ra chuyển động theo phương ngang của culit K cùng pit-tông B. Lúc khảo sát $\varphi = 30^\circ$. Hãy tìm vận tốc của culit K, vận tốc tương đối của



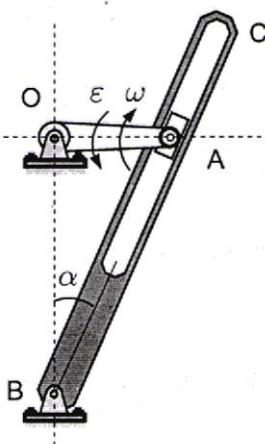
Hình bài 7-8

con trượt A đối với K, gia tốc của culit K.

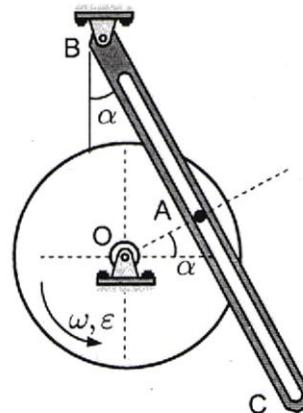
$$\text{Đáp số: } v_r = \frac{l\omega_0\sqrt{3}}{2}, v_K = \frac{l\omega_0}{2}, a_K = \frac{l\omega_0^2\sqrt{3}}{2}.$$

7-9. Con trượt A của cơ cấu được mô tả trên hình vẽ có thể trượt dọc theo rãnh của cần lắc BC. Khi tay quay OA = 0,5 (m) có vị trí nằm ngang, OA có vận tốc góc $\omega = 6 \text{ rad/s}$, gia tốc góc $\varepsilon = 2 \text{ rad/s}^2$ và góc $\alpha = 30^\circ$. Hãy xác định vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc BC tại thời điểm đó.

$$\text{Đáp số: } \omega_{BC} = 1,5 \text{ rad/s}; \varepsilon_{BC} = 0,5 \text{ rad/s}^2.$$



Hình bài 7-9



Hình bài 7-10

7-10. Đĩa quay xung quanh trục cố định qua O được gắn chốt A để có thể truyền chuyển động cho cần lắc BC như hình vẽ. Tại thời điểm khảo sát, đĩa có vận tốc góc $\omega = 6 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon = 10 \text{ rad/s}^2$, khoảng cách $BA = l = 0,75 \text{ m}$ và góc $\alpha = 30^\circ$. Cho biết $OA = r = 0,3 \text{ m}$. Hãy xác định:

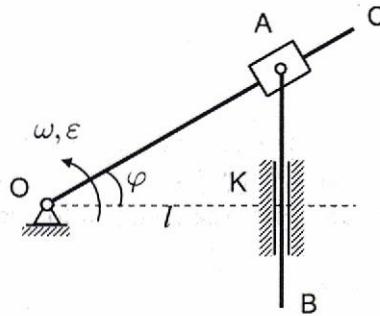
- Vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc BC.
- Vận tốc tương đối và gia tốc tương đối của chốt A so với BC.

$$\text{Đáp số: } \omega_{BC} = 0; \varepsilon_{BC} = 14,4 \text{ rad/s}^2$$

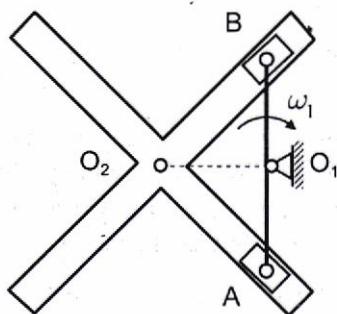
$$v_r = 1,8 \text{ m/s}; a_r = 3 \text{ m/s}^2.$$

7-11. Tay quay OC của cơ cấu culit quay xung quanh trục qua O và truyền chuyển động cho thanh AB theo rãnh K nhờ con chạy A như hình vẽ. Xác định vận tốc, gia tốc của thanh AB. Biết OK = l , tại thời điểm khảo sát OC có vận tốc góc ω , gia tốc góc ε và tạo với OK một góc φ .

$$\text{Đáp số: } v_{AB} = \frac{l\omega}{\cos^2 \varphi}, a_{AB} = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \varepsilon + \frac{2l \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \omega^2.$$



Hình bài 7-11

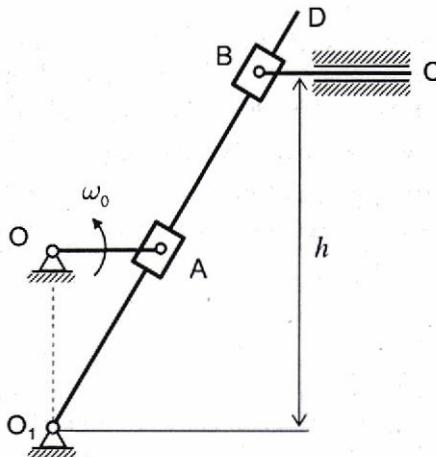


Hình bài 7-12

7-12. Một cơ cấu như hình vẽ có thể truyền chuyển động quay giữa hai trục song song. Tay quay AB quay đều quanh trục O_1 với vận tốc góc ω_1 làm cho máng hình chữ thập quay quanh trục O_2 . Biết $O_1O_2 = O_1A = O_1B = b$. Hãy tìm vận tốc góc và gia tốc góc của máng chữ thập tại thời điểm O_1O_2 vuông góc với AB.

Đáp số: $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$.

7-13. Cơ cấu mô tả trên hình vẽ được sử dụng trong hệ truyền động của các máy đóng gói sản phẩm. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 . Hãy xác định vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc O_1D và vận tốc, gia tốc của thanh BC ở thời điểm mà tay quay OA nằm ngang về bên phải. Cho biết $OA = r$, $OO_1 = r\sqrt{3}$, $h = 2r\sqrt{3}$.

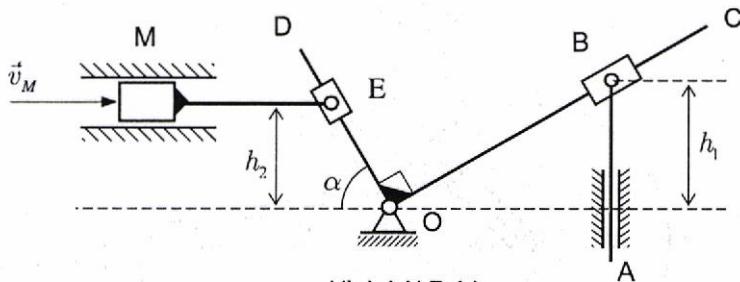


Hình bài 7-13

Đáp số: $\omega_{O_1D} = \frac{\omega_0}{4}$, $\varepsilon_{O_1D} = \frac{\omega_0^2\sqrt{3}}{8}$, $v_{BC} = \frac{2r\omega_0}{\sqrt{3}}$, $a_{BC} = \frac{2}{3}r\omega_0^2$.

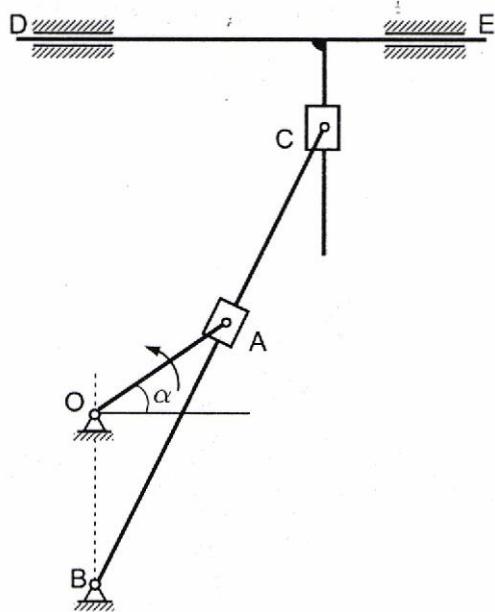
7-14. Tay máy được điều khiển bằng pit-tông M trượt trong xy lanh ngang. Tay quay COD (OC vuông góc OD) quay quanh trục cố định O. Con trượt B nối với thanh AB thẳng đứng, con trượt E nối với thanh EM, khoảng cách $h_2 = 15$ cm. Khi M có vận tốc $v_M = 10$ cm/s, gia tốc $a_M = 2$ cm/s² (cùng chiều hướng sang phải), khoảng cách $h_1 = 20$ cm, góc $\alpha = 60^\circ$, hãy xác định:

- Vận tốc góc của thanh OC, vận tốc của thanh AB;
- Gia tốc góc của thanh OC.



Hình bài 7-14

Đáp số: $\omega_{OC} = 0,5$ rad/s; $v_{AB} = 23$ cm/s; $\varepsilon_{OC} = 0,39$ rad/s².



Hình bài 7-15

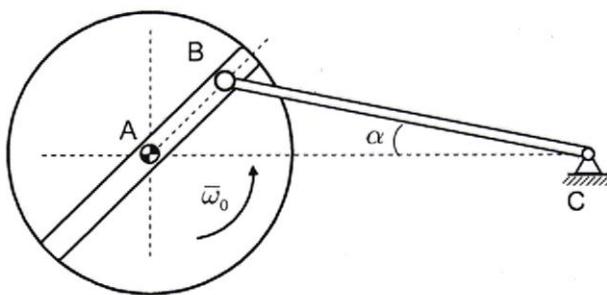
7-15. Cơ cấu truyền động máy của bào ngang (dạng đơn giản) được mô tả như hình vẽ. Tay quay OA = r quay đều quanh trục qua O với vận tốc góc ω_0 , DE chuyển động tịnh tiến theo phương ngang, đường trượt của con trượt C hướng thẳng đứng.

Cho biết các khoảng cách $OB = r$ và $BC = 2r\sqrt{3}$. Tại thời điểm góc $\alpha = \pi/6$, hãy tìm vận tốc và gia tốc của DE.

$$\text{Đáp số: } v_{DE} = \frac{3}{2} r\omega_0, a_{DE} = \frac{r\sqrt{3}}{4} \omega_0^2.$$

7-16. Đĩa quay đều xung quanh trục cố định với vận tốc góc ω_0 . Cho biết $AC = l$ và $BC = 0,8l$. Hãy tìm vận tốc góc và gia tốc góc của BC tại thời điểm $\alpha = 20^\circ$.

$$\text{Đáp số: } \omega_{BC} \approx 1,225 \omega_0; \varepsilon_{BC} \approx 5,95 \omega_0^2.$$



Hình bài 7-16

Chương 8

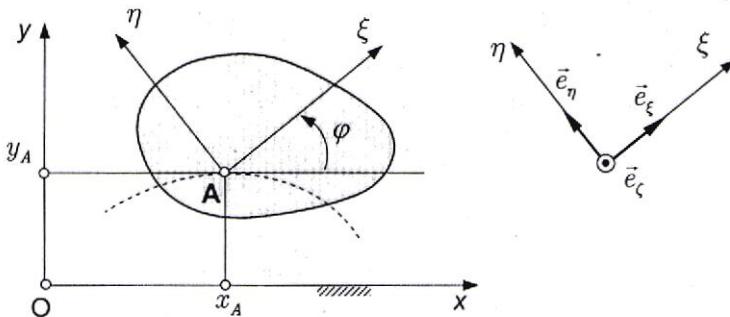
CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương trình chuyển động của vật rắn phẳng trên mặt phẳng

Hệ tọa độ cố định $\{Oxyz\}$.

Hệ tọa độ động gắn với vật $\{A\xi\eta\zeta\}$, trong đó trục z song song với trục ζ và cùng vuông góc với mặt phẳng chuyển động. Điểm gốc A được chọn tùy ý và gọi là điểm cực.



Phương trình chuyển động của vật rắn phẳng có dạng:

$$x_A = x_A(t), \quad y_A = y_A(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (8.1)$$

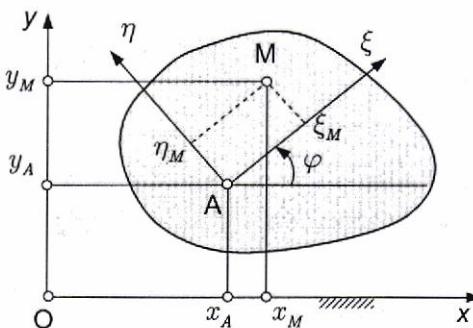
trong đó: x_A, y_A là tọa độ của điểm cực A trên hệ tọa độ cố định, φ là góc quay tương đối của vật (góc giữa trục x và trục ξ như hình vẽ).

Vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn phẳng

$$\text{Vận tốc góc: } \bar{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta \quad (8.2)$$

$$\text{Gia tốc góc: } \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} \vec{e}_\zeta \quad (8.3)$$

Phương trình xác định vị trí của một điểm thuộc vật rắn phẳng



Vị trí của điểm M trên hệ tọa độ cố định được xác định bởi công thức dưới dạng ma trận:

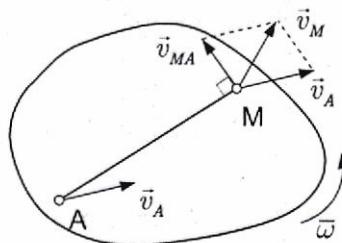
$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_M \\ \eta_M \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

trong đó: ξ_M, η_M là tọa độ của điểm M trên hệ tọa độ động gắn với vật.

Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc vật rắn phẳng

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad (8.5)$$

Trong đó $\vec{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overrightarrow{AM}$ (\vec{v}_{MA} đặt tại M và có phương vuông góc với AM, chiều hướng theo chiều quay của $\bar{\omega}$, trị số $v_{MA} = AM \cdot \omega$).



Quan hệ về hình chiếu vận tốc:

$$hc_{AM}(\vec{v}_M) = hc_{AM}(\vec{v}_A) \quad (8.6)$$

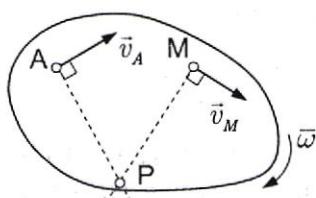
Tâm vận tốc tức thời

Định nghĩa: Tâm vận tốc tức thời P có vận tốc $v_p = 0$ tại thời điểm khảo sát.

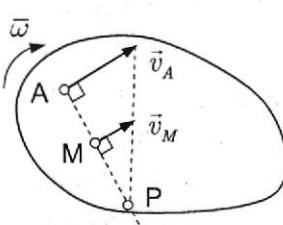
Quan hệ vận tốc giữa tâm vận tốc tức thời P và các điểm khác thuộc vật:

$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_M}{MP} = \omega \quad (8.7)$$

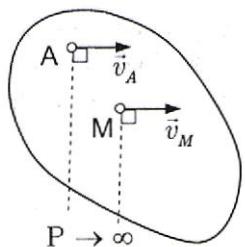
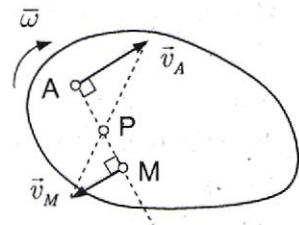
Quy tắc tìm vị trí của tâm vận tốc tức thời P của vật rắn phẳng được minh họa bằng các hình dưới đây



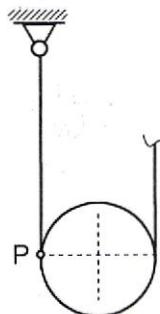
Trường hợp tổng quát



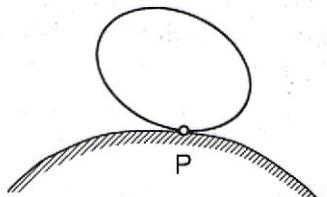
Trường hợp $\vec{v}_A // \vec{v}_M$



Trường hợp $\vec{v}_A = \vec{v}_M, \omega = 0$



Dây treo cố định



Vật lăn không trượt

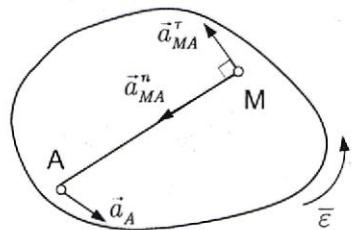
Quan hệ gia tốc giữa hai điểm thuộc vật rắn phẳng

$$\ddot{a}_M = \ddot{a}_A + \ddot{a}_{MA}^\tau + \ddot{a}_{MA}^n \quad (8.8)$$

Trong đó:

$\ddot{a}_{MA}^\tau = \ddot{\epsilon} \times \overrightarrow{AM}$ (\ddot{a}_{MA}^τ có phương vuông góc với \overrightarrow{AM} , chiều hướng theo chiều quay của $\ddot{\epsilon}$, trị số $a_{MA}^\tau = AM \cdot \ddot{\epsilon}$).

$\ddot{a}_{MA}^n = \ddot{\omega} \times \vec{v}_{MA}$ (\ddot{a}_{MA}^n hướng từ M về A và có trị số $a_{MA}^n = AM \cdot \ddot{\omega}^2$).



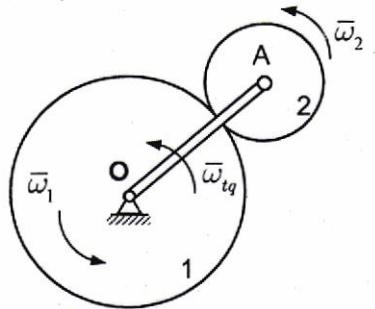
Tính toán vận tốc góc của cơ cấu vi sai phẳng bằng công thức Willise

Quan hệ giữa các vận tốc góc của cơ cấu vi sai phẳng theo công thức Willise có dạng:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1} \quad (8.9)$$

Trong đó $\bar{\omega}_{tq}$ là vận tốc góc của tay quay OA, r_1 và r_2 là các bán kính vòng lăn, Z_1 và Z_2 là số răng của bánh răng 1 và 2. Công thức (8.9) có dấu (+) nếu bánh 1 và bánh 2 ăn khớp trong, dấu (-) nếu ăn khớp ngoài.

Để áp dụng đúng công thức (8.9) ta cần quy ước một chiều quay tham chiếu làm chiều dương (thí dụ chiều của $\bar{\omega}_{tq}$ là chiều dương). Vận tốc góc $\bar{\omega}_i$ của bánh i có chiều ngược với chiều dương quy ước sẽ nhận giá trị âm ($\bar{\omega}_i < 0$).

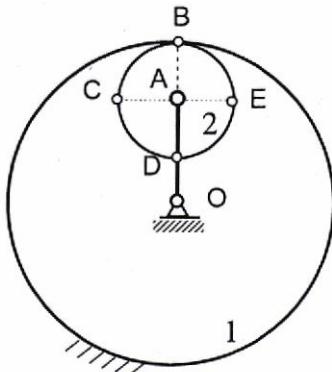


II. BÀI TẬP

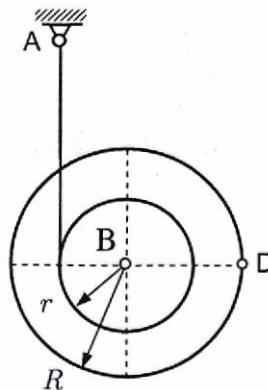
8-1. Cơ cấu bánh răng hành tinh trên hình vẽ có tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0 . Bánh răng 2 bán kính r ăn khớp trong với bánh răng 1 cố định có bán kính $R = 3r$. Ký hiệu BD và CE là các đường kính của bánh răng 2, hãy xác định:

- Vận tốc của các điểm C và D;
- Gia tốc của các điểm B và E.

Đáp số: $v_D = 4r\omega_0$, $v_C = 2r\sqrt{2}\omega_0$, $a_B = 6r\omega_0^2$, $a_E = 2r\omega_0^2\sqrt{5}$.



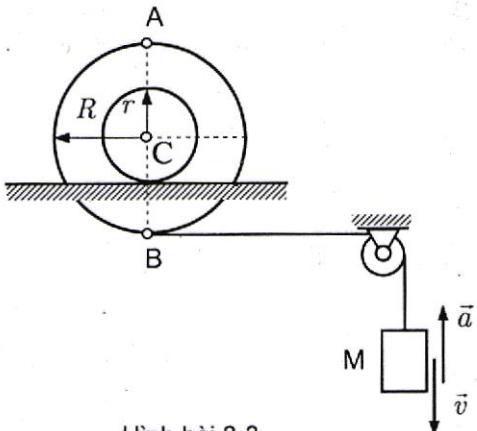
Hình bài 8-1



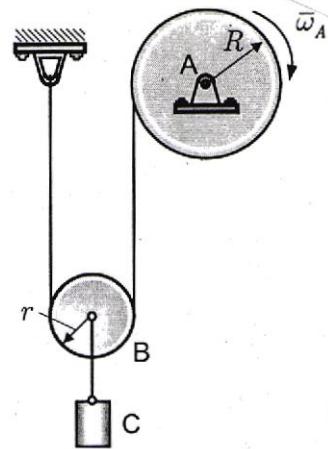
Hình bài 8-2

8-2. Tại thời điểm khảo sát, tâm B của trụ chuyển động với vận tốc $v_B = 0,6 \text{ m/s}$ và gia tốc $a_B = 2,4 \text{ m/s}^2$ cùng hướng xuống phía dưới. Tìm gia tốc của điểm D, cho biết các bán kính $r = 0,08 \text{ m}$ và $R = 0,2 \text{ m}$.

Đáp số: $a_D \approx 14 \text{ m/s}^2$.



Hình bài 8-3



Hình bài 8-4

8-3. Con lăn C có hai tầng, bán kính lăn là $r = 20$ cm, bán kính cuộn dây là $R = 40$ cm. Khi vật M chuyển động xuống phía dưới chạm dập dều với gia tốc $a = 5 \text{ cm/s}^2$ làm cho con lăn chuyển động lăn không trượt trên nền ngang. Tại thời điểm khảo sát, vật M có vận tốc $v = 10 \text{ cm/s}$. Hãy tìm:

- Vận tốc góc của con lăn, vận tốc tâm C của con lăn và vận tốc điểm A;
- Gia tốc các điểm B, C.

Đáp số: $\omega = 0,5 \text{ rad/s}$; $v_C = 10 \text{ cm/s}$; $v_A = 30 \text{ cm/s}$.

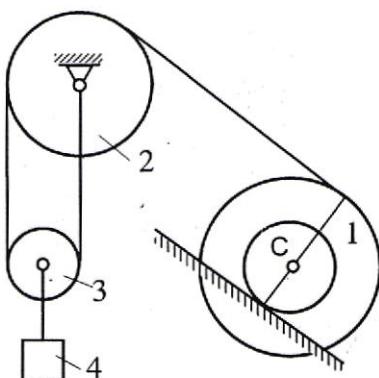
$$a_B \approx 11,18 \text{ cm/s}^2; a_C = 5 \text{ cm/s}^2.$$

8-4. Trụ quấn dây A quay nhanh dần với gia tốc góc không đổi $\varepsilon_A = 3 \text{ rad/s}^2$. Tại thời điểm khảo sát, trụ A đạt vận tốc góc $\omega_A = 30 \text{ rad/s}$. Cho biết các bán kính $R = 15 \text{ cm}$, $r = 8 \text{ cm}$. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của vật nâng C tại thời điểm đó.

Đáp số: $v_C = 225 \text{ cm/s}$; $a_C = 22,5 \text{ cm/s}^2$.

8-5. Con lăn hai tầng lăn không trượt trên nền nghiêng, bán kính quấn dây là R , bán kính lăn là r . Tại thời điểm khảo sát, tâm C của con lăn có vận tốc v_0 và gia tốc a_0 cùng hướng xuống phía dưới. Giả thiết dây đủ dài, nhánh dây nối con lăn 1 với trụ 2 song song với mặt nghiêng, hai nhánh dây nối trụ 2 và ròng rọc 3 song song với nhau. Hãy tìm vận tốc và gia tốc của vật 4.

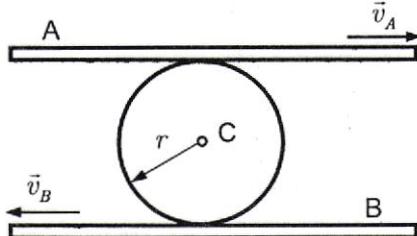
Đáp số: $v_4 = \frac{R+r}{2r} v_0$, $a_4 = \frac{R+r}{2r} a_0$.



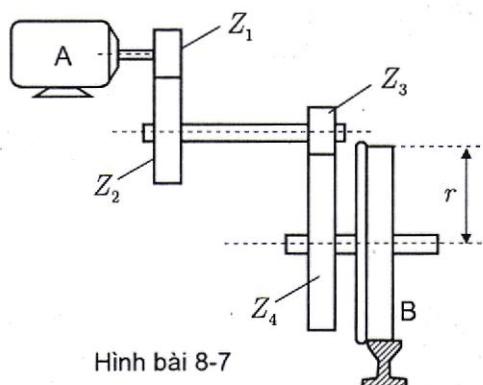
Hình bài 8-5

8-6. Con lăn bán kính $r = 0,125$ m có thể lăn không trượt trên bề mặt của hai tấm A và B. Nếu hai tấm dịch chuyển theo phương ngang với vận tốc không đổi $v_A = 0,25$ m/s, $v_B = 0,4$ m/s như hình vẽ, hãy xác định vận tốc góc của con lăn, vận tốc tâm C.

Đáp số: $\omega = 2,6$ rad/s; $v_C = 0,075$ m/s.



Hình bài 8-6



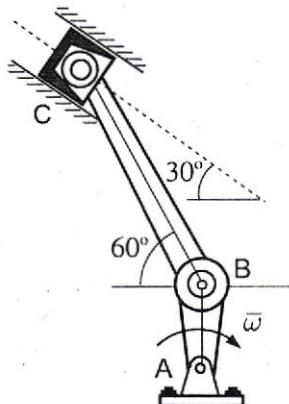
Hình bài 8-7

8-7. Sơ đồ một hệ truyền động của cầu trục được mô tả trên hình vẽ. Để truyền chuyển động từ động cơ A có vận tốc góc $\omega_A = 150$ rad/s đến bánh xe B, người ta sử dụng một hộp số bánh răng hai cấp. Cho biết số răng của các bánh răng là $Z_1 = Z_3 = 17$, $Z_4 = 85$. Bán kính của bánh xe B là $r = 30$ cm. Giả thiết bánh xe lăn không trượt so với đường ray. Hãy xác định số răng Z_2 nếu vận tốc của tâm bánh xe là $v = 180$ m/phút.

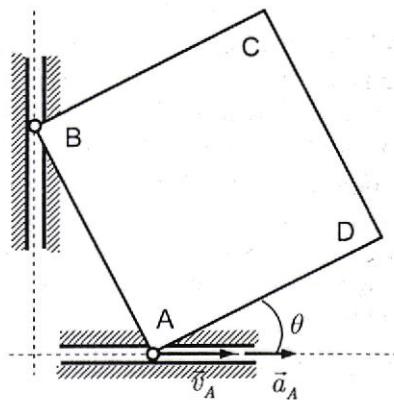
Đáp số: $Z_2 = 51$.

8-8. Cơ cấu của máy nén khí một xy-lanh bao gồm tay quay AB = 0,2m, thanh truyền có độ dài BC = 0,4 m. Tay quay AB quay đều với vận tốc góc $\omega = 5$ rad/s. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của pit-tông C tại vị trí khảo sát như trên hình vẽ.

Đáp số: $v_C \approx 0,577$ m/s; $a_C \approx 5,96$ m/s².



Hình bài 8-8



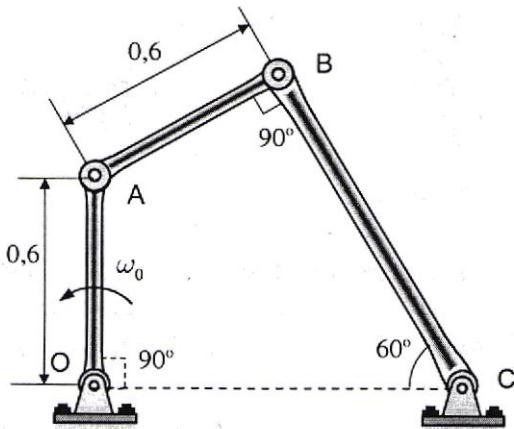
Hình bài 8-9

8-9. Tấm vuông ABCD có cạnh 0,3 m được lắp chốt trượt để các đỉnh A, B có thể trượt theo rãnh ngang và thẳng đứng. Tại thời điểm khảo sát, $\theta = 30^\circ$, điểm A có vận tốc $v_A = 8 \text{ m/s}$ và gia tốc $a_A = 2 \text{ m/s}^2$. Hãy xác định vận tốc các điểm B, D và gia tốc của điểm B.

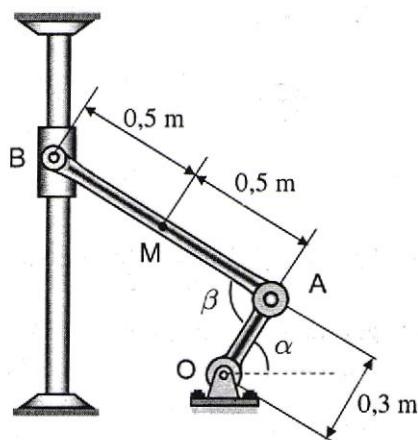
Đáp số: $v_B \approx 4,62 \text{ m/s}$; $v_D \approx 8,69 \text{ m/s}$; $a_B \approx 329,56 \text{ m/s}^2$.

8-10. Cơ cấu bốn khâu bản lề phẳng ở vị trí như hình vẽ. Thanh OA quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. Xác định vận tốc góc và gia tốc góc của thanh BC (các kích thước trên hình đo bằng mét).

Đáp số: $\omega_{BC} = 5 \text{ rad/s}$; $\varepsilon_{BC} = 43,30 \text{ rad/s}^2$.



Hình bài 8-10



Hình bài 8-11

8-11. Tay quay OA của cơ cấu quay đều thuận chiều kim đồng hồ với vận tốc góc $\omega_{OA} = 6 \text{ rad/s}$, các kích thước khác cho trên hình vẽ. Tại thời điểm các góc $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, hãy tìm:

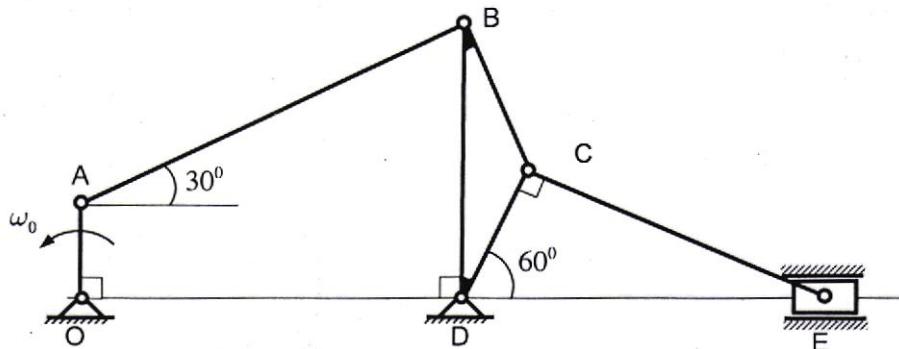
- Vận tốc của điểm M và vận tốc con trượt B;
- Gia tốc của con trượt B.

Đáp số: $v_B \approx 2,55 \text{ m/s}$; $v_M \approx 2,01 \text{ m/s}$; $a_B \approx 4,58 \text{ m/s}^2$.

8-12. Tại thời điểm khảo sát, cơ cấu sáu khâu phẳng có vị trí như trên hình vẽ. Tay quay OA và cạnh BD cùng có vị trí thẳng đứng, DC vuông góc với CE. Biết OA quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$, độ dài OA = r = 20 cm, khung BDC là tam giác cân có cạnh đáy BD = 3r. Hãy xác định:

- Vận tốc góc của vật BCD, vận tốc của con trượt E;
- Gia tốc của con trượt E.

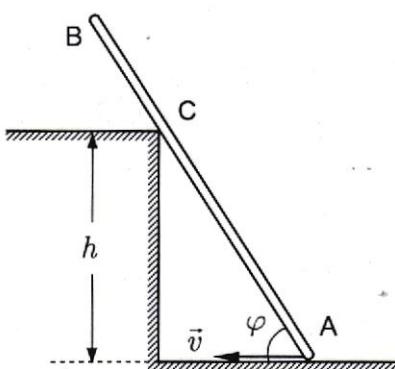
Đáp số: $\omega_D = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$; $v_E \approx 133,33 \text{ cm/s}$; $a_E = 598,73 \text{ cm/s}^2$.



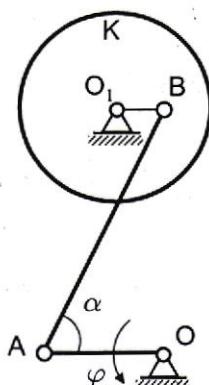
Hình bài 8-12

8-13. Thanh AB luôn tiếp xúc với bậc tại hai điểm A và C như hình vẽ. Cho biết điểm A có vận tốc không đổi $v_A = v$. Bậc có độ cao h . Hãy xác định biểu thức vận tốc góc và gia tốc góc của thanh là hàm theo góc nghiêng φ . Tìm phương trình quỹ đạo các tâm vận tốc tức thời (đường tâm vận tốc) của AB.

Đáp số: $\omega = \frac{v}{h} \sin^2 \varphi$, $\epsilon = 2 \frac{v^2}{h^2} \sin^3 \varphi \cos \varphi$, $y_P = \frac{x_P^2}{h} + h$.



Hình bài 8-13



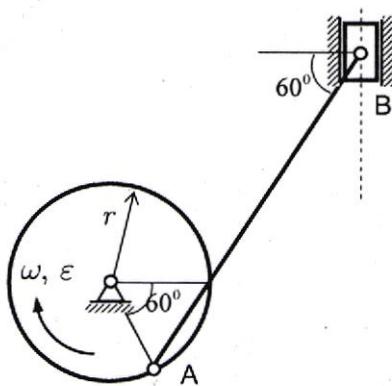
Hình bài 8-14

8-14. Thanh OA dao động theo quy luật $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi t}{2}$ rad làm cho đĩa K quay quanh trục O₁ như hình vẽ. Biết OA = 2O₁B = 24cm. Khi t = 4s, thanh OA và phương của O₁B cùng có vị trí ngang, góc $\alpha = 60^\circ$. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc đĩa K tại thời điểm đó.

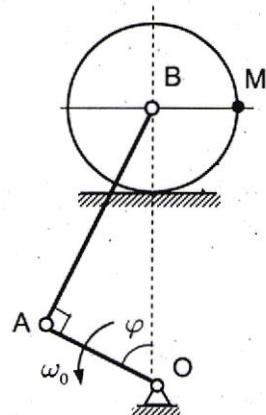
Đáp số: $\omega_K = \frac{\pi^2}{6} \text{ rad/s}; \varepsilon_K = \frac{\sqrt{3}\pi^4}{72} \text{ rad/s}^2$.

8-15. Tại thời điểm khảo sát, thanh truyền AB có vị trí như trên hình vẽ. Cho biết r = 0,3 m và AB = l = 1,5 m, vận tốc góc $\omega = 2 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon = 6 \text{ rad/s}^2$. Hãy tìm vận tốc và gia tốc của con trượt B.

Đáp số: $v_B = 0,6 \text{ m/s}; a_B \approx 1,384 \text{ m/s}^2$.



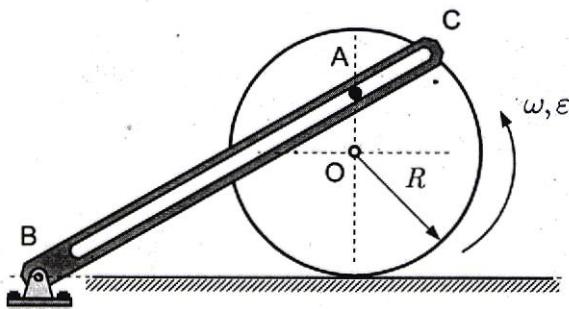
Hình bài 8-15



Hình bài 8-16

8-16. Tay quay OA = $\sqrt{3}$ m quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = \sqrt{3} \text{ rad/s}$ làm cho đĩa bán kính R = 1 m lăn không trượt trên nền ngang. Tại thời điểm $\varphi = 60^\circ$ và OA vuông góc với AB, tìm vận tốc, gia tốc của hai điểm B và M.

Đáp số: $v_B = 6 \text{ m/s}; v_M = 6\sqrt{2} \text{ m/s}; a_B = 18 \text{ m/s}^2; a_M = 56,92 \text{ m/s}^2$.



Hình bài 8-17

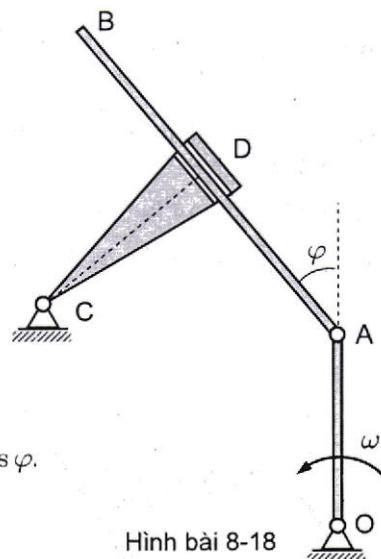
8-17. Đĩa lăn không trượt trên nền ngang, trên đĩa có gắn chốt A và lắp trọn vào rãnh thẳng của thanh BC. Tại thời điểm khảo sát, đĩa có vận tốc góc $\omega = 2 \text{ rad/s}$, gia tốc góc $\varepsilon = 4 \text{ rad/s}^2$ và $AB = 2,4\text{m}$. Biết đĩa có bán kính $R = 0,8\text{ m}$, $OA = R/2$. Hãy tìm vận tốc góc và gia tốc góc của BC.

Đáp số: $\omega_{BC} = 0,5 \text{ rad/s}$; $\varepsilon_{BC} \approx 3,09 \text{ rad/s}^2$.

8-18. Tay quay OA của cơ cấu bốn khâu phẳng trên hình vẽ quay đều với vận tốc góc ω . Thanh AB liên kết với CD bởi khớp trượt tại D, CD vuông góc với AB. Biết các độ dài $OA = r$, $AB = 2l$, $CD = r$. Tại thời điểm khảo sát, OA thẳng đứng và $AD = BD$. Hãy xác định vận tốc góc của CD, vận tốc các điểm B, D là hàm theo góc quay φ .

Gợi ý: Vận tốc góc của AB và CD là bằng nhau.

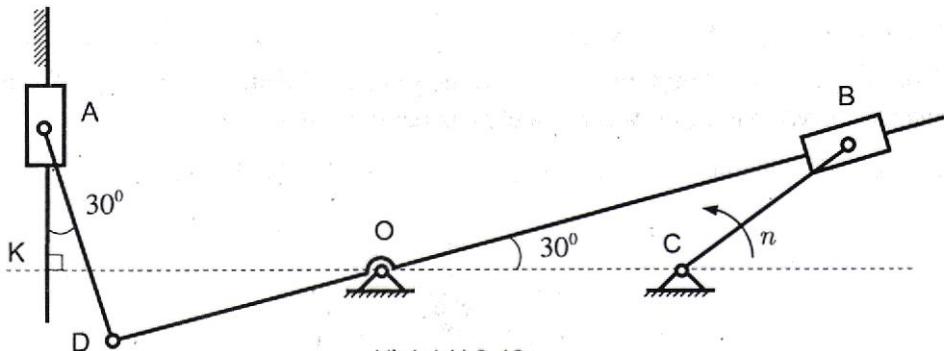
Đáp số: $\omega_{CD} = \frac{r}{l} \omega \cos \varphi$, $v_B = r\omega$, $v_D = \frac{r^2}{l} \omega \cos \varphi$.



Hình bài 8-18

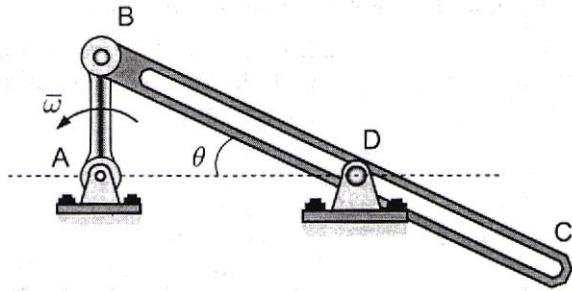
8-19. Một cơ cấu máy tại thời điểm khảo sát có vị trí như hình vẽ. Cho biết BC quay đều với tốc độ $n = 1200 \text{ vòng/phút}$, độ dài $OC = CB = OD = DA = 60\text{cm}$. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của con trượt A.

Đáp số: $v_A \approx 43,53 \text{ m/s}$; $a_A \approx 911,71 \text{ m/s}^2$.



Hình bài 8-19

8-20. Tay quay AB của cơ cấu quay đều với vận tốc góc ω . Một chốt cố định được gắn tại D, chốt này được lắp trọn vào rãnh thẳng của thanh BC như hình vẽ. Cho biết $AB = r$. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của BC khi AB vuông góc với AD và góc $\theta = 30^\circ$.

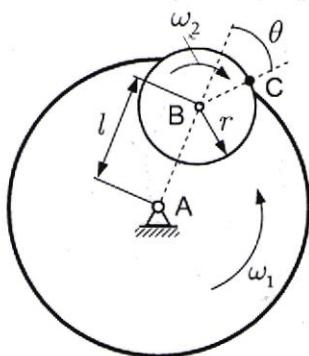


Hình bài 8-20

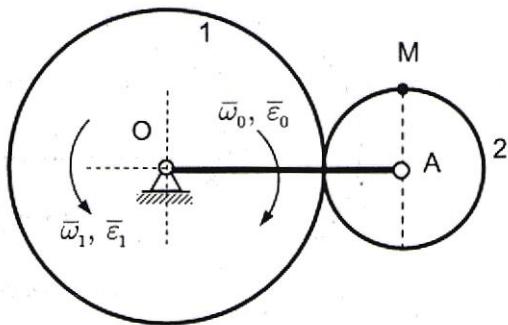
Đáp số: $\omega_{BC} = \frac{\omega}{4}$, $\varepsilon_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{8} r\omega^2$.

- 8-21.** Bàn tròn quay đều quanh trục cố định A với vận tốc góc $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$, trên bàn lắp trực quay của đĩa. Khoảng cách giữa hai trục quay $AB = l = 50 \text{ cm}$. Đĩa có bán kính $r = 10 \text{ cm}$ và quay tương đối quanh B với vận tốc góc không đổi $\omega_2 = 60 \text{ rad/s}$ so với bàn. Hãy xác định vận tốc và gia tốc của điểm C trên vành đĩa tại vị trí $\theta = 30^\circ$.

Đáp số: $v_C \approx 3,56 \text{ m/s}$; $a_C \approx 313,39 \text{ m/s}^2$.



Hình bài 8-21



Hình bài 8-22

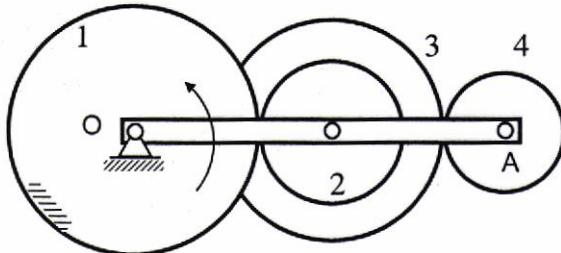
- 8-22.** Tay quay OA của bộ truyền bánh răng vi sai có vận tốc góc $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon_0 = 3 \text{ rad/s}^2$. Bánh răng 1 có vận tốc góc $\omega_1 = 3\omega_0$ và gia tốc góc $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$ với chiều được biểu thị trên hình vẽ. Biết $R_1 = 2R_2 = 2R$, hãy tìm vận tốc góc và gia tốc góc của bánh răng 2 và vận tốc, gia tốc của điểm M.

Đáp số: $\omega_2 = 3\omega_0$, $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$, $v_M = 3\sqrt{2}R\omega_0$.

$$a_{Mx} = 3R(\varepsilon_0 + \omega_0^2), \quad a_{My} = 3R(\varepsilon_0 + 3\omega_0^2).$$

8-23. Tay quay OA quay quanh trục O với tốc độ quay $n_0 = 30$ vòng/phút. Trên tay quay có lắp các trục của các bánh răng, trong đó bánh răng 2 và bánh răng 3 gắn cứng với nhau. Bánh răng 1 cố định. Biết số răng của các bánh răng là $Z_1 = 60, Z_2 = 40, Z_3 = 50, Z_4 = 25$. Xác định tốc độ quay của bánh răng 3 và 4.

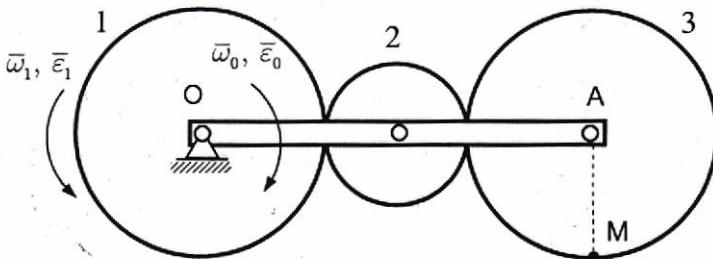
Đáp số: $n_3 = 30, n_4 = 60$ vòng/phút.



Hình bài 8-23

8-24. Bộ truyền bánh răng vi sai có các bán kính bánh răng $r_1 = r_3 = 2r_2 = 2r$. Cho biết tay quay OA có vận tốc góc ω_0 và gia tốc góc ε_0 với chiều cho trên hình vẽ. Bánh răng 1 quay ngược chiều tay quay với $\omega_1 = \omega_0, \varepsilon_1 = \varepsilon_0$. M là một điểm nằm trên vành bánh răng 3, AM vuông góc với OA. Xác định vận tốc và gia tốc của M.

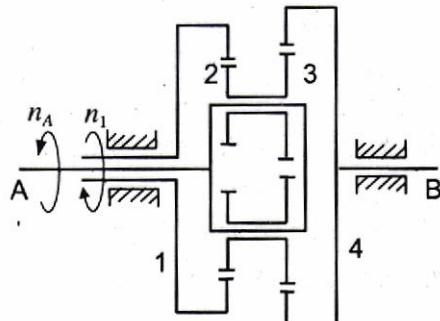
Đáp số: $v_M = 2r\omega_0\sqrt{10}, a_{Mx} = 2r(\varepsilon_0 - 3\omega_0^2), a_{My} = 2r(\omega_0^2 - 3\varepsilon_0)$.



Hình bài 8-24

8-25. Trục dẫn A của hộp biến tốc quay với tốc độ $n_A = 1200$ vòng/phút. Bánh răng 1 lắp trọn trên trục dẫn quay với tốc độ $n_1 = 160$ vòng/phút. Tìm tốc độ quay của trục bị dẫn B nếu trục A và bánh răng 1 quay ngược chiều nhau. Biết số răng của các bánh răng trên hình vẽ là: $Z_1 = 70, Z_2 = 20, Z_3 = 30, Z_4 = 80$.

Đáp số: $n_B = 585$ vòng/phút.



Hình bài 8-25

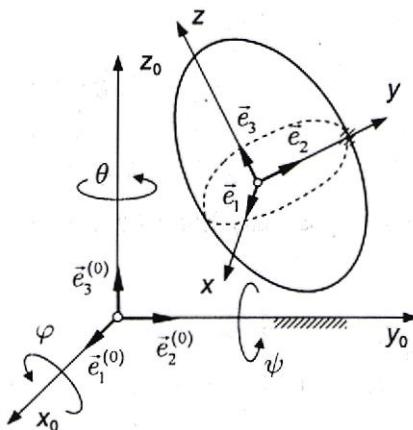
Chương 9

ĐỘNG HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Ma trận cosin chỉ hướng và các ma trận quay cơ bản của vật rắn

Hệ quy chiếu cố định $\{x_0y_0z_0\}$, hệ quy chiếu động gắn với vật rắn $\{xyz\}$



Ma trận cosin chỉ hướng của vật rắn:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1^{(0)} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2^{(0)} \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3^{(0)} \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Các ma trận quay cơ bản:

- Ma trận quay quanh trục x_0 một góc φ (chọn trục $x // x_0$)

$$\mathbf{A}_{x_0}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

– Ma trận quay quanh trục y_0 một góc ψ (chọn trục $y \parallel y_0$)

$$\mathbf{A}_{y_0}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

– Ma trận quay quanh trục z_0 một góc θ (chọn trục $z \parallel z_0$)

$$\mathbf{A}_{z_0}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

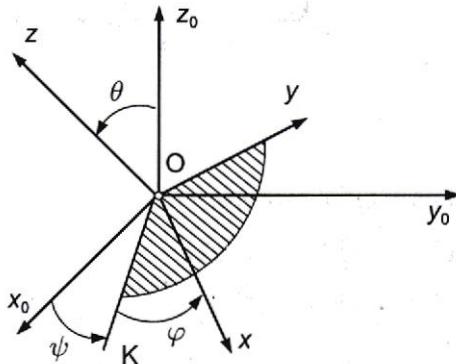
Động học vật rắn quay quanh một điểm cố định

Ma trận quay Euler:

Ma trận quay Euler biểu diễn phép quay hệ quy chiếu $\{x_0y_0z_0\}$ sang hệ quy chiếu $\{xyz\}$ có dạng

$$\mathbf{A}_E(\psi, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} C\psi C\varphi - S\psi C\theta S\varphi & -C\psi S\varphi - S\psi C\theta C\varphi & S\psi S\theta \\ S\psi C\varphi + C\psi C\theta S\varphi & -S\psi S\varphi + C\psi C\theta C\varphi & -C\psi S\theta \\ S\theta S\varphi & S\theta C\varphi & C\theta \end{bmatrix} \quad (9.5)$$

trong đó: ψ, θ, φ là các góc quay Euler (xem hình vẽ), ta sử dụng các ký hiệu tắt $C\psi = \cos \psi, S\psi = \sin \psi$.



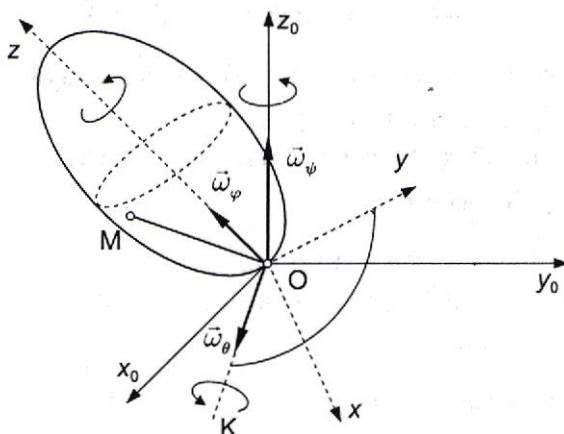
Phương trình chuyển động của vật quay quanh một điểm cố định:

$$\dot{\psi} = \psi(t), \dot{\theta} = \theta(t), \dot{\varphi} = \varphi(t) \quad (9.6)$$

Vận tốc góc và gia tốc góc của vật quay quanh một điểm cố định:

$$\text{Vận tốc góc: } \vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi \quad (9.7)$$

trong đó $\omega_\psi = \dot{\psi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$ có phương được biểu diễn trên hình vẽ.



Các thành phần của véc-tơ vận tốc góc $\bar{\omega}$ trên hệ tọa độ cố định $\{x_0y_0z_0\}$:

$$\begin{aligned}\omega_x^{(0)} &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_y^{(0)} &= -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_z^{(0)} &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}\end{aligned}\quad (9.8)$$

Các thành phần của véc-tơ vận tốc góc $\bar{\omega}$ trên hệ tọa độ động $\{xyz\}$:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}\end{aligned}\quad (9.9)$$

Đoạn thẳng đi qua điểm cố định O và có phương của vận tốc góc $\bar{\omega}$ được gọi là trực quay tức thời của vật rắn.

$$\text{Gia tốc góc: } \vec{\epsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (9.10)$$

Vận tốc và gia tốc một điểm thuộc vật:

$$\vec{v}_M = \bar{\omega} \times \overrightarrow{OM} \quad (9.11)$$

$$\vec{a}_M = \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OM} + \bar{\omega} \times \vec{v}_M \quad (9.12)$$

Vật quay tiến động đều:

Vật quay tiến động đều khi: $\omega_\psi = \text{const}$, $\omega_\theta = 0$, $\omega_\varphi = \text{const}$.

$$\text{Vận tốc góc vật quay tiến động đều: } \bar{\omega} = \bar{\omega}_\psi + \bar{\omega}_\varphi \quad (9.13)$$

$$\text{Gia tốc góc vật quay tiến động đều: } \bar{\varepsilon} = \bar{\omega}_\psi \times \bar{\omega}_\varphi \quad (9.14)$$

Công thức cộng vận tốc góc và gia tốc góc của vật chuyển động tương đối

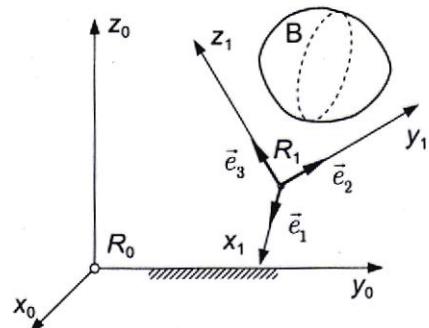
Chuyển động tương đối của vật rắn

B so với hệ động R_1 với vận tốc góc $\bar{\omega}_r$, gia tốc góc $\bar{\varepsilon}_r$.

Chuyển động tuyệt đối của vật rắn

B so với hệ cố định R_0 với vận tốc góc $\bar{\omega}_a$, gia tốc góc $\bar{\varepsilon}_a$.

Chuyển động theo của hệ động R_1 so với hệ cố định R_0 với vận tốc góc theo $\bar{\omega}_e$, gia tốc góc theo $\bar{\varepsilon}_e$.



$$\text{Công thức cộng vận tốc góc: } \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r \quad (9.15)$$

$$\text{Công thức cộng gia tốc góc: } \bar{\varepsilon}_a = \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_r + \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_r \quad (9.16)$$

Nếu ký hiệu $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ là các vectơ đơn vị của hệ tọa độ động, ta có quan hệ:

$$\frac{R_0 d\bar{e}_1}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{e}_1, \quad \frac{R_0 d\bar{e}_2}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{e}_2, \quad \frac{R_0 d\bar{e}_3}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{e}_3 \quad (9.17)$$

Trong một số bài tập, vận tốc góc theo $\bar{\omega}_e$ thường được ký hiệu là $\vec{\Omega}$.

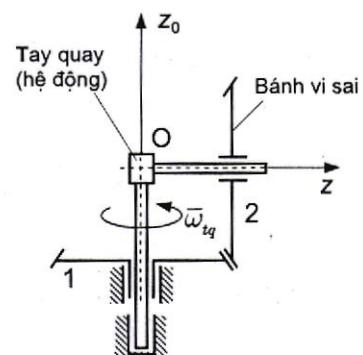
Công thức truyền động của bộ truyền vi sai nón

Chọn tay quay làm hệ quy chiếu động, $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_{tq}$, ta có công thức biểu diễn quan hệ giữa các vận tốc góc tương đối $\bar{\omega}_{1r}, \bar{\omega}_{2r}$ của hai bánh răng:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \pm \frac{r_2}{r_1} = \pm \frac{Z_2}{Z_1} \quad (9.18)$$

Công thức truyền động (9.18) nhận dấu (+) chỉ khi các chuyển động quay tương đối của hai bánh răng quanh các trục z và z_0 cùng ngược (hoặc cùng thuận) chiều kim đồng hồ.

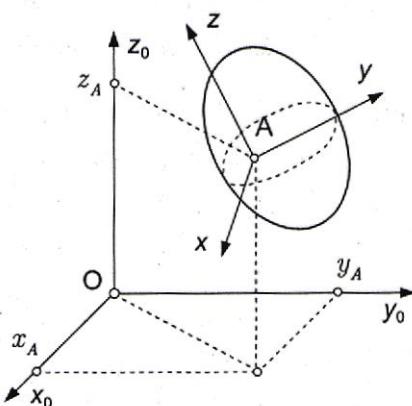
Vận tốc góc và gia tốc góc của bánh vi sai được xác định theo các công thức (9.15) và (9.16).



Động học vật rắn chuyển động tổng quát

Vị trí của vật rắn:

Vị trí của một vật rắn không gian trên một hệ quy chiếu cố định $\{Ox_0y_0z_0\}$ được xác định bởi các tọa độ $x_A(t), y_A(t), z_A(t)$ của một điểm A tùy ý thuộc vật và ma trận cosin chỉ hướng A của hệ quy chiếu động gắn với vật $\{Axyz\}$ đối với hệ quy chiếu cố định (theo công thức (9.1) hoặc (9.5)).



Vận tốc góc của vật rắn:

Trong trường hợp hệ quy chiếu động $\{xyz\}$ gắn với vật, vận tốc góc của vật rắn $\vec{\omega}$ được xác định bởi các công thức Euler (9.8), (9.9). Chú ý phân biệt giữa các thành phần hình chiếu của $\vec{\omega}$ trên hệ quy chiếu động hay hệ quy chiếu cố định. Nếu biết ma trận cosin chỉ hướng, ta có thể xác định các thành phần hình chiếu của vận tốc góc $\vec{\omega}$ trên hệ quy chiếu cố định nhờ công thức:

$$\tilde{\omega}^{(0)} = \dot{A}A^T \quad (9.19)$$

$$\text{trong đó } \tilde{\omega}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{(0)} & \omega_y^{(0)} \\ \omega_z^{(0)} & 0 & -\omega_x^{(0)} \\ -\omega_y^{(0)} & \omega_x^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

Trong trường hợp hệ quy chiếu động $\{xyz\}$ không gắn với vật (tức là vật rắn có chuyển động tương đối so với hệ quy chiếu động), vận tốc góc của vật rắn $\vec{\omega}$ được tính toán nhờ công thức cộng vận tốc góc (9.15).

Gia tốc góc của vật rắn:

Gia tốc góc $\vec{\epsilon}$ của vật rắn được xác định theo công thức tổng quát (9.10). Trong trường hợp hệ quy chiếu động $\{xyz\}$ không gắn với vật, gia tốc góc $\vec{\epsilon}$ được tính toán nhờ công thức cộng gia tốc góc (9.16).

Vận tốc và gia tốc của điểm thuộc vật rắn:

Vận tốc và gia tốc của điểm M bất kỳ thuộc vật sẽ được xác định nhờ các công thức quan hệ sau:

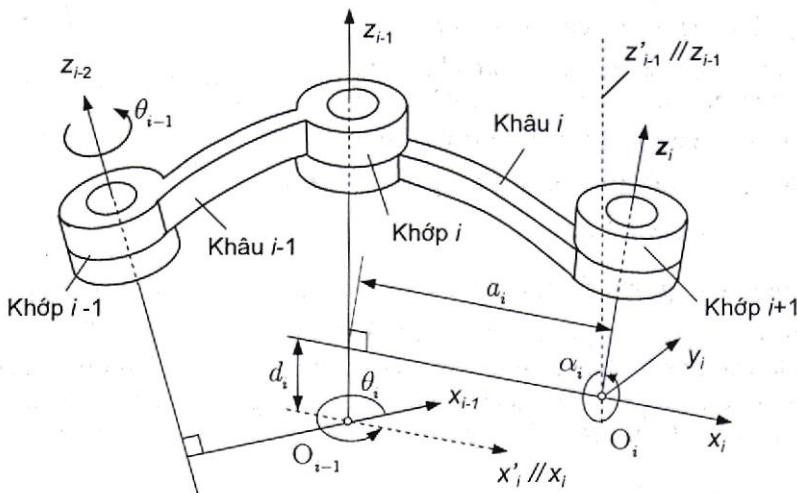
$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AM} \quad (9.21)$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AM}) \quad (9.22)$$

trong đó \vec{v}_A, \vec{a}_A là vận tốc, gia tốc của một điểm A thuộc vật (đã biết), $\vec{\omega}$ và $\vec{\epsilon}$ là vận tốc góc, gia tốc góc của vật.

Tính toán động học rôbốt công nghiệp theo phương pháp Denavit-Hartenberg

Quy ước chọn các hệ trục tọa độ



- Trục z_{i-1} của hệ tọa độ $(Oxyz)_{i-1}$ (gắn với khâu $i - 1$) nằm dọc theo trục khớp động thứ i .
- Trục x_{i-1} của hệ tọa độ $(Oxyz)_{i-1}$ được chọn dọc theo đường vuông góc chung của 2 trục z_{i-2} và z_{i-1} , có hướng từ trục z_{i-2} đến z_{i-1} .
- Gốc tọa độ O_{i-1} của hệ tọa độ $(Oxyz)_{i-1}$ là giao điểm của x_{i-1} và z_{i-1} .
- Trục y_{i-1} được chọn sao cho hệ tọa độ $(Oxyz)_{i-1}$ là hệ tọa độ thuận.

Chú ý: Trục x_0 của hệ tọa độ $(Oxyz)_0$ được chọn tùy ý, nếu trục z_{i-2} cắt trục z_{i-1} thì hướng của x_{i-1} được chọn tùy ý.

Các tham số động học Denavit-Hartenberg (tham số DH)

- Tham số góc θ_i : Góc quay quanh trục z_{i-1} (ngược chiều kim đồng hồ).
- Tham số độ dài d_i : Khoảng dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục z_{i-1} .
- Tham số độ dài a_i : Khoảng dịch chuyển tịnh tiến dọc theo trục x_i .
- Tham số góc α_i : Góc quay quanh trục x_i (ngược chiều kim đồng hồ).

Ma trận Denavit-Hartenberg (ma trận DH):

Ma trận DH là ma trận chuyển tọa độ của hệ quy chiếu $(Oxyz)_{i-1}$ sang hệ $(Oxyz)_i$.

$${}^{i-1}\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

Phương trình xác định vị trí khâu thao tác của robot:

$$\mathbf{D}_n = {}^0\mathbf{H}_n = {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{H}_n \quad (9.24)$$

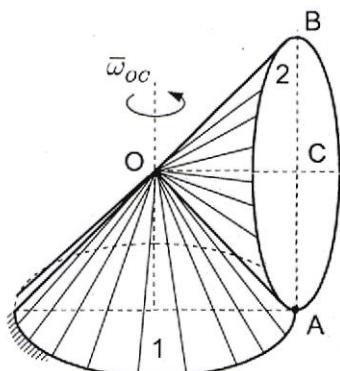
Ba thành phần đầu tiên của cột cuối cùng của ma trận \mathbf{D}_n chính là tọa độ của điểm cuối của khâu thao tác trên hệ tọa độ cố định $(Oxyz)_0$.

II. BÀI TẬP

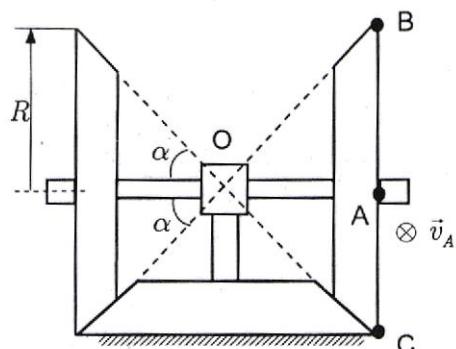
Vật rắn quay quanh một điểm cố định

9-1. Hình nón 2 chuyển động quanh điểm O cố định và lăn không trượt trên mặt nón 1 cố định. Đường cao của nón 2 là OC = 10cm có tốc độ quay không đổi $n = 120$ vòng/phút theo chiều như hình vẽ. Góc ở đỉnh của cả hai hình nón cùng bằng 90° . Hãy tìm vận tốc, gia tốc của điểm B thuộc nón 2.

Đáp số: $v_B = 80\pi \text{ cm/s}$, $a_B = 160\sqrt{10}\pi^2 \text{ cm/s}^2$.



Hình bài 9-1

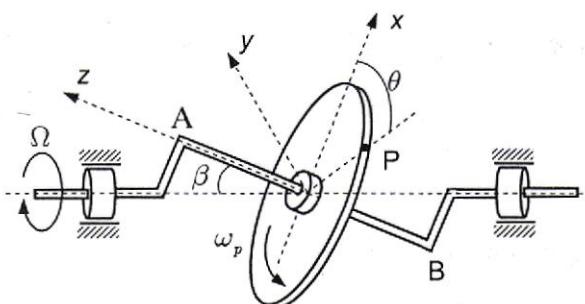


Hình bài 9-2

9-2. Hai con lăn hình nón cùi lăn không trượt trên một đế cố định. Bán kính đáy của con lăn là $R = 20\sqrt{2}$ cm, góc ở đỉnh $2\alpha = 90^\circ$. Tâm A có vận tốc không đổi $v_A = 60$ cm/s và có chiều như hình vẽ. Tìm vận tốc, gia tốc của các điểm C và B của con lăn.

Đáp số: $v_C = 0$, $v_B = 120$ cm/s, $a_C = 180$ cm/s 2 , $a_B = 180\sqrt{5}$ cm/s 2 .

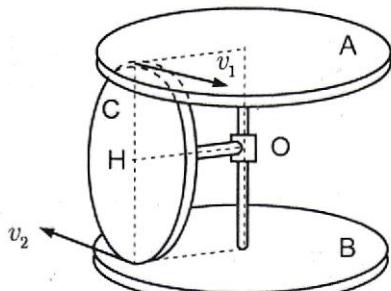
9-3. Đĩa tròn bán kính R quay tương đối quanh trục AB với vận tốc góc không đổi ω_p , AB quay đều quanh trục nằm ngang cố định với vận tốc góc Ω . Cho biết AB nghiêng so với phương ngang một góc β . Hãy xác định các thành phần của vận tốc, gia tốc điểm P (có vị trí ứng với góc θ) trên hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với trục AB như hình vẽ.



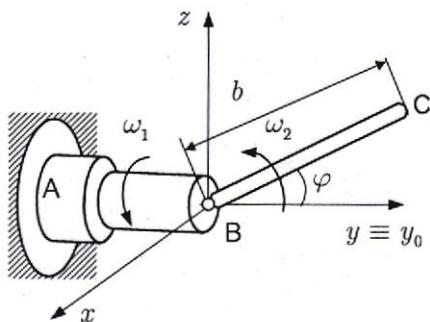
Hình bài 9-3

Đáp số:

$$\begin{aligned}\bar{v}_P &= R \sin \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_1 + R \cos \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_2 + R \Omega \sin \beta \sin \theta \vec{e}_3 \\ \bar{a}_P &= -R \cos \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta)^2 \vec{e}_1 + R \sin \theta (\Omega^2 + \omega_p^2 + 2\omega_p \Omega \cos \beta) \vec{e}_2 \\ &\quad - R \Omega \cos \theta \sin \beta (2\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_3.\end{aligned}$$



Hình bài 9-4



Hình bài 9-5

9-4. Đĩa A và đĩa B quay độc lập đối với nhau quanh trục thẳng đứng làm cho đĩa C chuyển động. Giả thiết không xảy ra hiện tượng trượt giữa các đĩa. Bán kính của đĩa C là $r = 0,05$ m và độ dài OH = $l = 1/14$ m. Các điểm tiếp xúc có vận tốc $v_1 = 3$ m/s, $v_2 = 4$ m/s. Tìm vận tốc tâm H, vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa C.

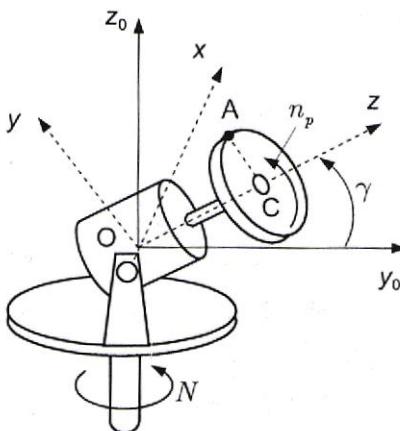
Đáp số: $\omega \approx 70,35$ rad/s; $v_H = 0,5$ m/s; $\epsilon = 490$ rad/s².

9-5. Trục AB quay đều quanh trục ngang cố định y_0 với vận tốc góc $\omega_1 = 3$ rad/s, thanh BC quay riêng nhanh dần quanh trục nằm ngang x như hình vẽ. Tại vị trí $\varphi = 30^\circ$, BC có vận tốc góc $\omega_2 = 4$ rad/s và gia tốc góc $\dot{\omega}_2 = 5$ rad/s². Cho biết độ dài $b = 60$ cm, hãy xác định vận tốc và gia tốc điểm cuối C.

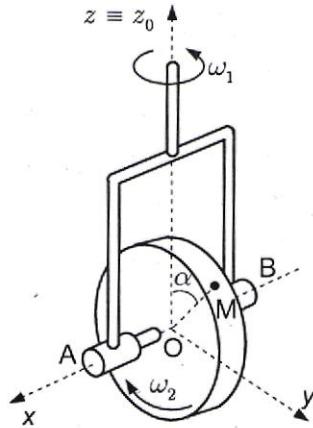
Đáp số: $v_C \approx 256,32$ cm/s; $a_C \approx 16,61$ m/s².

9-6. Bàn quay đều quanh trục thẳng đứng cố định với tốc độ $N = 30$ vòng/phút. Đĩa tròn có thể quay tự do xung quanh trục z như hình vẽ. Cho biết sau 2 giây kể từ trạng thái tĩnh, đĩa đạt được vận tốc góc quay riêng $n_p = 3000$ vòng/phút với gia tốc góc không đổi. Góc $\gamma = 30^\circ$ là hằng số, khoảng cách $OC = l = 254$ mm, bán kính đĩa $R = 127$ mm. Sử dụng hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với OC, hãy xác định vận tốc của điểm A trên vành đĩa ($CA/\!/y$) và gia tốc góc của đĩa tại thời điểm đĩa quay được 1/3 giây.

Đáp số: $\vec{v}_A \approx -6,158 \vec{e}_1$ m/s; $\vec{\epsilon} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \pi^2 \vec{e}_1 + 50\pi \vec{e}_3$.



Hình bài 9-6, 9-7



Hình bài 9-8

9-7. Sử dụng hình bài 9-6 với khoảng cách $OC = l = 254$ mm, bán kính đĩa $R = 127$ mm nhưng giả thiết bàn đứng yên ($N = 0$). Góc γ được điều chỉnh sao cho biến thiên với vận tốc góc $\dot{\gamma} = 12$ rad/s và gia tốc góc $\ddot{\gamma} = 15$ rad/s². Đĩa quay

riêng nhanh dần đều quanh trục z với vận tốc góc $\varepsilon_p = 10 \text{ rad/s}^2$. Khi vận tốc góc quay riêng là $\omega_p = 4\pi \text{ rad/s}$, tìm vận tốc góc của đĩa trên hệ $\{xyz\}$ gắn với OC.

Đáp số: $\bar{\varepsilon} = -15\vec{e}_1 + 48\pi\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3 \text{ rad/s}^2$.

9-8. Đĩa có bán kính R quay riêng quanh trục x với vận tốc góc ω_2 , khung quay quanh trục thẳng đứng cố định z_0 với vận tốc góc ω_1 . Cả hai vận tốc góc đều bằng hằng số. Hãy xác định các biểu thức vận tốc và vận tốc điểm M trên vành đĩa có vị trí ứng với góc α như hình vẽ và biểu diễn kết quả trên hệ trục $\{xyz\}$ gắn với khung.

Đáp số: $\vec{v}_M = -R\omega_1 \sin \alpha \vec{e}_1 + R\omega_2 \cos \alpha \vec{e}_2 - R\omega_2 \sin \alpha \vec{e}_3$,

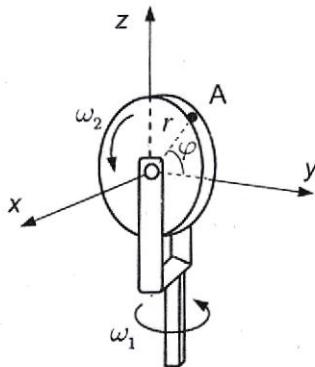
$$\vec{a}_M = -2R\omega_1\omega_2 \cos \alpha \vec{e}_1 - R \sin \alpha (\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{e}_2 - R\omega_2^2 \cos \alpha \vec{e}_3.$$

9-9. Đĩa bán kính r quay đều quanh trục nằm ngang x qua tâm đĩa với vận tốc góc ω_2 , già mang trục đĩa quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_1 . Sử dụng hệ trục $\{xyz\}$ gắn với già, hãy xác định:

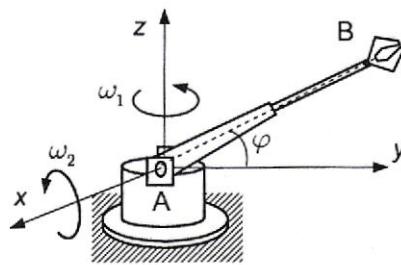
- Vận tốc góc của đĩa
- Vận tốc điểm A trên vành khi $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 90^\circ$.

Đáp số: $\bar{\varepsilon} = \omega_1\omega_2\vec{e}_2$,

$$\varphi = 0 : \vec{a}_A = -r(\omega_1^2 + \omega_2^2)\vec{e}_2, \varphi = 90^\circ : \vec{a}_A = 2r\omega_1\omega_2 \vec{e}_1 - r\omega_2^2 \vec{e}_3.$$



Hình bài 9-9



Hình bài 9-10

9-10. Tại vị trí $\varphi = 35^\circ$, tay máy AB có độ dài $AB = l = 101,6\text{cm}$. Tay máy quay quanh trục thẳng đứng cố định với vận tốc góc $\omega_1 = 0,15 \text{ rad/s}$, đồng thời quay quanh trục nằm ngang x với vận tốc góc $\omega_2 = 0,25 \text{ rad/s}$. Sử dụng hệ trục $\{xyz\}$ gắn với tay máy như hình vẽ, hãy xác định vận tốc góc của tay máy, vận tốc và vận tốc điểm cuối B trong hai trường hợp:

- a) Các vận tốc góc ω_1, ω_2 là hằng số;
 b) Các vận tốc góc ω_1, ω_2 cùng giảm dần với gia tốc góc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,02 \text{ rad/s}^2$.

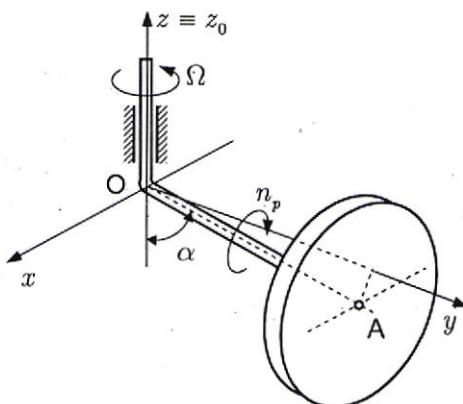
Đáp số:

a) $\vec{v}_B = 12,48\vec{e}_1 - 14,57\vec{e}_2 + 20,81\vec{e}_3 \text{ cm/s}; \vec{a}_B = 4,37\vec{e}_1 - 7,07\vec{e}_2 - 3,64\vec{e}_3 \text{ cm/s}^2$.

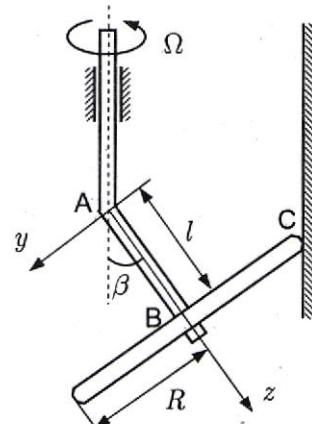
b) $\vec{v}_B = 12,48\vec{e}_1 - 14,57\vec{e}_2 + 20,81\vec{e}_3 \text{ cm/s}; \vec{a}_B = 6,04\vec{e}_1 - 5,91\vec{e}_2 - 5,31\vec{e}_3 \text{ cm/s}^2$.

9-11. Đĩa quay riêng quanh trục OA với tốc độ quay không đổi $n_p = 3600 \text{ vòng/phút}$, OA quay đều quanh trục thẳng đứng z_0 với vận tốc góc $\Omega = 20 \text{ rad/s}$. Cho biết OA nghiêng với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 60^\circ$ như hình vẽ. Sử dụng hệ tọa độ động $\{xyz\}$ gắn với OA, hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa.

Đáp số: $\vec{\omega} = -326,48\vec{e}_2 + 208,5\vec{e}_3 \text{ rad/s}; \vec{\varepsilon} \approx 6530\vec{e}_1 \text{ rad/s}^2$.



Hình bài 9-11



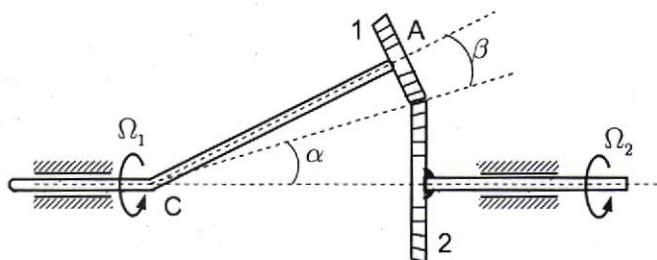
Hình bài 9-12

9-12. Đĩa tròn bán kính $R = 30 \text{ cm}$ có thể quay tự do xung quanh trục AB trong khi trục AB quay đều quanh trục thẳng đứng cố định với vận tốc góc $\Omega = 10 \text{ rad/s}$. Đĩa lăn không trượt tại thành trong của một ống trụ đứng như hình vẽ. Cho biết các đại lượng $\beta = 30^\circ$ và $l = 40 \text{ cm}$. Hãy xác định vận tốc góc, gia tốc góc của đĩa và gia tốc của điểm tiếp xúc C giữa đĩa và ống.

Đáp số: $\vec{\omega} = -\Omega \sin \beta \vec{e}_2 + \Omega \frac{l}{R} \sin \beta \vec{e}_3, \vec{\varepsilon} = -\Omega^2 \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{l}{R} \sin \beta \right) \vec{e}_1$
 $\vec{a}_C \approx 3065\vec{e}_2 + 2299\vec{e}_3 \text{ cm/s}^2$.

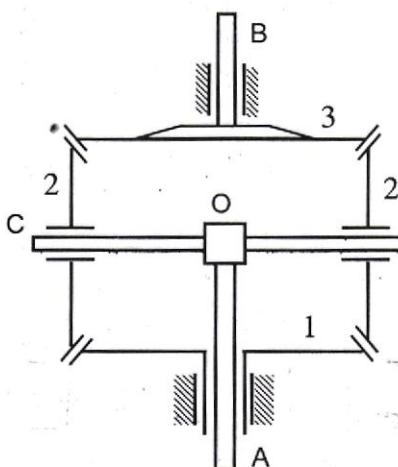
Truyền động hành tinh - vi sai nón

9-13. Bánh răng côn 1 có thể quay tương đối quanh trục AC và ăn khớp với bánh răng côn 2, AC quay đều xung quanh trục nằm ngang với vận tốc góc $\Omega_1 = 50 \text{ rad/s}$. Cho biết bánh răng 2 có vận tốc góc không đổi $\Omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ và các góc ở đỉnh $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 20^\circ$ như trên hình vẽ. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của bánh răng 1.

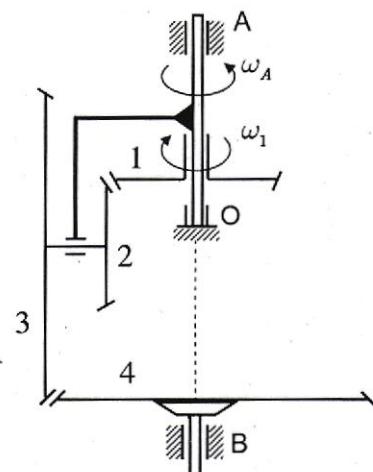


Hình bài 9-13

Đáp số: $\omega_1 \approx 76,78 \text{ rad/s}$; $\varepsilon_1 \approx 868,1 \text{ rad/s}^2$.



Hình bài 9-14



Hình bài 9-15

9-14. Cho hộp truyền động như hình vẽ. Bánh răng 1 lắp trọn trên trục OA, đầu trục này mang trục của cặp bánh răng 2-2. Bánh răng 3 gắn cứng với trục B. Tìm vận tốc góc ω_B của trục B trong các trường hợp:

- Trục A có vận tốc góc ω_A , bánh răng 1 đứng yên;
- Trục A có vận tốc góc ω_A , bánh răng 1 quay cùng chiều với $\omega_1 = 2\omega_A$;
- Trục A và bánh răng 1 quay ngược chiều nhau với $\omega_1 = 2\omega_A$.

Đáp số: a) $\bar{\omega}_B = 2\bar{\omega}_A$; b) $\bar{\omega}_B = 0$; c) $\bar{\omega}_B = 4\bar{\omega}_A$.

9-15. Hộp truyền động vi sai như hình vẽ có bán kính các bánh răng là $r_1 = 24$ cm, $r_2 = 30$ cm, $r_3 = 40$ cm và $r_4 = 44$ cm. Vận tốc góc của trục A và bánh răng 1 là $\omega_A = 60$ rad/s, $\bar{\omega}_1 = -40$ rad/s. Tìm vận tốc góc của trục B và cặp bánh 2-3.

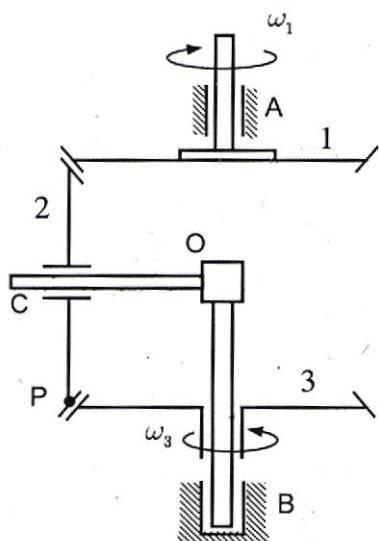
Đáp số: $\omega_B \approx 132,7$ rad/s; $\omega_3 = 100$ rad/s.

9-16. Cơ cấu truyền động vi sai như hình vẽ. Trục dẫn A gắn với bánh răng 1, quay đều với vận tốc góc $\omega_1 = 10$ rad/s. Bánh răng 3 có vận tốc góc $\omega_3 = 6$ rad/s. Trục bị dẫn B gắn với tay quay OC, bánh răng 2 lấp tròn trên tay quay. Cho biết các bán kính $r_1 = r_3 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm. Hãy xác định:

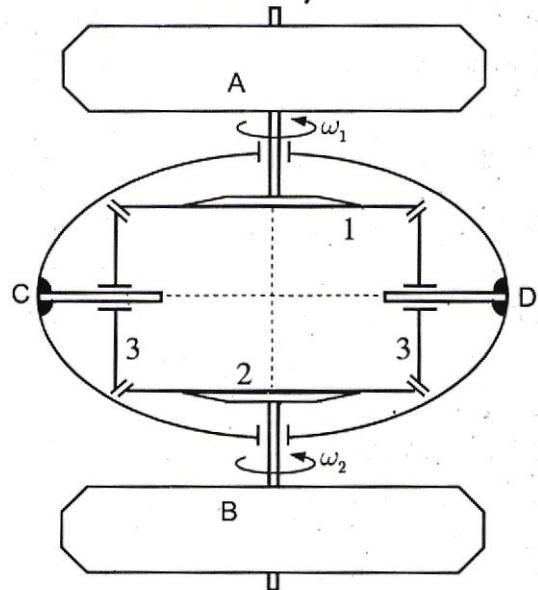
- Vận tốc góc của trục B, vận tốc góc và gia tốc góc của bánh răng 2;
- Vận tốc và gia tốc của điểm P trên vành của bánh răng 2.

Đáp số: $\omega_B = 2$ rad/s; $\omega_2 \approx 12,17$ rad/s; $\varepsilon_2 = 24$ rad/s².

$$v_p = 36 \text{ cm/s}; a_p = 600 \text{ cm/s}^2.$$



Hình bài 9-16



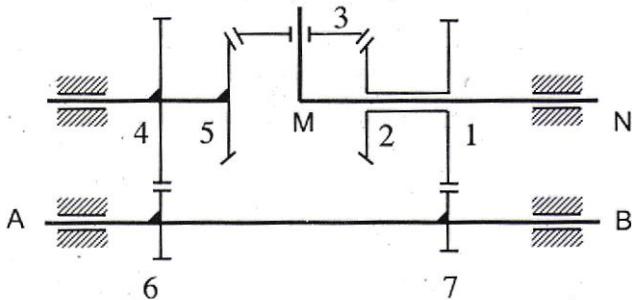
Hình bài 9-17

9-17. Hộp truyền động lắp ở trục sau của xe ôtô như hình vẽ. Hai bánh răng 1 và 2 có cùng bán kính $R = 6$ cm, mỗi bánh răng gắn cứng với một nửa trục sau trên đó lắp bánh xe A và B. Cặp bánh răng trung gian 3-3, bán kính $r = 3$ cm, có trục gắn cứng vào hộp, hộp lắp tròn vào trục sau của xe. Khi xe chuyển động trên đường vòng, hai bánh xe có vận tốc khác nhau $\omega_1 = 6$ rad/s, $\omega_2 = 4$ rad/s. Hãy tìm vận tốc góc của hộp, vận tốc góc của bánh răng 3.

Đáp số: $\omega_{CD} = 5$ rad/s; $\omega_3 \approx 5,39$ rad/s.

9-18. Cho hộp truyền động vi sai như hình vẽ. Bánh răng nón 2 gắn cứng với bánh răng trụ 1, bánh răng nón 5 gắn cứng với bánh răng trụ 4. Các bánh răng 1 và 2 lắp trọn trên trục MN. Các bánh răng trụ 1 và 4 ăn khớp với hai bánh răng 6 và 7, hai bánh này được lắp cứng trên trục AB. Các bánh răng nón 2 và 5 có cùng bán kính. Cho biết số răng của các bánh răng 1, 4, 6, 7 lần lượt là Z_1, Z_4, Z_6, Z_7 . Hãy xác định

tỷ số truyền $k = \frac{\omega_{MN}}{\omega_{AB}}$ giữa hai trục AB và MN.



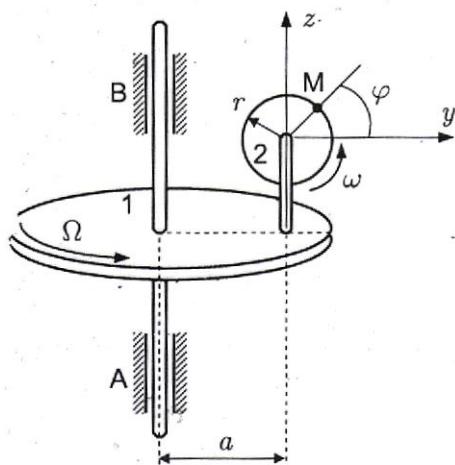
Hình bài 9-18

$$\text{Đáp số: } k = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_7}{Z_1} + \frac{Z_6}{Z_4} \right).$$

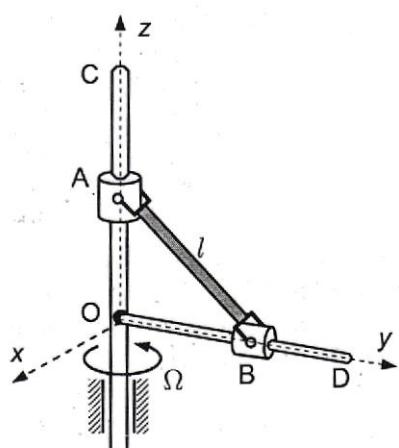
Vật rắn chuyển động tổng quát

9-19. Đĩa 1 quay quanh trục thẳng đứng AB cố định với vận tốc góc Ω . Đĩa 2 quay tương đối quanh trục ngang với vận tốc góc ω . Cho biết các đại lượng a, r, φ và giả thiết cả hai vận tốc góc đều là hằng số, hãy xác định giá tốc của điểm M.

$$\text{Đáp số: } \vec{a}_M = 2r\omega\Omega \sin \varphi \vec{e}_1 - (a\Omega^2 + r\omega^2 \cos \varphi + r\Omega^2 \cos \varphi) \vec{e}_2 - r\omega^2 \sin \varphi \vec{e}_3.$$



Hình bài 9-19



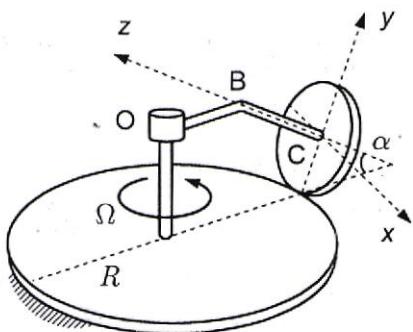
Hình bài 9-20

9-20. Hệ mô tả trên hình vẽ bao gồm hai con trượt A và B chuyển động theo hai trục OC và OD vuông góc với nhau, thanh AB liên kết với hai con trượt bởi khớp quay. Toàn bộ hệ quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc $\Omega = 2 \text{ rad/s}$. Con trượt A chuyển động đều lên phía trên với vận tốc $v_A = 8 \text{ cm/s}$. Cho biết độ dài AB = $l = 5 \text{ cm}$. Tìm gia tốc góc của AB khi khoảng cách OA = $d = 3 \text{ cm}$.

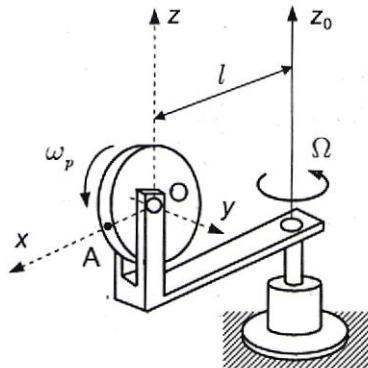
Đáp số: $\vec{\epsilon}_{AB} = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$.

9-21. Vành tròn bán kính R được cố định trong mặt phẳng ngang. Đĩa tròn bán kính r có thể quay tự do quanh trục cong OBC. Đoạn OB song song với mặt phẳng ngang, đoạn BC tạo với mặt phẳng ngang góc α . Khi trục này quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc Ω thì đĩa lăn không trượt theo vành tròn. Sử dụng hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với OBC, trong đó trục x luôn nằm ngang, xác định vận tốc góc và gia tốc góc của đĩa.

Đáp số: $\bar{\omega} = \Omega \cos \alpha \vec{e}_2 + \Omega \left(2 \sin \alpha + \frac{R}{r} \right) \vec{e}_3$, $\vec{\epsilon} = \Omega^2 \left(\frac{R}{r} + \sin \alpha \right) \cos \alpha \vec{e}_1$.



Hình bài 9-21

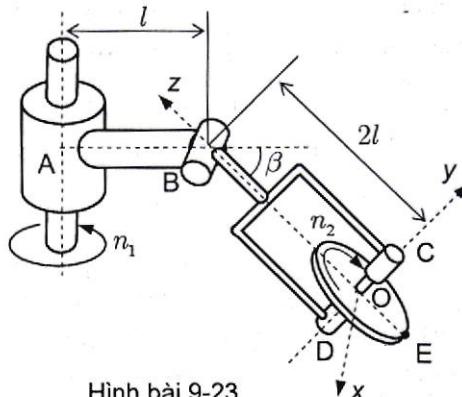


Hình bài 9-22

9-22. Đĩa tròn bán kính $r = 10 \text{ cm}$ quay đều quanh trục y với vận tốc góc $\omega_p = 10\pi \text{ rad/s}$. Khung mang đĩa quay đều quanh trục z_0 cố định với vận tốc góc $\Omega = 4\pi \text{ rad/s}$. Cho biết khoảng cách $l = 30 \text{ cm}$. Hãy xác định các thành phần gia tốc của điểm A (thuộc vành đĩa và nằm trên trục x) trên hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với khung.

Đáp số: $\vec{a}_A = -1640\pi^2 \vec{e}_1 \text{ cm/s}^2$.

9-23. Đĩa tròn bán kính $r = 0,2 \text{ m}$ quay đều quanh trục COD với tốc độ quay $n_2 = 1200 \text{ vòng/phút}$. Toàn bộ hệ quay đều quanh trục thẳng đứng cố định với tốc độ quay $n_1 = 60 \text{ vòng/phút}$ như biểu diễn trên hình vẽ. Góc nghiêng $\beta = 60^\circ$ là hằng số. Cho biết chiều dài $l = 0,5 \text{ m}$. Hãy xác định các thành phần vận tốc và gia tốc của điểm thấp nhất E trên vành đĩa trên hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với khung BCD.



Hình bài 9-23

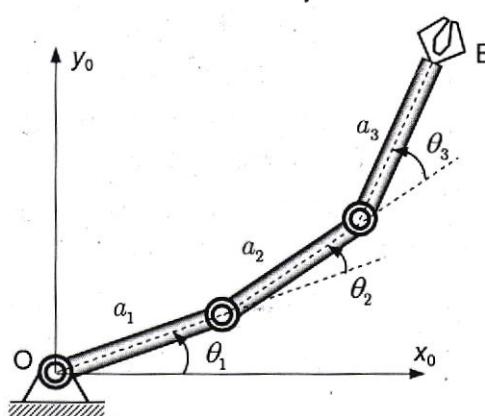
Đáp số: $\vec{v}_E \approx 1,52\vec{e}_1 \text{ m/s}; \vec{a}_E \approx 236\vec{e}_2 + 3022\vec{e}_3 \text{ m/s}^2$.

Động học rôbốt công nghiệp

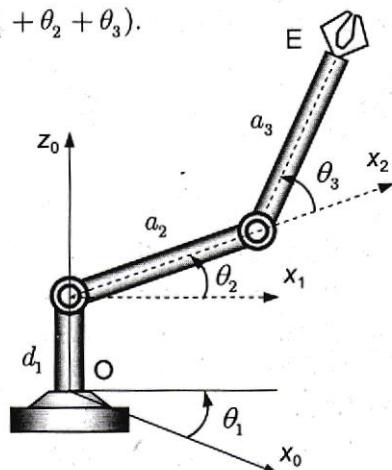
9-24. Cho sơ đồ một rôbốt phẳng ba bậc tự do như hình vẽ. Hãy thiết lập ma trận Denavit-Hartenberg D_3 , và phương trình xác định tọa độ điểm E đối với hệ tọa độ cố định $\{Ox_0y_0\}$.

Đáp số: $x_E = a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123}, y_E = a_1S_1 + a_2S_{12} + a_3S_{123}$,

trong đó $C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.



Hình bài 9-24



Hình bài 9-25

9-25. Cho sơ đồ một rôbốt không gian ba bậc tự do như hình vẽ. Hãy thiết lập ma trận Denavit-Hartenberg D_3 , và phương trình xác định tọa độ điểm E đối với hệ tọa độ cố định $\{Ox_0y_0\}$.

Đáp số: $x_E = C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}), y_E = S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}), z_E = d_1 + a_2S_2 + a_3S_{23}$.

Chương 10

ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương trình vi phân chuyển động của điểm

Khi khảo sát chuyển động của một vật rắn mà kích thước của nó có thể bỏ qua hoặc kích thước của vật không ảnh hưởng đến quá trình khảo sát (thí dụ vật rắn chuyển động tịnh tiến), ta sử dụng mô hình điểm (chất điểm). Phương trình vi phân chuyển động (PTVPCĐ) của chất điểm nhận được từ định luật cơ bản của động lực học:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (10.1)$$

với động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$. Khi khối lượng m của chất điểm là hằng số, ta suy ra:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (10.2)$$

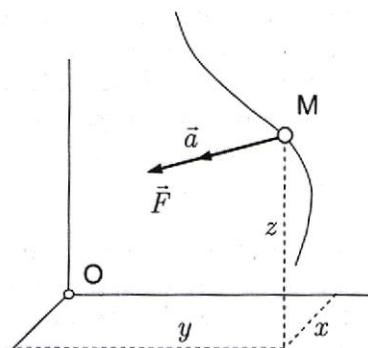
PTVPCĐ của điểm trong hệ tọa độ Decartes:

$$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z \quad (10.3)$$

PTVPCĐ của điểm trong hệ tọa độ tự nhiên:

$$m\ddot{s} = F_r, m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n, 0 = F_b \quad (10.4)$$

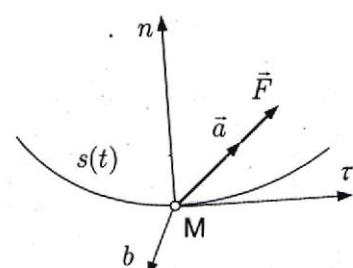
với s là tọa độ cong của điểm trên quỹ đạo và ρ là bán kính cong quỹ đạo tại vị trí của điểm.



Phân loại bài toán

Bài toán 1: Biết chuyển động của chất điểm, tìm lực tác dụng lên chất điểm.

Bài toán 2: Biết lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện đầu của chuyển động, tìm quy luật chuyển động của chất điểm.



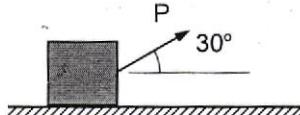
II. BÀI TẬP

10-1. Một thùng hàng khối lượng $m = 50 \text{ kg}$ được kéo trên nền ngang, hệ số ma sát trượt động $\mu = 0,3$. Một lực $P = 400 \text{ N}$ tác dụng như hình vẽ. Tìm vận tốc của thùng hàng tại thời điểm $t = 2 \text{ s}$, thùng hàng chuyển động từ trạng thái đứng yên.

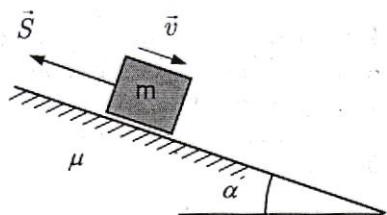
Đáp số: $v_{(t=2)} = 10,37 \text{ m/s}$.

10-2. Một quả đạn khối lượng $m = 10 \text{ kg}$ được phỏng lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu $v_0 = 50 \text{ m/s}$. Xác định độ cao mà quả đạn có thể đạt được trong trường hợp: a) Bỏ qua lực cản của không khí; b) Lực cản của không khí là $F_D = 0,01v^2 \text{ N}$, v là vận tốc quả đạn tại thời điểm bất kỳ tính theo m/s.

Đáp số: a) $t_1 = 5,097 \text{ s}; y(t_1) = 127,42 \text{ m}$; b) $t_1 = 4,720 \text{ s}, y(t_1) = 113,504 \text{ m}$.



Hình bài 10-1



Hình bài 10-3

10-3. Một xe goòng có khối lượng là $m = 700 \text{ kg}$ đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc $\alpha = 15^\circ$. Để giữ cho xe chạy đều với vận tốc $v = 1,6 \text{ m/s}$, ta dùng dây cáp song song với mặt dốc. Xác định lực căng S của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó bị hãm dừng lại trong 4 giây. Hệ số ma sát khô là $\mu = 0,015$. Coi như xe chạy chậm dần đều khi bị hãm.

Đáp số: $S_1 = 1682,4 \text{ N}; S_2 = 1963 \text{ N}$.

10-4. Một đoàn tàu hỏa không kể đầu máy có khối lượng là $m = 200 \text{ tấn}$ chạy nhanh dần trên đoạn ray thẳng nằm ngang. Sau 60 giây kể từ lúc bắt đầu chạy, tàu đạt tới vận tốc $v = 54 \text{ km/h}$. Tính lực kéo cần thiết của đầu máy lên đoàn tàu, biết rằng đoàn tàu chịu một lực cản $F_c = \mu mg$, $\mu = 0,005$.

Đáp số: $F = 59840 \text{ N}$.

10-5. Một máy bay có khối lượng là 2000 kg bay thẳng ngang với gia tốc 5 m/s^2 . Lực cản của không khí có trị số $F_c = 0,49v^2 \text{ (N)}$ với v là vận tốc (m/s). Xác định lực đẩy của cánh quạt máy bay khi máy bay đạt vận tốc hằng số 200 m/s . Cho biết lực này tạo với hướng bay một góc 10° .

Đáp số: $F = 30,215 \text{ kN}$.

10-6. Một ô tô chở hàng có khối lượng $m = 6$ tấn chạy xuống một chiếc phà với vận tốc là 21,6 km/h. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe phải chạy thêm một quãng đường là 10 m, giả thiết ô tô chuyển động chậm dần đều khi đó. Tính lực căng của hai dây cáp buộc giữ phà, coi rằng dây cáp luôn luôn căng.

Đáp số: Lực căng mỗi dây cáp $S = 5395,5$ N.

10-7. Pit-tông của một máy bơm nước chuyển động dao động ngang theo quy luật $x = r(\cos \omega t + (r/4l)\cos 2\omega t)$, trong đó r là chiều dài của tay quay và l là chiều dài của thanh truyền cùng được tính bằng mét, ω là vận tốc góc không đổi của tay quay. Khối lượng của pit-tông là m . Xác định giá trị lớn nhất của hợp lực tác dụng lên pit-tông theo phương ngang.

Đáp số: $F_{\max} = mr\omega^2(1 + r/l)$.

10-8. Một sàng quặng thực hiện dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với biên độ $a = 5$ cm. Tìm tần số vòng k nhỏ nhất của sàng để cho các hạt quặng bật được lên khỏi sàng.

Đáp số: $k = 14$ rad/s.

10-9. Một đầu máy tàu hỏa có khối lượng $m = 180$ tấn chạy qua một cái cầu với vận tốc $v = 72$ km/giờ. Khi đầu máy chạy qua điểm chính giữa cầu thì độ vông của cầu là $h = 0,1$ m. Hãy xác định áp lực động phụ lên cầu tại thời điểm đó. Giả thiết cầu là một đầm có tiết diện không đổi, chiều dài $L = 100$ m và đặt trên hai gối cố định.

Đáp số: $N = 12mhv^2 / L^2 = 8,64$ kN.

10-10. Một vật nặng rơi xuống giếng mỏ không vận tốc ban đầu. Sau thời gian 6,5 giây người ta nghe thấy tiếng va đập của vật vào đáy giếng. Cho biết vận tốc của tiếng động là 330m/s. Tìm chiều sâu của giếng mỏ. Bỏ qua lực cản không khí.

Đáp số: 174,8 m.

10-11. Một người lái tàu điện bằng cách mở dần điện trở làm tăng công suất động cơ sao cho lực kéo tăng tỷ lệ với thời gian từ giá trị bằng không và mỗi giây tăng được 1177 N. Tìm quãng đường x mà toa tàu đi được từ trạng thái nghỉ. Cho biết khối lượng toa tàu là 10 tấn, lực ma sát không đổi và bằng $1,96 \cdot 10^3$ N.

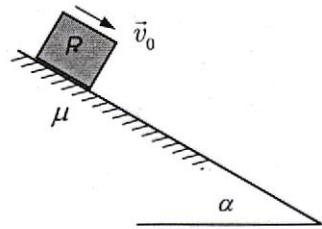
Đáp số: Chuyển động bắt đầu sau 1,665 giây kể từ lúc đóng mạch điện, quãng đường chuyển động, $x = 0,01962(t - 1,665)^3$ m.

10-12. Một vật nặng chuyển động trên mặt phẳng nghiêng lên phía trên với vận tốc ban đầu $v_0 = 15$ m/s. Mặt nghiêng tạo với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. Cho

hệ số ma sát $\mu = 0,1$. Tìm đoạn đường vật nặng di được cho đến lúc dừng hẳn và tìm thời gian vật chạy trên quãng đường đó.

$$\text{Đáp số: } s = \frac{v_0^2}{2g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} = 19,55 \text{ m}$$

$$t^* = \frac{v_0}{g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)} = 2,61 \text{ s.}$$



Hình bài 10-12

10-13. Tìm vận tốc rơi lớn nhất trong không khí của một quả cầu có khối lượng bằng $m = 10 \text{ kg}$, bán kính $r = 8 \text{ cm}$, chịu lực cản là $R = kSv^2$ (trong đó v là vận tốc rơi, S là diện tích của hình chiếu của vật trên mặt phẳng thẳng góc với phương vận tốc chuyển động, k là hệ số tỷ lệ và trong trường hợp này thì $k = 0,2352 \text{ Ns}^2/\text{m}^4$).

$$\text{Đáp số: } v_{\max} \approx 144 \text{ m/s.}$$

10-14. Một chiếc tàu thủy có trọng lượng $P = mg$ di chuyển thẳng ngang từ trạng thái nghỉ. Lực đẩy của chân vịt bằng Q không đổi và hướng theo hướng chuyển động của tàu. Lực cản của nước có giá trị là $R = mk^2v^2$, trong đó k^2 là hệ số tỷ lệ và v là vận tốc con tàu. Tìm giá trị của vận tốc giới hạn và tìm biểu thức vận tốc của con tàu là hàm theo thời gian.

$$\text{Đáp số: } v_{gh} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{P}{Q}} g; \quad v = v_{gh} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}, \text{ trong đó } \alpha = k\sqrt{Q/m}.$$

10-15. Một chiếc tàu lặn đang nằm yên, nhận được một trọng tải P thì lặn xuống sâu theo phương thẳng đứng, trong trường hợp này ta xem như lực cản của nước có độ lớn $R = kSv$, trong đó k là hệ số tỷ lệ, S là diện tích hình chiếu bằng của con tàu và v là vận tốc lặn của tàu. Khối lượng của tàu là m . Tìm biểu thức vận tốc của tàu là hàm theo thời gian. Tìm khoảng thời gian T cần thiết để cho vận tốc lặn xuống đạt giá trị bằng 95% giá trị vận tốc giới hạn.

$$\text{Đáp số: } v = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{ks}{m}t}\right); \quad T = \frac{m}{kS} \ln 20.$$

10-16. Trên đỉnh của một tháp người ta ném hai quả cầu nhỏ, với cùng vận tốc ban đầu v_0 nhưng với góc nghiêng khác nhau α_1 và α_2 . Quan sát thấy hai quả cầu này chạm đất cùng một điểm. Xác định chiều cao h của tháp.

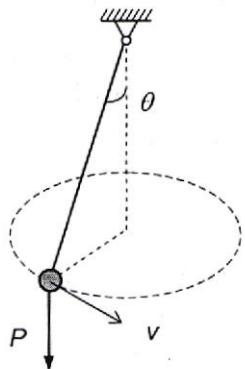
$$\text{Đáp số: } h = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} L^2 - \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} L, \text{ với } L = \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}.$$

10-17. Một quả cầu nhỏ khối lượng m được treo vào một dây mềm không giãn chiều dài L , đầu kia cố định. Quả cầu được thả từ vị trí dây ngang không vận tốc ban đầu. Hãy tìm vận tốc của quả cầu phụ thuộc vị trí của nó $v(\varphi)$ và lực căng dây $T(\varphi)$.

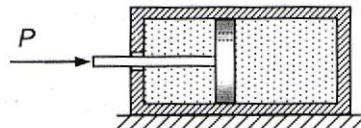
Đáp số: $v(\varphi) = \sqrt{2gL \sin \varphi}$, $T = 3mg \sin \varphi$.

10-18. Con lắc hình nón như hình vẽ. Khối lượng $m = 3\text{kg}$, vận tốc $v = 1,2\text{m/s}$, dây treo dài $L = 0,8\text{ m}$. Xác định góc θ và lực căng của dây.

Đáp số: $\theta = 24,15^\circ$; $T = 32,3\text{N}$.



Hình bài 10-18



Hình bài 10-19

10-19. Bộ giảm chấn thuỷ lực gồm pit-tông có đục lỗ chuyển động trong xylanh chứa dầu như hình vẽ. Pit-tông có khối lượng m chịu tác dụng của lực không đổi P và lực cản $R = -kv$, trong đó k là hệ số tỷ lệ, v là vận tốc của pit-tông. Tìm biểu thức di chuyển x của pit-tông theo thời gian t . Cho biết pit-tông chuyển động từ trạng thái tĩnh và khi $t = 0$ thì $x = 0$.

Đáp số: $x(t) = \frac{P}{k}t - \frac{Pm}{k^2}(1 - e^{-kt/m})$.

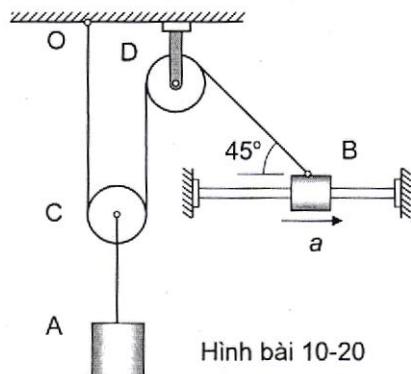
10-20. Vật nặng A có khối lượng $m = 10\text{ kg}$ được treo vào tâm của ròng rọc C. Một dây khác nối từ điểm O cố định đến con trượt B chuyển động trên thanh ngang. Các dây mềm không giãn, không khối lượng. Khi vật B có vận tốc bằng 0 và gia tốc a (sang phải), hãy xác định lực căng dây treo vật A. Bỏ qua ma sát và khối lượng các ròng rọc C và D.

Đáp số: $F = m(g + \frac{1}{2}a \cos 45^\circ)$.

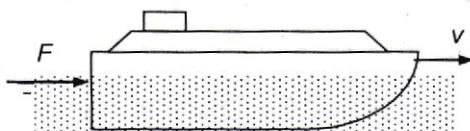
10-21. Một tàu thuỷ có khối lượng toàn bộ là m , chuyển động từ trạng thái nghỉ trên mặt nước yên tĩnh. Cho biết hợp lực tác dụng vào tàu hướng theo chiều chuyển động và có độ lớn $F = c - bv$ (c, b là các hằng số đã cho, v là vận tốc của tàu).

- Xác định vận tốc tối hạn của tàu thuyền.
- Xác định phương trình chuyển động của tàu.

Đáp số: $v_{gh} = c/b = \text{const} > 0$; $x = \frac{c}{b}t - \frac{mc}{b^2}(1 - e^{-\beta t})$.



Hình bài 10-20



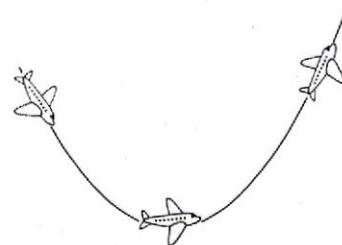
Hình bài 10-21

10-22. Một máy bay bô nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lái ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo, máy bay có vận tốc $v = 1000 \text{ km/h}$ và bán kính cong của quỹ đạo là $R = 600 \text{ m}$. Cho biết khối lượng của người lái là $m = 80 \text{ kg}$, hãy tìm áp lực pháp tuyến do người tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó.

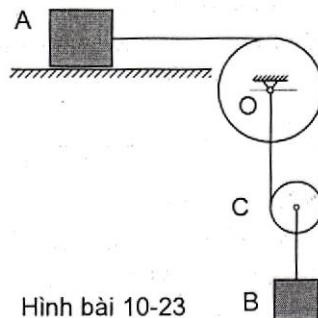
Đáp số: $N = m(v^2/R + g) = 11065 \text{ N}$.

10-23. Vật A khối lượng $m_A = 100 \text{ kg}$ đặt trên nền nhẵn. Vật B khối lượng $m_B = 300 \text{ kg}$. Bỏ qua ma sát và khối lượng các ròng rọc. Xác định lực căng trong hai nhánh dây nối vật A và vật B.

Đáp số: $T_1 = 840 \text{ N}; T_2 = 1680 \text{ N}$.



Hình bài 10-22



Hình bài 10-23

Chương 11

CÁC ĐẶC TRUNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

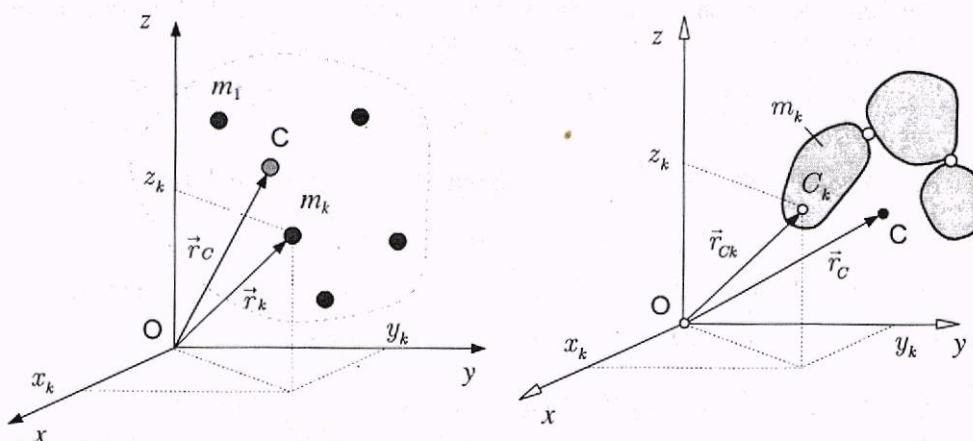
Khối tâm của cơ hệ

Khối tâm hệ n chất điểm là một điểm hình học C có vị trí được xác định theo:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k, \quad M = \sum_{k=1}^n m_k \quad (11.1)$$

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k z_k \quad (11.2)$$

trong đó m_k và \vec{r}_k lần lượt là khối lượng và vectơ định vị của chất điểm thứ k .



Khối tâm C của hệ gồm p vật rắn có vị trí xác định bởi:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^p m_k \vec{r}_{Ck} \quad (11.3)$$

trong đó $M = \sum_{k=1}^p m_k$, C_k là khối tâm (trọng tâm) của vật thứ k . Ta suy ra:

$$x_C = \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^n m_k x_k + \sum_{i=1}^p m_i x_{ci} \right); \quad y_C = \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^n m_k y_k + \sum_{i=1}^p m_i y_{ci} \right); \quad (11.4)$$

$$z_C = \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^n m_k z_k + \sum_{i=1}^p m_i z_{ci} \right).$$

Mômen quán tính khối của vật rắn

Mômen quán tính khối của vật rắn B đối với trục z được định nghĩa dưới dạng :

$$J_z = \int_B r^2 dm \quad (11.5)$$

Mômen quán tính khối của vật rắn đối với các trục vuông góc x, y, z có dạng :

$$\begin{aligned} J_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ J_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (11.6)$$

Mômen tích quán tính của vật rắn đối với các trục x, y, z có dạng:

$$J_{xy} = J_{yx} = \int xy dm; \quad J_{xz} = J_{zx} = \int xz dm; \quad J_{yz} = J_{zy} = \int yz dm \quad (11.7)$$

Khi $J_{xz} = J_{yz} = 0$, trục Oz được gọi là *trục quán tính chính* tại điểm O. Nếu vật đồng chất có mặt phẳng đối xứng thì trục vuông góc với mặt đối xứng là trục quán tính chính tại giao điểm của trục và mặt đối xứng đó.

Bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z được xác định bởi hệ thức:

$$J_z = m \rho_z^2 \quad (11.8)$$

Ma trận quán tính khối của vật rắn đối với hệ trục vuông góc $\{Oxyz\}$

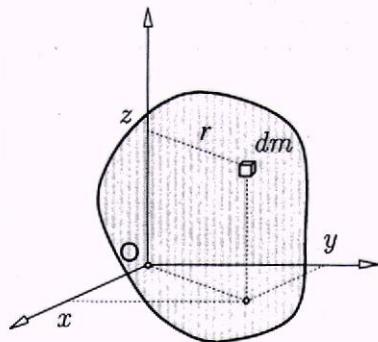
$$J_O = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (11.9)$$

Quan hệ mômen quán tính khối giữa các trục:

Mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục Δ đi qua gốc tọa độ và nghiêng với các trục vuông góc x, y, z theo các góc tương ứng là α, β và γ có dạng:

$$\begin{aligned} J_\Delta &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha \end{aligned} \quad (11.10)$$

Quan hệ mômen quán tính khối giữa hai trục song song có dạng:

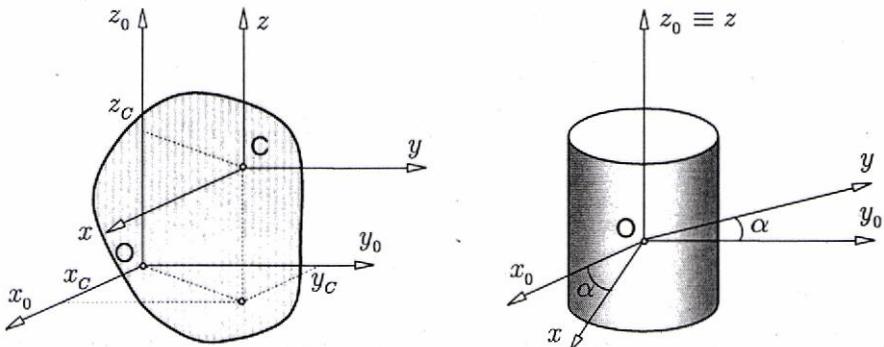


$$J_z = J_{z_c} + md^2 \quad (11.11)$$

trong đó z_c là trục qua khối tâm C, trục $z // z_c$, d là khoảng cách giữa hai trục.

Quan hệ mômen tích quán tính giữa hai hệ trục song song $\{Cxyz\}$, $\{Ox_0y_0z_0\}$:

$$J_{x_0y_0} = J_{xy} + mx_Cy_C, J_{y_0z_0} = J_{yz} + my_Cz_C, J_{z_0x_0} = J_{zx} + mz_Cx_C \quad (11.12)$$



Quan hệ mômen quán tính khối giữa hệ trục $\{Oxyz\}$ và hệ trục quán tính chính $\{Ox_0y_0z_0\}$, trong đó $Oz_0 \equiv Oz$:

$$J_{yx} = J_{xy} = \frac{1}{2}(J_{y_0} - J_{x_0}) \sin 2\alpha \quad (11.13)$$

trong đó α là góc nghiêng giữa trục x_0 và trục x .

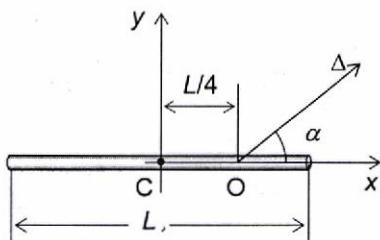
Mômen quán tính khối của vật ghép B được ghép từ các vật rắn B_i có dạng:

$$J_z^{(B)} = \sum J_z^{(B_i)}, J_{xy}^{(B)} = \sum J_{xy}^{(B_i)}, J_{zy}^{(B)} = \sum J_{zy}^{(B_i)}, \dots \quad (11.14)$$

II. BÀI TẬP

- 11-1. Xác định mômen quán tính khối của thanh đồng chất (khối lượng m và chiều dài L) đối với trục Δ đi qua O và tạo với thanh một góc $\alpha = 30^\circ$. Cho biết đoạn CO = $L/4$.

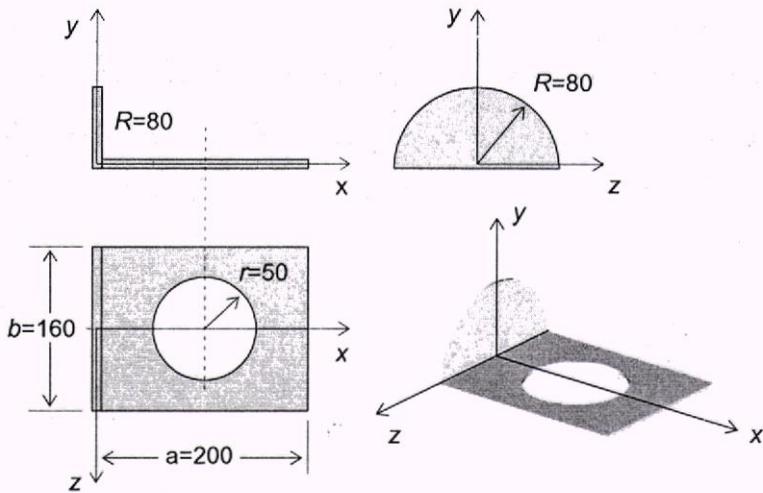
Đáp số: $J_\Delta = \frac{7}{192} mL^2$.



Hình bài 11-1

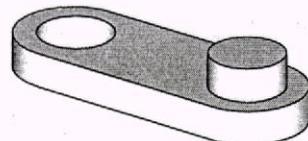
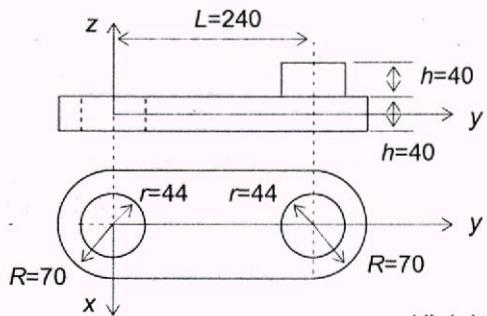
- 11-2. Chi tiết bằng thép dày $h = 4$ mm có hình dạng như hình vẽ. Xác định mômen quán tính của chi tiết đối với 3 trục toa độ vuông góc x, y, z , biết khối lượng riêng của thép là $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$. Kích thước trên hình do bằng mm.

Đáp số: $J_x = 3 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2; J_y = 13,28 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2; J_z = 11,29 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$.



Hình bài 11-2

11-3. Chi tiết băng thép như hình vẽ. Xác định mômen quán tính của chi tiết đối với trục z, biết khối lượng riêng của thép là $\gamma = 7850 \text{ kg/m}^3$. Kích thước trên hình đo bằng mm.



Hình bài 11-3

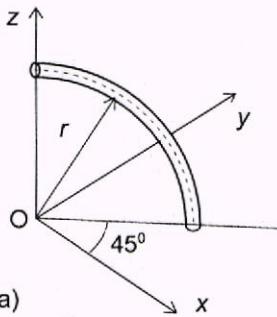
$$\text{Đáp số: } J_z = 183,8 \text{ gm}^2.$$

11-4. Xác định mômen tích quán tính đối với các trục tọa độ x, y, z của các vật đồng chất bằng thép (khối lượng riêng $\gamma = 7830 \text{ kg/m}^3$), kích thước trên hình là mm.

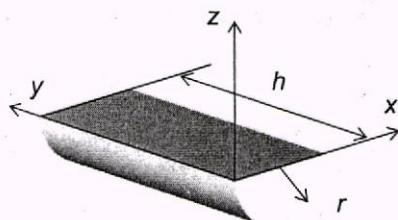
- a) Một phân tư đường tròn phẳng, khối lượng m , bán kính R .
- b) Nửa trù tròn, khối lượng m , bán kính R .

$$\text{Đáp số: a) } J_{xy} = \frac{mr^2}{4}, J_{yz} = J_{xz} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} mr^2;$$

$$\text{b) } J_{xy} = \frac{mrh}{2}, J_{yz} = -\frac{2mrh}{3\pi}, J_{xz} = -\frac{4mr^2}{3\pi}.$$



a)

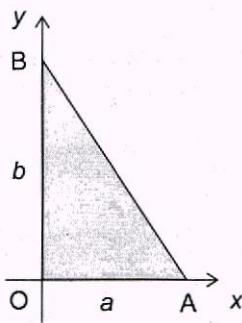


b)

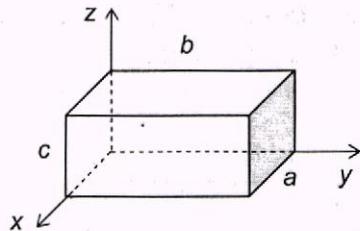
Hình bài 11-4

11-5. Tính ma trận quán tính khối của các vật đồng chất có khối lượng m

- Tấm hình tam giác vuông có các cạnh $OA = a$, $OB = b$, bề dày không đáng kể.
- Khối hộp chữ nhật có các cạnh a, b, c .



a)



b)

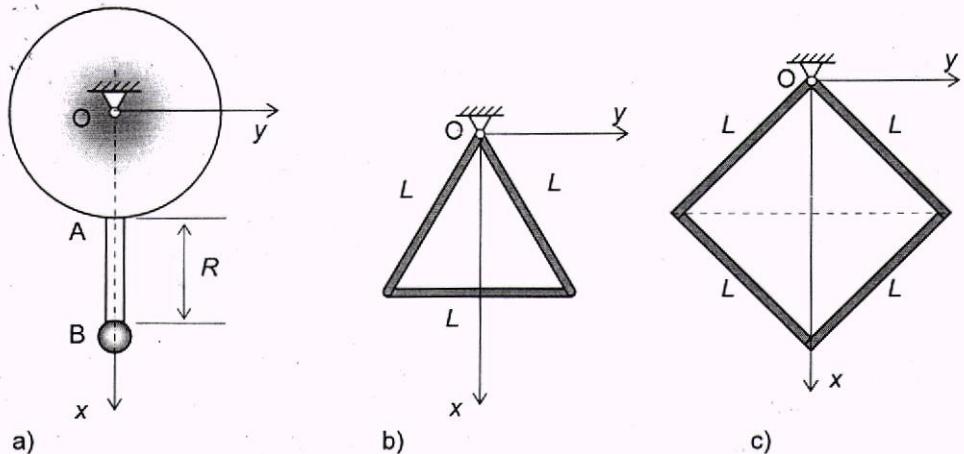
Hình bài 11-5

Đáp số:

$$\text{a) } \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}mb^2 & \frac{1}{12}mab & 0 \\ \frac{1}{12}mab & \frac{1}{6}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}, \text{ b) } \mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) & \frac{1}{4}mab & \frac{1}{4}mac \\ \frac{1}{4}mba & \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) & \frac{1}{4}mbc \\ \frac{1}{4}mca & \frac{1}{4}mcb & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

11-6. Hãy xác định mômen quán tính khối của các con lắc đối với trục quay Oz (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ).

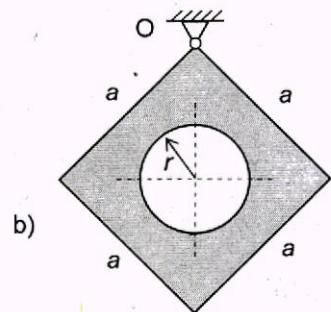
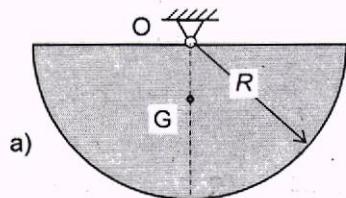
- Con lắc được ghép từ một đĩa tròn đồng chất khối lượng $M = 8m$, bán kính R , thanh mảnh AB đồng chất chiều dài $l = R$, khối lượng m , và quả cầu nhỏ B (coi như chất điểm) có khối lượng m .
- Con lắc được ghép từ ba thanh đồng chất như nhau, mỗi thanh có chiều dài L và khối lượng m .
- Con lắc được ghép từ bốn thanh đồng chất như nhau, mỗi thanh có chiều dài L và khối lượng m .



Hình bài 11-6

Đáp số: a) $J_{Oz} = \frac{31}{3} mR^2$, b) $J_{Oz} = \frac{3}{2} ml^2$, c) $J_{Oz} = \frac{10}{3} ml^2$.

11-7. Xác định mômen quán tính khối của các vật đồng chất sau đối với trục qua O vuông góc mặt phẳng hình vẽ. Biết rằng vật liệu có khối lượng riêng ρ (kg/m^3) và tẩm có chiều dày nhỏ là h .



Hình bài 11-7

Đáp số: a) $m = \rho \frac{1}{2} \pi R^2 h$, $OG = \frac{4R}{3\pi}$; $J_o = \frac{1}{2} mR^2$,

b) $J_o = \frac{1}{6} \rho h (4a^4 - 3\pi r^4 - 3a^2 r^2)$.

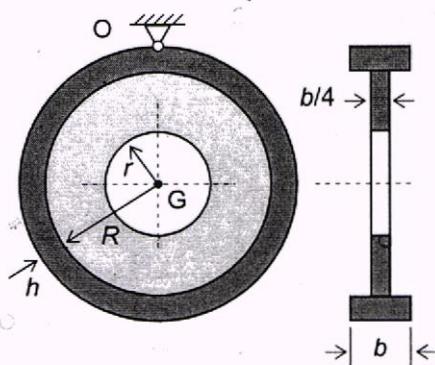
11-8. Xác định mômen quán tính khối của vật đồng chất đối với trục qua O vuông góc mặt phẳng hình vẽ. Biết rằng vật liệu có khối lượng riêng ρ và có các kích thước r, R, h, b .

Đáp số: $J_o = \frac{1}{8} \pi \rho b (32R^3 h + 32R^2 h^2 + 16Rh^3 + 4h^4 + 3R^4 - 2R^2 r^2)$.

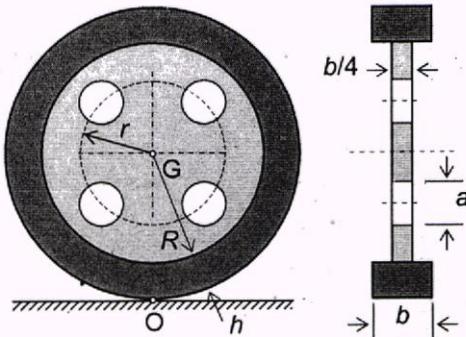
11-9. Một bánh xe đồng chất có các kích thước như trên hình vẽ. Hãy xác định mômen quán tính khối của bánh xe đối với trục vuông góc mặt phẳng hình vẽ di

qua khối tâm G và trục đi qua điểm tiếp xúc O. Biết rằng vật liệu có khối lượng riêng ρ , cho các kích thước r, R, a, b, h .

$$\text{Đáp số: } J_G = \frac{1}{32} \pi \rho b (64R^3h + 96R^2h^2 + 64Rh^3 + 16h^4 + 4R^4 - a^4 - 8r^2a^2).$$

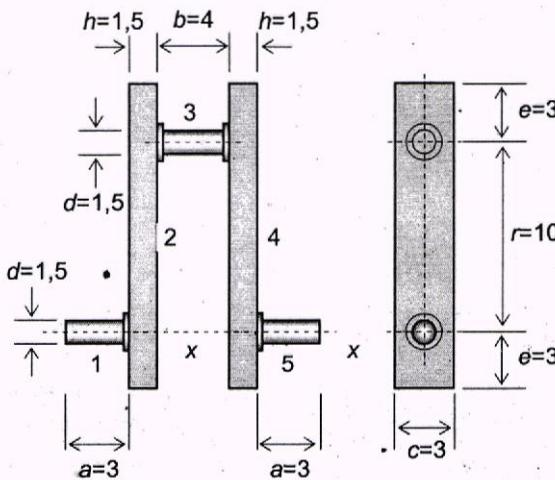


Hình bài 11-8



Hình bài 11-9

11-10. Một trục khuỷu làm từ thép có các kích thước như hình vẽ. Hãy xác định vị trí khối tâm trục khuỷu và mômen quán tính khối của nó đối với trục quay x. Biết khối lượng riêng của thép là $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$. Các kích thước đo bằng cm.

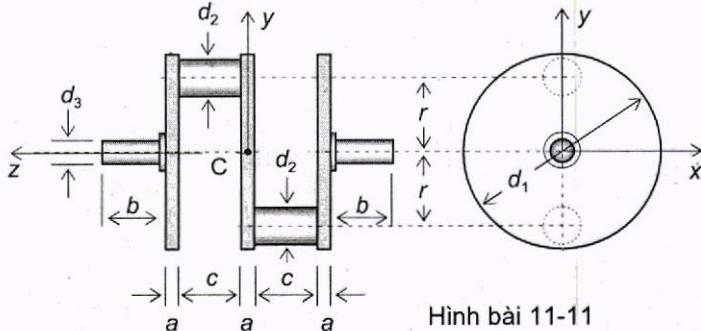


Hình bài 11-10

$$\text{Đáp số: } J_x = 0,006034 \text{ kgm}^2.$$

11-11. Một trục khuỷu của động cơ hai xy-lanh làm từ thép (khối lượng riêng ρ) có các kích thước như hình vẽ. Hãy xác định mômen quán tính khối của nó đối với trục quay z.

Đáp số: $J_z = \frac{1}{32} \pi \rho (2d_3^4 b + 3d_1^4 a + 2d_2^4 c + 16d_2^2 cr^2)$.

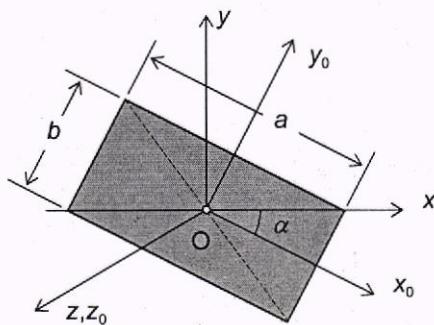


Hình bài 11-11

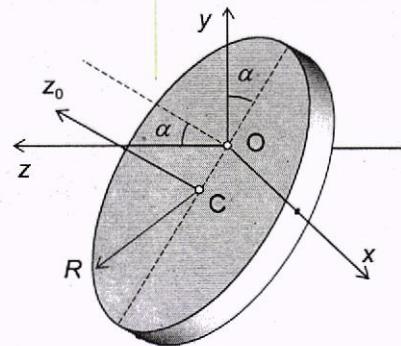
11-12. Tính mômen quán tính khối của một tấm mỏng đồng chất hình chữ nhật có khối lượng m , các kích thước như trên hình đối với hệ trục $\{Oxyz\}$, (x là một đường chéo, trục z vuông góc mặt phẳng tấm).

Đáp số: $J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$, $J_x = \frac{1}{12} m(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$,

$$J_y = \frac{1}{12} m(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha), J_{xy} = \frac{1}{12} m(b^2 - a^2) \sin 2\alpha.$$



Hình bài 11-12



Hình bài 11-13

11-13. Cho một đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính R (bề dày không đáng kể), tâm C . Hãy tính các thành phần của ma trận quán tính khối đối với hệ trục tọa độ $\{Oxyz\}$, biết $OC = e$, trục z nghiêng với trục z_0 (vuông góc với mặt phẳng đĩa và đi qua tâm C) một góc α .

Đáp số:

$$J_x = m(\frac{1}{4}r^2 + e^2), J_{xy} = 0, J_{xz} = 0, J_{yz} = J_{xy} = \frac{1}{4}m(r^2 + 4e^2) \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$J_y = \frac{1}{2}m(r^2 + 2e^2) - \frac{1}{4}m(r^2 + 4e^2) \cos^2 \alpha, J_z = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{4}m(r^2 + 4e^2) \cos^2 \alpha.$$

Chương 12

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LƯỢNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Động lượng

Động lượng của vật rắn có dạng :

$$\vec{p} = m\vec{v}_C \quad (12.1)$$

với \vec{v}_C là vận tốc khối tâm C của vật rắn. Động lượng của hệ n vật rắn có dạng:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_{Ck} \quad (12.2)$$

Xung lượng của lực

Xung lượng nguyên tố của lực :

$$d\vec{S} = \vec{F} dt \quad (12.3)$$

Xung lượng của lực \vec{F} trong khoảng thời gian $t = t_2 - t_1$:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (12.4)$$

Mômen động lượng đối với một điểm và đối với một trục

Chất điểm khối lượng m , chuyển động với vận tốc \vec{v} :

$$\vec{l}_o = \vec{m}_o(m\vec{v}), \quad \vec{l}_z = \vec{m}_z(m\vec{v}). \quad (12.5)$$

Hệ n chất điểm:

$$\vec{l}_o = \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(m_k \vec{v}_k), \quad \vec{l}_z = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(m_k \vec{v}_k). \quad (12.6)$$

Vật rắn chuyển động tịnh tiến :

$$\vec{l}_o = \vec{m}_o(m\vec{v}_C), \quad \vec{l}_z = \vec{m}_z(m\vec{v}_C). \quad (12.7)$$

Vật rắn quay quanh trục cố định :

$$\vec{l}_z = J_z \vec{\omega} \quad (12.8)$$

với J_z là mômen quán tính khối của vật rắn đối với trục quay z và ω là vận tốc góc của vật rắn.

Vật rắn phẳng chuyển động phẳng trong mặt phẳng Oxy:

$$\vec{l}_o = \overrightarrow{OC} \times m\vec{v}_C + J_{Cz}\vec{\omega}, \quad \vec{l}_z = \bar{m}_o(m\vec{v}_C) + J_{Cz}\vec{\omega} \quad (12.9)$$

Định lý biến thiên động lượng đối với cơ hệ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^m \vec{F}_k^e \quad (12.10)$$

trong đó \vec{F}_k^e là ngoại lực thứ k tác dụng vào hệ. Từ phương trình trên ta suy ra:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \sum_{k=1}^m \vec{S}_k^e \quad (12.11)$$

trong đó \vec{p}_1 và \vec{p}_2 là động lượng của hệ tại thời điểm t_1 và t_2 .

Nếu $\sum_{k=1}^m \vec{F}_k^e = 0$ thì $\vec{p} = \text{const}$, động lượng của hệ được *bảo toàn*.

Định lý chuyển động khối tâm

$$M\dot{\vec{a}}_C = \sum_{k=1}^m \vec{F}_k^e \quad (12.12)$$

trong đó M là khối lượng của toàn bộ hệ, \vec{a}_C là gia tốc khối tâm C của hệ.

Công thức (12.12) được biểu diễn trong hệ tọa độ quán tính $\{Oxyz\}$ dưới dạng:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^m F_{kx}^e, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^m F_{ky}^e, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^m F_{kz}^e \quad (12.13)$$

Các trường hợp bảo toàn chuyển động khối tâm của cơ hệ:

$\sum_{k=1}^m \vec{F}_k^e = 0$, $\vec{v}_C = \text{const}$: Khối tâm C của hệ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

$\sum_{k=1}^m F_{kx}^e = 0$ và $\dot{x}_C(0) = 0$, $x_C = \text{const}$: Khối tâm có vị trí không đổi theo trục x.

Định lý biến thiên mômen động lượng đối với cơ hệ

Đối với một điểm cố định và một trục cố định:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_o = \sum_{k=1}^m \bar{m}_o(\vec{F}_k^e), \quad \frac{d}{dt} \vec{l}_z = \sum_{k=1}^m \bar{m}_z(\vec{F}_k^e) \quad (12.14)$$

Đối với một điểm chuyển động:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_A = \sum_{k=1}^m \bar{m}_A(\vec{F}_k^e) - \vec{v}_A \times (m\vec{v}_C) \quad (12.15)$$

Đối với khối tâm C của cơ hệ:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_O = \sum_{k=1}^m \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) \quad (12.16)$$

Các trường hợp bảo toàn mômen động lượng:

$$\sum_{k=1}^m \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \vec{l}_O = \text{const.}$$

$$\sum_{k=1}^m \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0, \quad \vec{l}_z = \text{const.}$$

Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn

Vật rắn quay quanh trục z cố định:

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_k \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) + \sum_j \vec{M}_j^e \quad (12.17)$$

trong đó φ là góc quay, \vec{F}_k^e, \vec{M}_j^e là ngoại lực thứ k và mômen của ngẫu lực thứ j tác dụng lên vật rắn.

Vật rắn phẳng chuyển động trên mặt phẳng xy:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^m F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^m F_{ky}^e \\ J_{Cx} \ddot{\varphi} &= \sum_k \vec{m}_C(\vec{F}_k^e) + \sum_j \vec{M}_j^e. \end{aligned} \quad (12.18)$$

II. BÀI TẬP

Định lý biến thiên động lượng và định lý chuyển động khối tâm

12-1. Một đầu đạn có khối lượng là $m = 0,02\text{kg}$ bay ra khỏi nòng súng với vận tốc $v = 650\text{m/s}$. Thời gian đầu đạn chạy trong nòng súng là $\Delta t = 955 \times 10^{-3}\text{s}$. Thiết diện ngang của nòng súng là $S = 150\text{mm}^2$. Tìm áp suất trung bình P của hơi nổ trong nòng súng. Bỏ qua tác dụng của trọng lực và áp suất khí quyển.

Đáp số: $P = 90,75\text{N/mm}^2$.

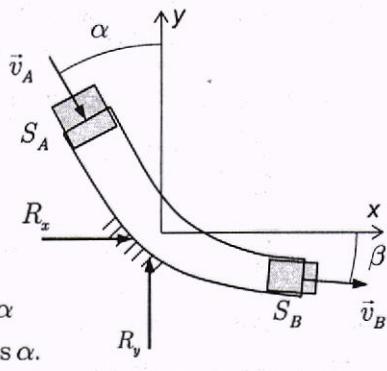
12-2. Nòng súng đại bác đặt nằm ngang có khối lượng $M = 11 \times 10^3\text{ kg}$. Khối lượng viên đạn bằng $m = 54\text{ kg}$. Vận tốc viên đạn lúc ra khỏi nòng súng $v = 900\text{ m/s}$. Xác định vận tốc giật lùi của nòng ở thời điểm viên đạn bay ra.

Đáp số: Vận tốc giật lùi của nòng súng bằng $4,42\text{m/s}$ và hướng ngược chiều chuyển động của viên đạn.

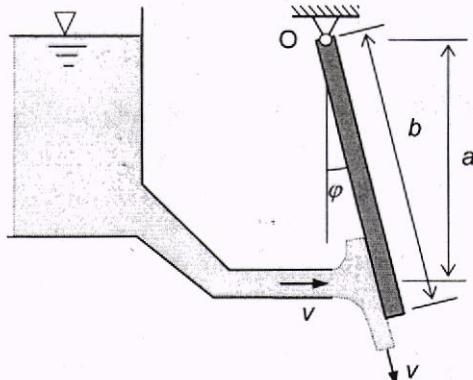
12-3. Một dòng chất lỏng lý tưởng, đồng chất và không nén được chảy qua một ống dẫn. Diện tích ống tại mặt cắt A là S_A và tại B là S_B , vận tốc chất lỏng qua A là v_A . Tìm áp lực của ống lên giá đỡ. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực và áp suất thủy tĩnh. Biết các góc của hướng dòng chảy tại cửa vào và ra đối với các phương x và y là α và β .

$$\text{Đáp số: } R_x = (\rho S_B v_B) v_B \cos \beta - (\rho S_A v_A) v_A \sin \alpha$$

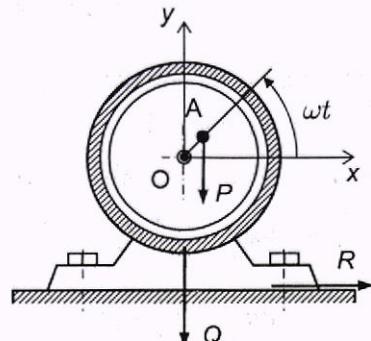
$$R_y = -(\rho S_B v_B) v_B \sin \beta + (\rho S_A v_A) v_A \cos \alpha.$$



Hình bài 12-3



Hình bài 12-4



Hình bài 12-5

12-4. Nước trong bình (khối lượng riêng ρ) chảy ra miệng ống nằm ngang với vận tốc v , diện tích miệng ống là S . Dòng nước chảy ra làm cho tấm OA lệch khỏi vị trí thẳng đứng. Biết tấm OA đồng chất có trọng lượng P . Xác định góc lệch φ .

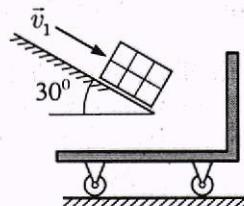
$$\text{Đáp số: } \sin \varphi = 2\rho a S m v^2 / P b.$$

12-5. Động cơ điện được giữ cố định trên nền nhờ các bu-lông như hình vẽ. Phần cố định của động cơ có trọng lượng $Q = m_1 g$, phần quay có trọng lượng $P = m_0 g$, trọng tâm của phần quay đặt tại A với $OA = e$. Tim giá trị lớn nhất của hợp lực của các lực cắt ngang bu-lông. Cho biết động cơ quay đều với vận tốc góc ω .

$$\text{Đáp số: } R_{\max} = m_0 e \omega^2.$$

12-6. Xe đẩy có khối lượng $m = 25\text{kg}$ đang đứng yên. Kiên hàng khối lượng $m_1 = 10\text{kg}$ trượt theo mặt phẳng nghiêng xuống xe với vận tốc $v_1 = 3\text{m/s}$ làm cho xe chuyển động trên nền nhẵn. Hãy xác định: a) Vận tốc của xe; b) Xung lực do kiên hàng tác dụng lên xe.

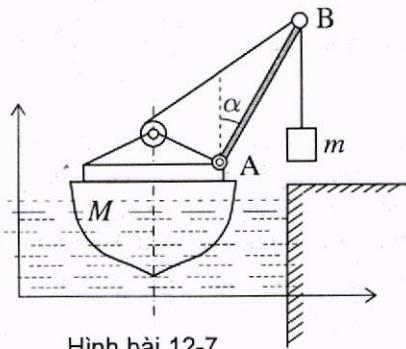
$$\text{Đáp số: a) } v_2 = 0,742 \text{ m/s; b) } S_F = 33,9 \text{ Ns.}$$



Hình bài 12-6

12-7. Xác định di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu khi cần AB mang vật nặng có khối lượng $m = 2\text{tấn}$ được nâng lên từ vị trí ban đầu $\alpha = 30^\circ$ như hình vẽ. Khối lượng của tàu và cần cẩu là $M = 20\text{tấn}$, chiều dài AB = L = 8 m. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB.

Đáp số: Tàu di chuyển ngang ngược với hướng di chuyển ngang của vật nặng một đoạn bằng 0,36m.



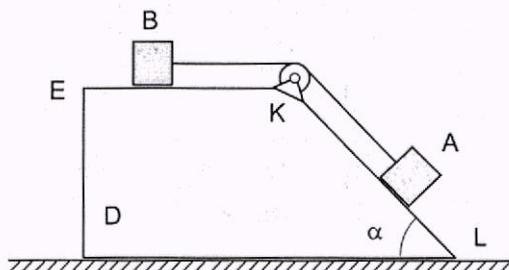
Hình bài 12-7

12-8. Đoàn tàu hỏa đang di chuyển trên một quãng đường thẳng ngang với vận tốc 54km/giờ thì được hãm làm xuất hiện lực cản bằng 1/10 trọng lượng tổng cộng của đoàn tàu. Tìm thời gian T và quãng đường s đoàn tàu còn chạy thêm được cho đến khi nó dừng hẳn (lấy $g = 9,81\text{m/s}^2$).

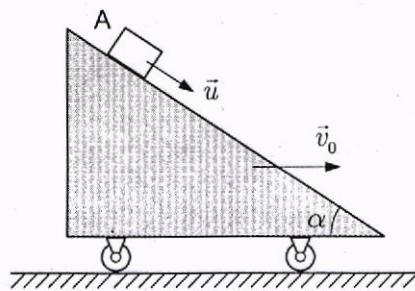
Đáp số: $T = 15,29\text{ s}$; $s(T) = 114,68\text{ m}$.

12-9. Một tàu thủy có khối lượng $M = 200\text{tấn}$, chuyển động với tốc độ trung bình là 10 m/s theo đường thẳng ngang trên mặt nước yên tĩnh. Pit-tông của máy hơi nước có khối lượng $m = 100\text{kg}$ chuyển động theo đường thẳng song song với trục dọc của tàu. Pit-tông thực hiện 240 hành trình trong 1phút với độ dài hành trình là 1m. Coi chuyển động của pit-tông là dao động điều hòa. Xác định biểu thức vận tốc của con tàu nếu sức đẩy của chân vịt luôn cân bằng với lực cản của nước.

Đáp số: $v = 10 - 0,00314 \cos(4\pi t)$ m/s.



Hình bài 12-10



Hình bài 12-11

12-10. Hai vật nặng A và B có khối lượng là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây mềm, nhẹ và không giãn và được đặt trên các mặt KL và KE của lăng trụ DEKL. Lăng trụ có khối lượng m_3 được đặt trên nền ngang nhẵn và cứng. Tìm di chuyển Δ của lăng trụ khi vật nặng A trượt xuống theo mặt nghiêng KL một đoạn dài s . Ban đầu hệ đứng yên.

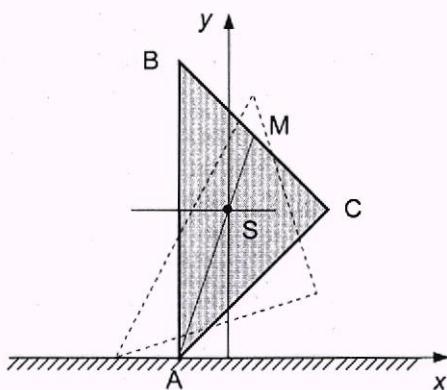
Đáp số: $\Delta = \frac{(m_1 \cos \alpha + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} s.$

12-11. Cho cơ hệ gồm vật A có trọng lượng P_2 đặt trên mặt nghiêng của một lăng trụ có trọng lượng P_1 . Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt phẳng ngang là α . Ban đầu vật A đứng yên so với lăng trụ, còn lăng trụ chuyển động sang phải với vận tốc v_0 . Sau đó cho vật A trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng của lăng trụ với vận tốc tương đối $u = at$. Tìm vận tốc của lăng trụ. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát giữa lăng trụ và nền.

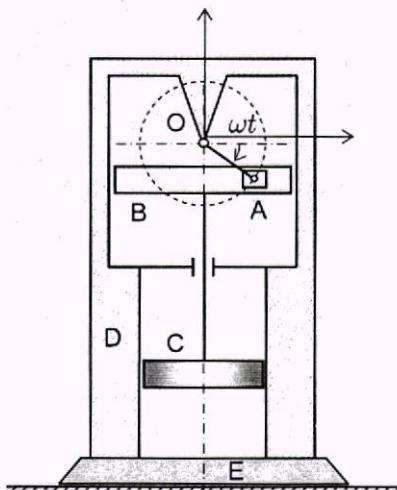
Đáp số: $v = v_0 - \frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cos \alpha.$

12-12. Một tấm đồng chất ABC có hình dạng là một tam giác vuông cân, cạnh huyền AB dài 12cm được đặt thẳng đứng tựa đỉnh A trên mặt phẳng ngang nhẵn không ma sát. Người ta thả cho tấm phẳng đổ xuống dưới tác dụng của trọng lực. Giả thiết đỉnh A của tấm luôn nằm trên nền ngang. Hãy xác định quỹ đạo của điểm M nằm chính giữa cạnh bên BC.

Đáp số: $9(x - 2)^2 + y^2 = 90.$



Hình bài 12-12



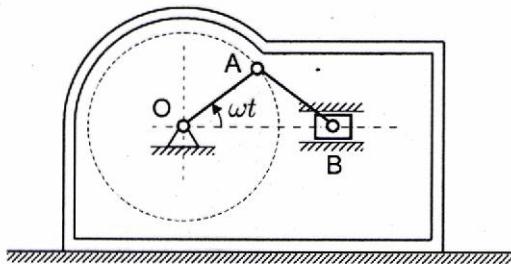
Hình bài 12-13

12-13. Xác định áp lực lên nền đất của một máy bơm nước lúc chạy không tải. Trọng lượng của phần cố định gồm vỏ D và móng E bằng P_1 , tay quay OA có chiều dài là a và có trọng lượng bằng P_2 . Trọng lượng của máng trượt B cùng với pit-tông C là P_3 . Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω . Xem như các vật khảo sát đều là những vật đồng chất và có cấu tạo đối xứng.

Đáp số: $N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a\omega^2}{2g} (P_2 + 2P_3) \sin \omega t.$

12-14. Một động cơ hơi nước đặt tự do nằm ngang trên mặt nền trơn nhẵn. Tay quay $OA = r$ quay đều với vận tốc góc ω . Coi khối lượng của các bộ phận chuyển động được thu gọn về thành hai khối lượng m_1 và m_2 tập trung ở đầu A của tay quay và ở trọng tâm B của pit-tông. Chiều dài thanh truyền $AB = r$. Khối lượng của vỏ động cơ là m_3 . Ban đầu động cơ đứng yên và pit-tông ở vị trí xa nhất về bên phải.

- Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ.
- Nếu động cơ được vít chặt xuống nền, tìm áp lực của động cơ lên nền và hợp lực của các lực cắt ngang bu-lông. Bỏ qua lực cản ban đầu của các bu-lông.



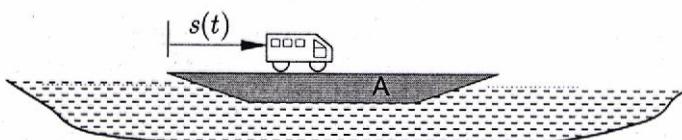
Hình bài 12-14

Đáp số: a) $x = \frac{(m_1 + 2m_2)r}{m_1 + m_2 + m_3} (\cos \omega t - 1)$,

b) $N = (m_1 + m_2 + m_3)g - m_1 r \omega^2 \sin \omega t$, $F = (m_1 + 2m_2)r\omega^2 \cos \omega t$.

12-15. Trên một xà lan A khối lượng M có một ôtô khối lượng m chuyển động theo quy luật $s(t) = s_0 + b(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$, trong đó s_0, b, α là các hằng số. Bỏ qua ảnh hưởng của lực cản của nước lên xà lan.

- Hãy xác định vận tốc của xà lan $v_A(t)$.
- Nếu xà lan được giữ cố định bằng một dây neo nằm ngang, hãy xác định lực cản dây neo.



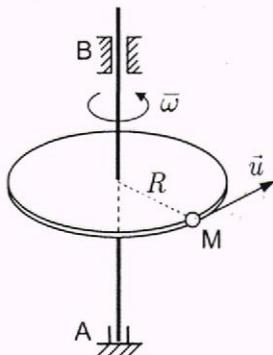
Hình bài 12-15

Đáp số: a) $v_A(t) = -\frac{mb\alpha}{M+m}(1 - e^{-\alpha t})$, b) $F = mb\alpha^2 e^{-\alpha t}$.

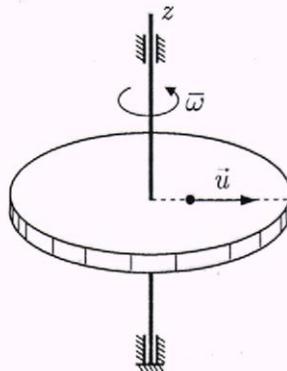
Định lý biến thiên mômen động lượng

12-16. Đĩa đồng chất bán kính R có khối lượng m , chất điểm M có khối lượng m_0 . Ban đầu đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0 và chất điểm đứng yên trên vành đĩa. Tìm vận tốc góc ω của đĩa khi chất điểm chuyển động theo vành đĩa với vận tốc tương đối u .

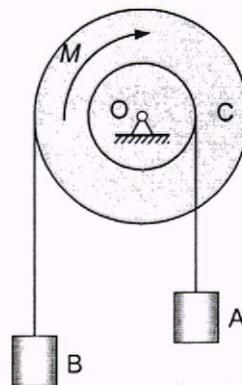
$$\text{Đáp số: } \omega = \omega_0 - \frac{2m_0 u}{(m + 2m_0)R}.$$



Hình bài 12-16



Hình bài 12-17



Hình bài 12-18

12-17. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và bán kính r . Đĩa quay quanh trục z cố định với vận tốc góc ω_0 . Vào một thời điểm nào đó, chất điểm M có khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài vành theo một đường bán kính với vận tốc không đổi u . Xác định vận tốc góc ω của đĩa là hàm theo thời gian kể từ lúc chất điểm M chuyển động. Bỏ qua lực ma sát tại ổ trục.

$$\text{Đáp số: } \omega = \frac{m_1 r^2 \omega_0}{m_1 r^2 + 2m_2 u^2 t^2}.$$

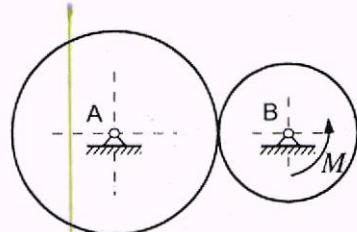
12-18. Hai vật nặng A và B có khối lượng tương ứng m_1 và m_2 được treo vào hai đầu của dây không trọng lượng, không giãn. Dây được quấn vào tang của tời C hai tầng có bán kính nhỏ r và bán kính lớn R . Để nâng vật B lên người ta tác dụng một ngẫu lực có mômen M lên tời như hình vẽ. Biết tời có khối lượng m , bán kính quấn tính đối với trục quay là ρ , hãy tìm giá tốc góc của tời C .

$$\text{Đáp số: } \varepsilon = \frac{M + m_1 gr - m_2 gR}{m\rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}.$$

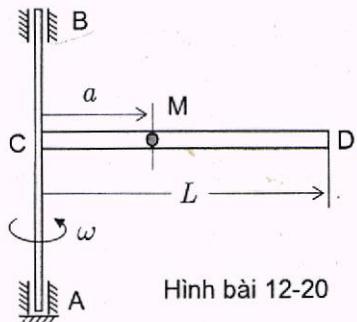
12-19. Bánh răng A được truyền động từ bánh răng B. Cho biết bánh răng A có khối lượng $m_A = 10 \text{ kg}$, bán kính $r_A = 250 \text{ mm}$, bán kính quấn tính với trục quay $\rho_A = 200 \text{ mm}$. Bánh răng B có khối lượng $m_B = 3 \text{ kg}$, bán kính $r_B = 100 \text{ mm}$, bán kính quấn tính $\rho_B = 80 \text{ mm}$. Bánh răng B chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = 6 \text{ Nm}$. Ban đầu hệ đứng yên. Xác định:

- Thời gian T cần thiết để đĩa B đạt được vận tốc góc $n_B = 600 \text{ vòng/phút}$,
- Thành phần lực tiếp tuyến do bánh răng B tác dụng vào bánh răng A.

Đáp số: a) $T = 0,871 \text{ s}$; b) $F = 46,2 \text{ N}$.



Hình bài 12-19



Hình bài 12-20

12-20. Một ống nằm ngang CD có thể quay tự do quanh trục thẳng đứng AB. Quả cầu M (xem như chất điểm) khối lượng m có thể chuyển động bên trong ống. Ban đầu quả cầu M đứng yên cách trục quay một khoảng $MC = a$. Tại một thời điểm, ống được truyền vận tốc góc ω_0 . Xác định vận tốc góc ω của ống ngay khi quả cầu vừa rời khỏi ống CD. Cho biết mômen quán tính của ống đối với trục quay bằng J , chiều dài CD = L . Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát.

$$\text{Đáp số: } \omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2} \omega_0.$$

12-21. Một động cơ điện chịu tác dụng của một ngẫu lực tổng hợp (phát động và cản) có mômen quay là $M = a - b\omega$, trong đó a, b là các hằng số dương và ω là vận tốc góc của động cơ. Mômen quán tính của phần quay đối với trục quay hình học là J . Tìm biểu thức vận tốc góc ω trong quá trình mở máy từ trạng thái đứng yên.

$$\text{Đáp số: } \omega = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt/J}).$$

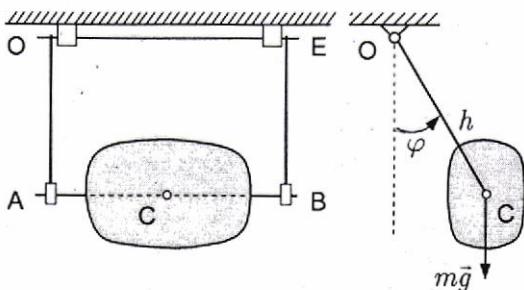
12-22. Một rôto có mômen quán tính khối J khởi động từ trạng thái đứng yên dưới tác dụng của một ngẫu lực phát động có mômen không đổi M_0 và của một ngẫu lực cản có mômen $M_1 = \alpha\omega^2$ với α là hằng số và ω là vận tốc góc của vật. Tìm

quy luật biến thiên của vận tốc góc theo thời gian và tìm giá trị vận tốc góc giới hạn của vật.

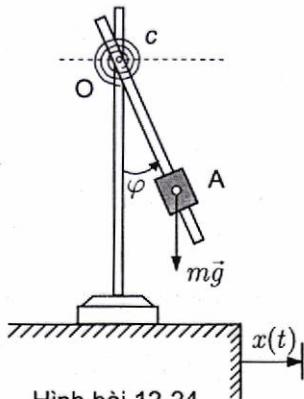
$$\text{Đáp số: } \omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}, \text{ với } \beta = \frac{2}{J} \sqrt{\alpha M_0}; \omega_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}}.$$

12-23. Để xác định mômen quán tính khối của một vật có khối lượng m đối với trục AB đi qua khối tâm C của vật, ta treo vật bằng hai thanh AO và BE gắn cứng vào vật sao cho AB có phương nằm ngang như hình vẽ. Hai thanh AO và BE cùng chiều dài h có thể quay tự do quanh trục OE cố định. Khi vật dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng (góc φ bé), ta đo được chu kỳ dao động T . Nếu bỏ qua trọng lượng của hai thanh treo và bỏ qua ma sát ở các khớp quay, hãy thiết lập biểu thức tính mômen quán tính khối của vật đối với trục AB.

$$\text{Đáp số: } J_{AB} = mh\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - h\right).$$



Hình bài 12-23



Hình bài 12-24

12-24. Bộ phận chính của dao động kế để ghi chấn động ngang của móng máy có cấu tạo như một con lắc được biểu diễn trên hình vẽ. Khi OA thẳng đứng, lò xo xoắn không bị biến dạng. Cho biết mômen tĩnh của con lắc đối với O khi OA nằm ngang $mgh = 4,5 \text{ Ncm}$, mômen quán tính khối của con lắc đối với trục quay là $J_o = 3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$, độ cứng của lò xo xoắn là $c = 0,1 \text{ Ncm}$. Bỏ qua mọi lực cản.

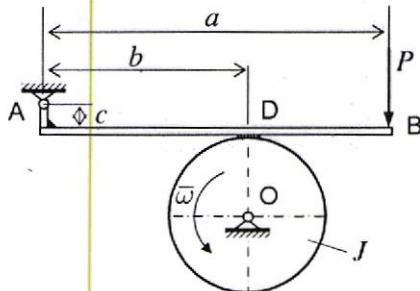
- Xác định chu kỳ của dao động nhỏ tự do của con lắc quanh vị trí cân bằng thẳng đứng (góc φ bé).
- Gắn dao động kế vào một móng máy, giả thiết rằng móng máy dao động điều hòa theo phương ngang theo quy luật $x = a \sin 60t \text{ cm}$. Nếu biên độ dao động của con lắc là 6° , hãy xác định biên độ dao động a của móng máy.

$$\text{Đáp số: a) } T = 0,507 \text{ s; b) } a = 6,56 \text{ mm.}$$

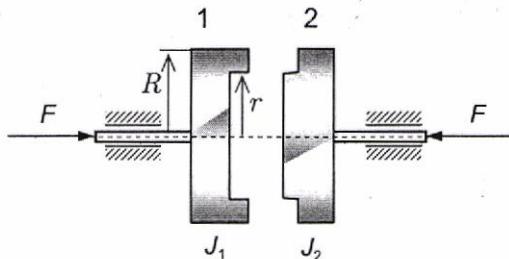
12-25. Tác dụng lực P để hãm một trục máy đang quay với vận tốc góc ω_0 . Trục máy có bán kính R , mômen quán tính khối đối với trục quay O là J . Hệ số ma sát động tại má phanh D là f . Bỏ qua ma sát tại ổ trục O. Cho biết các kích thước a , b , c như trên hình vẽ. Hãy xác định:

- Khoảng thời gian T kể từ lúc bắt đầu hãm cho đến khi trục máy dừng lại.
- Số vòng n mà trục máy quay được trong khoảng thời gian đó.

Đáp số: a) $T = \frac{b - fc}{PafR} J\omega_0$, b) $n = \frac{\omega_0 T}{4\pi}$.



Hình bài 12-25



Hình bài 12-26

12-26. Xét quá trình nối trục (đóng ly-hợp) bằng đĩa ma sát trên mô hình đơn giản như hình vẽ. Cho biết vận tốc góc trước khi nối trục của đĩa 1 là ω_1 và của đĩa 2 là ω_2 , mômen quán tính của hai đĩa đối với trục quay tương ứng là J_1, J_2 . Lực nối trục tác dụng vào hai đĩa dọc theo trục với độ lớn F . Mật trong của đĩa 1 có bán kính ngoài là R , bán kính trong là r . Hệ số ma sát trượt động giữa hai mặt tiếp xúc là μ . Hãy xác định:

- Vận tốc góc chung ω của hai đĩa sau khi nối trục.
- Khoảng thời gian t_n cần thiết để nối trục.

Đáp số: a) $\omega = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2}$, b) $t_n = \frac{3(R^2 - r^2)}{2\mu F(R^3 - r^3)} \frac{J_1 J_2 (\omega_2 - \omega_1)}{J_1 + J_2}$.

Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn phẳng

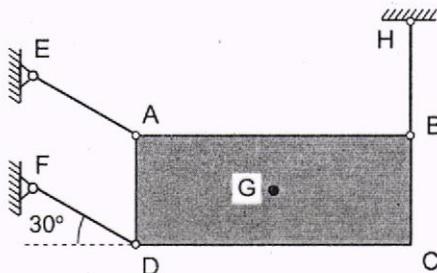
12-27. Tấm chữ nhật ABCD có khối lượng $m = 8\text{kg}$ được giữ ở vị trí như hình vẽ. Hai thanh trọng lượng không đáng kể, $AE = DF = 150\text{mm}$, $AB = DC = 500\text{mm}$, $AD = BC = 200\text{mm}$. Xác định ứng lực mỗi thanh khi dây BH vừa bị đứt.

Đáp số: $S_{AE} = 47,9\text{ N}; S_{DF} = 8,70\text{ N}$.

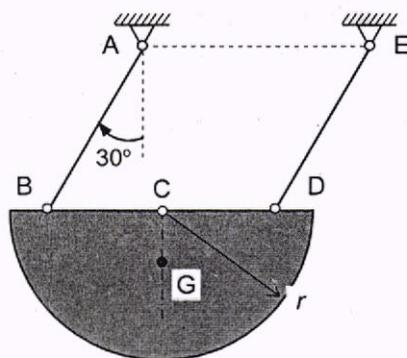
12-28. Tấm đồng chất dạng nửa hình tròn với bán kính $r = 200\text{mm}$ và có khối lượng $m = 5\text{kg}$. Tấm được treo bằng hai thanh khối lượng không đáng kể, các kích thước

$AB = DE = 250\text{mm}$, $AE = BD = 300\text{mm}$. Khi ở vị trí như hình vẽ tám có vận tốc $v = 1,8\text{m/s}$, hãy xác định ứng lực trong mỗi thanh. Cho biết khoảng cách tới khối tâm G là $CG = 4r / 3\pi$.

Đáp số: $S_{AB} = 36,1\text{ N}$; $S_{DE} = 71,2\text{ N}$.



Hình bài 12-27

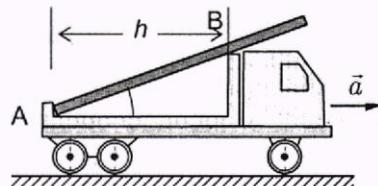


Hình bài 12-28

12-29. Một cái cột đồng chất chiều dài l , khối lượng m , được trỏ bằng xe tải như hình vẽ. Xe chuyển động trên đường thẳng ngang với gia tốc a . Tìm lực do xe tác dụng lên cột tại B. Tìm gia tốc lớn nhất a_{\max} của xe để việc chuyên chở được an toàn.

Đáp số: $N_B = \frac{1}{2h} Lm(g \cos \alpha - a \sin \alpha) \cos \alpha$,

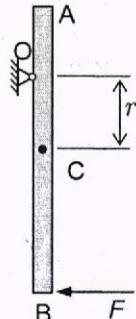
$$a_{\max} = g \cot \alpha.$$



Hình bài 12-29

12-30. Thanh đồng chất AB có chiều dài L , trọng lượng P được treo bắn lê tại O như hình vẽ. Khoảng cách từ điểm treo đến trọng tâm C là $r = L/4$. Khi thanh đang ở vị trí cân bằng tĩnh, ta tác dụng lực nằm ngang F tại điểm cuối B. Hãy xác định gia tốc góc của thanh và lực liên kết tại O.

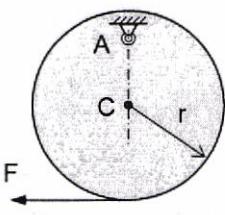
Đáp số: $X_O = \frac{FL(L - 6r)}{L^2 + 12r^2}$, $Y_O = P$, $\epsilon = \frac{36Fg}{7PL}$.



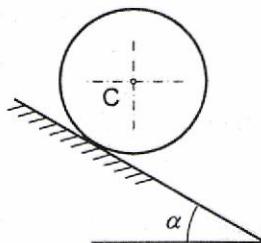
Hình bài 12-30

12-31. Đĩa tròn đồng chất khối lượng $m = 6\text{kg}$, bán kính $r = 160\text{mm}$ quay được quanh trục A. Cho biết khoảng cách AC = $3r/4$. Xác định gia tốc góc của đĩa và lực liên kết tại A tại thời điểm đĩa chịu tác dụng của lực nằm ngang F = 20N.

Đáp số: $\epsilon = 34,3\text{ rad/s}^2$; $X_A \approx 4,7\text{ N}$; $Y_A \approx 58,9\text{ N}$.



Hình bài 12-31



Hình bài 12-32, 12-33

12-32. Dưới tác dụng của trọng lực, một khối trụ tròn đồng chất lăn xuống theo đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α . Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa mặt trụ và mặt phẳng nghiêng là μ_0 . Tìm góc nghiêng α của mặt phẳng nghiêng để đảm bảo cho chuyển động lăn đó là không trượt, tìm gia tốc của tâm C khối trụ. Bỏ qua ma sát lăn.

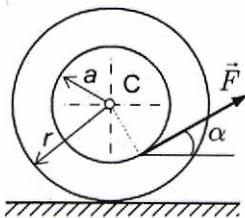
$$\text{Đáp số: } \alpha \leq \arctan(3\mu_0); \quad a = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

12-33. Một bánh xe đồng chất bán kính r lăn xuống không trượt theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát lăn động giữa bánh xe và mặt nghiêng là k . Tìm điều kiện để bánh xe lăn xuống đều.

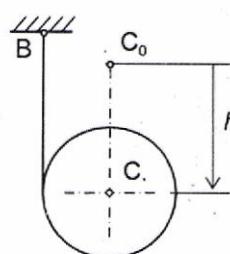
$$\text{Đáp số: } k = r \tan \alpha.$$

12-34. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn, có trọng lượng P bán kính r , được đặt trên mặt phẳng ngang không nhẵn. Một sợi dây quấn vào tầng trong của con lăn với bán kính a , tác dụng lên đầu tự do của dây một lực có trị số F , nghiêng với mặt phẳng ngang một góc không đổi α . Cho biết bán kính quán tính của con lăn đối với trục của nó là ρ , hãy tìm quy luật chuyển động của tâm C của con lăn.

$$\text{Đáp số: } x(t) = \frac{F}{P} \frac{rg(r \cos \alpha - a)}{2(r^2 + \rho^2)} t^2.$$



Hình bài 12-34



Hình bài 12-35

12-35. Một trụ tròn đồng chất tâm C, có khối lượng m , lăn xuống theo một dây treo thẳng đứng quấn vào nó. Đầu B của dây được buộc chặt và khi trụ rơi không

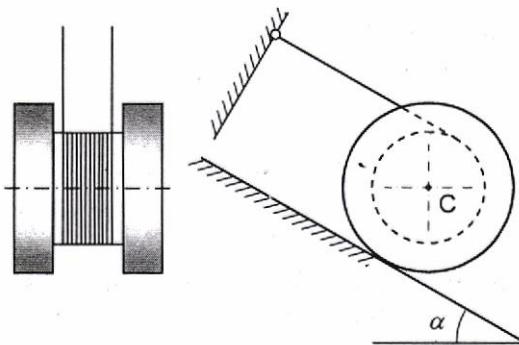
vận tốc ban đầu thì nhả dây quấn ra. Tìm vận tốc trục khối trụ khi nó đã rơi được một đoạn h và tìm lực căng của dây treo.

$$\text{Đáp số: } v = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}, T = \frac{1}{3} mg.$$

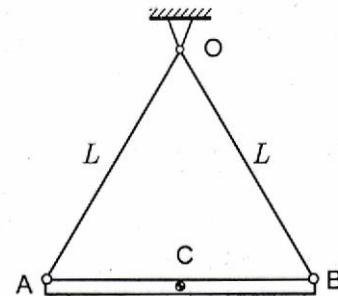
12-36. Người ta quấn hai dây mềm vào một khối trụ tròn đồng chất hai tầng. Khối trụ trọng lượng P , bán kính lăn R , bán kính quấn dây r , bán kính quấn tính đối với trục tâm là ρ . Hệ số ma sát trượt động giữa mặt trụ và mặt nghiêng là f . Giả thiết rằng trọng lượng thắng lực cản do ma sát và khối trụ trượt xuống không vận tốc ban đầu. Trong quá trình chuyển động đường tâm của trụ luôn vuông góc với đường dốc chính của mặt nghiêng. Tìm quy luật chuyển động $x_c(t)$ của trục khối trụ và lực căng của mỗi dây. Cho rằng trong chuyển động đang xét dây quấn chưa nhả ra hết.

$$\text{Đáp số: } x_c(t) = \frac{r \sin \alpha - f \cos \alpha (R + r)}{2(r^2 + \rho^2)} rgt^2,$$

$$T = \frac{Rrf \cos \alpha + \rho^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2(r^2 + \rho^2)} P.$$



Hình bài 12-36



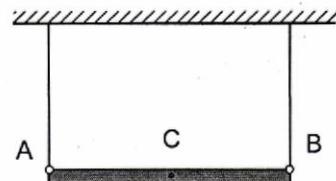
Hình bài 12-37

12-37. Một thanh đồng chất AB có trọng lượng P được treo vào điểm O nhờ hai dây có chiều dài bằng nhau và bằng độ dài L của thanh. Xác định sức căng của một trong hai nhánh dây tại thời điểm nhánh kia bị đứt.

$$\text{Đáp số: } T = 0,266P.$$

12-38. Thanh thẳng AB đồng chất có khối lượng là m được treo nằm ngang nhờ hai dây theo phương thẳng đứng buộc vào hai đầu thanh, còn hai đầu khác của dây buộc vào trần nhà. Tìm lực căng ở một nhánh dây khi nhánh dây kia bị đứt tức thời.

$$\text{Đáp số: } T = 0,25P.$$

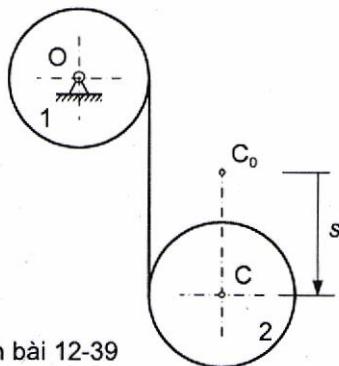


Hình bài 12-38

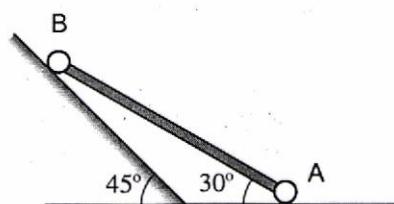
12-39. Hai trục tròn xoay đồng chất 1 và 2 có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 và bán kính lần lượt là r_1 và r_2 . Quấn hai sợi dây mềm vào hai đầu của từng trục một cách đối xứng với mặt phẳng trung bình song song với đáy của khối trục đó. Khi khối trục 2 rơi tự do không vận tốc đầu, dây quấn được thả ra và làm cho trục 1 quay quanh trục cố định qua tâm trục. Bỏ qua ma sát và các lực cản. Hãy xác định:

- Vận tốc góc của hai khối trục khi dây quấn chưa thả ra hết;
- Phương trình chuyển động của tâm C của trục 2;
- Sức căng của mỗi dây quấn.

Đáp số: a) $\omega_1 = \frac{2gm_2 t}{r_1(3m_1 + 2m_2)}$, $\omega_2 = \frac{2gm_1 t}{r_2(3m_1 + 2m_2)}$,
 b) $s = \frac{(m_1 + m_2)g}{3m_1 + 2m_2} t^2$, c) $T = \frac{m_1 m_2 g}{2(3m_1 + 2m_2)}$.



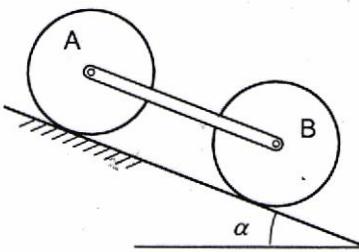
Hình bài 12-39



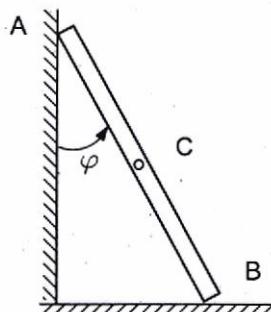
Hình bài 12-40

12-40. Thanh đồng chất AB có chiều dài 122cm, trọng lượng $P = 222,5\text{N}$, trượt xuống không vận tốc đầu từ vị trí như hình vẽ. Bỏ qua ma sát, xác định gia tốc góc của thanh và lực liên kết tại A và B (tại thời điểm bắt đầu chuyển động).

Đáp số: $\varepsilon = 2,3 \text{ rad/s}^2$; $N_A = 124,1\text{N}$; $N_B = 100,1\text{N}$.



Hình bài 12-41



Hình bài 12-42

12-41. Hai con lăn đồng chất cùng khối lượng m và cùng bán kính r nối với nhau bằng thanh AB cứng nhẹ (khối lượng không đáng kể). Con lăn A là trụ tròn rỗng còn con lăn B là trụ tròn đặc. Cả hai con lăn đều lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α . Tìm vận tốc tâm A và ứng lực trong thanh AB.

Đáp số: $a_A = \frac{4}{7}g \sin \alpha$, $S = \frac{1}{7}mg \sin \alpha$.

12-42. Thanh AB đồng chất chiều dài $2l$, khối lượng m đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Giữ thanh đứng yên ở vị trí φ_0 rồi thả cho nó chuyển động dưới tác dụng của trọng lực. Bỏ qua ma sát trượt giữa thanh và tường, giữa thanh và nền. Hãy xác định:

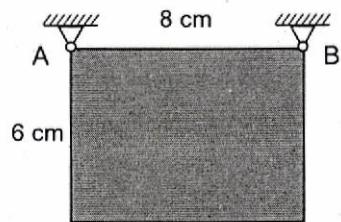
- Vận tốc góc và vận tốc góc theo góc nghiêng φ .
- Phản lực do nền và tường tác dụng lên thanh theo góc φ .

Đáp số: a) $\varepsilon = \frac{3}{4}(g/l)\sin \varphi$, $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}g(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)/l}$,

b) $N_A = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$, $N_B = mg - ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$.

12-43. Tấm chữ nhật có kích thước cho trên hình vẽ, trọng lượng 60N . Tấm được giữ bởi hai bản lề A và B. Xác định vận tốc góc của tấm và lực liên kết tại A ngay sau khi tấm bị mất liên kết tại B.

Đáp số: $\varepsilon = 11,76 \text{ rad/s}^2$; $X_A = 12\text{N}$; $Y_A = 36\text{N}$.



Hình bài 12-43

Chương 13

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Động năng

Chất điểm khối lượng m , chuyển động với vận tốc \vec{v}

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.1)$$

Vật rắn chuyển động tịnh tiến:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad (13.2)$$

trong đó m là khối lượng, v_C là vận tốc khối tâm C của vật.

Vật rắn quay quanh trục cố định z:

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \quad (13.3)$$

trong đó J_z là mômen quán tính khối của vật đối với trục z, ω là vận tốc góc.

Vật rắn chuyển động song phẳng:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_{zC}\omega^2 \quad (13.4)$$

trong đó J_{zC} mômen quán tính của vật đối với trục qua khối tâm C và vuông góc với mặt phẳng quy chiếu (hoặc mặt phẳng chuyển động).

Động năng của cơ hệ:

$$T = \sum_{k=1}^n T_k \quad (13.5)$$

trong đó T_k là động năng của vật rắn (hoặc chất điểm) thứ k thuộc hệ.

Công và công suất của lực

Công nguyên tố của lực \vec{F} :

$$dA(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F \cos \alpha v dt = F \cos \alpha ds, \quad (13.6)$$

trong đó \vec{v} là vận tốc điểm đặt lực \vec{F} , ds là di chuyển vô cùng bé của điểm đặt lực \vec{F} , α là góc giữa \vec{F} và \vec{v} .

Công của lực \vec{F} trong một khoảng thời gian hữu hạn $[t_1, t_2]$:

$$A(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} F \cos \alpha v dt \quad (13.7)$$

Công suất của lực \vec{F} :

$$W(\vec{F}) = \frac{dA(\vec{F})}{dt} = Fv \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (13.8)$$

Công và công suất của các lực thường gặp:

– Công và công suất của trọng lực:

$$A(m\vec{g}) = \pm mgs \sin \beta$$

$$W(m\vec{g}) = \pm mgv \sin \beta \quad (13.9)$$

trong đó dấu (+) nếu vật chuyển động xuống, dấu (-) trong trường hợp ngược lại.

– Công và công suất của lực ma sát trượt động:

$$A(\vec{F}_{ms}) = -mg \mu s \sin \beta$$

$$W(\vec{F}_{ms}) = -mg \mu v \sin \beta \quad (13.10)$$

trong đó μ là hệ số ma sát trượt động.

– Công và công suất của lực và ngẫu lực tác dụng lên vật quay:

$$dA(\vec{F}) = \bar{m}_o(\vec{F}) d\varphi$$

$$dA(\vec{M}) = \bar{M} d\varphi \quad (13.11)$$

$$W(\vec{F}) = \bar{m}_o(\vec{F}) \bar{\omega}$$

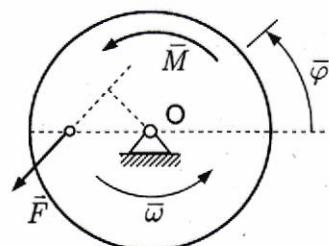
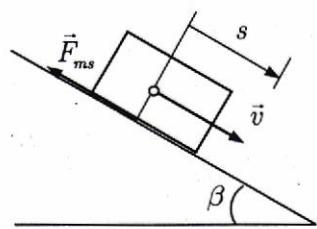
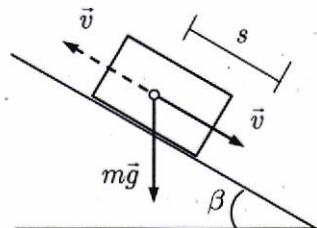
$$W(\vec{M}) = \bar{M} \bar{\omega} \quad (13.12)$$

Khi F, M là hằng số ta có các biểu thức công hữu hạn:

$$A(\vec{F}) = \bar{m}_o(\vec{F}) \bar{\varphi}$$

$$A(\vec{M}) = \bar{M} \bar{\varphi} \quad (13.13)$$

trong đó \bar{M} là mômen đại số của ngẫu lực, φ là góc quay hữu hạn. Các biểu thức công và công suất (13.11–13.13) có thể nhận giá trị âm hoặc dương tùy theo chiều của $\bar{m}_o(\vec{F})$ và \bar{M} .



Định lý biến thiên động năng đối với cơ hệ

Dạng 1 (dạng vi phân):

$$dT = \sum_k dA(\bar{F}_k) = \sum_k dA_k \quad (13.14)$$

trong đó dT là vi phân của động năng của hệ, $\sum_k dA_k$ là tổng công nguyên tố của các lực và ngẫu lực hoạt động.

Dạng 2 (dạng đạo hàm):

$$\frac{dT}{dt} = \sum_k W(\bar{F}_k) = \sum_k W_k \quad (13.15)$$

trong đó $\sum_k W_k$ là tổng công suất của các lực và ngẫu lực hoạt động.

Dạng 3 (dạng hữu hạn):

$$T - T_0 = \sum_k A(\bar{F}_k) = \sum_k A_k \quad (13.16)$$

trong đó: T_0 là động năng ban đầu của hệ và T là động năng của hệ tại thời điểm khảo sát, $\sum_k A_k$ là tổng công hữu hạn của các lực và ngẫu lực hoạt động trong các dịch chuyển tương ứng.

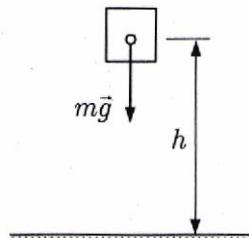
Định lý bảo toàn cơ năng đối với hệ bảo toàn

Thể năng của một số lực có thể:

– Thể năng của trọng lực

$$\Pi = \pm mgh + C \quad (13.17)$$

trong đó C là hằng số. Biểu thức trên nhận dấu (+) nếu vật ở trên gốc thế năng (hình vẽ), nhận dấu (-) trong trường hợp ngược lại.



– Thể năng của lực đàn hồi tuyến tính (lò xo kéo nén)

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2 + C \quad (13.18)$$

trong đó c là độ cứng, x là lượng biến dạng tuyệt đối của lò xo.

– Thể năng của ngẫu lực đàn hồi tuyến tính (lò xo xoắn)

$$\Pi = \frac{1}{2} c\varphi^2 + C \quad (13.19)$$

trong đó φ là góc xoắn tuyệt đối của lò xo.

Định lý bảo toàn cơ năng (chỉ áp dụng đối với hệ bảo toàn):

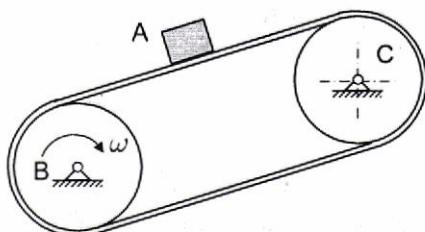
$$T + \Pi = E = \text{const} \quad (13.20)$$

trong đó T và Π là động năng và thế năng của hệ, E là cơ năng của hệ.

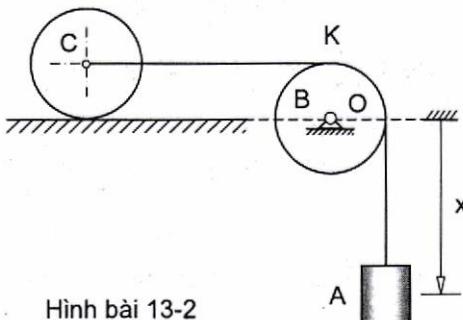
II. BÀI TẬP

13-1. Một băng tải vật liệu đang hoạt động. Cho biết vật nặng A có khối lượng m_1 , B và C là các trục đồng chất có cùng bán kính r và khối lượng m_2 . Băng tải là dây không giãn, đồng chất, khối lượng m_3 được phân bố đều theo chiều dài. Bỏ qua sự trượt giữa vật A và băng tải, giữa các trục quay và băng tải. Tính biểu thức động năng của hệ khi trục quay có vận tốc góc ω .

Đáp số: $T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) r^2 \omega^2$.



Hình bài 13-1



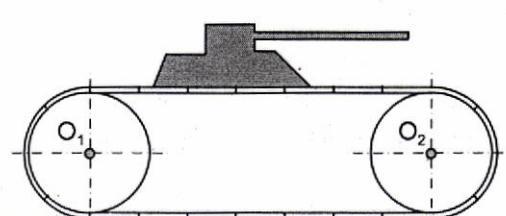
Hình bài 13-2

13-2. Cho hệ cơ như hình vẽ. Vật nặng A khối lượng m_1 được treo vào dây mềm không giãn dài L , khối lượng m . Dây vắt qua ròng rọc B khối lượng không đáng kể quay quanh trục O. Đầu kia của dây buộc vào trục qua tâm của con lăn C, con lăn C lăn không trượt trên nền ngang cố định. Ròng rọc và con lăn là các trục tròn đồng chất có khối lượng m_2 , bán kính r . Tính động năng và thế năng cơ hệ khi vật A cách nền ngang một đoạn bằng x và có vận tốc v .

Đáp số: $T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{3}{2} m_2 + m \right) v^2, \quad \Pi = -[m_1 gx + \frac{1}{2} (mg/l)x^2]$.

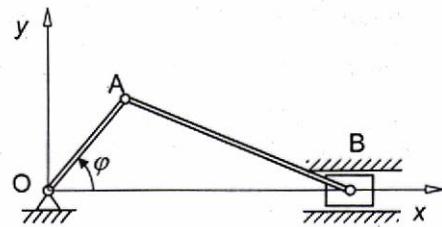
13-3. Một xe tăng gồm thân xe khối lượng là m_1 , bốn bánh xích mỗi bánh được coi là đĩa tròn đồng chất khối lượng m_2 , bán kính r . Khoảng cách giữa hai trục trước và sau là l và hai xích mỗi xích có khối lượng m_3 . Tính công suất trung bình của động cơ để xe có thể tăng tốc trên đường ngang từ 0 đến tốc độ $v = 36\text{km/h}$ trong khoảng thời gian $t = 10\text{ giây}$. Giả thiết xích không bị trượt trên nền ngang.

Đáp số: $T = \frac{1}{2} [m_1 + 6m_2 + 8\rho(l + \pi r)] v^2, \quad W_{tb} = A/t = (T - T_0)/t$.



140

Hình bài 13-3



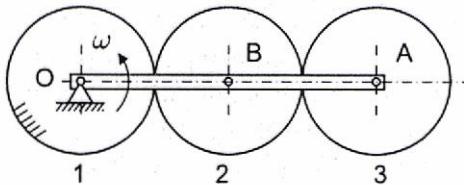
Hình bài 13-4

13-4. Tay quay OA của một cơ cấu tay quay-con trượt được coi như một thanh đồng chất có chiều dài r , có khối lượng m_1 đang quay với vận tốc ω . Con trượt B có khối lượng m_2 , thanh truyền AB = L, coi tỷ số r / L là bé.

- Bỏ qua khối lượng thanh truyền, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc ω và góc quay φ của tay quay;
- Kể đến khối lượng thanh truyền là m_3 . Tính động năng của cơ hệ ở vị trí tay quay OA vuông góc với đường trượt của con trượt.

Đáp số: $T = \frac{1}{6} m_1 r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\sin \varphi + \frac{r}{2L} \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1 - (r/L)^2 \sin^2 \varphi}} \right]^2 r^2 \omega^2;$
 $T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m_1 + m_2 + m_3 \right) r^2 \omega^2.$

13-5. Cho cơ cấu hành tinh như hình vẽ. Các bánh 1, 2, 3 là các đĩa tròn đồng chất, cùng bán kính r , cùng khối lượng m . Tay quay OA được xem là một thanh đồng chất có khối lượng m_1 . Tính động năng của cơ cấu là hàm của vận tốc góc tay quay.



Hình bài 13-5

Đáp số: $T = \frac{1}{3} (33m + 8m_1)r^2 \omega^2.$

13-6. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn có đường kính 0,6m và có khối lượng bằng 392kg, chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng ngang do một người đẩy. Lực đẩy P có phương không đổi và hướng theo thanh đẩy AO. Thanh AO = 1,5m và có khối lượng không đáng kể. Độ cao của A so với nền ngang là 1,2 m.

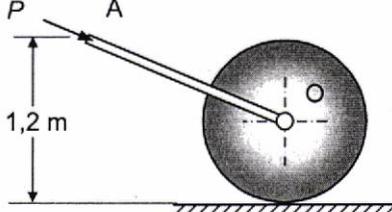
- Bỏ qua ma sát ở ổ trục và ma sát lăn của mặt nền. Xác định cường độ P sao cho khi người đẩy đi được 2 m thì trục con lăn đạt vận tốc 0,8 m/s.
- Sử dụng dữ kiện của câu a) và tính đến ma sát lăn trên nền với hệ số ma sát lăn động $k = 0,5$. Tìm trị số của lực P .
- Sau khi đạt vận tốc cần thiết 0,8 m/s, muốn giữ chuyển động đều của trục bánh xe ta cần giảm cường độ của lực P đi bao nhiêu?

Đáp số: a) $P = 102,65N$; b) $P = 138,12N$; c) Giảm đi một lượng là 103,02N.

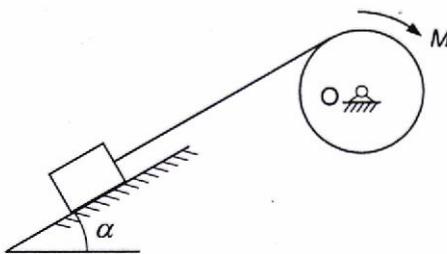
13-7. Một ngẫu lực có mômen M không đổi tác dụng lên tang của một trục tời có bán kính bằng R và có khối lượng là m_1 . Quấn vào tang tời một sợi dây mềm nhẹ và không giãn rồi buộc vào đầu mút tự do của dây vật nặng A có khối lượng m_2 để kéo nó lên theo mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng là α so với mặt phẳng ngang. Hệ

số ma sát trượt động giữa mặt phẳng và mặt phẳng nghiêng là f . Tang tời được xem là một trục tròn đồng chất. Ban đầu hệ đứng yên. Tìm biểu thức vận tốc góc của tời là hàm theo góc quay của nó.

$$\text{Đáp số: } \omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{M - P_2 R (\sin \alpha + f \cos \alpha)}{P_1 + 2P_2}} \varphi.$$



Hình bài 13-6

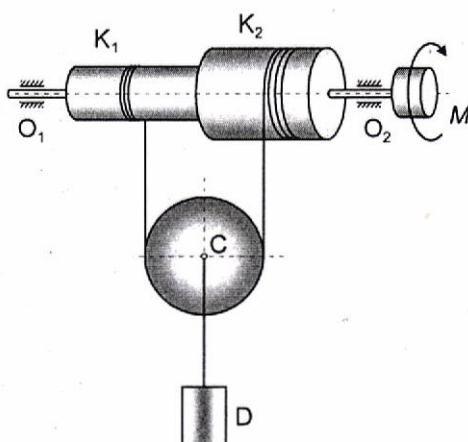


Hình bài 13-7

13-8. Một tời kéo gồm hai trống K_1 và K_2 có bán kính R_1 và R_2 được ghép cứng với nhau, mômen quán tính khối đối với trục quay O_1O_2 lần lượt là J_1 và J_2 . Ròng rọc C coi như đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính r . Tác dụng vào trục tời O_1O_2 một ngẫu lực có mômen M không đổi để kéo vật nặng D khối lượng m_3 lên cao. Khi trống K_2 quấn dây thì trống K_1 thả dây. Bỏ qua ma sát và trọng lượng dây, ban đầu hệ đứng yên. Tìm vận tốc góc của trục tời khi vật D đã được kéo lên một đoạn bằng h .

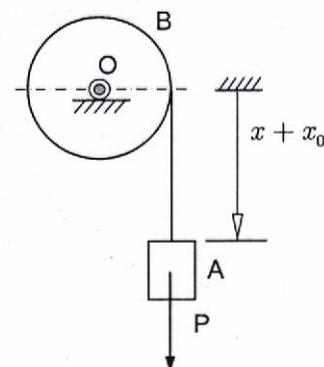
$$\text{Đáp số: } \omega = \sqrt{2h \frac{[2M - (m + m_3)g(R_2 - R_1)]}{J_{tg}(R_2 - R_1)}},$$

$$J_{tg} = (J_1 + J_2) + \frac{1}{4}m(R_2 - R_1)^2 + \frac{1}{4}J_C(R_2 + R_1)^2 / r^2 + \frac{1}{4}m_3(R_2 - R_1)^2.$$



142

Hình bài 13-8



Hình bài 13-9

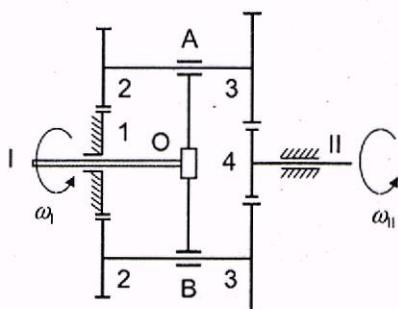
13-9. Một vật nặng P được treo vào đầu một sợi dây mềm không giãn, chiều dài L và trọng lượng trên một đơn vị chiều dài của dây là p . Dây này được quấn vào tang của một trục tời có bán kính bằng R và có mômen quán tính khối đối với trục quay là J . Vật nặng rơi xuống làm quay trục tời. Lúc ban đầu đoạn dây treo buông dài xuống một đoạn x_0 và hệ đứng yên. Bỏ qua ma sát của các ổ trục quay và chiều dài của dây cũng như sự thay đổi thể nén của phần dây quấn.

Xác định vận tốc rơi của vật nặng là hàm theo độ dài x của đoạn dây treo.

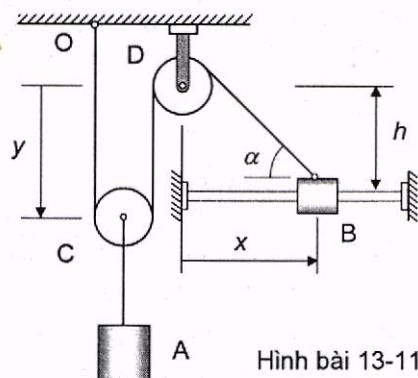
$$\text{Đáp số: } v = \sqrt{\frac{gR^2[2Px + px(2x_0 + x)]}{gJ + (P + pL)R^2}}.$$

13-10. Khảo sát chuyển động của hộp số bánh răng biểu diễn trên hình vẽ. Trục dẫn I mang tay quay AB, trục bị dẫn II mang bánh răng 4. Cho biết bán kính r_1, r_2, r_3, r_4 của các bánh răng, mômen quán tính khối của trục dẫn I và tay quay AB đối với trục quay là J_1 . Cặp bánh răng hành tinh 2-3 được coi là đối xứng và đồng chất, khối lượng là m_2 và mômen quán tính khối đối với trục quay là J_2 . Bánh răng 4 cùng trục II có mômen quán tính khối đối với trục quay là J_4 . Trục dẫn chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có mômen hằng số M_1 , trục bị dẫn chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen không đổi M_4 . Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát, hãy tìm giá tốc góc của trục dẫn I.

$$\text{Đáp số: } \varepsilon_I = \frac{M_1 - M_4[1 - r_1r_3/(r_2r_4)]}{J_1 + 2m_2(r_1 + r_2)^2 + 2J_2(1 + r_1/r_2)^2 + J_4[1 - r_1r_3/(r_2r_4)]^2}.$$



Hình bài 13-10



Hình bài 13-11

13-11. Vật nặng A có khối lượng m_1 được treo vào tâm của ròng rọc C. Một dây khác nối từ điểm O cố định đến con trượt B khối lượng m_2 chuyển động trên thanh ngang. Các dây mềm nhẹ, không giãn và luôn căng. Bỏ qua ma sát và khối lượng các ròng rọc C và D. Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo tọa độ x .

$$\text{Đáp số: } m_{tg}(x)\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[m_{tg}(x)]\dot{x}^2 = -m_1g\frac{x}{2\sqrt{x^2 + h^2}}, \quad m_{tg} = \frac{m_1x^2}{4(x^2 + h^2)} + m_2.$$

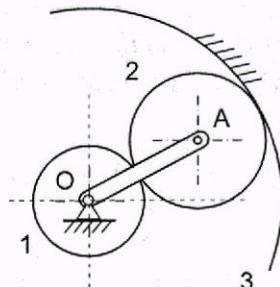
13-12. Cho cơ cấu hành tinh chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Tay quay OA quay quanh trục qua O dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M_0 không đổi làm cho bánh 2 lăn không trượt đối với bánh 3 cố định. Bánh 1 quay quanh trục qua O và chịu tác dụng ngẫu lực cản $M_1 = \alpha\omega$, trong đó α là hằng số, ω là vận tốc góc bánh 1. Cho biết bánh 1 có bán kính r_1 và mômen quán tính khối đối với trục quay J_1 . Bánh 2 có bán kính r_2 , khối lượng m_2 và mômen quán tính khối đối với trục qua A bằng J_2 , tay quay có mômen quán tính đối với trục qua O là J_0 . Tìm vận tốc góc ω của bánh 1 khi chuyển động bình ổn (vận tốc góc là hằng số) và trong quá trình mở máy $\omega = \omega(t)$ từ trạng thái tĩnh.

$$\text{Đáp số: } \omega_{gh} = \frac{A}{B}, \quad \omega(t) = \omega_{gh}(1 - e^{-Bt}),$$

$$A = \frac{M_0 r_1}{2J(r_1 + r_2)}, \quad B = \frac{\alpha}{J}, \quad J = \frac{1}{4}[4J_1 + J_2(r_1/r_2)^2 + J_0 r_1^2 / (r_1 + r_2)^2 + m_2 r_2^2].$$

13-13. Cơ cấu hành tinh chuyển động trong mặt phẳng ngang gồm bánh răng 3 cố định, các bánh răng động 1 và 2 được coi là các đĩa tròn đồng chất cùng bề dày và cùng vật liệu. Cho biết bánh răng 1 quay nhanh gấp 10 lần tay quay OA. Bỏ qua khối lượng của tay quay. Mômen quán tính của bánh răng 1 đối với trục O là J . Tay quay chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có mômen hằng số M , bánh răng 1 chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen không đổi M_1 . Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát, hãy tìm giá tốc góc của tay quay.

$$\text{Đáp số: } \varepsilon = \frac{M - 10M_1}{1300J}.$$

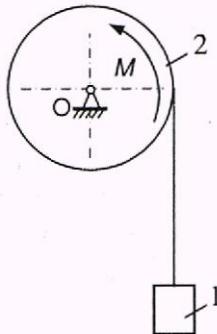


Hình bài 13-12/13

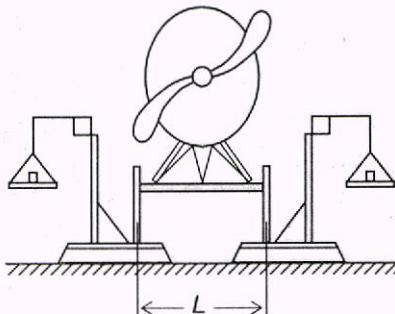
13-14. Vật 1 có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời 2 có bán kính R , trọng lượng Q dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen $M = M_0 - \alpha\omega^2$, trong đó M_0 và α là các hằng số, ω là vận tốc của góc tời. Cho biết bán kính quán tính của tời đối với trục quay O là ρ . Tìm vận tốc góc chuyển tiếp từ trạng thái nghỉ và vận tốc góc giới hạn của tời.

Đáp số:

$$\omega_{gh} = \sqrt{\frac{A}{B}}, \quad \omega = \omega_{gh} \frac{e^{\sqrt{ABt}} - e^{-\sqrt{ABt}}}{e^{\sqrt{ABt}} + e^{-\sqrt{ABt}}}, \quad A = g \frac{M_0 - PR}{PR^2 + Q\rho^2}; \quad B = g \frac{\alpha}{PR^2 + Q\rho^2}.$$



Hình bài 13-14



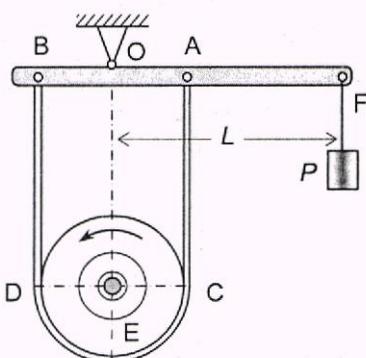
Hình bài 13-15

13-15. Một máy bay có khối lượng $m = 3000 \text{ kg}$ được đặt trên ba điểm trong đó phần đuôi chiếm 10% khối lượng toàn máy bay. Khi chong chóng của máy bay quay với tốc độ $n = 1432 \text{ vòng/phút}$, các lực kế đặt dưới các bánh trước của máy bay chỉ $N_1 = 10,78 \text{ kN}$, $N_2 = 15,68 \text{ kN}$. Xác định công suất động cơ máy bay nếu cho biết hiệu suất của chong chóng là $\eta = 0,8$ và khoảng cách giữa hai bánh trước $L = 2 \text{ m}$.

Đáp số: $W = 918,5 \text{ kW}$.

13-16. Để do công suất của mô-tơ người ta sử dụng thiết bị gồm dây đai có các nhánh thẳng đứng AC và DB và phần ôm chặt vào nửa dưới của ròng rọc E gắn chặt vào trực quay của mô-tơ. Đòn BF có trực quay qua O để thay đổi sức căng trong các nhánh dây, khoảng cách $L = 50\text{cm}$. Để giữ thăng bằng cho đòn BF, người ta treo vật nặng trọng lượng P tại F. Khi động cơ có tốc độ $n = 240 \text{ vòng/phút}$, đòn BF cân bằng ở vị trí nằm ngang, ta đo được trị số lực $P = 29,4\text{N}$. Xác định công suất của động cơ.

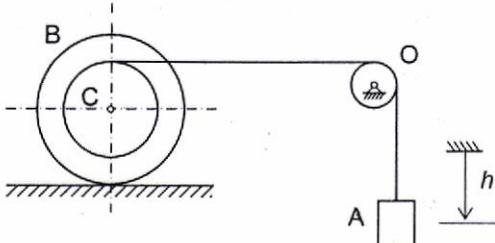
Đáp số: $W = 369,45 \text{ Watt}$.



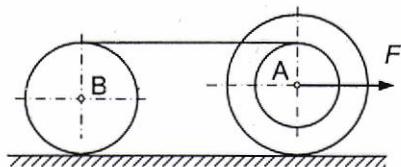
Hình bài 13-16

13-17. Hệ cơ học gồm con lăn hai tầng tâm C, bán kính nhỏ r , bán kính lớn R , khối lượng m_1 , momen quán tính khối đối với trục đối xứng là J . Con lăn lăn không trượt trên nền ngang. Vật A khối lượng m_2 nối với dây nhẹ không giãn vắt qua ròng rọc O có khối lượng không đáng kể. Đoạn dây từ con lăn B đến ròng rọc O nằm ngang. Dưới tác dụng của trọng lực, vật A chuyển động xuống phía dưới từ trạng thái tĩnh. Tim vận tốc của vật A là hàm của dịch chuyển h và gia tốc tâm C của con lăn.

Đáp số: $v_A = \sqrt{\frac{2Ph}{m_{tg}}}, a_A = \frac{P}{m_{tg}}, a_C = \frac{R}{R+r} a_A, m_{tg} = \frac{m_2(R+r)^2 + m_1 R^2 + J}{(R+r)^2}$.



Hình bài 13-17



Hình bài 13-18

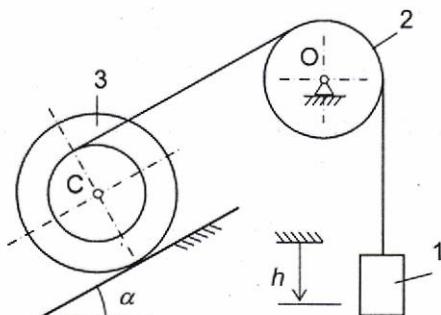
13-18. Trụ tròn hai tầng A có khối lượng m_1 , bán kính nhỏ r , bán kính lớn R , bán kính quấn tinh đối với trục qua A là ρ . Trụ đồng chất B có khối lượng m_2 . Nhánh dây giữa 2 trụ song song với nền ngang. Dưới tác dụng của lực nầm ngang F là hằng số, hai trụ cùng chuyển động lăn không trượt từ trạng thái tĩnh. Tìm các giá tốc của tâm của hai trụ.

$$\text{Đáp số: } a_A = \frac{8R^2F}{8m_1(R^2 + \rho^2) + 3m_2(R + r)^2}, \quad a_B = \frac{R + r}{2R}a_A.$$

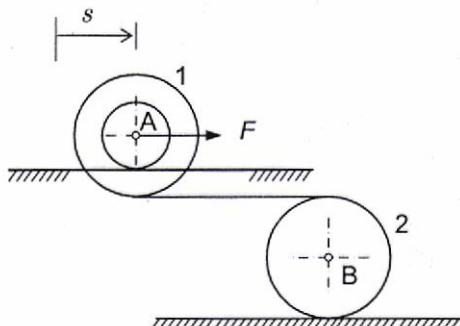
13-19. Dây nhẹ không giãn treo vật 1 vắt qua ròng rọc 2 và được cuộn vào con lăn hai tầng 3. Vật treo 1 có khối lượng m_1 chuyển động xuống, làm ròng rọc 2 quay và con lăn 3 lăn không trượt trên nền nghiêng góc α . Ròng rọc 2 được coi như đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_2 , bán kính r_2 . Con lăn 3 khối lượng m_3 , bán kính cuộn dây r_3 và bán kính lăn R_3 , bán kính quấn tinh khối đối với trục qua tâm C là ρ . Ban đầu hệ đứng yên. Tìm vận tốc v của vật 1 theo dịch chuyển h của nó.

Đáp số:

$$v = \sqrt{\frac{2[m_1(R_3 + r_3) - m_3R_3 \sin \alpha]}{m_{tg}(R_3 + r_3)}} gh, \quad m_{tg} = m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \frac{R_3^2 + \rho^2}{(R_3 + r_3)^2}.$$



Hình bài 13-19



Hình bài 13-20

13-20. Cho cơ hệ gồm hai con lăn 1 và 2 lăn không trượt trên đường ngang. Con lăn 1 hai tầng bán kính nhỏ r , bán kính lớn R , khối lượng m , bán kính quán tính đối với trục qua tâm A là $\rho = \sqrt{Rr}$. Con lăn 2 là trụ tròn đồng chất khối lượng m_2 , bán kính r_2 . Lực hằng số F tác dụng tại tâm A theo phương ngang làm hệ chuyển động từ trạng thái đứng yên. Dây mềm đủ dài, không giãn, khối lượng không đáng kể. Hãy xác định:

- Vận tốc v_A của tâm A theo dịch chuyển s , gia tốc a_B của tâm B, gia tốc góc ε_2 của con lăn 2.
- Sức căng của dây.
- Giả sử có thêm lực cản $F_c = bv_B$ tác dụng theo phương ngang tại tâm B. Hãy tìm quy luật vận tốc $v_A(t)$ của tâm A.

Đáp số:

$$a) v_A = \sqrt{2Fs / m_{tg}}, \quad a_B = \frac{F(R-r)}{rm_{tg}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F(R-r)}{2r r_2 m_{tg}}.$$

$$\text{với } m_{tg} = m + mR/r + m_2[\frac{1}{2}(R-r)/r]^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2[\frac{1}{2}(R-r)/(rr_2)]^2.$$

$$b) T_d = \frac{1}{2}(m_2a_B + J_B\varepsilon_2 / r_2).$$

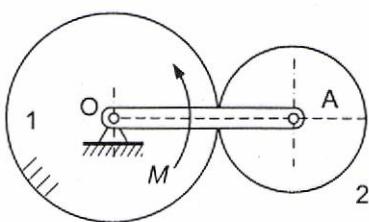
$$c) v_A(t) = v_{gh}(1 - e^{-\alpha t}) \text{ với } v_{gh} = \frac{F}{b[\frac{1}{2}(R-r)/r]^2}, \quad \alpha = \frac{b[\frac{1}{2}(R-r)/r]^2}{m_{tg}}.$$

13-21. Cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng ngang gồm bánh răng 1 bán kính r_1 cố định, bánh răng 2 bán kính r_2 và khối lượng m_2 . Tay quay OA đồng chất có khối lượng m , chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M . Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát.

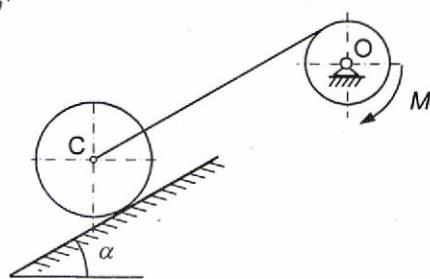
- Khi M là hằng số, tìm gia tốc góc của tay quay.
- Khi $M = M_0 - k\omega$ với M_0 , k là các hằng số và ω là vận tốc góc tay quay, tìm biểu thức vận tốc góc của tay quay là hàm theo thời gian.

Đáp số: a) $\varepsilon = M / J_{tg}$, $J_{tg} = (\frac{1}{3}m + \frac{3}{2}m_2)r^2$,

$$b) \omega(t) = \frac{M_0}{k}(1 - e^{-\alpha t}), \quad \alpha = k / J_{tg}.$$



Hình bài 13-21



Hình bài 13-22

13-22. Cho một cơ hệ như hình vẽ. Tang quay O bán kính r_1 , trọng lượng P_1 . Con lăn tâm C có trọng lượng P_2 , bán kính r_2 . Tang và con lăn được coi là các trụ tròn đồng chất. Trên tang quay tác dụng một ngẫu lực có mômen $M(t)$. Con lăn chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương nằm ngang. Dây kéo không giãn và song song với mặt phẳng nghiêng. Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh giữa con lăn và mặt đường là f . Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát lăn và ma sát tại ổ trục O.

- Khi mômen biến thiên theo quy luật $M(t) = M_0 - b\omega_1$, trong đó M_0 , b là các hằng số dương và ω_1 là vận tốc góc của tang. Tìm biểu thức vận tốc góc ω_1 của tang là hàm theo thời gian, biết rằng ban đầu hệ đứng yên.
- Giả sử khi tang đang quay với vận tốc góc $\omega_1 = \omega_1^*$ thì dây bị đứt. Xác định quy luật chuyển động của khối tâm C của con lăn. Tìm điều kiện để con lăn không trượt. Biết rằng sau khi dây đứt con lăn vẫn chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng.

Đáp số: a) $\omega_1(t) = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$; $\alpha = 2g \frac{M_0 - P_2 r_2 \sin \alpha}{(P_1 + 3P_2)r_1}$, $\beta = \frac{2bg}{(P_1 + 3P_2)r_1^2}$.

b) $x_C = -\frac{1}{3}(g \sin \alpha)t^2 + r_1 \omega_1^* t$ (nếu con lăn chuyển động hướng lên và chọn trục x hướng lên);

$x_C = \frac{1}{3}(g \sin \alpha)t^2$ (nếu con lăn chuyển động hướng xuống và chọn trục x hướng xuống).

Điều kiện lăn không trượt $f > \frac{1}{3} \tan \alpha$.

Chương 14

NGUYỄN LÝ CÔNG ẢO

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Công ảo

Công ảo của lực \vec{F} khi điểm đặt thực hiện di chuyển ảo $\delta\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (14.1)$$

Công ảo của lực \vec{F} tác dụng lên vật rắn quay quanh trục cố định z :

$$\delta A = \bar{m}_z(\vec{F}) \cdot \delta\vec{\varphi} \quad (14.2)$$

trong đó $\delta\vec{\varphi}$ là di chuyển ảo của vật quanh trục cố định.

Công ảo của ngẫu lực \vec{M} khi vật thực hiện di chuyển ảo $\delta\vec{\varphi}$:

$$\delta A = \vec{M} \cdot \delta\vec{\varphi} \quad (14.3)$$

Lực suy rộng

Gọi $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ là tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ chịu liên kết hòlônhôm, giữ, dùng và lý tưởng. Véc-tơ định vị của một điểm thuộc hệ có dạng:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ suy ra } \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Tổng công ảo của các lực hoạt động trong các di chuyển ảo:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (14.4)$$

với Q_i là lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với tọa độ suy rộng q_i :

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \quad (14.5)$$

Các phương pháp xác định lực suy rộng

Phương pháp 1: Tính lực suy rộng dựa theo công thức (14.5).

Phương pháp 2: Cho cơ hệ thực hiện di chuyển ảo đặc biệt $\delta q_i \neq 0$ còn lại $\delta q_j = 0 (\forall j \neq i)$, tính tổng công ảo của các lực trong di chuyển ảo này.

Phương pháp 3: Tính lực suy rộng của các lực có thể theo biểu thức thế năng:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \text{ với } \Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) \text{ là biểu thức thế năng của hệ.}$$

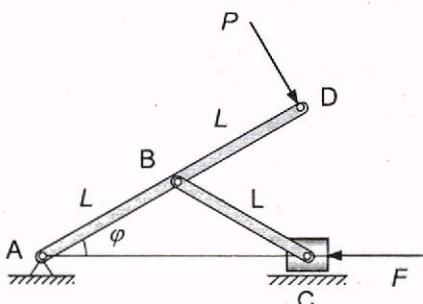
Nguyên lý công ảo

Nếu cơ hệ n bậc tự do chịu liên kết holonomic, giữ, dừng và lý tưởng cân bằng tại vị trí đang khảo sát thì các lực suy rộng $Q_i = 0$ với $i = 1, 2, \dots, n$.

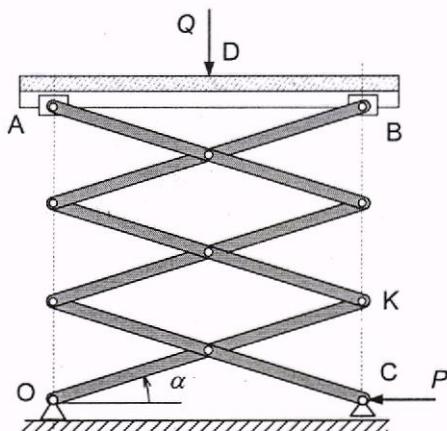
II. BÀI TẬP

14-1. Lực P tác dụng vuông góc tại đầu D. Hãy xác định lực nằm ngang F trên pit-tông C khi hệ cân bằng.

Đáp số: $F = P / \sin \varphi$.



Hình bài 14-1



Hình bài 14-2

14-2. Cho cơ cấu thang kiểu kéo cắt như hình vẽ. Các thanh có chiều dài như nhau bằng L , trọng lượng không đáng kể, được nối với nhau bằng các bản lề trơn. Tìm mối liên gián cường độ của các lực P và Q để hệ cân bằng tại vị trí cho.

Đáp số: $P = 3Q \cot \alpha$.

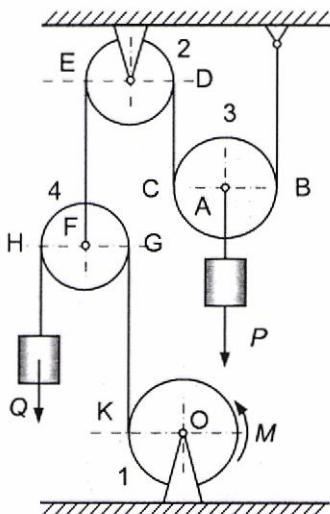
14-3. Cho cơ hệ như hình vẽ. Xác định mômen ngẫu lực M cần đặt vào trục kéo I và tỷ số trọng lượng của hai vật để cơ hệ cân bằng. Cho bán kính trục tời là R . Biết rằng các dây mềm không giãn, không trọng lượng. Bỏ qua trọng lượng ròng rọc và ma sát ở các ổ trục quay.

Đáp số: $M = QR$, $P = 4Q$.

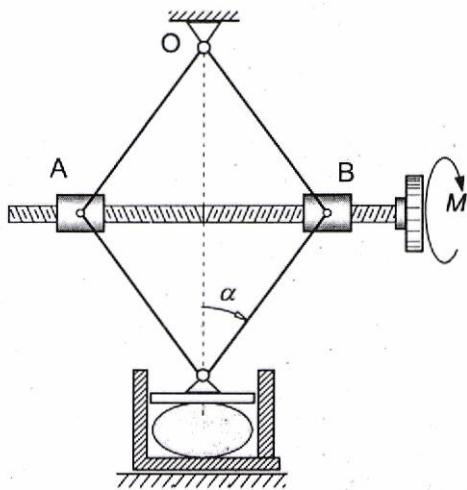
14-4. Máy ép có khuỷu được cấu tạo như hình vẽ. Khung ép gồm bốn thanh mảnh cứng nhẹ và cùng chiều dài a nối với nhau bằng bản lề ở bốn đỉnh: đỉnh trên cùng cố định; đỉnh dưới cũng mắc vào bàn ép nằm ngang, hai đỉnh hai bên được mắc vào

hai con chạy có tiện ren. Hai ốc ren này được mắc vào một trục vít có các ren ở hai đầu thanh xoắn ngược chiều nhau với cùng bước ren là h . Ở đầu cùng thanh vít có gắn một vô lăng nhỏ. Vào lúc góc mở của khung ở hai đỉnh trên và dưới là 2α , ta tác dụng vào vô lăng một ngẫu lực có mômen M . Tìm lực ép của bàn ép tác dụng xuống vật chịu ép. Bỏ qua ma sát ở các khớp nối và những chỗ tiếp xúc.

$$\text{Đáp số: } N = \frac{M\pi \cot \alpha}{h}.$$



Hình bài 14-3



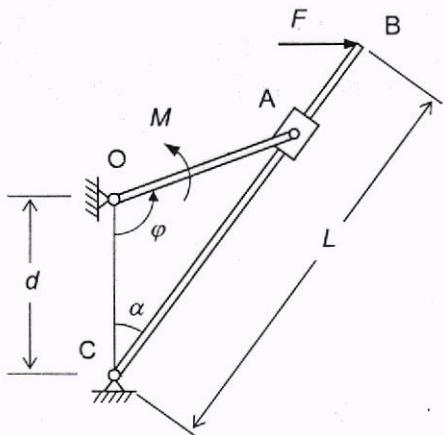
Hình bài 14-4

14-5. Cho sơ đồ cơ cấu culit của máy bào ngang như trên hình vẽ. Tay quay OA có chiều dài a , cần lắc CB có chiều dài L , còn khoảng cách giữa hai trục O và C là d . Tại vị trí đang xét, OA tạo với phương thẳng đứng một góc φ . Tay quay OA chịu tác dụng một ngẫu lực có mômen M , còn cần lắc CB chịu tác dụng của lực ngang F tại B hướng từ trái sang phải. Bỏ qua ma sát và trọng lượng của các khâu. Tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu ở vị trí đó.

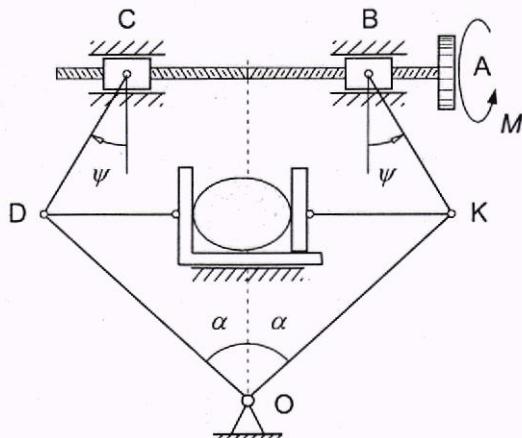
$$\text{Đáp số: } M = \frac{FLa \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha)}{a \cos(\varphi + \alpha) - d \cos \alpha}.$$

14-6. Cho cơ cấu máy ép như hình vẽ. Ngẫu lực tác dụng lên vô lăng có mômen bằng M . Nhờ trục vít được cắt ren ngược chiều mà các con chạy B và C đồng thời tiến gần hoặc lùi xa nhau. Ở vị trí của cơ cấu mà BD và OD tạo với đường thẳng đứng lần lượt góc ψ và α , xác định lực ép N tác dụng vào vật chịu ép. Cho biết bước của trục vít là h , bỏ qua ảnh hưởng của ma sát và trọng lượng các chi tiết.

$$\text{Đáp số: } N = \frac{\pi \sin(\alpha + \psi)}{\sin \psi \cos \alpha} \frac{M}{h}.$$



Hình bài 14-5



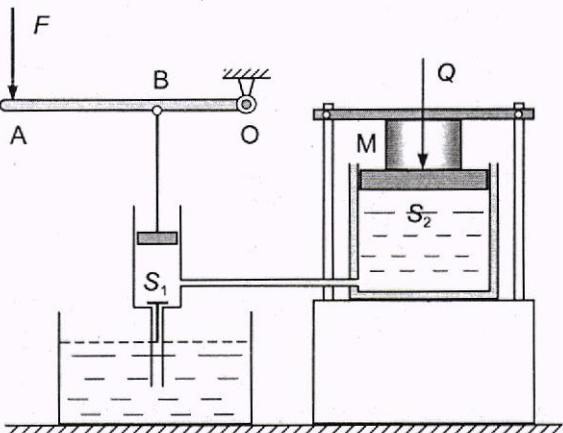
Hình bài 14-6

14-7. Cho máy ép thủy lực như trên hình vẽ, lực F tác dụng vào đầu mút tay quay và vuông góc với nó. Diện tích tiết diện của xylanh trái là S_1 và xylanh phải là S_2 . Xác định lực Q nén vật M . Cho $OA = a$, $OB = b$. Bỏ qua ma sát.

$$\text{Đáp số: } Q = \frac{aS_2F}{bS_1}.$$

14-8. Cho cơ cấu hãm tàu như hình vẽ. Tìm hệ thức giữa a , b và c để dưới tác dụng của lực Q hướng theo phương ngang, hai má hãm tác dụng vào hai bánh xe 1 và 2 các lực bằng nhau. Tìm giá trị của các lực này. Bỏ qua trọng lượng các thanh và giả thiết các bánh xe đứng yên, các lực tác dụng tỷ lệ với biến dạng của má phanh hoặc bánh phanh.

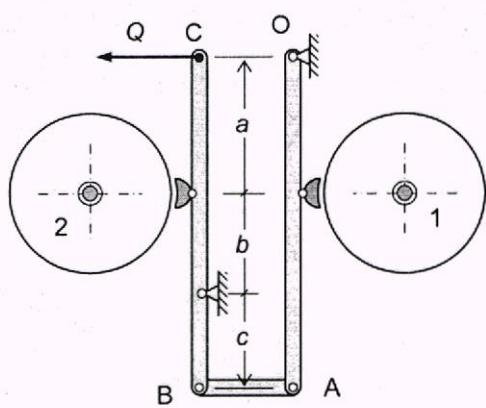
$$\text{Đáp số: } \frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}; \quad F = Q \frac{a+b}{2b}.$$



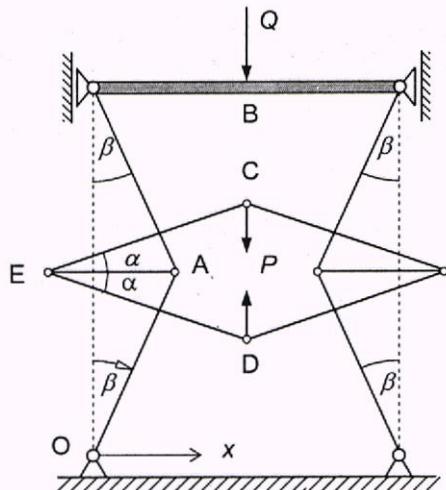
Hình bài 14-7

14-9. Tìm biểu thức liên hệ giữa độ lớn của các lực P và Q trong máy ép để hệ cân bằng tại vị trí đang khảo sát như trên hình vẽ.

$$\text{Đáp số: } Q = P \cot \alpha \cot \beta.$$



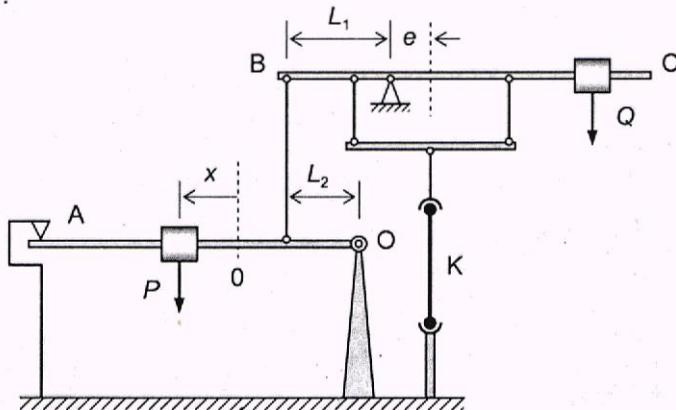
Hình bài 14-8



Hình bài 14-9

14-10. Máy dùng để thử mẫu khi kéo được biểu diễn như hình vẽ. Xác định sự phụ thuộc giữa ứng lực X trong mẫu K và khoảng cách x của vật trọng lượng P đối với vị trí “không” (0). Cho biết rằng khi không lắp mẫu K và vật trọng lượng P đặt tại vị trí “không” ($x = 0$) thì tất cả các đòn đều cân bằng ở vị trí nằm ngang. Cho các khoảng cách L_1 , L_2 , e .

$$\text{Đáp số: } X = \frac{PL_1}{eL_2}x.$$



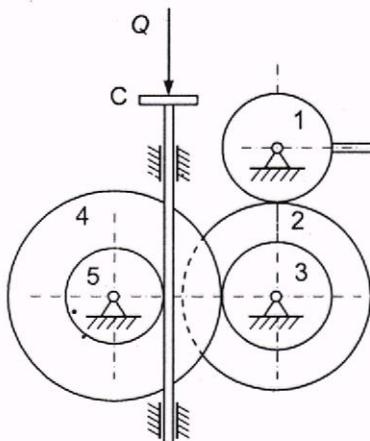
Hình bài 14-10

14-11. Cho cơ cấu kích nâng như hình vẽ. Chuyển động của tay quay OA, qua các bánh răng 1, 2, 3, 4, 5 được truyền sang thanh răng của kích. Tìm lực P cần đặt vuông góc với tay quay tại đầu mút của nó để khi kích cân bằng thì lực nâng của kích là Q . Cho biết bán kính các bánh răng: r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 và $OA = R$.

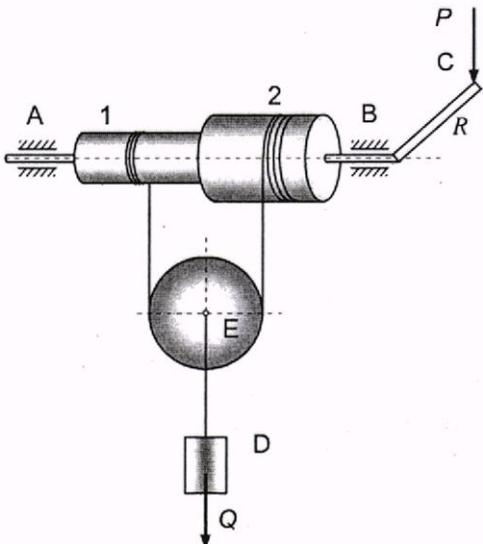
$$\text{Đáp số: } P = Q \frac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R}.$$

14-12. Trục kéo vi sai có hai tầng A và B gắn chặt với nhau, chuyển động nhờ tay quay BC dài là R , BC nằm ngang và vuông góc với AB. Vật nặng D trọng lượng Q được treo vào ròng rọc động E. Bán kính của các trụ lăn lượt là r_1 và r_2 , với $r_1 < r_2$. Tìm cường độ lực P cần đặt vuông góc với tay quay tại đầu mút của nó để giữ cho hệ cân bằng.

$$\text{Đáp số: } P = Q \frac{r_2 - r_1}{2R}.$$



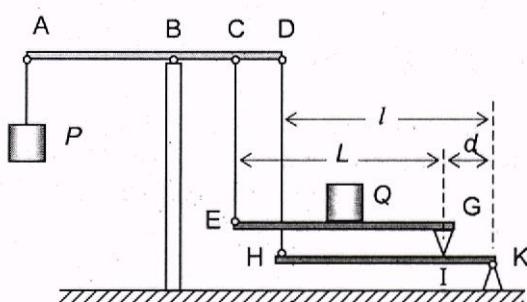
Hình bài 14-11



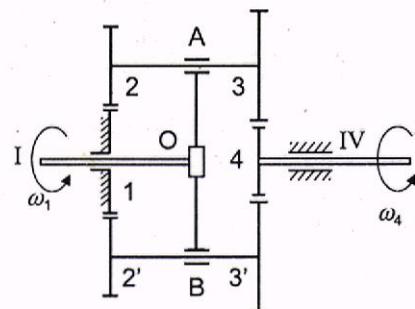
Hình bài 14-12

14-13. Trên hình vẽ ta có sơ đồ một cái cân bàn. Cho $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $IK = d$, $EG = L$, $KH = l$. Tìm hệ thức giữa a , b , c , d và l , sao cho vật được cân và đối trọng cân bằng nhau ở bất kỳ vị trí nào ở trên mặt bàn cân. Khi đó tìm hệ thức giữa hai trọng lượng quả cân P và trọng lượng vật cân Q .

$$\text{Đáp số: } \frac{l}{d} = \frac{b + c}{b}; \quad Q = \frac{a}{b} P.$$



Hình bài 14-13



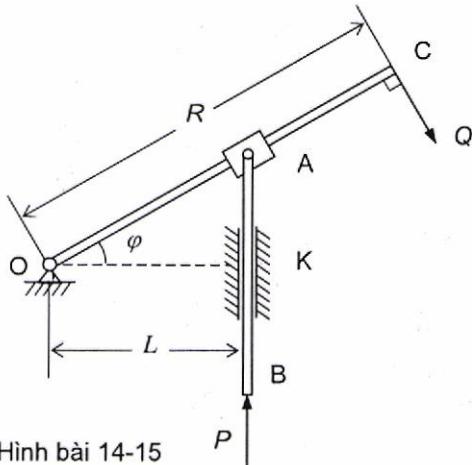
Hình bài 14-14

14-14. Hộp tốc độ được biểu diễn trên hình vẽ gồm bánh răng cố định 1 có bán kính r_1 , cặp bánh răng 2-3 (và cặp bánh răng giống nó 2'-3') có các bán kính tương ứng r_2 và r_3 , bánh răng 4 lắp trên trục IV. Tác dụng lên trục I mômen phát động M_1 . Xác định mômen cản M tác dụng lên trục IV để hệ cân bằng. Bỏ qua ma sát.

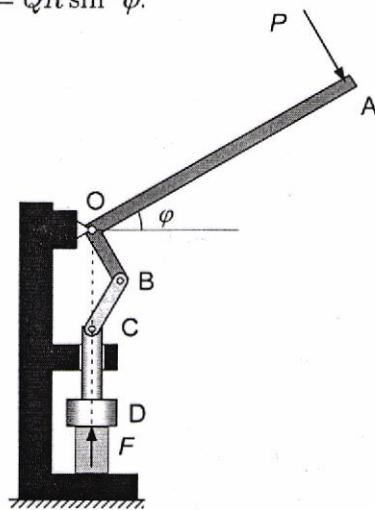
$$\text{Đáp số: } M = M_1 \frac{r_2(r_1 + r_2 - r_3)}{(r_1 + r_2)(r_3 - r_2)}.$$

14-15. Cơ cấu gồm tay quay OC quay quanh trục nằm ngang O, truyền chuyển động cho thanh AB trượt theo hướng thẳng đứng K nhờ con trượt A. Cho biết các kích thước $OC = R$; $OK = L$. Tìm lực Q cần thiết đặt thẳng góc với tay quay OC tại điểm C để cơ cấu cân bằng tại vị trí trên hình vẽ (góc nghiêng φ) khi có lực P tác dụng lên thanh trượt AB tại B. Tìm phản lực tại rãnh K (quy về liên kết ngầm).

$$\text{Đáp số: } Q = \frac{PL}{R \cos^2 \varphi}, \quad X_K = \frac{1}{2L} QR \sin^2 \varphi, \quad M_K = QR \sin^2 \varphi.$$



Hình bài 14-15



Hình bài 14-16

14-16. Lực P tác dụng vuông góc tại đầu A. Hãy xác định lực F tác dụng lên vật ép khi $\varphi = 30^\circ$. Bỏ qua trọng lượng các khâu. Cho biết các khoảng cách $OA = L = 30\text{cm}$, $OB = BC = a = 5\text{cm}$, góc $BOA = 90^\circ$.

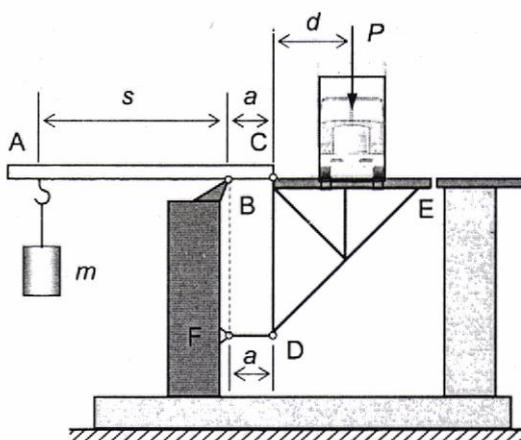
$$\text{Đáp số: } F = PL / (2a \sin \varphi).$$

14-17. Một cân tại trạm kiểm định xe tải có sơ đồ như hình vẽ. Khi không có xe trên bàn, trọng lượng thanh AC và bàn cân CDE tự cân bằng với nhau. Tìm trọng lượng của xe khi biết khối lượng quả cân là m và đặt tại vị trí cách borden lề B một khoảng bằng s .

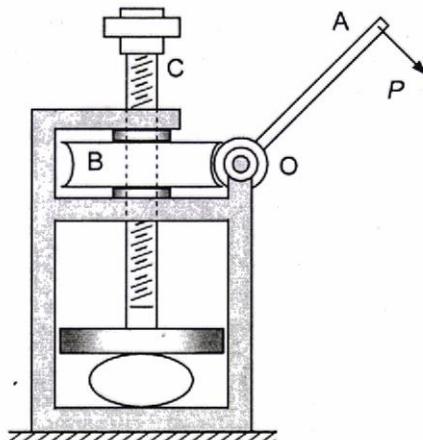
$$\text{Đáp số: } P = mgs / a.$$

14-18. Cho cơ cấu ép như trên hình vẽ. Đòn OA gắn liền với trục vít, OA = d. Khi trục vít quay làm cho bánh vít B quay quanh trục thẳng đứng, và làm cho vít me C chuyển động lên xuống. Cho biết trục vít O quay n vòng thì bánh vít B quay được 1 vòng. Vít me C có bước là h. Xác định lực nén tác dụng lên vật D, khi ta tác dụng một lực P tại đầu A và hướng vuông góc với OA. Bỏ qua ma sát và trọng lượng các vật.

Đáp số: $N = 2\pi n P d / h$.



Hình bài 14-17

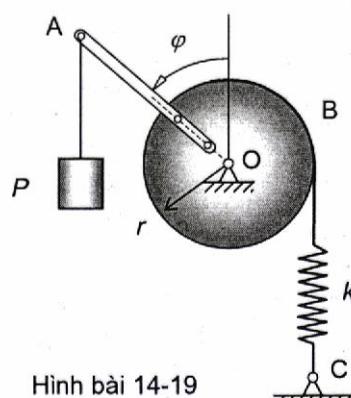


Hình bài 14-18

14-19. Vật nặng có trọng lượng $P = 400N$ được treo vào đầu thanh OA gắn liền với đĩa như hình vẽ. Chiều dài OA = L = 8cm, đĩa tròn có bán kính $r = 3cm$. Độ cứng lò xo là $k = 250N/cm$, lò xo không biến dạng khi $\varphi = 0$. Xác định giá trị góc φ khi hệ cân bằng.

Đáp số: Góc φ là nghiệm của phương trình

$$\sin \varphi = \frac{kr^2}{PL} \varphi, \quad \varphi_1 = 0; \varphi_2 = 1,402 \text{ rad.}$$



Hình bài 14-19

Chương 15

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Lực quán tính và ngẫu lực quán tính

Lực quán tính của chất điểm:

$$\vec{F}^{qt} = -m\vec{a}, \text{ trị số } F^{qt} = ma$$

trong đó m và \vec{a} là khối lượng và gia tốc của chất điểm.

Lực quán tính của vật rắn:

Thu gọn lực quán tính của vật rắn về một điểm O được một lực quán tính \vec{R}_O^{qt} và một ngẫu lực quán tính \vec{M}_O^{qt} :

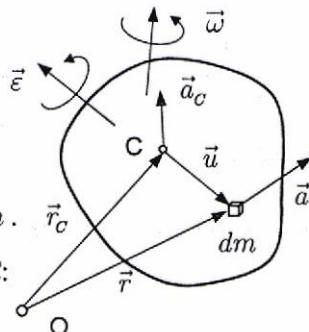
- Lực quán tính:

$$\vec{R}_O^{qt} = - \int \vec{a} dm = -m\vec{a}_C = -\frac{d}{dt} \vec{p}, \quad \vec{p} = m\vec{v}_C$$

- Ngẫu lực quán tính:

$$\vec{M}_O^{qt} = - \int \vec{r} \times \vec{a} dm$$

$$\vec{M}_O^{qt} = -\frac{d}{dt} \vec{l}_O, \text{ với } \vec{l}_O = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \int \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm.$$



Ngẫu lực quán tính của vật rắn thu gọn về khối tâm C:

$$\vec{M}_C^{qt} = - \int \vec{u} \times (\vec{\epsilon} \times \vec{u}) dm - \vec{\omega} \times \vec{l}_C$$

Vậy $\vec{M}_O^{qt} = -\vec{r}_C \times m\vec{a}_C + \vec{M}_C^{qt}$.

Các thành phần hình chiếu của vectơ \vec{M}_C^{qt} trong hệ trục tọa độ (Cxyz) gắn liền vật được tính dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{M}_C^{qt} = -\mathbf{J}_C \boldsymbol{\epsilon} - \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_C \boldsymbol{\omega}, \text{ với } \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

và \mathbf{J}_C là ma trận quán tính khối của vật đối với hệ Cxyz.

Kết quả thu gọn lực quán tính của vật rắn được tóm tắt trong bảng 15-1.

BẢNG 15-1. KẾT QUẢ THU GỌN LỰC QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN

Dạng chuyển động của vật	Tâm thu gọn	Kết quả thu gọn hệ lực quán tính
Chuyển động tịnh tiến	Khối tâm C của vật	$\vec{R}_C^{qt} = -m\vec{a}_C$ $\vec{M}_C^{qt} = 0.$
Tấm phẳng quay quanh trục vuông góc tấm	Giao điểm O của trục quay và tấm	$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C$ $\vec{M}_O^{qt} = -J_O \vec{\varepsilon}.$
Tấm phẳng chuyển động phẳng	Khối tâm C của vật	$\vec{R}_C^{qt} = -m\vec{a}_C$ $\vec{M}_C^{qt} = -J_C \vec{\varepsilon}.$
Quay quanh trục cố định	Điểm O nằm trên trục quay z, hệ Oxyz gắn liền vật	$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C$ $M_x^{qt} = J_{xz}\varepsilon_z - J_{yz}\omega^2$ $M_y^{qt} = -J_{yz}\varepsilon_z + J_{xz}\omega^2$ $M_z^{qt} = -J_z\varepsilon_z.$
Vật rắn quay quanh điểm cố định	Điểm cố định O thuộc vật, hệ Oxyz gắn liền vật	$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C$ $M_O^{qt} = -\mathbf{J}_O\varepsilon - \tilde{\omega}\mathbf{J}_O\omega$
Vật rắn chuyển động tổng quát	Khối tâm C của vật, hệ Cxyz gắn liền vật	$\vec{R}_C^{qt} = -m\vec{a}_C$ $M_C^{qt} = -\mathbf{J}_C\varepsilon - \tilde{\omega}\mathbf{J}_C\omega$

Các ma trận quán tính \mathbf{J}_O , \mathbf{J}_C và các véctơ ε , ω được tính trong hệ tọa độ gắn liền với vật rắn. Ta có công thức mômen quán tính:

$$\mathbf{M}_C^{qt} = - \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Véctơ chính của hệ lực quán tính không phụ thuộc vào tâm thu gọn, luôn được tính theo giá trị khối tâm C, $\vec{F}^{qt} = -m\vec{a}_C$.

Nguyên lý Đalambert (d'Alembert) đối với cơ hệ

Nguyên lý. Tại mỗi thời điểm nếu ta đặt vào từng chất điểm và từng vật rắn của cơ hệ các lực quán tính thu gọn của nó thì hệ gồm các ngoại lực, nội lực tác dụng lên cơ hệ và lực quán tính thu gọn là một hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Hệ lực gồm các lực ngoại lực, nội lực và các lực quán tính thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học tại thời điểm xét:

$$(\vec{F}_1^e, \dots, \vec{F}_l^e, \vec{F}_1^i, \dots, \vec{F}_m^i, \vec{F}_1^{qt}, \dots, \vec{F}_n^{qt}) \equiv 0$$

Do tính chất của hệ nội lực $\sum \vec{F}_k^i = 0$, $\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k^i = 0$ nên ta suy ra:

$$\sum_k \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{qt} = 0, \quad \sum_k \vec{r}_k \times (\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^{qt}) = 0.$$

Hết quả. Hệ gồm các ngoại lực và các lực quán tính tác dụng lên cơ hệ là một hệ lực thoả mãn các điều kiện cân bằng tĩnh học.

Phương pháp tĩnh - động lực

Nhờ nguyên lý Đalambert ta có thể giải bài toán động lực học bằng cách lập các phương trình cân bằng tĩnh học.

Trình tự áp dụng như sau :

1. Tách hệ tại liên kết giữa các vật. Trên mỗi vật, ta đặt các lực hoạt động (bao gồm cả trọng lực), lực liên kết, lực quán tính.
2. Viết các phương trình cân bằng tĩnh học. Đối với hệ lực phẳng tổng quát ta lập 3 phương trình. Đối với một hệ lực không gian tổng quát ta có 6 phương trình.
3. Giải hệ n PTCB với n ẩn.

Chú ý: Nếu chỉ xác định lực liên kết động thì ta lập PTCB cho hệ lực gồm lực liên kết động và lực quán tính (không chứa các lực hoạt động).

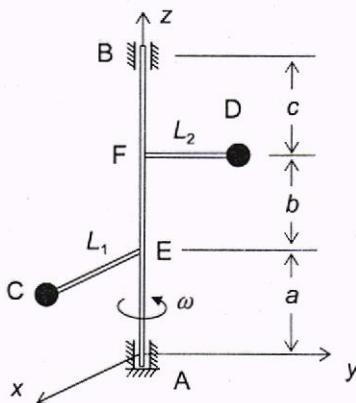
II. BÀI TẬP

15-1. Một vật nặng có trọng lượng P được kéo lên nhanh dần đều với gia tốc a theo phương thẳng đứng bằng một dây cáp. Tìm lực căng của cáp.

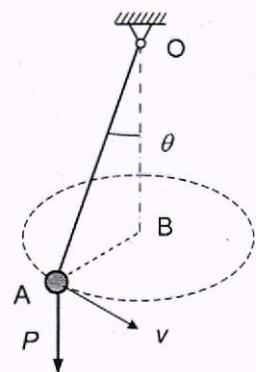
Đáp số: $T = P(1 + a / g)$.

15-2. Hai quả cầu nhỏ C và D có khối lượng tương ứng là m_1 , m_2 được gắn vào trực quay AB bằng hai thanh CE và DF vuông góc trực AB và có chiều dài tương ứng là e_1 và e_2 . Biết rằng C nằm trong mặt phẳng xz, còn D trong mặt phẳng yz. Hãy xác định áp lực động lực của trực lện các ổ đỡ A và B. Bỏ qua trọng lượng các thanh và xem các quả cầu C, D có kích thước không đáng kể.

Đáp số: $X_B = -\frac{a}{a+b+c} m_1 e_1 \omega^2$, $Y_B = -\frac{a+b}{a+b+c} m_2 e_2 \omega^2$,
 $X_A = -\frac{b+c}{a+b+c} m_1 e_1 \omega^2$, $Y_A = -\frac{c}{a+b+c} m_2 e_2 \omega^2$, $Z_A = 0$.



Hình bài 15-2



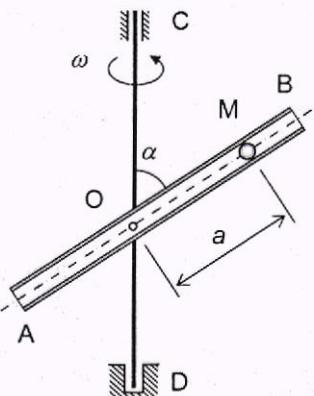
Hình bài 15-3

15-3. Quả cầu nhỏ được treo vào một đầu dây và chuyển động theo một đường tròn nằm ngang, dây quét tạo nên một hình nón. Cho biết khối lượng $m = 3\text{kg}$, vận tốc $v = 1,2\text{m/s}$, dây treo dài $L = 0,8\text{m}$. Xác định góc θ và lực căng của dây.

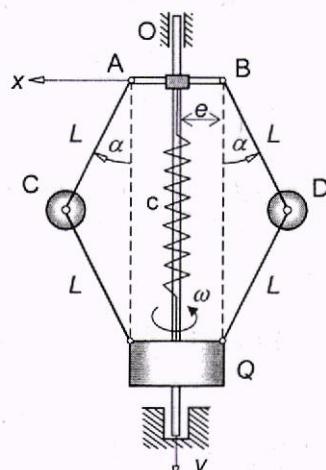
Đáp số: $\theta = 24^{\circ}2'$; $T = 32,3\text{N}$.

15-4. Ống AB quay với vận tốc góc ω không đổi quanh trụ thẳng đứng CD. Góc nghiêng của ống so với đường thẳng đứng là $\alpha = \text{const}$. Một quả cầu nhỏ (coi như chất diềm) khối lượng m có thể chuyển động không ma sát trong ống. Xác định giá trị vận tốc góc ω để quả cầu có thể đứng cân bằng trên ống tại vị trí OM = a .

Đáp số: $\omega^2 = g \cos \alpha / (a \sin^2 \alpha)$.



Hình bài 15-4



Hình bài 15-5

15-5. Trục máy điều tiết ly tâm quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω . Tìm quan hệ giữa góc mở α và vận tốc góc ω . Cho biết độ cứng của lò xo là c và khi $\alpha = 0$ thì lò xo không biến dạng. Trọng lượng của đối trọng là Q , trọng lượng mỗi quả văng C, D là P , chiều dài bốn thanh như nhau và bằng L . Hai bản lề treo A và B cách trục quay một đoạn là e . Bỏ qua ma sát, trọng lượng các thanh treo và trọng lượng lò xo.

$$\text{Đáp số: } \omega^2 = \frac{g[P + Q - 2cL(1 - \cos \alpha)]\sin \alpha}{P(e + L \sin \alpha) \cos \alpha}.$$

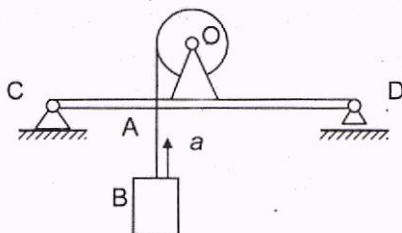
15-6. Tời máy được đặt trên dầm nằm ngang như trên hình vẽ. Cho khoảng cách giữa hai gối đỡ CD = L = 8m, AC = L₁ = 3m. Tời kéo vật nặng B có khối lượng là 2 tấn chạy lên thẳng đứng nhanh dần đều với gia tốc $a = 0,5 \text{ m/s}^2$. Tìm áp lực phụ do lực quán tính của vật nặng B gây ra trên hai gối đỡ.

Đáp số: 625,4N và 375,4N.

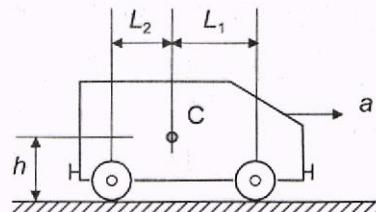
15-7. Xe ô tô có khối lượng m , chạy trên đường ngang với gia tốc a . Trọng tâm của xe cách mặt đường là h và theo phương ngang cách trục các bánh trước và sau những đoạn L_1 và L_2 . Bỏ qua mômen quán tính của bánh xe đối với trục quay của chúng. Tìm áp lực pháp tuyến của cặp bánh trước và cặp bánh sau lên mặt đường. Với trạng thái chuyển động nào của xe thì hai áp lực ấy có giá trị bằng nhau.

$$\text{Đáp số: } N_1 = \frac{m(gL_1 + ah)}{L_1 + L_2}, \quad N_2 = \frac{m(gL_2 - ah)}{L_1 + L_2},$$

$$N_1 = N_2 \text{ khi xe chạy với gia tốc } a = g \frac{L_2 - L_1}{2h}.$$



Hình bài 15-6



Hình bài 15-7

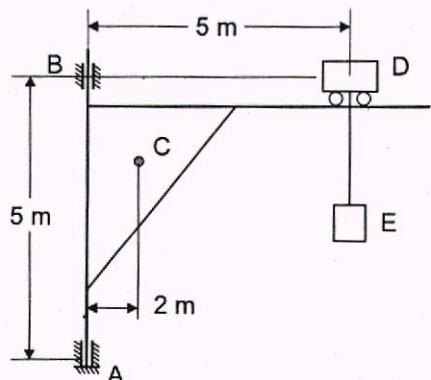
15-8. Một cần trục quay có khối lượng bằng 2.10^3 kg và khối tâm tại C. Xe vận chuyển D có khối lượng bằng 500 kg . Xác định các phản lực ở đỡ A và B trong các trường hợp sau:

- Cần trục và xe đứng yên. Người ta kéo lên vật E có khối lượng 3.10^3 kg theo phương thẳng đứng với vận tốc bằng $\frac{1}{3}g$ (g là giá tốc trọng trường).
- Cần trục đứng yên và xe di chuyển không có vật E từ phải sang trái với vận tốc bằng $0,5g$. Cho biết trọng tâm xe cùng nằm trên đường nằm ngang với cần trục.

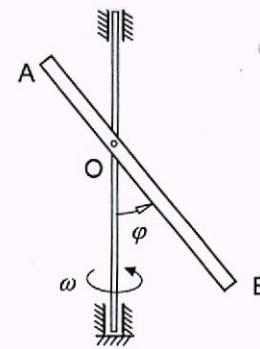
Đáp số: a) $X_A = -X_B = 52,1\text{kN}$; $Y_A = 63,9\text{kN}$
 b) $X_A = 12,8\text{kN}$; $X_B = -15,2\text{kN}$, $Y_A = 24,5\text{kN}$.

15-9. Một thanh mảnh đồng chất được gắn bằng bản lề vào một trục quay thẳng đứng O; OA = a ; OB = b . Trục quay đều với vận tốc góc ω , chốt bản lề nằm ngang. Bỏ qua ma sát. Tìm hệ thức giữa vận tốc góc ω và góc nghiêng φ giữa trục quay và thanh AB khi chuyển động đã ổn định (khi đó φ là hằng số).

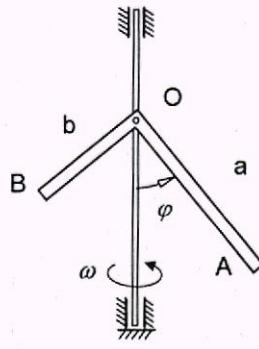
Đáp số: $\cos \varphi = 3g \frac{b-a}{2\omega^2(a^2-ab+b^2)}$.



Hình bài 15-8



Hình bài 15-9



Hình bài 15-10

15-10. Thanh AOB dạng chữ L đồng chất, góc AOB = 90° , được lắp bằng bản lề có chốt ngang vào một trục quay thẳng đứng O. Gọi góc lệch giữa OA và trục quay là φ , trục quay đều với vận tốc góc là ω . Cho biết OA = a , OB = b , bỏ qua ma sát. Tìm quan hệ giữa φ và ω khi chuyển động đã ổn định (khi đó φ là hằng số).

Đáp số: $\omega^2 = 3g \frac{b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}$.

15-11. Một thanh đồng chất khối lượng m , dài L quay với vận tốc góc không đổi ω quanh trục thẳng đứng, vuông góc với thanh đó và đi qua đầu mút của thanh. Hãy xác định lực xé thanh tại thiết diện ngang nằm cách trục quay một đoạn là x .

Đáp số: $S = \frac{m(L^2 - x^2)\omega^2}{2L}$.

15-12. Một tấm hình chữ nhật đồng chất khối lượng m quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω . Hãy xác định lực xé tấm theo hướng vuông góc với trục quay trên tiết diện đi qua trục quay.

Đáp số: $S = \frac{1}{4}ma\omega^2$.

Chương 16

NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT - LAGRANGE PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI 2

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Nguyên lý d'Alembert - Lagrange

Đối với hệ n chất điểm:

$$\sum_{k=1}^n (\vec{F}_k^a - m_k \vec{a}_k) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (16.1)$$

Dưới dạng khai triển theo các tọa độ Descartes :

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx}^a - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky}^a - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz}^a - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k = 0 \quad (16.2)$$

Đối với hệ p vật rắn phẳng :

$$\sum_{k=1}^p (\vec{F}_k^a - m_k \vec{a}_{C_k}) \delta \vec{r}_{C_k} + (M_k^a - J_{C_k} \ddot{\varphi}_k) \delta \varphi_k = 0 \quad (16.3)$$

trong đó: \vec{F}_k^a , M_k^a là véctơ chính và mômen chính của các lực hoạt động tác dụng lên vật rắn thứ k đối với khối tâm của vật; \vec{a}_{C_k} là gia tốc khối tâm C_k , $\dot{\varphi}_k$ là gia tốc góc của vật rắn thứ k .

Phương trình Lagrange loại 2

Phương trình Lagrange loại hai đối với cơ hệ chịu liên kết holônom, giữ, dừng và lý tưởng có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, f) \quad (16.4)$$

trong đó: f là số bậc tự do của cơ hệ, q_1, q_2, \dots, q_f là các tọa độ suy rộng đủ của hệ, $T = T(q_j, \dot{q}_j)$ là động năng của hệ, Q_i là các lực suy rộng. Nếu ta phân các lực tác dụng lên cơ hệ thành các lực có thể và các lực không có thể thì lực suy rộng Q_i được tính theo công thức :

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \quad (16.5)$$

trong đó Q_i^* là lực suy rộng của các lực không thế.

Trong trường hợp lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế thì $Q_i^* = 0$. Khi đó phương trình Lagrange loại hai có dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, f) \quad (16.6)$$

Nếu ta đưa vào hệ thức:

$$L = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, t) - \Pi(q_1, \dots, q_f)$$

ta suy ra :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, f). \quad (16.7)$$

Các tích phân đầu của chuyển động

Tích phân xyclic:

Toạ độ suy rộng q_s được gọi là toạ độ xyclic, nếu :

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0, Q_s^* = 0 \text{ ta suy ra } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \text{const}. \quad (16.8)$$

Hệ thức (16.8) là một tích phân đầu của cơ hệ (tích phân xyclic).

Tích phân năng lượng:

Trong trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế, ta có định luật bảo toàn cơ năng :

$$d(T + \Pi) = 0, \text{ suy ra } T + \Pi = \text{const} \quad (16.9)$$

Hệ thức (16.9) là một tích phân đầu của cơ hệ (tích phân năng lượng).

II. BÀI TẬP

16-1. Hai vật A và B có cùng trọng lượng P , được nối với nhau bằng dây mềm, không giãn. Dây này vắt qua hai ròng rọc cố định D, E và ròng rọc động G. Tâm ròng rọc G có treo vật nặng C trọng lượng Q . Các vật A và B chuyển động trên hai mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng α và β . Bỏ qua ma sát và khối lượng của các ròng rọc. Tìm gia tốc của vật C.

Đáp số: $a_C = g \frac{Q - P(\sin \alpha + \sin \beta)}{Q + 2P}$, a_C dương khi có chiều hướng xuống.

16-2. Lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc toán học có khối lượng m được treo vào đầu tự do của một dây đàn hồi có độ dài khi cân bằng là l và có độ cứng đàn hồi là c . Chọn các toạ độ suy rộng là góc φ và độ dãn tuyệt đối z .

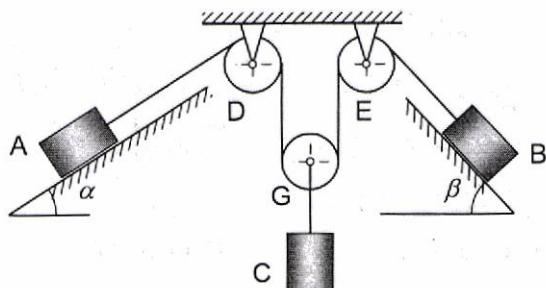
Đáp số: $(1 + z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + (g/l)\sin \varphi = 0$

$$\ddot{z} - (1 + z)\dot{\varphi}^2 + (c/m)z + (g/l)(1 - \cos \varphi) = 0.$$

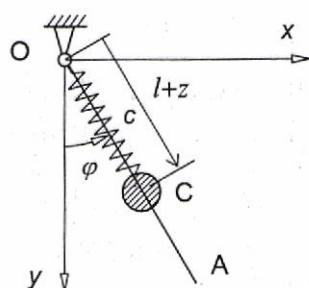
Trong điều kiện dao động nhỏ có nghiệm sau:

$$z = A \sin(\sqrt{c/m} t + \alpha); \quad \varphi = B \sin(\sqrt{g/l} t + \beta)$$

với A, B, α, β là hằng số phụ thuộc vào điều kiện đầu.



Hình bài 16-1



Hình bài 16-2

16-3. Vật A có khối lượng m_1 được nối với các đường cố định nhờ một lò xo có độ cứng như nhau c , có thể trượt không ma sát dọc sàn ngang. Quả cầu nhỏ B khối lượng m_2 được treo vào thanh mảnh và nhẹ được nối bắn lề trụ với A. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ và tìm các tích phân đầu.

$$\text{Đáp số: } (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\varphi} \cos \varphi - m_2l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0.$$

16-4. Với dữ kiện của bài 16-3 và có kể đến ma sát trượt giữa con chạy và nền ngang với hệ số ma sát trượt f . Viết phương trình vi phân chuyển động của con lắc.

$$\text{Đáp số: } l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}[(m_1 + m_2)\dot{x} + m_2l\dot{\varphi} \cos \varphi] = -2cx - f[(m_1 + m_2)g + m_2l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + lm_2\ddot{\varphi} \sin \varphi] \operatorname{sgn} \dot{y},$$

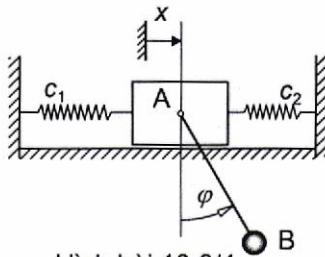
trong đó $\operatorname{sgn} \dot{y} = 1$ khi $\dot{y} > 0$, $\operatorname{sgn} \dot{y} = -1$ khi $\dot{y} < 0$.

16-5. Một ống trụ tròn rỗng, đồng chất, có trọng lượng P , bán kính đáy R và có thể quay xung quanh trục thẳng đứng qua tâm. Trên mặt trong của ống trụ có xé một rãnh định ốc, bước của đường định ốc là h . Một viên bi nhỏ trọng lượng Q chạy trong rãnh ấy dưới tác dụng của trọng lượng bản thân. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, cho biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ.

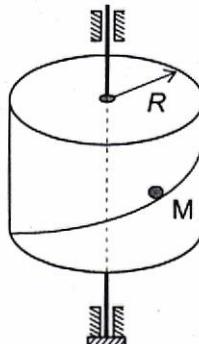
$$\text{Đáp số: } (Q + P)R^2\ddot{\theta} + QR\ddot{s} \cos \gamma = 0, \quad QR\ddot{\theta} \cos \gamma + Q\ddot{s} = Qg \tan \gamma$$

$$\tan \gamma = \frac{h}{2\pi R}, \quad \theta = \frac{g}{2} \frac{P \sin 2\gamma}{QR \cos^2 \gamma + PR} \cdot \frac{t^2}{2}, \quad s = g \frac{Q \cos 2\gamma + P}{Q \cos^2 \gamma + P} \cdot \frac{P}{Q} \cos \gamma \frac{t^2}{2}$$

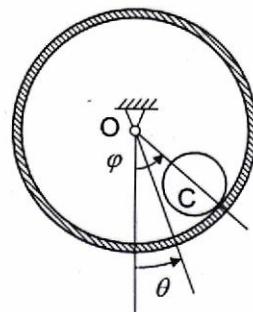
trong đó θ là góc quay của trụ, s là quãng đường đi được của viên bi theo rãnh.



Hình bài 16-3/4



Hình bài 16-5



Hình bài 16-6

16-6. Một hình trụ khối lượng m , bán kính r lăn không trượt bên trong một trụ rỗng, khối lượng M , bán kính R . Trụ này có thể quay quanh trục nằm ngang O . Momen quán tính của các trụ đối với các trục tương ứng bằng MR^2 và $mr^2/2$. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ và tìm các tích phân đầu.

$$\text{Đáp số: } \frac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m[(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)\cos\varphi = C_1$$

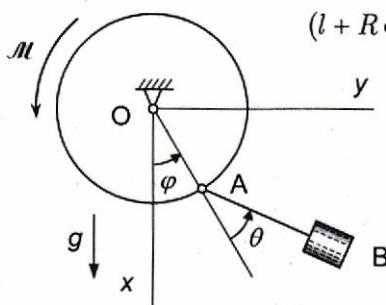
$$MR^2\dot{\theta} - \frac{1}{2} mR[(R-r)\dot{\varphi} + R\dot{\theta}] = C_2.$$

16-7. Một đĩa đồng chất bán kính R , có khối lượng M có thể quay xung quanh trục nằm ngang O . Một dây nhẹ không giãn $AB = l$, một đầu của nó treo vào vành đĩa tại A , và đầu kia buộc vật có khối lượng m tại B . Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

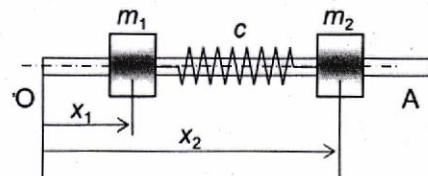
$$\text{Đáp số: } [(\frac{1}{2}M+m)R^2 + ml(l+2R\cos\theta)]\ddot{\varphi} + ml(l+R\cos\theta)\ddot{\theta} - 2mRl\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$-mRl\dot{\theta}^2\sin\theta + mg[R\sin\varphi + l\sin(\varphi+\theta)] = M,$$

$$(l+R\cos\theta)\ddot{\varphi} + l\ddot{\theta} + R\dot{\varphi}^2\sin\theta + lg\sin(\varphi+\theta) = 0.$$



Hình bài 16-7



Hình bài 16-8

16-8. Xác định chuyển động của cơ hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 có thể trượt tịnh tiến dọc thanh nhún nằm ngang được nối với nhau nhờ một lò xo có độ cứng c . Khoảng cách giữa hai khối lượng khi lò xo không làm việc là l .

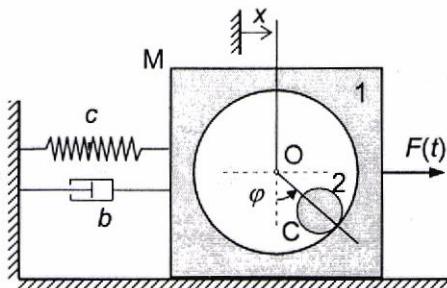
Trạng thái đầu của cơ hệ được xác định bằng giá trị của vận tốc và tọa độ khối tâm của hai vật khi $t = 0$: $x_1 = 0, \dot{x}_1 = u_0, x_2 = l, \dot{x}_2 = 0$.

Đáp số: $k = \sqrt{c(1/m_1 + 1/m_2)}$,

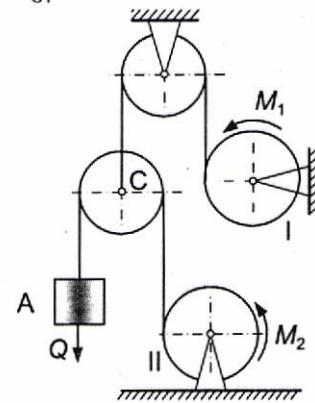
$$x_1 = \frac{l}{m_1 + m_2} (m_1 u_0 t + \frac{m_2 u_0}{k} \sin kt), \quad x_2 - l = \frac{l}{m_1 + m_2} (m_1 u_0 t - \frac{m_1 u_0}{k} \sin kt).$$

16-9. Dầm 1 khối lượng m_1 được khoét theo chiêu dọc một rãnh trụ có bán kính R , một hình trụ tròn đồng chất 2 bán kính r , khối lượng m_2 lăn không trượt trong rãnh. Trục rãnh trụ và trục hình trụ 2 song song với nhau. Dầm 1 chuyển động trên mặt phẳng ngang nhẵn dưới tác dụng của lực ngang $F(t)$, lực đàn hồi tuyến tính của lò xo có độ cứng c và lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc có hệ số cản b . Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Đáp số: $(m_1 + m_2)\ddot{x} + [m_2(R - r) \cos \varphi]\ddot{\varphi} - m_2(R - r)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F(t) - b\dot{x} - cx$
 $(m_2 \cos \varphi)\ddot{x} + 1,5m_2(R - r)\ddot{\varphi} + m_2g \sin \varphi = 0$.



Hình bài 16-9



Hình bài 16-10

16-10. Vật A có khối lượng m được kéo lên nhờ các trục quay I và II có cùng bán kính R và mômen quán tính của chúng đối với trục quay riêng bằng J . Xác định giá tốc của vật A nếu các trục quay chịu tác dụng của các ngẫu lực có mômen là M_1 và M_2 . Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc và ma sát ở các ổ trục. Coi các dây là nhẹ, không giãm và không trượt đối với các ròng rọc.

Đáp số: $a_A = \frac{2M_1 + M_2 - 5mgR}{J + 5mR^2}$.

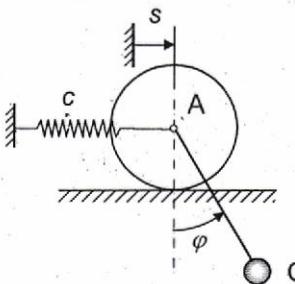
16-11. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của một con lắc có khối lượng m_2 và có độ dài l , điểm treo của nó nằm tại tâm của đĩa đồng chất bán kính r và có khối lượng m_1 . Đĩa có thể lăn không trượt dọc theo trục ngang, tâm của đĩa nối với giá cố định nhờ một lò xo có độ cứng c .

Đáp số: $(3m_1 + 2m_2)\ddot{x} + 2m_2l\ddot{\varphi} \cos \varphi - 2m_2l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx = 0$
 $l\ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos \varphi + g \sin \varphi = 0$.

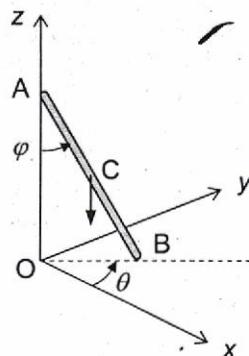
16-12. Một thanh mảnh đồng chất AB có khối lượng m và độ dài $2l$, đầu A trượt theo đường thẳng đứng còn đầu B trượt trong mặt phẳng ngang Oxy. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của thanh và tìm các tích phân đầu của chuyển động.

$$\text{Đáp số: } \ddot{\varphi} - \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{3g}{4l} \sin \varphi, \quad \ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

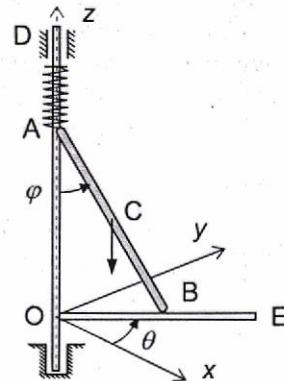
$$\text{Các tích phân đầu: } \dot{\theta} \sin^2 \varphi = C_1, \quad \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + \frac{3g}{2l} \cos \varphi = C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$



Hình bài 16-11



Hình bài 16-12



Hình bài 16-13

16-13. Một thanh đồng chất AB có khối lượng m và chiều dài l có thể trượt không ma sát theo cạnh DO và OE của khung EOD, OD vuông gócOE. Đầu A của thanh được nối với điểm cố định D nhờ lò xo có độ cứng c . Khung DOC có mômen quán tính đối với trục OD bằng J có thể quay quanh trục OD dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M . Cho biết khi $\varphi = \varphi_0$ lò xo không bị biến dạng. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

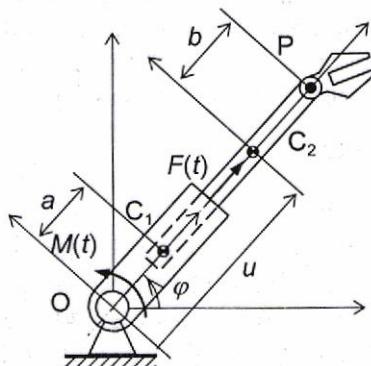
$$\text{Đáp số: } (J + \frac{1}{3}ml^2 \sin^2 \varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin 2\varphi - M = 0,$$

$$l\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \sin 2\varphi - (3cl/m)(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \sin \varphi = 0$$

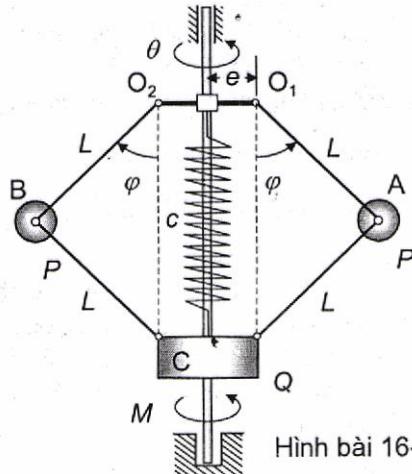
16-14. Tay máy chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 có khối lượng m_1 và mômen quán tính đối với khối tâm C của nó là J_1 quay quanh trục ngang qua O cố định. Khâu 2 có khối lượng m_2 và mômen quán tính đối với khối tâm C_2 của nó là J_2 và chuyển động tịnh tiến đối với khâu 1. Tác dụng một ngẫu lực điều khiển có mômen $M(t)$ lên khâu quay 1 và một lực điều khiển $F(t)$ lên khâu 2. Bỏ qua ma sát và lực cản. Viết phương trình chuyển động của tay máy theo các tọa độ suy rộng φ và u .

$$\text{Đáp số: } m_2\ddot{u} - m_2u\dot{\varphi}^2 = F(t) - m_2g \sin \varphi,$$

$$(J_1 + J_2 + m_1a^2 + m_2u^2)\ddot{\varphi} + 2m_2u\dot{u}\dot{\varphi} = M(t) - (m_1a + m_2u)g \cos \varphi.$$



Hình bài 16-14



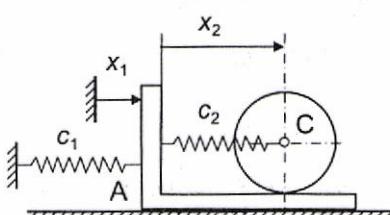
Hình bài 16-15

16-15. Một máy điều tiết ly tâm chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M đặt vào trục quay. Các quả văng A và B có cùng trọng lượng P , các thanh treo cùng chiều dài L , khối lượng không đáng kể. Các điểm treo O_1, O_2 nằm cách trục quay một đoạn bằng e . Đối trọng C có trọng lượng Q , mômen quán tính khối đối với trục quay là J . Lò xo treo đối trọng có độ cứng c và khi $\varphi = 0$ thì lò xo không biến dạng. Bỏ qua ma sát. Hãy thành lập lập phương trình vi phân chuyển động cho cơ hệ theo hai tọa độ suy rộng: θ là góc quay của trục, φ là góc lệch của các thanh treo.

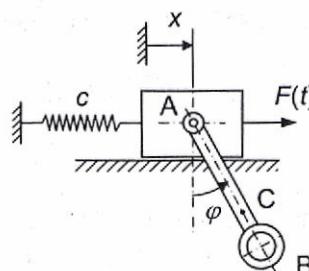
$$\begin{aligned} \text{Đáp số: } & [J + 2m_1(e + L \sin \varphi)^2] \ddot{\theta} + 4m_1L\dot{\theta}(e + L \sin \varphi) \cos \varphi = M, \\ & [2m_1L^2 + 4m_2L^2 \sin^2 \varphi]\ddot{\varphi} + 4m_2L^2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2m_1L\dot{\theta}^2(e + L \sin \varphi) \cos \varphi \\ & = -4cL^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi - 2gL(m_1 + m_2) \sin \varphi. \end{aligned}$$

16-16. Cho cơ hệ như trên hình vẽ. Con lăn tâm C là trụ tròn đồng chất, khối lượng m_2 , lăn không trượt trên tâm A. Tâm A có khối lượng m_1 , chuyển động không ma sát trên nền ngang. Các lò xo có độ cứng lần lượt là c_1 và c_2 . Khi $x_1 = 0$ và $x_2 = l$ các lò xo không biến dạng. Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là x_1 và x_2 . Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ và tìm các tích phân đầu.

$$\text{Đáp số: } (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_1x_1 = 0, \quad m_2\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m_2\ddot{x}_2 + c(x_2 - l) = 0.$$



Hình bài 16-16



Hình bài 16-17

16-17. Vật A khối lượng m_1 trượt không ma sát trên nền ngang. Con lắc AB có khối lượng m_2 , khối tâm C, AC = l , mômen quán tính khối đối với khối tâm C là J_C , được nối vào A bằng bản lề. Lò xo độ cứng c , không biến dạng khi $x = 0$. Lực $F(t)$ nằm ngang tác dụng lên vật A. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

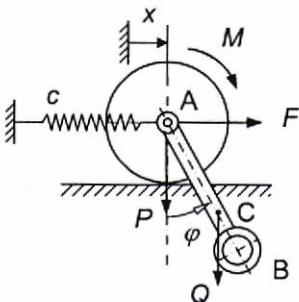
Đáp số: $(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + cx = F(t),$

$$m_2l \cos \varphi \ddot{x} + (J_C + m_2l^2)\ddot{\varphi} + m_2gl \sin \varphi = 0.$$

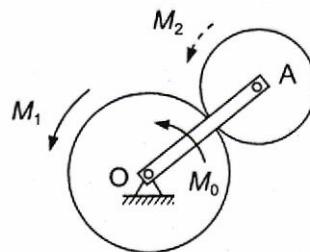
16-18. Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như trên hình. Đĩa đồng chất tâm A khối lượng m_1 , bán kính R , lăn không trượt trên nền ngang. Con lắc AB trọng lượng $Q = m_2g$ và khối tâm C với AC = l , mômen quán tính khối đối với trục qua khối tâm C là J_C , được nối vào A bằng một khớp bản lề trụ. Trên đĩa có ngẫu lực M và lực F nằm ngang tác dụng. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Đáp số: $\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_2l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + cx = F(t) + M/R$

$$m_2l \cos \varphi \ddot{x} + (J_C + m_2l^2)\ddot{\varphi} + m_2gl \sin \varphi = 0.$$



Hình bài 16-18



Hình bài 16-19

16-19. Cơ cấu vi sai chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang (trọng lực vuông góc với mặt phẳng hình vẽ). Các bánh răng 1 và 2 được coi là các đĩa tròn đồng chất, có khối lượng tương ứng là m_1 và m_2 , bán kính r_1 và r_2 . Tay quay OA là thanh đồng chất khối lượng m_0 , chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M_0 . Bánh răng 1 chịu tác dụng của ngẫu lực mômen M_1 . Chọn các góc quay φ_0 của tay quay và góc quay φ_1 bánh răng 1 làm toạ độ suy rộng (lấy chiều dương ngược chiều kim đồng hồ). Bỏ qua ma sát. Thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ. Nếu có ngẫu lực với mômen M_2 đặt vào bánh răng 2 thì PTVPCĐ thay đổi như thế nào?

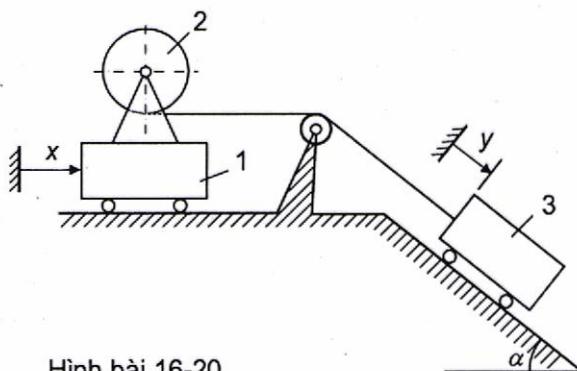
Đáp số: $\frac{1}{6}(2m_0 + 9m_2)(r_1 + r_2)^2\ddot{\varphi}_0 - \frac{1}{2}m_2r_1(r_1 + r_2)\ddot{\varphi}_1 = M_0$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)r_1^2\ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}m_2r_1(r_1 + r_2)\ddot{\varphi}_0 = M_1.$$

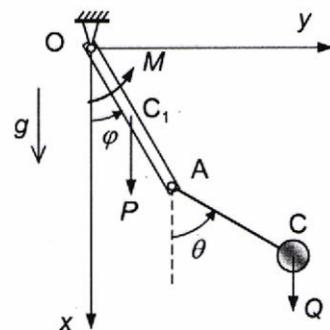
16-20. Cho cơ hệ chuyển động như trên hình vẽ. Vật 1 khối lượng m_1 , vật 2 là đĩa tròn đồng chất khối lượng m_2 , bán kính r , vật 3 khối lượng m_3 , chuyển động trên

mặt nghiêng có góc nghiêng α . Dây mềm nhẹ và không dãn, ban đầu hệ đứng yên, bỏ qua ma sát. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Đáp số: $(m_1 + \frac{3}{2}m_2)\ddot{x} - \frac{1}{2}m_2\ddot{y} = 0, \quad -\frac{1}{2}m_2\ddot{x} + (\frac{1}{2}m_2 + m_3)\ddot{y} = m_3g \sin \alpha$.



Hình bài 16-20



Hình bài 16-21

16-21. Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Thanh đồng chất OA trọng lượng $P = m_1g$, chiều dài l_1 , nối với giá cố định bằng bản lề O, khối tâm C_1 với $OC_1 = a_1$, chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M . Thanh mảnh AC không khôi lượng chiều dài l_2 nối với thanh OA bằng bản lề tại A (các khớp vuông góc mặt phẳng hình vẽ). Quả cầu nhỏ C trọng lượng $Q = m_2g$ (coi như chất điểm). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

Đáp số :

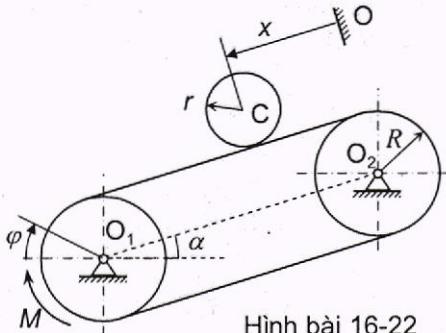
$$\begin{aligned} & (J_{C_1} + m_1a_1^2 + m_2l_1^2)\ddot{\phi} + [m_2l_1l_2 \cos(\varphi - \theta)]\ddot{\theta} + m_2l_1l_2\dot{\theta}^2 \sin(\varphi - \theta) \\ & + g(m_1a_1 + m_2l_1) \sin \varphi = M, \\ & [m_2l_1l_2 \cos(\varphi - \theta)]\ddot{\phi} + m_2l_2^2\ddot{\theta} - m_2l_1l_2\dot{\phi}^2 \sin(\varphi - \theta) + m_2gl_2 \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

16-22. Mô hình một hệ truyền động bằng tải được cho trên hình vẽ. Các trụ là những đĩa đồng chất, có cùng khối lượng m_0 và bán kính R . Băng tải nghiêng với phương ngang một góc α , khối lượng không đáng kể và luôn ở trạng thái căng. Trụ 1 chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_0 - b\omega$, với M_0 và b là các hằng số dương và ω là vận tốc góc của trụ. Con lăn C là vành tròn đồng chất, có khối lượng m và bán kính r , lăn không trượt trên băng tải. Hệ chuyển động từ trạng thái tĩnh.

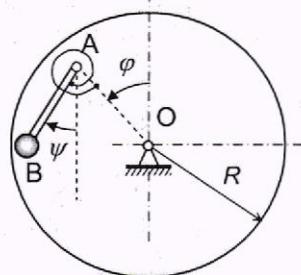
- Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo các tọa độ suy rộng φ (góc quay của trục) và x (tọa độ của khối tâm con lăn kể từ điểm O cố định).
- Tìm vận tốc góc của trục quay băng tải trong chế độ bình ổn.

Đáp số: a) $2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi} = P \sin \alpha, \quad mR\ddot{x} + (m_0 + m)R^2\ddot{\varphi} = M_0 - b\dot{\varphi}$,

b) $\omega_{gh} = a_0 / b_0, \quad a_0 = \frac{2M_0 - mgR \sin \alpha}{(m_0 + m)R^2}, \quad b_0 = \frac{2b}{(2m_0 + m)R^2}$.



Hình bài 16-22



Hình bài 16-23

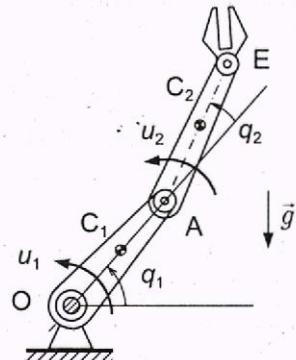
16-23. Cho cơ hệ gồm đĩa đồng chất khối lượng m_1 , bán kính R quay được quanh trục nằm ngang O cố định. Thanh dài $AB = l$ có khối lượng không đáng kể và được gắn bản lề với đĩa tại A , đầu còn lại của thanh được gắn quả cầu nhỏ B có khối lượng m_2 . Một lò xo xoắn có độ cứng c nối giữa thanh và đĩa. Biết rằng khi $\varphi = \psi = 0$ lò xo không biến dạng và khoảng cách $OA = a$. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo φ và ψ .

$$(m_1 R^2 + 2m_2 a^2) \ddot{\varphi} + 2m_2 a l \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) - 2m_2 a l \dot{\psi}^2 \sin(\varphi + \psi)$$

$$-2m_2 g a \sin(\varphi + \psi) + 2c(\varphi + \psi) = 0,$$

$$m_2 a l \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \psi) + m_2 l^2 \ddot{\psi} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \psi) + m_2 g l \sin \psi + c(\varphi + \psi) = 0.$$

16-24. Tay máy hai bậc tự do chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 chiều dài $OA = l_1$, khối tâm C_1 , $OC_1 = a_1$, khối lượng m_1 , mômen quán tính đối với trục qua khối tâm là J_1 . Khâu 2 chiều dài $AE = l_2$, khối tâm C_2 , $AC_2 = a_2$, khối lượng m_2 , mômen quán tính khối đối với trục khối tâm là J_2 . Động cơ 1 gắn liền với giá cố định tạo ra mômen u_1 tác dụng lên khâu 1, động cơ 2 gắn liền với khâu 1 tạo ra mômen u_2 tác dụng lên khâu 2. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động cho tay máy.



Hình bài 16-24

Đáp số:

$$\begin{aligned} & (J_{C_1} + m_1 a_1^2 + J_{C_2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_1 \\ & + (J_{C_2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 a_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ & + m_1 g a_1 \cos q_1 + m_2 g [l_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2)] = u_1, \\ & (J_{C_2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (J_{C_2} + m_2 a_2^2) \ddot{q}_2 \\ & + m_2 l_1 a_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2. \end{aligned}$$

Chương 17

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Động lượng và mômen động lượng của vật rắn

Động lượng:

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm = m\vec{v}_c \quad (17.1)$$

Mômen động lượng :

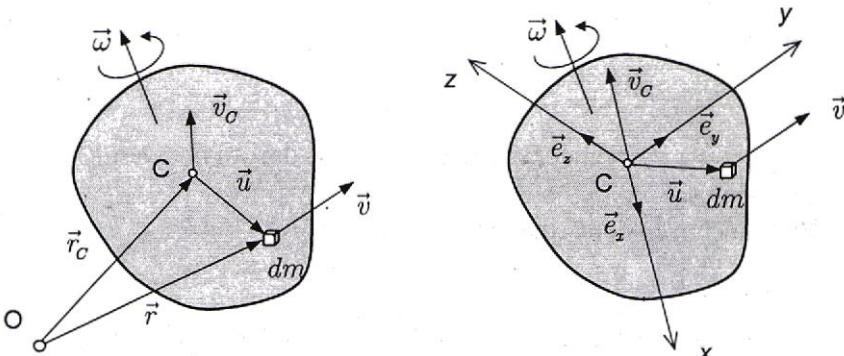
- mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C của vật:

$$\vec{l}_c = \int \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm, \quad \vec{u} = \overline{CM} \quad (17.2)$$

- mômen động lượng của vật rắn đối với một điểm O tùy ý:

$$\vec{l}_o = \int \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm + \vec{r}_c \times m\vec{v}_c = \vec{l}_c + \vec{m}_o(m\vec{v}_c) \quad (17.3)$$

với m là khối lượng vật, \vec{v}_c và $\vec{\omega}$ là vận tốc khối tâm C và vận tốc góc của vật.



Trong hệ tọa độ gắn vào vật có gốc tại C, (Cxzy) với $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị

$$\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x + \omega_y\vec{e}_y + \omega_z\vec{e}_z$$

$$\vec{l}_c = \int \vec{u} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) dm$$

$$\begin{aligned} \vec{l}_c &= (J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z)\vec{e}_x \\ &+ (J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z - J_{yx}\omega_x)\vec{e}_y + (J_z\omega_z - J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y)\vec{e}_z \end{aligned}$$

với $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ là các mômen quán tính khối và mômen tích quán tính đối với hệ Cxyz.

Nếu Cxyz là hệ trục quán tính chính, $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$, ta có:

$$\vec{l}_C = (J_x \omega_x) \vec{e}_x + (J_y \omega_y) \vec{e}_y + (J_z \omega_z) \vec{e}_z$$

Các trường hợp riêng:

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến $\vec{\omega} = 0$, nên $\vec{l}_C = 0$.
- Vật rắn là tấm phẳng chuyển động trong mặt phẳng tấm, chọn trục z vuông góc tấm, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$:

$$J_{zx} = J_{yz} = 0 \text{ (bề dày tấm không đáng kể), nên } \vec{l}_C = J_{cz} \omega \vec{e}_z.$$

- Tấm phẳng quay quanh trục z vuông góc tấm, O là giao điểm của tấm với trục quay:

$$\vec{l}_O = (J_{cz} + mr_C^2) \omega \vec{e}_z = J_{oz} \omega \vec{e}_z, \quad J_{oz} = J_{cz} + mr_C^2.$$

- Vật rắn quay quanh một điểm cố định O.

Trong hệ Oxyz có các vectơ đơn vị $\vec{e}_x \vec{e}_y \vec{e}_z$, gắn vào vật:

$$\begin{aligned} \vec{l}_O &= (J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) \vec{e}_x \\ &\quad + (J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{yx} \omega_x) \vec{e}_y + (J_z \omega_z - J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y) \vec{e}_z \end{aligned}$$

các thành phần mômen quán tính khối $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$ là hằng số.

- Vật rắn quay quanh trục cố định Oz, (trong hệ Oxyz)

$$\vec{l}_O = -J_{xz} \omega \vec{e}_x - J_{yz} \omega \vec{e}_y + J_z \omega \vec{e}_z$$

- Mômen động lượng của vật đối với trục quay z

$$\vec{l}_z = \vec{l}_O \cdot \vec{e}_z = J_z \vec{\omega}.$$

Động năng của vật rắn

$$T = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_C = \frac{1}{2} \vec{v}_C \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_C \quad (17.4)$$

trong đó \vec{l}_C là mômen động lượng của vật rắn đối với khối tâm C.

Các trường hợp riêng

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến, $\vec{\omega} = 0$:

$$T = \frac{1}{2} \vec{v}_C \cdot \vec{p} = \frac{1}{2} mv_C^2.$$

- Vật rắn quay quanh trục cố định Oz, (trong hệ Oxyz) $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$:

$$T = \frac{1}{2} \vec{v}_C \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_C = \frac{1}{2} mh_C^2 \omega^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2 = \frac{1}{2} (J_{cz} + mh_C^2) \omega^2 = \frac{1}{2} J_{oz} \omega^2$$

với h_C là khoảng cách từ khối tâm C đến trục quay z.

- Vật rắn là chuyền động song phẳng, chọn trục z vuông góc mặt phẳng quy chiếu, $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, $\vec{l}_C = -J_{xz} \omega \vec{e}_x - J_{yz} \omega \vec{e}_y + J_z \omega \vec{e}_z$:

$$T = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} \omega \vec{e}_z \cdot J_{oz} \omega \vec{e}_z = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} J_{cz} \omega^2.$$

- Vật rắn quay quanh một điểm cố định O

$$T = \frac{1}{2} \vec{v}_C \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_C \times m\vec{v}_C + \vec{l}_C) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_O.$$

trong đó \vec{l}_O là mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O cố định.

- Vật rắn quay quanh trục cố định qua O

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_O = \frac{1}{2} J_z \omega^2.$$

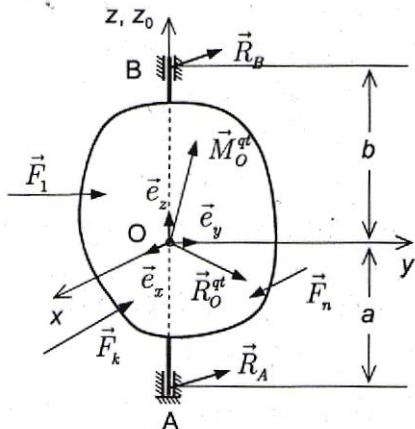
Phản lực động lực của vật rắn quay quanh trục cố định

Lực quán tính và ngẫu lực quán tính khi thu về gốc O trên trục quay z:

$$\vec{R}^{qt} = \begin{cases} R_x^{qt} = mx_C \omega^2 + my_C \bar{\epsilon} \\ R_y^{qt} = my_C \omega^2 - mx_C \bar{\epsilon} \\ R_z^{qt} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M}_O^{qt} = \begin{cases} M_x^{qt} = -J_{yz} \omega^2 + J_{xx} \bar{\epsilon} \\ M_y^{qt} = J_{xz} \omega^2 + J_{zy} \bar{\epsilon} \\ M_z^{qt} = -J_z \bar{\epsilon} \end{cases}$$

trong đó: x_C, y_C – tọa độ khối tâm C của vật,
 $\bar{\omega}, \bar{\epsilon}$ – vận tốc góc, gia tốc góc của vật.



Các phương trình xác định lực liên kết (tĩnh và động) tại ô trục A và B:

$$\sum F_x = X_A + X_B + \sum F_x^{hd} + R_x^{qt} = 0$$

$$\sum F_y = Y_A + Y_B + \sum F_y^{hd} + R_y^{qt} = 0$$

$$\sum F_z = Z_A + \sum F_z^{hd} = 0$$

$$\sum m_x = m_x(\vec{Y}_A) + m_x(\vec{Y}_B) + \sum m_x(\vec{F}_k^{hd}) + M_x^{qt} = 0$$

$$\sum m_y = m_y(\vec{X}_A) + m_y(\vec{X}_B) + \sum m_y(\vec{F}_k^{hd}) + M_y^{qt} = 0$$

Các phương trình xác định lực liên kết động tại ô trục A và B:

$$\sum F_x^d = X_A^d + X_B^d + mx_C \omega^2 + my_C \bar{\epsilon} = 0$$

$$\sum F_y^d = Y_A^d + Y_B^d + my_C \omega^2 - mx_C \bar{\epsilon} = 0$$

$$\sum m_x^d = m_x(\vec{Y}_A^d) + m_x(\vec{Y}_B^d) - J_{yz} \omega^2 + J_{xx} \bar{\epsilon} = 0$$

$$\sum m_y^d = m_y(\vec{X}_A^d) + m_y(\vec{X}_B^d) + J_{xz} \omega^2 + J_{zy} \bar{\epsilon} = 0$$

Điều kiện để triệt tiêu các lực liên kết động tại ô trục:

$$\left. \begin{array}{l} R_x^{qt} = R_y^{qt} = 0 \\ M_x^{qt} = M_y^{qt} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_C = y_C = 0 \\ J_{xz} = J_{zy} = 0 \end{array} \right.$$

Động lực học của vật rắn quay quanh điểm cố định

Phương trình động lực Euler:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_o = \vec{m}_o(\vec{F}_k), \text{ hoặc } \stackrel{(B)}{\frac{d}{dt}} \vec{l}_o + \vec{\omega} \times \vec{l}_o = \vec{m}_o(\vec{F}_k) \quad (17.5)$$

với (B) là hệ quy chiếu gắn liền vật.

Lý thuyết sơ cấp Gyrôscôp

Vận tốc góc của con quay $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

Mômen động lượng: $\vec{l}_o \approx J_z \vec{\omega}_1$

Phương trình cơ bản của Gyrôscôp :

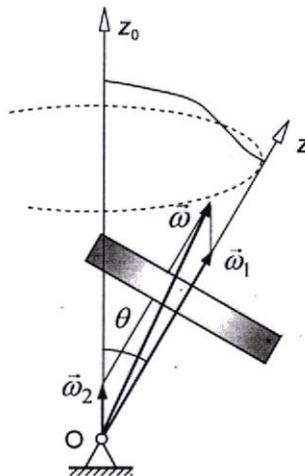
$$J_z \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1 = \Sigma \vec{m}_o(\vec{F}_k)$$

Mômen Gyrôscôp :

$$\vec{M}_{gy} = \vec{M}_0^{qt} = -\vec{M}_0^e = J_z (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2),$$

$$M_{gy} = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \theta$$

với θ là góc giữa hai vectơ $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$.



Vật rắn chuyển động tổng quát

- Định lý biến thiên động lượng

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}_o) = \Sigma \vec{F}_k$$

- Định lý biến thiên mômen động lượng đối với khối tâm C

$$\stackrel{(R_o)}{\frac{d}{dt}} \vec{l}_C = \stackrel{(B)}{\frac{d}{dt}} \vec{l}_C + \vec{\omega} \times \vec{l}_C = \Sigma \vec{m}_o(\vec{F}_k).$$

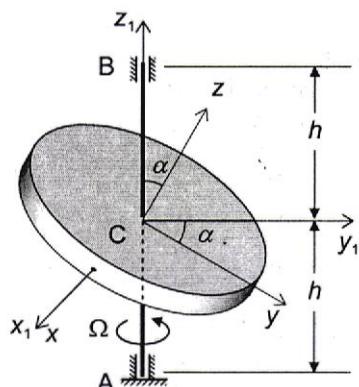
II. BÀI TẬP

Động năng, mômen động lượng

17-1. Đĩa tròn đồng chất bán kính R, khối lượng m được gắn cứng với trục nằm ngang AB di qua khối tâm C. Đĩa quay đều với Ω quanh trục AB. Trục đối xứng z (vuông góc với đĩa) nghiêng với trục quay AB một góc α . Hãy xác định:

- Vectơ mômen động lượng \vec{l}_C của đĩa đối với điểm C trong hệ toạ độ động Cxyz gắn với đĩa và hệ toạ độ cố định $Cx_1y_1z_1$.
- Góc γ giữa \vec{l}_C và trục z_1 khi $\alpha = 10^\circ$.
- Động năng T của đĩa.

Đáp số: $\vec{\omega} = \Omega \vec{k}_1 = \Omega (\cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j})$



Hình bài 17-1

$$\vec{l}_c = J_x \vec{\omega}_x + J_y \vec{\omega}_y + J_z \vec{\omega}_z = -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{l}_c = -\frac{1}{8} mr^2 \Omega [(\sin 2\alpha) \vec{j}_1 - 2(1 + \cos^2 \alpha) \vec{k}_1], \gamma = 4,96^\circ$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_c = \frac{1}{8} mr^2 (\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) \Omega^2.$$

Trong đó ta sử dụng các vectơ đơn vị $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - Cxyz)$, $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1 - Cx_1y_1z_1)$.

17-2. Cho một khối trụ tròn đồng chất khối lượng m , bán kính R , chiều dài h . Hãy tính các thành phần của ma trận quán tính khối đối với hệ trục tọa độ $Cxyz$, với C là khối tâm, trục z nghiêng với trục đối xứng z_0 một góc α . Trụ này quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc Ω , hãy xác định:

- Vectơ mômen động lượng \vec{l}_c của vật đối với C .
- Tính động năng từ đó suy ra mômen quán tính khối của vật đối với trục quay.

Đáp số:

$$\begin{aligned} \vec{l}_c &= \frac{1}{8} m(r^2 - \frac{1}{3} h^2) \Omega \sin 2\alpha \vec{j}_1 \\ &\quad + \frac{1}{4} m[(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \sin^2 \alpha + 2r^2 \cos^2 \alpha] \Omega \vec{k}_1, \end{aligned}$$

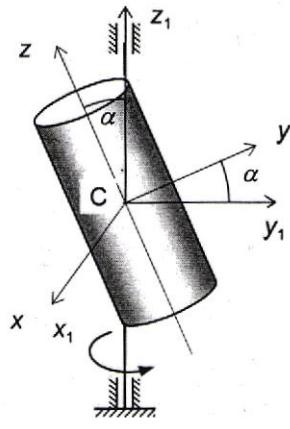
$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} m[(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \sin^2 \alpha + 2r^2 \cos^2 \alpha] \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{z_1} \Omega^2.$$

17-3. Đĩa đồng chất khối lượng $m = 800\text{g}$, bán kính $r = 100\text{mm}$ quay riêng quanh trục AB với vận tốc góc không đổi $\omega_2 = 20\text{ rad/s}$. Thanh BO gắn cứng vuông góc với AB và vuông góc với với trục nằm ngang DE , trục này quay đều với vận tốc góc $\omega_1 = 10\text{ rad/s}$. Biết $AB = a = 4\text{cm}$, $BO = b = 10\text{cm}$, $DO = OE = 18\text{cm}$. Hãy xác định vectơ mômen động lượng \vec{l}_o của đĩa đối với điểm O trong hệ gắn liền trục CD với các vectơ đơn vị $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Đáp số: $\vec{l}_o = 112,8 \vec{j} + 80 \vec{k} \text{ gm}^2/\text{s}$.

17-4. Cho một đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính R (bề dày không đáng kể), tâm C . Hãy tính các thành phần của ma trận quán tính khối đối với hệ trục tọa độ $Oxyz$, biết $OC = e$, trục z nghiêng với trục z_0 (vuông góc với đĩa) một góc α . Đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc Ω .

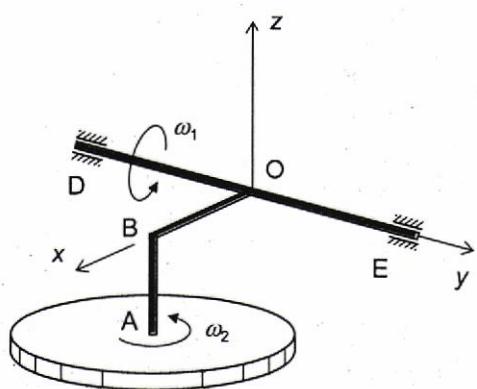
- Tính vectơ mômen động lượng \vec{l}_o của vật đối với gốc tọa độ O , biểu diễn trên hệ $Oxyz$ gắn liền vật, ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ là các vectơ đơn vị).
- Tính động năng T , từ đó suy ra mômen quán tính khối của vật đối với trục quay.



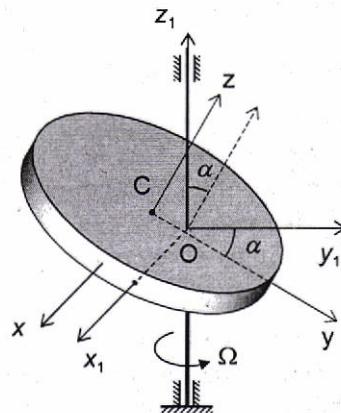
Hình bài 17-2

Đáp số: $\vec{l}_o = -\frac{1}{4}mr^2\Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2}m(r^2 + 2e^2)\Omega \cos \alpha \vec{k}$,

$$T = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}mr^2 \sin^2 \alpha + m(r^2 + 2e^2) \cos^2 \alpha]\Omega^2 = \frac{1}{2}J_{z_1}\Omega^2.$$



Hình bài 17-3



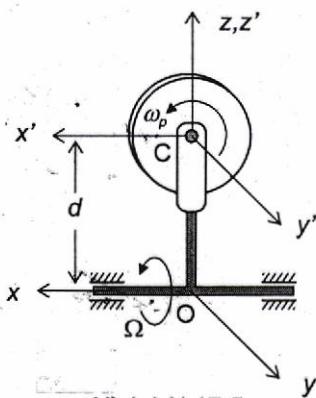
Hình bài 17-4

17-5. Đĩa có khối lượng $m = 2,72\text{kg}$, bán kính $r = 10,2\text{cm}$, quay riêng quanh trục qua tâm C với vận tốc góc $\omega_p = 40\pi \text{ rad/s}$. Tay quay OC = $d = 25,4\text{cm}$ quay quanh trục x với vận tốc góc $\Omega = 10\pi \text{ rad/s}$. Hãy xác định:

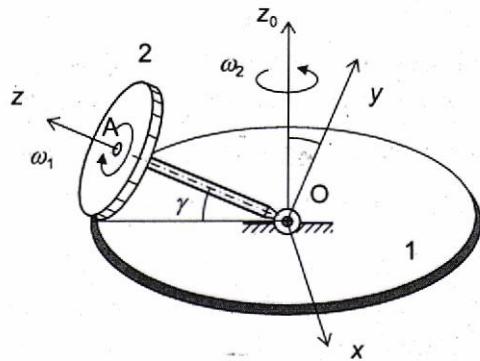
- Véc-tơ mô-men động lượng của đĩa đối với điểm C và động năng của đĩa.
- Véc-tơ mô-men động lượng của đĩa đối với điểm O.

Đáp số: $\vec{l}_C = 0,221\vec{i} + 1,768\vec{j} \text{ kgm}^2/\text{s}; T = 200,8 \text{ J}$;

$$\vec{l}_O = 5,735\vec{i} + 1,768\vec{j} \text{ kgm}^2/\text{s}.$$



Hình bài 17-5



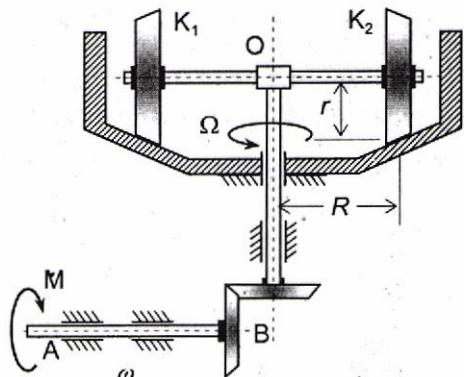
Hình bài 17-6

17-6. Đĩa tròn 2 đồng chất khối lượng m , bán kính r được lắp cứng vào trục OA, trục này có liên kết cầu tại O. Khi OA quay quanh trục z_1 thẳng đứng, đĩa 2 lăn không trượt theo vành của đĩa 1 cố định, bán kính R . Đĩa 2 lăn hết chu vi đĩa 1

trong thời gian τ . Xác định vécctor mômen động lượng của đĩa 2 đối với điểm O trong hệ toạ độ Oxyz.

$$\text{Đáp số: } \vec{l}_O = \frac{2\pi mr^2}{\tau} \left[\left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{4} \right) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \hat{j} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r} \right) \hat{k} \right].$$

17-7. Các thớt K_1 và K_2 của máy nghiền được động cơ kéo chuyển động nhờ một hệ thống truyền động như hình vẽ. Khối lượng của máy nghiền là $m = 3$ tấn, được xem là những đĩa tròn đồng chất có bán kính trung bình là $r = 0,5$ m và có bán kính tay quay là $R = 1$ m. Xem như trục quay tức thời của thớt qua tiếp điểm C giữa đường nón trung bình của đĩa với mặt nón cố định. Tỷ số truyền giữa trục động cơ và trục thẳng đứng của máy nghiền là $3/2$. Bỏ qua khối lượng của các chi tiết khác và ma sát.

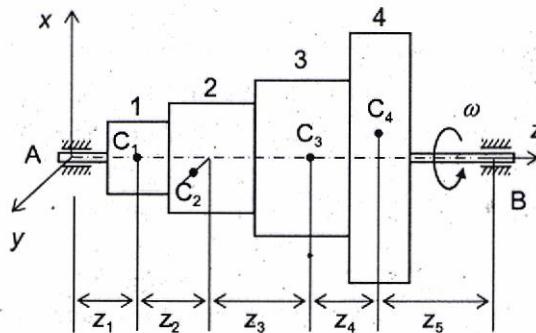


Hình bài 17-7

- Tính động năng hệ khi trục AB quay với tốc độ ω .
- Tính mômen không đổi của ngẫu lực M cần tác dụng ở trục động cơ phát động máy nghiền sao cho sau $t_1 = 10$ giây nó đạt được tốc độ góc $n = 120$ vđ/ph từ trạng thái tĩnh.

$$\text{Đáp số: } T = \frac{1}{2} m [3R^2 + \frac{1}{2} r^2] \Omega^2 \text{ với } \Omega = \frac{2}{3} \omega, \quad M = 3136 \text{ Nm.}$$

Phản lực động lực tại ổ trục



Hình bài 17-8

17-8. Rôto có 4 tầng hình trụ. Khối lượng của trục quay mang rôto $m_0 = 1300$ kg. Khối lượng các tầng lần lượt là $m_1 = 900$ kg; $m_2 = 1300$ kg; $m_3 = 500$ kg; $m_4 = 1000$ kg. Tầng 2 và tầng 4 bị lắp lệch tâm: khối tâm C_2 trong mặt phẳng (y, z), khối tâm C_4

trong mặt phẳng (x, z); các độ lệch tâm $e_2 = e_4 = 0,1\text{cm}$. Các khoảng cách: $z_1 = 70\text{cm}$; $z_2 = 80\text{cm}$; $z_3 = 110\text{cm}$; $z_4 = 75\text{cm}$; $z_5 = 125\text{cm}$. Xác định áp lực động lên hai ống đỡ khi rôto quay đều với vận tốc góc $n = 3000\text{vg/ph}$. Hệ xyz gắn liền trục quay.

Đáp số: $X_A^d = 86,3\text{kN}$, $Y_A^d = 26,8\text{kN}$, $X_B^d = 41,8\text{kN}$, $Y_B^d = 71,9\text{kN}$.

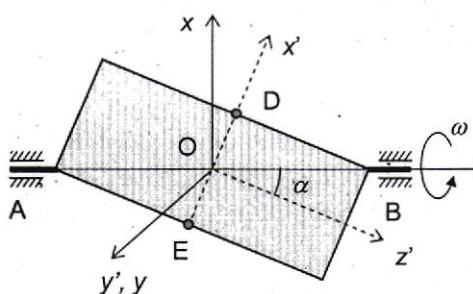
17-9. Tấm đồng chất hình chữ nhật có các cạnh dài là a và cạnh ngắn là b , khối lượng m , quay đều quanh đường chéo AB với vận tốc góc ω .

a) Xác định áp lực động lên hai ống đỡ A, B.

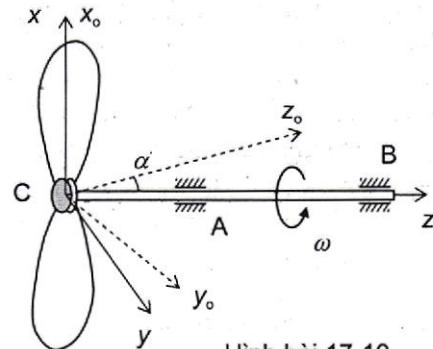
b) Để làm triệt tiêu các phản lực động phụ tại ống trục, người ta gắn hai khối lượng cùng là m_1 vào điểm D và E, hãy xác định m_1 .

Đáp số:

a) $X_A^d = 0$; $Y_A^d = -\frac{mab(a^2 - b^2)\omega^2}{12(a^2 + b^2)^{3/2}}$; $X_B^d = 0$; $Y_B^d = -Y_A^d$; b) $m_1 = \frac{2(J_{z'} - J_{x'})}{b^2}$



Hình bài 17-9



Hình bài 17-10

17-10. Một cái quạt có hai cánh, khối lượng mỗi cánh được coi như phân bố đều trên trục đối xứng dọc cánh (Cx_o), $J_{xo} \approx 0$, quay đều quanh trục ngang qua khói tâm C với tốc độ $n = 3000\text{vg/ph}$. Do lắp ráp không tốt, trục đối xứng vuông góc mặt phẳng của cánh quạt lệch với trục quay một góc $\alpha = 0,015\text{rad}$ (góc giữa z và z_o). Quạt có khối lượng 15 kg và mômen quán tính đối với trục đối xứng z_o là $J_{zo} = 4,9\text{kgm}^2$. Xác định áp lực tĩnh và động lên các ống đỡ. Biết CA = 15cm, AB = 25cm.

Đáp số: $N_B^t = \frac{3}{5}P$, $N_A^t = \frac{8}{5}P$, $N_A^d = N_B^d \approx \frac{J_{zo}\alpha\omega^2}{AB}$.

17-11. Đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng m được gắn cứng với trục nằm ngang AB di qua khói tâm O. Đĩa quay đều với ω quanh trục AB. Trục đối xứng z (vuông góc với đĩa) nghiêng với trục quay AB một góc α . Cho các khoảng cách AO = OB = h . Tính phản lực động lực tại các ống trục A và B.

Đáp số: $Y_A^d = Y_B^d = \frac{M_O^{qt}}{AB} = \frac{mr^2\omega^2 \sin 2\alpha}{16h}$.

Chương 18

VA CHẠM GIỮA CÁC VẬT RẮN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Các định nghĩa

Va chạm của các vật rắn là sự tiếp xúc bất thình lình của các vật rắn, gây nên sự thay đổi vận tốc các điểm và vận tốc góc của các vật rắn một lượng hữu hạn trong một khoảng thời gian rất bé.

Ký hiệu:

\vec{v}_1 và \vec{v}_2 vận tốc của hai điểm P_1 và P_2 tại điểm tiếp xúc trước va chạm.

v_{1x} và v_{2x} hình chiếu vận tốc của hai điểm P_1 và P_2 tại điểm tiếp xúc trước va chạm trên đường va chạm x .

\vec{v}'_1 và \vec{v}'_2 vận tốc của hai điểm P_1 và P_2 tại điểm tiếp xúc sau va chạm.

v'_{1x} và v'_{2x} hình chiếu vận tốc của hai điểm P_1 và P_2 tại điểm tiếp xúc sau va chạm trên đường va chạm x .

R_x và R_y hai thành phần hình chiếu của lực va chạm \vec{R} .

t_1, t_2 thời điểm bắt đầu và kết thúc va chạm, thời gian va chạm.

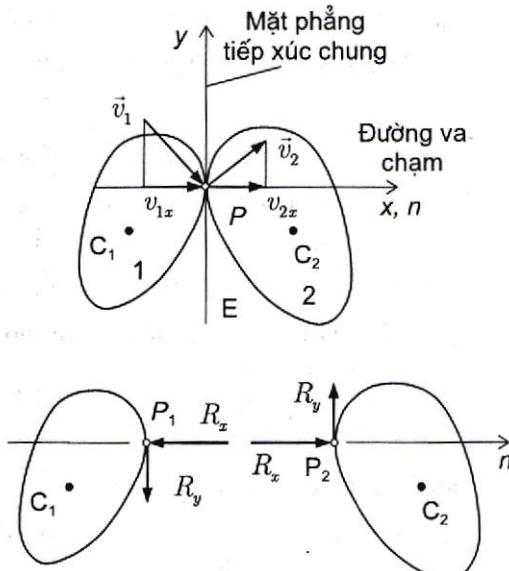
$$\tau = t_2 - t_1.$$

Xung lực va chạm và hình chiếu của nó trên đường va chạm.

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R}(t) dt, \quad S_n = \int_{t_1}^{t_2} R_n(t) dt. \quad (18.1)$$

Các giả thiết gần đúng:

- Thời gian va chạm $\Delta t = t_2 - t_1$ rất bé.
- Trong quá trình va chạm vị trí của các vật va nhau coi như không đổi.
- Các lực va chạm lớn tới mức có thể bỏ qua tác dụng của các lực thông thường (trọng lượng, sức đẩy của gió, lực cản không khí, ...) trong thời gian va chạm.



Định luật Newton về va chạm

$$e = -\frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{2n} - v_{1n}} \quad (18.2)$$

Định luật Poisson về va chạm

$$\bar{e} = \frac{S_{2n}}{S_{1n}} \quad (18.3)$$

với $S_{1n} = \int_1^c R_n(t)dt$, $S_{2n} = \int_c^2 R_n(t)dt$ là hình chiếu xung lực va chạm trong giai đoạn biến dạng và giai đoạn khôi phục trên đường va chạm.

Phân loại va chạm căn cứ vào hằng số va chạm e , $0 \leq e \leq 1$.

$e = 0$: va chạm mềm, không có giai đoạn khôi phục;

$0 < e < 1$: va chạm đàn hồi;

$e = 1$: va chạm tuyệt đối đàn hồi, (không hao tổn năng lượng).

Các định lý biến thiên động lượng và mômen động lượng trong va chạm

Định lý biến thiên động lượng:

$$\vec{p}(\tau) - \vec{p}(0) = \Sigma \vec{S}_k^e \quad (18.4)$$

Định lý biến thiên mômen động lượng

$$\vec{l}_O(\tau) - \vec{l}_O(0) = \Sigma \vec{m}_O(\vec{S}_k^e), \text{ (O cố định hoặc O trùng khớp tâm vật).}$$

$$\vec{l}_z(\tau) - \vec{l}_z(0) = \sum \vec{m}_z(\vec{S}_k^e), \text{ (trục z cố định).} \quad (18.5)$$

Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật tịnh tiến

– Định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu trong pha biến dạng:

$$\text{vật } m_1 : m_1 u - m_2 v_1 = -S_1 \quad (18.6)$$

$$\text{vật } m_2 : m_2 u - m_2 v_2 = S_1 \quad (18.7)$$

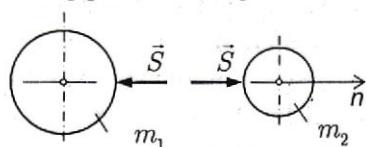
– Định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu trong pha khôi phục

$$\text{vật } m_1 : m_1 u_1 - m_1 u = -S_2 \quad (18.8)$$

$$\text{vật } m_2 : m_2 u_2 - m_2 u = S_2 \quad (18.9)$$

– Định luật Poisson về va chạm

$$e = S_2 / S_1 \quad (18.10)$$



Từ các phương trình trên ta suy ra các công thức sau:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \quad S_2 = e \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$u_1 = v_1 - (1 + e) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \quad u_2 = v_2 + (1 + e) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

Lượng mất động năng qua va chạm:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - v_2'^2) = \frac{1 - e^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

Va chạm xiên của hai vật chuyển động tịnh tiến

Phân tích các vận tốc thành hai thành phần vuông góc: pháp tuyến n và tiệp tuyến t . Thành phần tiếp tuyến của vận tốc không đổi qua va chạm:

$$v_1^t = u_1^t; v_2^t = u_2^t$$

Bảo toàn động lượng của 2 vật theo phương pháp tuyến:

$$m_1 v_1^n + m_2 v_2^n = m_1 u_1^n + m_2 u_2^n$$

Hệ số hồi phục:

$$e = -\frac{u_2^n - u_1^n}{v_2^n - v_1^n} \quad (18.11)$$

Va chạm vào vật quay quanh trục cố định

Định lý biến thiên động lượng:

$$mu_C - mv_C = S \sin \alpha + S_{Ox}$$

$$0 = S \cos \alpha + S_{Oy} \quad (18.12)$$

Định lý mômen động lượng đối với trục quay O:

$$J_O(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) = Sd \cos \alpha$$

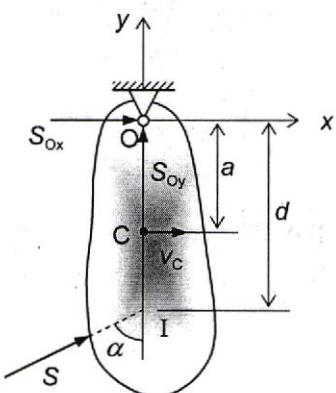
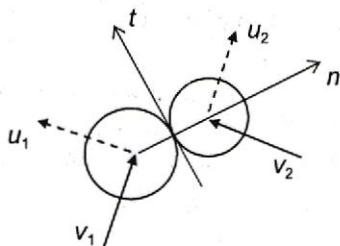
Quan hệ động học: $u_C = a\omega$, $v_C = a\omega_0$

Khi giải các phương trình, ta nhận được ω, S_{Ox}, S_{Oy} .

Điều kiện để triệt tiêu xung lực va chạm tại ổ trục :

$$\alpha = \frac{1}{2}\pi; \quad d = J_O / (ma) \quad (18.13)$$

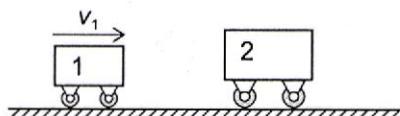
trong đó: J_O – mômen quán tính khối của vật đối với trục O; a – khoảng cách từ trục O đến khối tâm C; d – khoảng cách từ trục O đến tâm va chạm I.



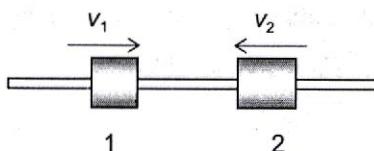
II. BÀI TẬP

18-1. Xe 1 khối lượng $m_1 = 2000\text{kg}$ chuyển động với vận tốc $v_1 = 0,5\text{m/s}$ va chạm vào xe 2 có khối lượng $m_2 = 3500\text{kg}$ đứng yên. Sau va chạm, xe 2 chuyển động sang phải với vận tốc $0,3\text{m/s}$. Xác định hệ số hồi phục của hai xe.

Đáp số: $k = 0,65$.



Hình bài 18-1



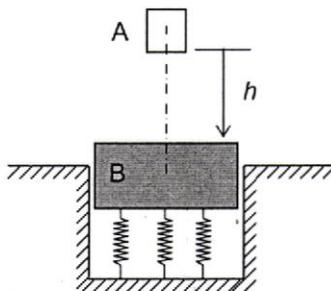
Hình bài 18-2

18-2. Con trượt 1 có khối lượng $m_1 = 2\text{kg}$ chuyển động sang phải với vận tốc 3m/s . Con trượt 2 có khối lượng $m_2 = 3\text{kg}$ chuyển động sang trái với vận tốc 5 m/s . Sau va chạm, con trượt 1 chuyển động sang trái với vận tốc $5,4\text{m/s}$. Xác định vận tốc con trượt 2 ngay sau va chạm và hệ số hồi phục giữa hai con trượt.

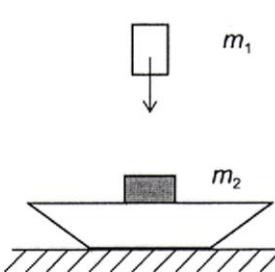
Đáp số: $0,6\text{m/s} \rightarrow k = 0,75$.

18-3. Từ trên cao $h = 4,905\text{m}$ búa A rơi xuống mặt đe B đặt trên lò xo gắn chát vào đe và vào nền. Búa A có khối lượng 10kg , đe B có khối lượng 90kg . Cho biết va chạm hoàn toàn mềm. Tìm vận tốc chung của búa và đe sau lúc va chạm.

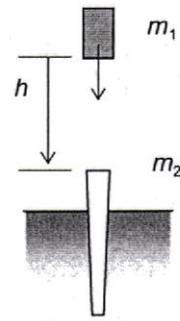
Đáp số: $u = 0,98\text{m/s}$.



Hình bài 18-3



Hình bài 18-4/5



Hình bài 18-6

18-4. Đầu búa có khối lượng $m_1 = 0,8\text{ kg}$ đập vào vật với vận tốc $v_1 = 6\text{ m/s}$, coi va chạm là mềm. Tính xung lực va chạm S và lượng động năng tiêu hao ΔT làm biến dạng vật trong hai trường hợp: a) Khối lượng vật và đe là $m_2 = 4\text{kg}$; b) Khối lượng vật và đe là $m_2 = \infty$ (do đe gắn trên nền cứng).

Đáp số: a) $S = 4,0\text{Ns}$; $\Delta T = 12,00\text{J}$; b) $S = 4,8\text{Ns}$; $\Delta T = 14,40\text{J}$.

18-5. Một búa hơi có khối lượng $m_1 = 12$ tấn đập vào mặt đe với tốc độ $v_1 = 5\text{m/s}$. Khối lượng của đe cùng với khối lượng của vật rèn là $m_2 = 250$ tấn. Va chạm được xem là hoàn toàn mềm. Tính lượng động năng làm biến dạng vật và hiệu suất rèn.

Đáp số: $\Delta T = 143,13 \times 10^3 \text{ Nm}$; $\eta = 0,954$.

18-6. Để gia cố móng nhà người ta đóng cọc xuống đất. Búa có khối lượng $m_1 = 450\text{kg}$, rơi không vận tốc đầu từ độ cao 2 m xuống đầu cọc. Cọc có khối lượng $m_2 = 50\text{kg}$, cứ sau 10 lần chịu đập lại ngập sâu xuống một đoạn $\delta = 5\text{cm}$. Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc. Xem va chạm là va chạm mềm.

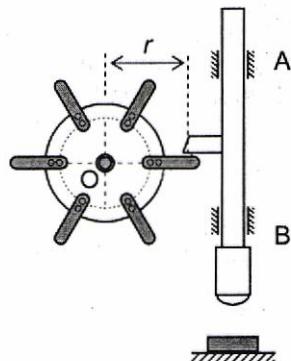
Đáp số: $F_b = 158,92 \text{ kN}$.

18-7. Ghép vào trục quay một vò lăng có mang những tay gạt để truyền chuyển động sang một cái chày. Giả thiết va chạm giữa tay gạt và chày là hoàn toàn mềm. Cho biết trước lúc va chạm chày đứng yên và trục quay với vận tốc góc $\omega_0 = 2\pi \text{rad/s}$ thời gian va chạm là $\tau = 0,05\text{s}$, mômen quán tính của trục quay với vò lăng đối với trục hình học của nó là $J = 49\text{kgm}^2$. Chày có khối lượng $m = 25\text{kg}$, khoảng cách từ điểm va chạm đến trục quay O là $r = 20\text{cm}$. Bỏ qua ma sát. Hãy xác định:

- Vận tốc góc của vò lăng và vận tốc chày ngang sau khi va chạm;
- Lực va chạm trung bình giữa tay gạt và chày.

Đáp số: a) $\omega = 6,15\text{s}^{-1}$; $u = 1,23\text{m/s}$;

b) $F_b = 6,15 \text{ N}$.

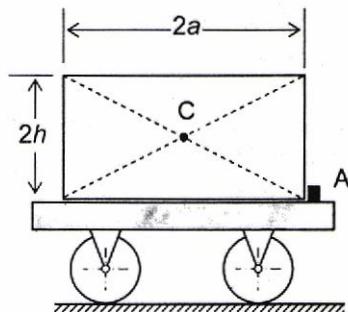


Hình bài 18-7

18-8. Một cái sàn xe chở một vật nặng hình hộp chữ nhật đồng chất như trên hình vẽ. Sàn xe đang chạy thẳng với vận tốc v . Trên sàn có mấu A để cản không cho khối nặng trượt về phía trước. Chiều cao của khối là $2h$ và chiều dài của nó là $2a$. Tìm vận tốc góc của khối hộp khi xe bị hãm đứng lại tức thì và vận tốc giới hạn của sàn xe ứng với trường hợp khối hộp bị lật nhào quanh mép A.

Đáp số:

$$\omega^2 = \frac{6g(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{4(a^2 + h^2)}, v \leq v_{th} = \sqrt{\frac{13}{6h^2} g(a^2 + h^2)(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}.$$



Hình bài 18-8

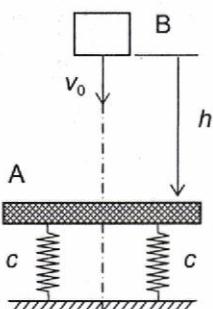
18-9. Tấm A trọng lượng Q được gắn cứng vào hai lò xo có độ cứng c . Vật B trọng lượng P ở độ cao h so với vị trí cân bằng tĩnh của tấm A được thả rơi tự do với vận tốc ban đầu v_0 xuống và chạm vào tấm A. Giả thiết va chạm là hoàn toàn mềm. Tính độ nén lớn nhất của lò xo sau va chạm.

Đáp số: $s = \frac{P}{c} + \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h \frac{P^2}{c(P+Q)}}$.

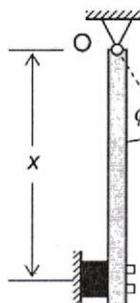
18-10. Thiết bị dùng để xác định hệ số khôi phục của vật liệu bằng thực nghiệm, gồm một thanh quay được trong mặt phẳng thẳng đứng quanh trục nằm ngang qua O. Cách O một đoạn x nào đó người ta gắn lên thanh mẫu cần thử. Thả cho thanh không vận tốc đâu từ vị trí nằm ngang, thanh quay quanh O và khi đến vị trí thẳng đứng thì mẫu thử đập vào mẫu cố định cùng được chế tạo bằng cùng một vật liệu như mẫu nói trên. Chiều dài của thanh bằng l .

Xác định hệ số khôi phục k nếu sau va chạm thanh bị bật lại một góc φ so với vị trí thẳng đứng và tìm khoảng cách x đặt mẫu thử so với trục quay O để khi va chạm không sinh ra phản lực va chạm tại O.

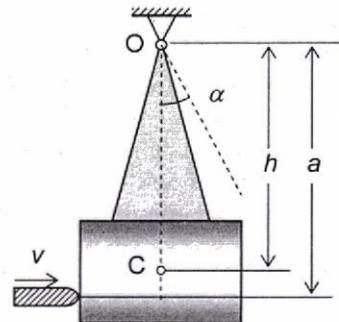
Đáp số: $k = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)$, $x = 2l/3$.



Hình bài 18-9



Hình bài 18-10



Hình bài 18-11

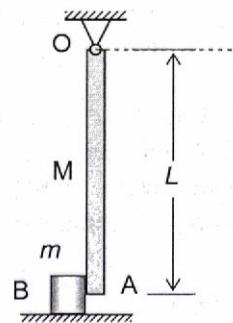
18-11. Một con lắc thử đạn gồm có trục AB được treo vào trục O nằm ngang. Khối trụ chứa dây cát. Viên đạn được bắn vào khối trụ, xuyên vào cát làm cho khối trụ quay quanh trục O một góc α nào đó so với đường thẳng đứng. Cho biết khối lượng của trụ là M , khoảng cách từ đường va chạm đến trục quay O bằng a . Giả thiết rằng trục O không chịu tác dụng của lực va chạm, nghĩa là $ah = \rho^2$. Khối lượng viên đạn bằng m . Tìm vận tốc của viên đạn theo góc lệch α của con lắc.

Đáp số: $v = \frac{2(Mh + ma)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$.

18-12. Một thanh đồng chất có khối lượng M và chiều dài L có thể quay quanh trục nằm ngang qua O vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Thanh rơi tự do từ vị trí nằm ngang. Tại vị trí thẳng đứng thanh đập vào một vật có khối lượng m làm cho vật chuyển động theo mặt phẳng ngang có hệ số ma sát trượt bằng f . Hãy xác định đoạn đường đi được của vật khi xem va chạm là hoàn toàn mềm. Kết quả thay đổi thế nào nếu hệ số khôi phục $e = 0,95$.

Đáp số: $s = \frac{3l}{2f} \frac{M^2}{(M + 3m)^2}$.

18-13. Quả cầu A có khối lượng $m_A = 2\text{kg}$, khoảng cách từ điểm treo tới tâm quả cầu là $L = 1,2\text{m}$. Quả cầu được thả rơi tự do từ vị trí OA nằm ngang, va chạm vào

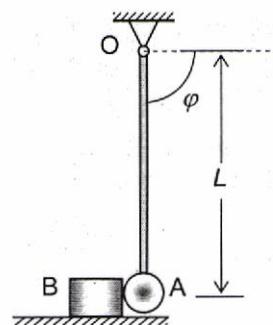


Hình bài 18-12

vật B có khối lượng $m_B = 2,5\text{kg}$ đang đứng yên trên nền ngang. Hệ số hồi phục giữa A và B là $k = 0,75$; hệ số ma sát trượt động giữa B và nền là $f_d = 0,25$. Khối lượng thanh treo không đáng kể. Xác định:

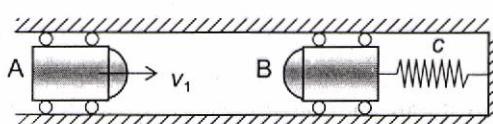
- Quãng đường s mà B di chuyển được cho tới khi dừng lại.
- Tỷ số động năng bị tiêu hao qua va chạm $\Delta T / T_0$.

Đáp số: a) $s = 2,90\text{m}$; b) $24,3\%$.



Hình bài 18-13

18-14. Khảo sát va chạm của cơ hệ gồm hai vật A và B, trong đó vật A có thể chuyển động tự do theo hướng ngang, còn vật B được gắn vào lò xo có hệ số cứng c . Giả sử rằng trước va chạm vật A có vận tốc $v_{10} > 0$ còn vật B có vận tốc $v_{20} = 0$. Tìm vận tốc của hai vật sau va chạm và thời điểm t_1 của hai vật lại va chạm vào nhau tiếp theo va chạm lần đầu. Cho biết khối lượng các vật tương ứng bằng m_1, m_2 , hệ số khôi phục bằng k .



Hình bài 18-14

$$\text{Đáp số: } v_A = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_{10}; \quad v_B = \frac{m_1 + m_2 k}{m_1 + m_2} v_{10},$$

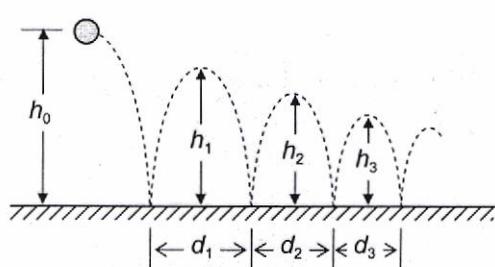
Khoảng thời gian t_1 được xác định từ phương trình: $\frac{\sin \omega t_1}{\omega t_1} = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}$,

trong đó $\omega = \sqrt{c / m_2}$.

18-15. Từ độ cao $h_0 = 36\text{ cm}$ một quả cầu nhỏ rơi xuống nền ngang nhún rồi nẩy lên như trên hình. Đo được độ cao $h_1 = 32\text{ cm}$. Hãy xác định: a) Hệ số khôi phục k ; b) Độ cao h_2 .

Đáp số: a) $k = \sqrt{h_1 / h_0} = 0,942$;

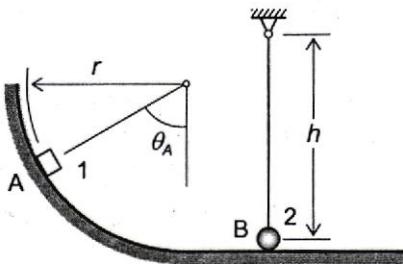
b) $h_2 = k^2 h_1 = 28,44\text{ cm}$.



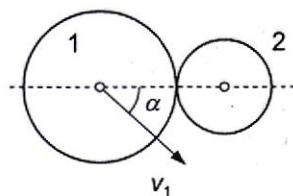
Hình bài 18-15

18-16. Vật nặng A có khối lượng $m_1 = 50$ g trượt không ma sát trong cung tròn bán kính $r = 4$ cm từ vị trí $\theta_A = 90^\circ$, sau đó va vào quả cầu nhỏ B khối lượng $m_2 = 80$ g đang treo vào dây dài $h = .6$ cm. Hệ số va chạm $k = 0,9$. Xác định: a) Vận tốc vật B sau va chạm; b) Lực căng lớn nhất của dây treo; c) Độ cao lớn nhất vật B sẽ đạt được.

Đáp số: a) $u_B = \frac{m_1 \sqrt{2gr}}{m_1 + m_2} (1 + k)$.



Hình bài 18-16



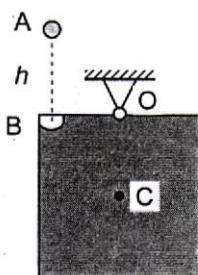
Hình bài 18-17

18-17. Quả cầu 1 có khối lượng m_1 chuyển động với vận tốc \vec{v}_1 và chạm xiên với quả cầu 2 đứng yên có khối lượng m_2 . Khi va chạm, vận tốc \vec{v}_1 tạo với đường nối hai tâm một góc α . Hãy xác định:

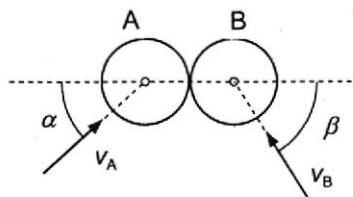
- Vận tốc của quả cầu 1 sau va chạm khi va chạm là mềm.
- Vận tốc của mỗi quả cầu khi va chạm đàn hồi với hệ số đàn hồi k .

Đáp số: a) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2 \alpha}$

b) $u_1 = v_1 \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2 \alpha}; \quad u_2 = v_1 \frac{m_1(1 + k) \cos \alpha}{m_1 + m_2}$.



Hình bài 18-18



Hình bài 18-19

18-18. Tấm gỗ đồng chất hình vuông, khối lượng $m_1 = 8\text{kg}$, cạnh $a = 500\text{mm}$ được treo bằng bản lề tại trung điểm O của cạnh. Khi tấm đang đứng yên, từ độ cao $h = 250\text{mm}$ quả cầu nhỏ A bằng kim loại khối lượng $m_2 = 2\text{kg}$ rơi tự do vào lỗ B ở góc tấm. Coi va chạm là mềm, hãy xác định vận tốc khối tâm C của tấm ngay sau va chạm.

Đáp số: $u_C = 242\text{mm/s}$, hướng sang phải.

18-19. Hai quả cầu như nhau va chạm xiên vào nhau. Trước va chạm quả cầu A có vận tốc $v_A = 30\text{ cm/s}$, góc $\alpha = 30^\circ$, quả cầu B có vận tốc $v_B = 40\text{ cm/s}$, góc $\beta = 60^\circ$. Hệ số hồi phục khi va chạm là $k = 0,90$. Xác định vận tốc quả cầu A sau va chạm và góc nghiêng của nó so với phương ngang.

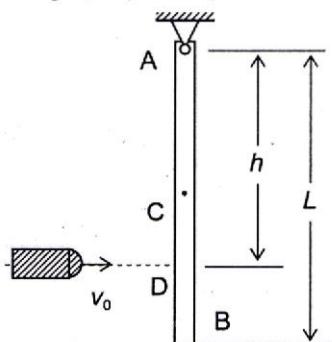
Đáp số: $u_A = 23,2\text{ cm/s}$; $\beta_A = 40,3^\circ$.

18-20. Thanh đồng chất AB chiều dài $L = 1,2\text{m}$ có khối lượng $m_2 = 8\text{kg}$ được treo bằng bản lề tại A. Viên đạn có khối lượng $m_1 = 2\text{kg}$ chuyển động với vận tốc nằm ngang $v_0 = 5\text{m/s}$ va chạm vào điểm D khi AB đang đứng yên. Hệ số hồi phục của AB và viên đạn là $k = 0,80$. Xác định:

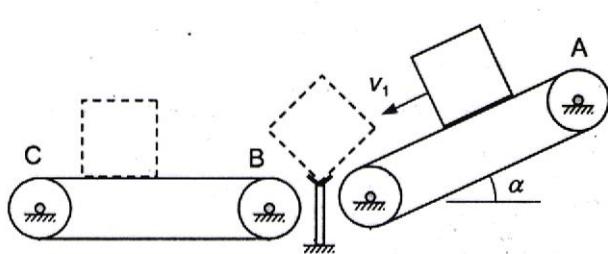
- Vận tốc góc của thanh và vận tốc viên đạn ngay sau va chạm.
- Xung lực va chạm tại bản lề A, khi nào xung lực tại A triệt tiêu.

Đáp số: Vận tốc góc $\omega = 3,21\text{rad/s}$ (ngược chiều kim đồng hồ), vận tốc sau va chạm $u_1 = 0,143\text{ m/s}$ hướng sang trái.

Xung lực tại A triệt tiêu khi $h = 2L / 3$.



Hình bài 18-20



Hình bài 18-21

18-21. Khối hộp vuông có khối lượng m , cạnh a , trượt theo băng nghiêng A với vận tốc v_1 , góc nghiêng $\alpha = 15^\circ$. Xác định giá trị nhỏ nhất của v_1 sao cho khi trượt đến cuối băng, hộp có thể lật quanh cạnh B của một giá cố định để chuyển sang băng C nằm ngang. Coi va chạm giữa hộp và B là mềm.

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất $v_1 = 0,712\sqrt{ga}$.

Chương 19

ĐỘNG LỰC HỌC CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Phương trình vi phân của chất điểm trong chuyển động tương đối

Dạng véctơ

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} \quad (19.1)$$

trong đó \vec{F} là lực tác dụng lên chất điểm; \vec{F}_e^{qt} , \vec{F}_c^{qt} là lực quán tính theo và lực quán tính Coriolis của chất điểm:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c$$

với $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$ là gia tốc Coriolis, $\vec{\omega}_e$ là véctơ vận tốc góc theo, \vec{v}_r là véctơ vận tốc tương đối.

Trong hệ tọa độ Decartes động:

$$m\ddot{x} = F_x + F_{ex}^{qt} + F_{cx}^{qt}, \quad m\ddot{y} = F_y + F_{ey}^{qt} + F_{cy}^{qt}, \quad m\ddot{z} = F_z + F_{ez}^{qt} + F_{cz}^{qt}.$$

Điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm

Do $\vec{a}_r = 0$ và $\vec{v}_r = 0$ nên điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm:

$$\vec{F} + \vec{F}_e^{qt} = 0 \quad (19.2)$$

Phương pháp động lượng

– Định lý biến thiên động lượng:

$$\frac{d\vec{p}^r}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_{ek}^{qt} + \sum \vec{F}_{ck}^{qt} \quad (19.3)$$

– Định lý biến thiên mômen động lượng:

$$\frac{d\vec{l}_O^r}{dt} = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_{ek}^{qt}) + \sum \vec{m}_O(\vec{F}_{ck}^{qt}) \quad (19.4)$$

Nếu hệ quy chiếu động chuyển động tịnh tiến và có gốc tọa độ trùng với khối tâm C của cơ hệ, thì:

$$\frac{d\vec{l}_C^r}{dt} = \sum \vec{m}_C (\vec{F}_k^e).$$

Phương pháp năng lượng

Định lý biến thiên động năng:

$$dT^r = \sum dA^r(\vec{F}_k) + \sum dA^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) + \sum dA^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) \quad (19.5)$$

Công của lực quán tính Coriolis :

$$dA^r(\vec{F}_c^{qt}) = \vec{F}_c^{qt} \cdot \vec{v}_r dt = -2m(\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r) \cdot \vec{v}_r dt = 0$$

Do đó từ (19.5) ta suy ra:

$$dT^r = \sum dA^r(\vec{F}_k) + \sum dA^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) \quad (19.6)$$

Phương trình Lagrange loại 2 trong hệ quy chiếu động

Phương trình Lagrange loại 2 của hệ hòlônhôm n bậc tự do

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_r}{\partial q_i} = Q_i^r(\vec{F}_k) + Q_i^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) + Q_i^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (19.7)$$

trong đó q_i là các tọa độ suy rộng, $Q_i^r(\vec{F}_k)$, $Q_i^r(\vec{F}_{ek}^{qt})$, $Q_i^r(\vec{F}_{ek}^{qt})$ là các lực suy rộng của các lực hoạt động, các lực quán tính theo và các lực quán tính Coriolis. T_r là động năng cơ hệ trong chuyển động tương đối.

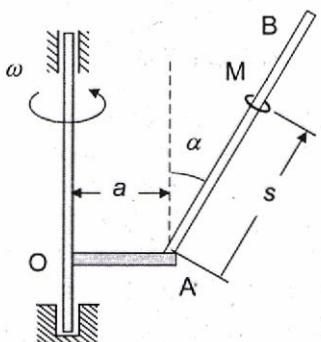
Khi cơ hệ cân bằng tương đối:

$$Q_i^r(\vec{F}_k) + Q_i^r(\vec{F}_{ek}^{qt}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (19.8)$$

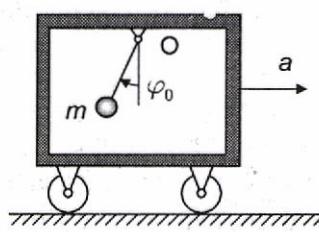
II. BÀI TẬP

19-1. Thanh nhẵn AB quay đều quanh trục thẳng đứng, tạo với trục quay một góc $\alpha = \text{const}$. Xác định giá trị lớn nhất của vận tốc góc để một vòng nhỏ M lồng trên thanh có thể cân bằng tương đối ở vị trí thấp nhất A. Cho biết khoảng cách a .

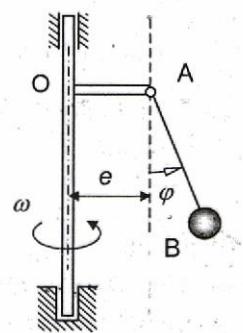
Đáp số: $\omega_{\max} = \sqrt{(g/a) \cot \alpha}$.



Hình bài 19-1



Hình bài 19-2



Hình bài 19-3

19-2. Một toa tàu chuyển động nhanh dần đều với gia tốc a trên đường thẳng ngang. Trong toa tàu có treo một con lắc, chiều dài dây treo là L . Tìm vị trí cân bằng tương đối của con lắc (góc φ_0) và chu kỳ dao động nhỏ của con lắc.

Đáp số: $\tan \varphi_0 = a / g$, $\omega^2 = (g \cos \varphi_0 + a \sin \varphi_0) / L$, $T = 2\pi / \omega$.

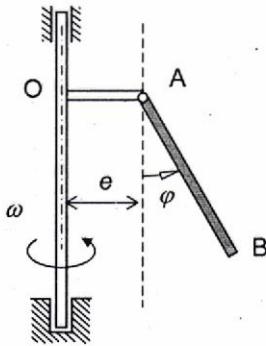
19-3. Khung OA quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω . Quả cầu nhỏ B được treo vào A bằng bản lề trụ trơn, trục bản lề vuông góc mặt phẳng khung. Thanh AB khối lượng không đáng kể, dài AB = l . Tìm vị trí cân bằng tương đối của con lắc (tại $\varphi = \varphi_0$) và tìm chu kỳ dao động nhỏ của con lắc đó.

Đáp số: $g \sin \varphi_0 - \omega^2(e + l \sin \varphi_0) \cos \varphi_0 = 0$

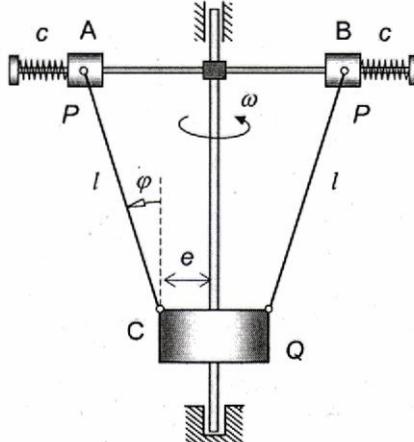
$$\omega^2 = [g \cos \varphi_0 + \omega^2(e \sin \varphi_0 - 2l \cos^2 \varphi_0 + l)] / l, T = 2\pi / \omega.$$

19-4. Khung OA quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω . Thành đồng chất AB dài l , khối lượng m được treo vào A bằng bản lề trụ trơn, trục bản lề vuông góc mặt phẳng khung. Tìm điều kiện cân bằng tương đối của con lắc (tại $\varphi = \varphi_0$).

Đáp số: $(2l \sin \varphi_0 + 3e)\omega^2 \cos \varphi_0 - 3g \sin \varphi_0 = 0$.



Hình bài 19-4



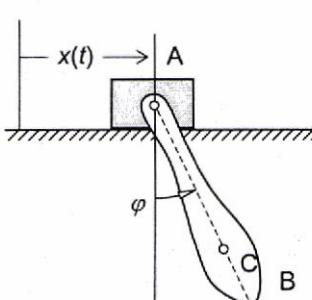
Hình bài 19-5

19-5. Một máy điều tiết ly tâm dùng lò xo gồm có hai vật nặng A và B, trọng lượng mỗi vật bằng P , có thể trượt trên các trục nhẵn nằm ngang gắn cứng vào trục quay của máy. Đối trọng C có trọng lượng Q được nối với các vật A và B bằng các thanh cứng và nhẹ có độ dài l . Khoảng cách từ bản lề nối thanh vào đối trọng C đến trục máy bằng e . Các lò xo có độ cứng c . Khi trục quay đều với vận tốc góc ω , góc nghiêng φ là hằng số. Cho biết khi thanh nghiêng với đường thẳng đứng một góc φ_0 thì lò xo không bị biến dạng. Tìm quan hệ giữa góc φ và vận tốc góc ω .

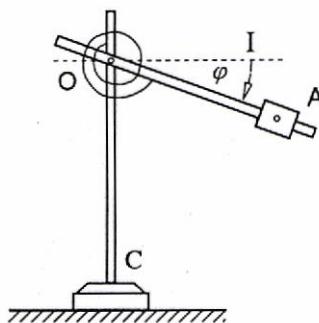
Đáp số: $\omega^2 = g \frac{Q \tan \varphi + 2cl^2(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{2P(e + l \sin \varphi)}$.

19-6. Con lắc AB treo vào khối A như trên hình vẽ sao cho con lắc chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Cho mômen quán tính khối của con lắc với trục quay A của nó là J . Khoảng cách từ A đến khối tâm C của con lắc là a và khối lượng của con lắc bằng m . Lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc đối với khối A khi khối này chuyển động dao động ngang theo quy luật $x = h \sin pt$. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát.

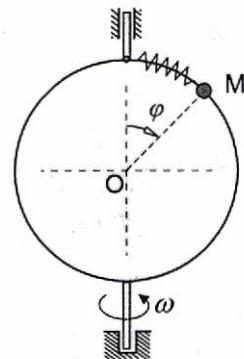
Đáp số: $J\ddot{\varphi} + mga\dot{\varphi} = mahp^2 \sin pt$.



Hình bài 19-6



Hình bài 19-7



Hình bài 19-8

19-7. Một máy ghi chấn thẳng đứng của nền móng có bộ phận chủ yếu được biểu diễn như trên hình vẽ. Đòn OA có khối lượng m , khối tâm C với OC = a , có mômen quán tính đối với trục O là J . Lò xo xoắn tác dụng lên đòn OA ngẫu lực xoắn có mômen $M = c\varphi$, trong đó φ là góc giữa OA và OI (I là mút tự do của lò xo xoắn khi lò xo không làm việc), c là hệ số cứng. Đặt máy ghi lên nền rung thẳng đứng theo quy luật $\xi = \xi(t)$. Bỏ qua các lực cản. Lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của đòn OA đối với giá mang nó (hay đối với nền móng) khi nền không rung thì OA cân bằng tĩnh ở vị trí nằm ngang.

Đáp số: $J\ddot{\varphi} + c\varphi = ma\xi(t)$.

19-8. Một vòng tròn nhẵn bán kính R quay quanh đường kính thẳng đứng của mình với vận tốc góc không đổi ω . Một vành khuyên khối lượng m lồng trên vành tròn và nối với điểm cố định O nhờ lò xo có độ cứng c . Độ dài của lò xo khi không biến dạng bằng $R\varphi_0$. Thiết lập phương trình chuyển động tương đối của khuyên trong chuyển động tương đối của nó dọc theo vành tròn.

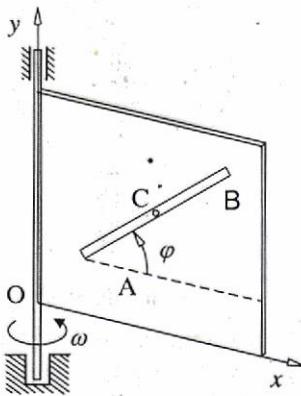
Đáp số: $mR\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}mRa\omega^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2}cR(\varphi - \varphi_0) - mg \sin \varphi = 0$.

19-9. Một thanh đồng chất có thể chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy, mặt phẳng này lại quay với vận tốc góc không đổi ω quanh trục thẳng đứng Oy. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của thanh đối với mặt phẳng quay. Hãy so sánh với trường hợp khi mặt phẳng quay với vận tốc góc ω biến đổi.

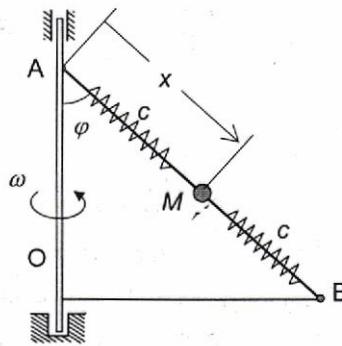
Đáp số: $\ddot{x}_C - \omega^2 x_C = 0; \quad \ddot{y}_C + g = 0; \quad 2\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin 2\varphi = 0$.

19-10. Một khuyên khối lượng m có thể trượt dọc theo một thanh nhẵn AB có chiều dài $2l$, hai đầu của thanh được hàn vào khung OAB vuông góc tại O, khung này quay quanh trục thẳng đứng OA với vận tốc góc không đổi ω . Khuyên được nối với hai điểm cố định A và B nhờ hai lò xo có cùng độ cứng c . Độ dài tự nhiên của mỗi lò xo là l . Biết góc nghiêng φ , hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của khuyên dọc thanh AB theo tọa độ x .

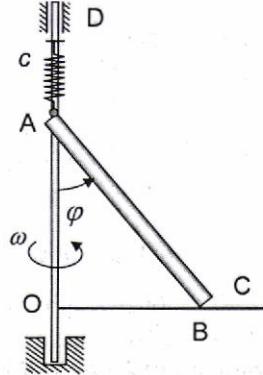
Đáp số : $\ddot{x} + x(2c/m - \omega^2 \sin^2 \varphi) = g \cos \varphi + l\omega^2 \sin^2 \varphi$.



Hình bài 19-9



Hình bài 19-10



Hình bài 19-11

19-11. Một thanh đồng chất AB, khối lượng m và chiều dài l , có thể trượt không ma sát theo các cạnh của khung DOC vuông góc tại O, OD thẳng đứng. Điểm A của thanh nối với điểm cố định D trên trục quay OD nhờ lò xo có độ cứng c . Khung DOC quay quanh trục OD với vận tốc góc không đổi ω . Thành lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng quay DOC. Cho biết khi $\varphi = \varphi_0$ lò xo không bị biến dạng.

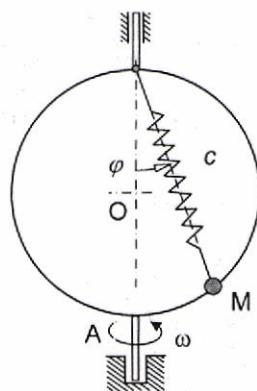
Đáp số: $ml\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}ml\omega^2 \sin 2\varphi - 3cl(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \sin \varphi - \frac{3}{2}mg \sin \varphi = 0$.

19-12. Một vành tròn nhẵn bán kính R quay với vận tốc góc ω không đổi quanh đường kính thẳng đứng của mình. Một khuyên khối lượng m nối với điểm cố định của vành nhờ lò xo có độ cứng c chiều dài l_0 . Thành lập phương trình vi phân của chuyển động tương đối của khuyên dọc vành tròn.

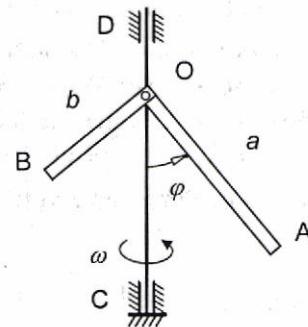
Đáp số : $4mR\ddot{\varphi} - m\omega^2 R \sin 4\varphi + 2mg \sin 2\varphi - 2c \sin \varphi (2R \cos \varphi - l_0) = 0$.

19-13. Thanh AOB đồng chất, AO vuông góc với OB, được lắp bằng bản lề có chốt ngang vào một trục quay thẳng đứng tại O. Cho OA = a , OB = b . Bỏ qua ma sát. Gọi góc lệch giữa OA và trục quay là φ , trục quay đều với vận tốc góc là ω . Thành lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh.

Đáp số : $(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}(a^2 \sin \varphi - b^2 \cos \varphi) - \frac{1}{2}\omega^2(b^3 - a^3) \sin 2\varphi = 0.$



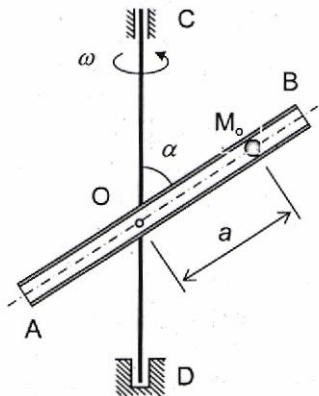
Hình bài 19-12



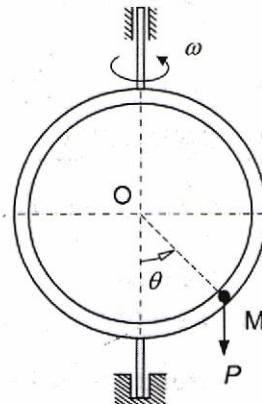
Hình bài 19-13

19-14. Ống AB quay với vận tốc góc ω không đổi quanh trụ thẳng đứng CD. Góc nghiêng của ống so với đường thẳng đứng là $\alpha = \text{const}$. Một quả cầu nhỏ (coi như chất điểm) khối lượng m có thể chuyển động không ma sát trong ống. Ban đầu quả cầu đứng yên so với ống tại vị trí M_0 cách O một đoạn a . Xác định điều kiện để điểm M đứng yên trên ống tại vị trí ban đầu M_0 .

Đáp số : $\omega^2 = g \cos \alpha / (a \sin^2 \alpha).$



Hình bài 19-14



Hình bài 19-15

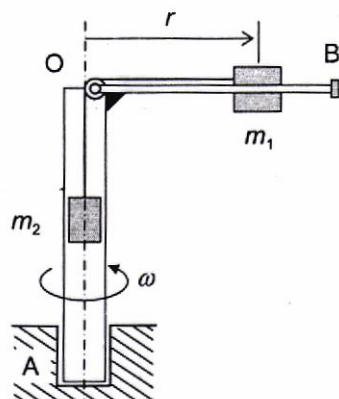
19-15. Vành tròn bán kính R quay với vận tốc góc ω không đổi quanh trục thẳng đứng CD, trùng với một đường kính của vòng. Trong vòng có một quả cầu nhỏ (chất điểm) chuyển động không ma sát. Hãy lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm trong ống.

Đáp số : $mR\ddot{\theta} + m(g - R\omega^2 \cos \theta) \sin \theta = 0$.

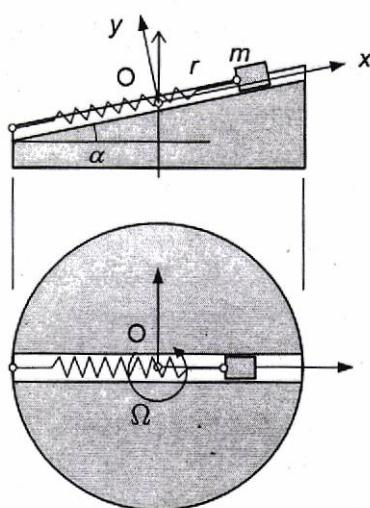
19-16. Hai khối lượng m_1 và m_2 được nối với nhau bằng dây mềm nhẹ không giãn. Khối lượng m_2 chuyển động thẳng đứng trong ống, còn m_1 trượt dọc theo OB nằm ngang. Khung AOB quay quanh trục đứng với vận tốc góc không đổi ω . Bỏ qua ma sát. Tìm luật chuyển động tương đối $r(t)$ của khối lượng m_1 , biết rằng ban đầu nó đứng yên ở vị trí $r = r_0$.

Đáp số :

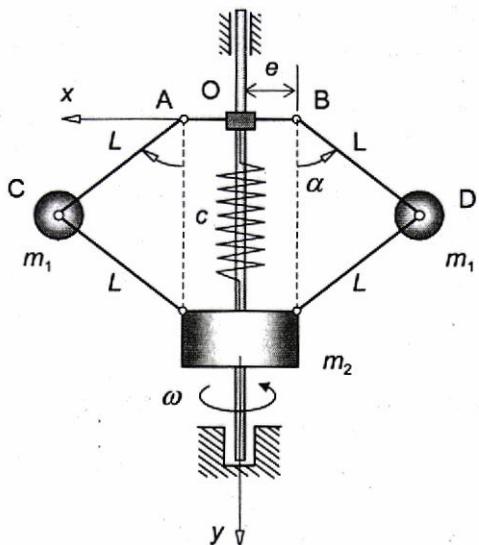
$$r(t) = [r_0 + \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}] \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) - \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}.$$



Hình bài 19-16



Hình bài 19-17



Hình bài 19-18

19-17. Một chất điểm khối lượng m , được gắn vào một lò xo độ cứng c , có thể chuyển động tương đối trong rãnh nghiêng của một đĩa tròn. Ở trạng thái cân bằng tĩnh, chất điểm có vị trí tại O. Đĩa quay đều quanh trục đứng với vận tốc góc Ω . Bỏ qua trọng lượng lò xo và ảnh hưởng của ma sát trong rãnh. Hãy thiết lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm.

Đáp số : $m\ddot{r} + [c - m\Omega^2 \cos^2 \alpha]r = 0$.

19-18. Trục máy điều tiết ly tâm quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω . Tim quan hệ giữa góc mở α và vận tốc góc ω . Cho biết độ cứng của lò xo là c và khi $\alpha = 0$ thì lò xo không biến dạng. Khối lượng của đỏi trọng là m_2 , khối lượng mỗi quả văng là m_1 , chiều dài bốn thanh như nhau và bằng L . Hai bản lề treo A và B cùng cách trục quay một đoạn là e . Bỏ qua ma sát, trọng lượng các thanh treo và trọng lượng của lò xo.

$$\text{Đáp số: } \omega^2 = \frac{[2cL(1 - \cos \alpha) + (m_1 + m_2)g]\tan \alpha}{m_1(e + L \sin \alpha)}$$

Chương 20

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Dao động tự do không cản

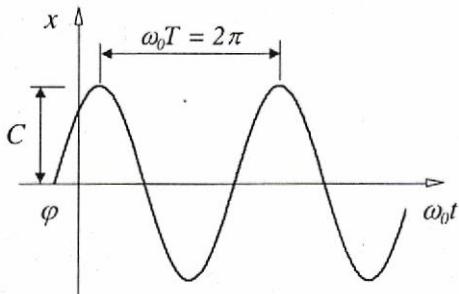
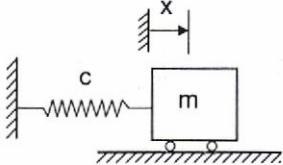
Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \text{ hoặc } \ddot{x} + \omega_o^2 x = 0, \omega_o^2 = c/m \quad (20.1)$$

Nghiệm tổng quát:

$$x(t) = A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t = C \sin(\omega_o t - \varphi) \quad (20.2)$$

với ω_o là tần số vòng; $f = \omega_o / 2\pi$ là tần số dao động; $T = 1/f = 2\pi/\omega_o$ là chu kỳ dao động; $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ là biên độ dao động; $\varphi = \arctan(B/A)$ là pha ban đầu.



Nhận xét: Các hằng số A, B, C và φ được xác định từ các điều kiện đầu:

$$x(0) = x_o, \dot{x}(0) = v_o: A = x_o, B = v_o / \omega_o, C = \sqrt{x_o^2 + (v_o / \omega_o)^2}.$$

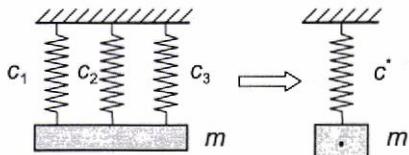
Hệ mô tả bởi phương trình trên còn được gọi là dao động điều hòa.

Nếu dao động không được tính từ vị trí cân bằng tĩnh thì phương trình vi phân chuyển động sẽ là $\ddot{x} + \omega_o^2 x = \omega_o^2 x_{st}$ và nghiệm là $x(t) = D \sin(\omega_o t - \psi) + x_{st}$.

Công thức tính độ cứng tương đương:

– Hệ lò xo mắc song song:

$$c^* = \sum c_i$$



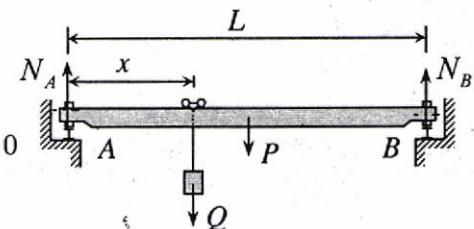
CHƯƠNG 1: CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN PHẲNG

1-1. Đặt lực và viết PTCB cho cầu trục

$$\sum F_{k_y} = N_A + N_B - P - Q = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -xQ - \frac{LP}{2} + LN_B = 0$$

Giải hệ phương trình tìm 2 ẩn số N_A và N_B



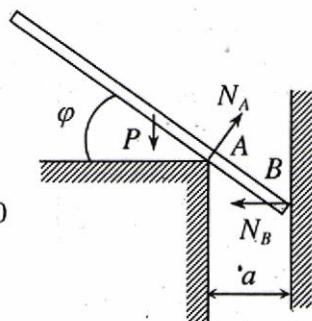
1-2. Đặt lực và viết PTCB cho thanh:

$$\sum F_{k_x} = N_A \sin \varphi - N_B = 0$$

$$\sum F_{k_y} = N_A \cos \varphi - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -N_B a \operatorname{tg} \varphi + Pa(2 \cos \varphi - 1) = 0$$

Giải hệ phương trình tìm 3 ẩn số N_A , N_B và φ .



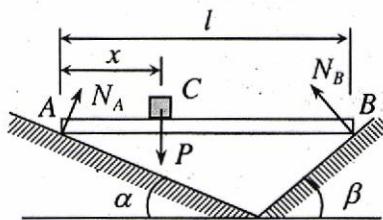
1-3. Đặt lực và viết PTCB cho hệ thanh - vật:

$$\sum F_{k_x} = N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0$$

$$\sum F_{k_y} = N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta - P = 0$$

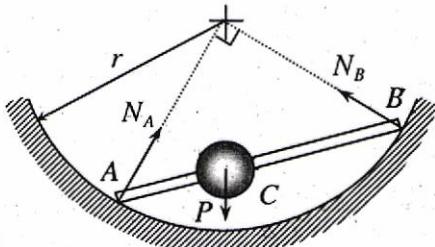
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -Px + N_B l \cos \beta = 0$$

Giải hệ phương trình tìm 3 ẩn số N_A , N_B và x



1-4. Đặt lực lên hệ thanh - vật rắn hình vẽ.

Viết 3 PTCB tìm các ẩn số: N_A , N_B và x



1-5. Đặt lực và viết PTCB cho thanh AB:

$$\sum F_{k_x} = N_B \sin 30 - T \cos 30 = 0$$

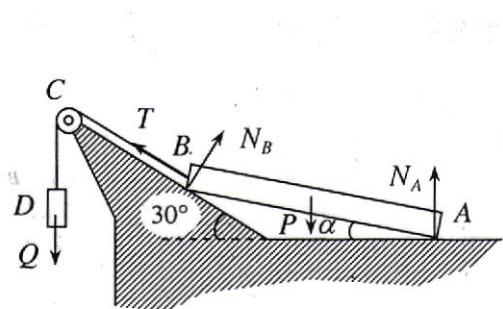
$$\sum F_{k_y} = N_B \cos 30 + T \sin 30 + N_A - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = N_A AB \cos \alpha - P \frac{AB}{2} \cos \alpha = 0$$

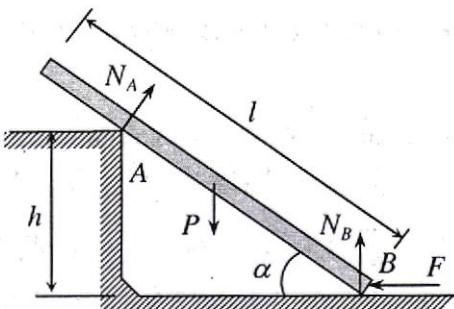
Với: $T = Q$

Giải hệ phương trình tìm 3 ẩn số N_A , N_B và Q .

1-6. Đặt lực lên thanh như hình vẽ. Viết 3 PTCB tìm các ẩn số: N_A , N_B và F .

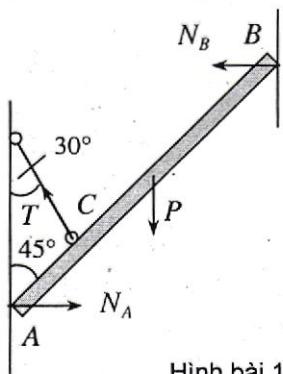


Hình bài 1-5

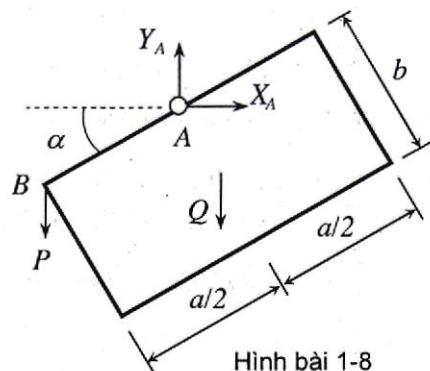


Hình bài 1-6

1-7. Đặt lực lên thanh như hình vẽ. Viết 3 PTCB tìm các ẩn số: N_A , N_B và T .



Hình bài 1-7



Hình bài 1-8

1-8. Đặt lực lên tấm và viết 3 PTCB:

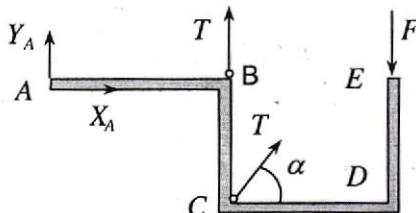
$$\sum F_{kx} = X_A = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P - Q = 0$$

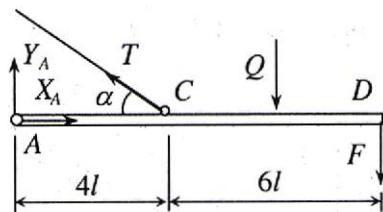
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = P \frac{a}{2} \cos \alpha - Q \frac{b}{2} \sin \alpha = 0$$

Giải hệ phương trình tìm quan hệ giữa a với b và phản lực X_A , Y_A .

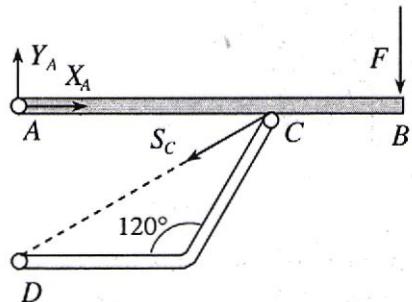
1-9. Đặt lực lên thanh như hình vẽ. Viết 3 PTCB tìm các ẩn số: X_A , Y_A và T



- 1-10.** Lực phân bố được đưa về một lực tập trung Q đặt tại trung điểm của đoạn CD . Các thành phần phản lực tại A và lực căng của dây như hình vẽ. Lập 3 PTCB cho thanh AB tìm 3 ẩn số X_A , Y_A và T .



- 1-11.** Phản lực liên kết tác dụng vào thanh AB gồm: thành phần phản lực tại A (bản lề) và thành phần phản lực tại C (liên kết thanh). Áp dụng định lý 3 lực đồng quy để vẽ phương và chiều phản lực tại A . Lập 3 PTCB cho thanh AB để tìm các thành phần phản lực X_A , Y_A và S_C .



- 1-12.** Lực phân bố được đưa về một lực tập trung Q đặt tại vị trí như hình vẽ.

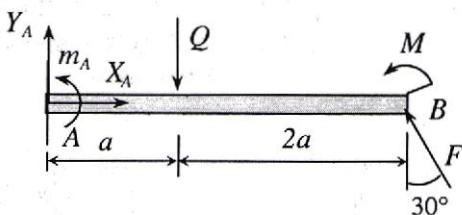
Phân tích phản lực tại ngầm A và viết hệ PTCB:

$$\sum F_{kx} = X_A - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - Q + F \cos 30^\circ = 0$$

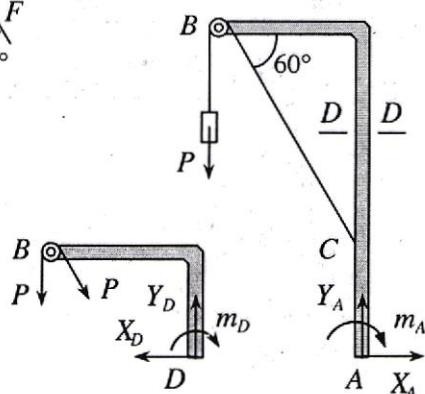
$$\sum \bar{m}_A (\bar{F}_k) = m_A - aQ + 3aF \cos 30^\circ + M = 0$$

với $Q = 1,5aq$. Giải hệ tìm 3 ẩn số: X_A , Y_A và m_A .

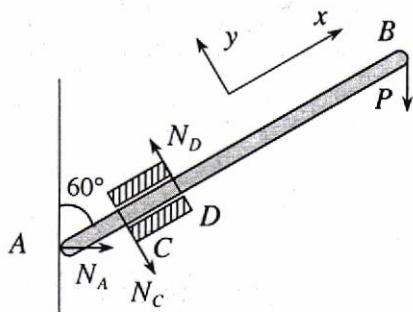


- 1-13.** Phân tích phản lực tại A . Viết 3 PTCB cho cả hệ để tìm 3 ẩn số: X_A , Y_A và m_A .

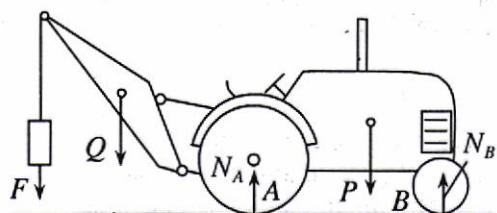
Để tìm nội lực tại D , tưởng tượng cắt khung tại D thành 2 phần và xét riêng phần khung BD (phản lực tại D phân tích giống như liên kết ngầm). Viết 3 PTCB cho phần khung này để tìm 3 thành phần phản lực X_D , Y_D và m_D .



1-14. Đặt lực lên hệ thanh - vật như hình vẽ. Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn số: N_A , N_C và N_D .



Hình bài 1-14

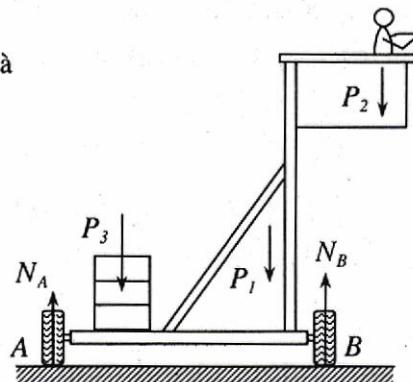


Hình bài 1-15

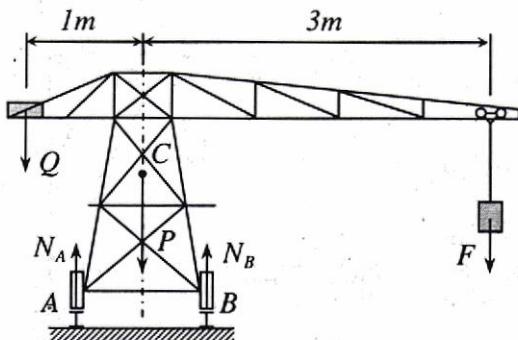
1-15. Phân tích phản lực liên kết tựa tại A, B và biểu diễn các thành phần trọng lực như hình vẽ. Lập 2 PTCB cho hệ lực song song tìm 2 ẩn số: N_A và N_B .

Điều kiện để bánh B không bị nhắc khỏi mặt đất là: $N_B \geq 0$.

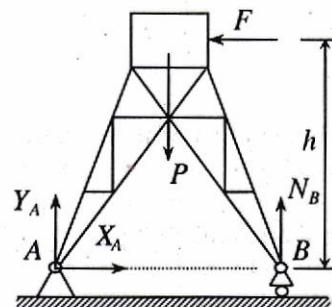
1-16, 1-17, 1-18. Đặt lực lên hệ như hình vẽ và giải tương tự bài 1-15.



Hình bài 1-16



Hình bài 1-17



Hình bài 1-18

1-19. Tách và đặt lực lên hai trụ như hình vẽ.

PTCB cho cần trụ O_1 : $(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = -N_A + N_B \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_B \sin 45^\circ - P = 0$$

Giải hệ tìm 2 ẩn số: N_A, N_B

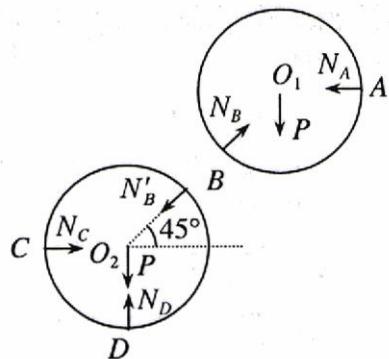
PTCB cho cần trụ O_2 : $(\vec{N}'_B, \vec{N}_C, \vec{N}_D, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = N_C - N'_B \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = -N'_B \sin 45^\circ + N_D - P = 0$$

Với: $N_B = N'_B$;

Giải hệ tìm 2 ẩn số: N_C, N_D



1-20. Tách riêng trụ C_1 :

$$(\vec{N}_1, \vec{N}, \vec{P}_1) \equiv 0$$

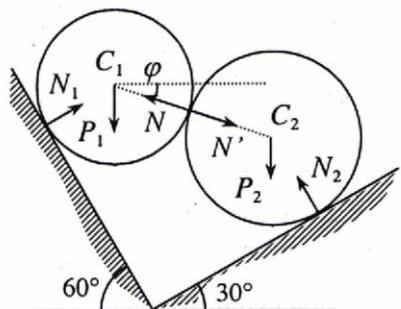
Lập PTCB: $\sum \bar{m}_{C_1} (\vec{F}_k) = 0$ (1)

Tách riêng trụ C_2 :

$$(\vec{N}_2, \vec{N}', \vec{P}_2) \equiv 0$$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_{C_2} (\vec{F}_k) = 0$ (2)

Giải hệ 2 PT tìm 2 ẩn số: N, φ .



1-21. Tách và đặt lực vào các vật như hình vẽ

PTCB cho cần AB : $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}, \vec{P}, \vec{Q}_1) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = X_C = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_C - T - Q_1 - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_C (\vec{F}_k) = \frac{aT}{2} - \frac{aQ_1}{4} - aP = 0$$

PTCB cho tháp CD : $(\vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{m}_D, \vec{Q}_2) \equiv 0$

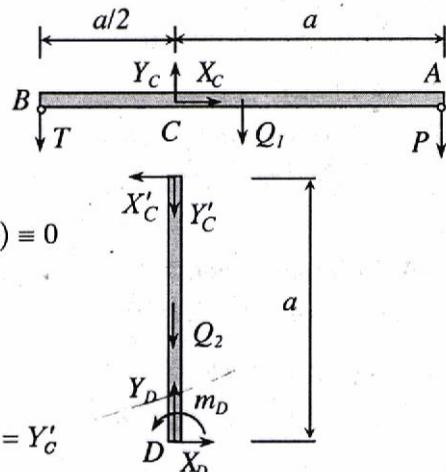
$$\sum F_{kx} = -X'_C + X_D = 0$$

$$\sum F_{ky} = -Y'_C + Y_D - Q_2 = 0$$

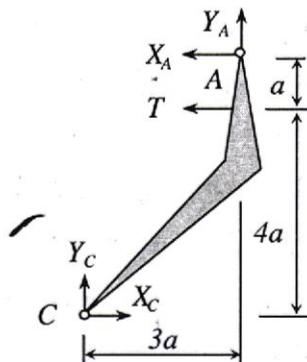
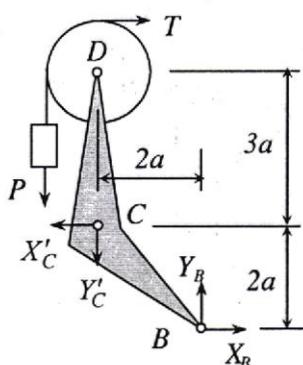
$$\sum \bar{m}_D (\vec{F}_k) = m_D + aX'_C = 0$$

Với: $Q_1 = 1,5\rho a$; $Q_2 = \rho a$; $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$

Giải hệ tìm các ẩn số: $X_C, Y_C, T, X_D, Y_D, m_D$.



1-22. Tách riêng thanh AC , ta có hệ lực: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}) \equiv 0$. Từ đó thiết lập được 3 PTCB.



Tách riêng hệ thanh BD và ròng rọc, ta có hệ lực: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{T}, \vec{P}) \equiv 0$. Từ đó thiết lập được 3 PTCB. Với $T = P$; $X_C = X'_C$; $Y_C = Y'_C$ ta giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$.

1-23. Tách riêng ròng rọc:

$$(\vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{T}, \vec{F}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn X_D, Y_D, T .

Tách riêng thanh BD :

$$(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{X}'_D, \vec{Y}'_D) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB

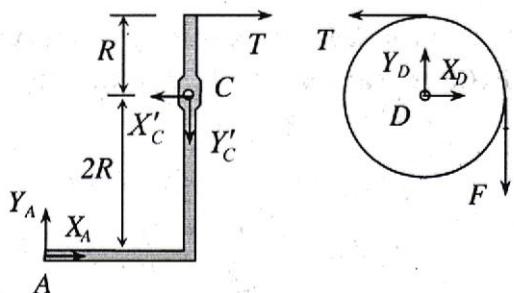
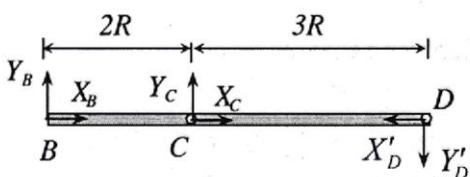
Tách riêng thanh AC :

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{T}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB

Giải hệ 6 phương trình tìm 6 ẩn:

$$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$$



1-24. Tách riêng thanh AC :

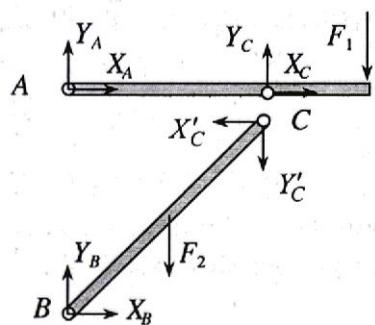
$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}_1) \equiv 0$$

Tách riêng thanh BC :

$$(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{F}_2) \equiv 0$$

Giải hệ 6 phương trình tìm 6 ẩn:

$$X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$$



1-25. Tách riêng thùng: $(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{P}) \equiv 0$

Lập 2 PTCB: $\sum \vec{F}_x = 0$ và $\sum \vec{F}_y = 0$

Giai hệ tìm: N_1, N_2

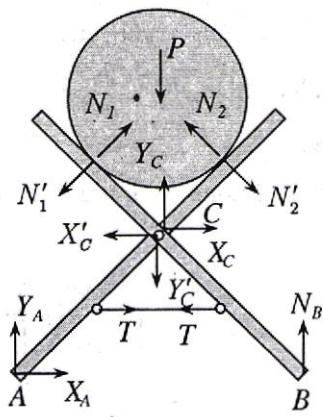
Hóa rắn toàn hệ: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{P}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn: X_A, Y_A, N_B

Tách riêng thanh BC:

$(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{N}_B, \vec{T}, \vec{N}'_1) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn còn lại: X_C, Y_C, T



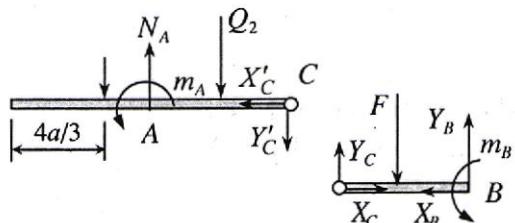
1-26. Thu gọn lực phân bố về 2 lực tập trung:

$$Q_1 = aq; Q_2 = 2aq$$

Tách riêng dầm trái:

$(\vec{N}_A, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{m}_A) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn: N_A, X_C, Y_C



Tách riêng dầm phải:

$(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{m}_B) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn: X_B, Y_B, m_B

1-27. Thu gọn lực phân bố trên 2 đoạn dầm AC và CB về 2 lực tập trung.

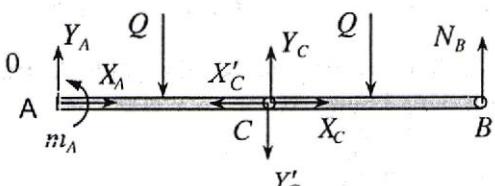
Tách riêng dầm phải: $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Q}, \vec{N}_B) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn: N_B, X_C, Y_C

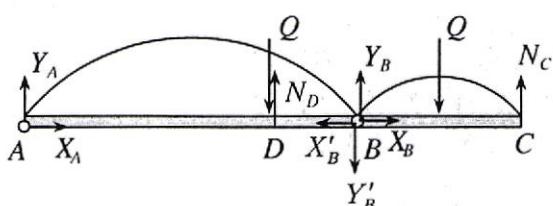
Tách riêng dầm trái:

$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{m}_A, \vec{Q}, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm 3 ẩn: X_A, Y_A, m_A .

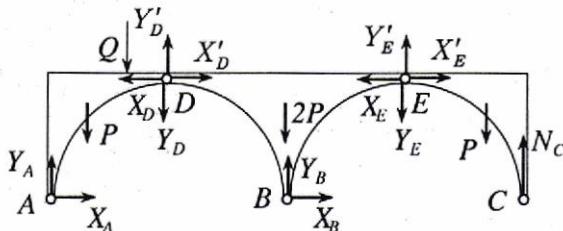


1-28. Tách riêng dầm BC: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}_C, \vec{Q}) \equiv 0$, ta thiết lập được 3 PTCB và xác định các ẩn X_B, Y_B, N_C . Tách riêng dầm AB: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{N}_D, \vec{Q}) \equiv 0$, ta thiết lập được 3 PTCB và xác định các ẩn X_A, Y_A, N_D .



1-29. Tách riêng phần AD: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{P}, \vec{Q}) \equiv 0$, ta thiết lập 3 PTCB. Tách riêng phần BDE: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}'_D, \vec{Y}'_D, \vec{X}_E, \vec{Y}_E, 2\vec{P}) \equiv 0$, ta thiết lập 3 PTCB. Tách riêng CE: $(\vec{N}_C, \vec{X}'_E, \vec{Y}'_E, \vec{P}) \equiv 0$, ta thiết lập 3 PTCB.

Giải hệ 9 phương trình với 9 ẩn số, ta xác định được: X_A, Y_A, X_B, Y_B và N_C .



1-30. Tách riêng khung AB:
 $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{m}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B) \equiv 0$
Lập 3 PTCB

Tách riêng khung BC:
 $(\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{N}_D, \vec{F}) \equiv 0$
Lập 3 PTCB

Giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, m_A, X_B, Y_B, N_D$.

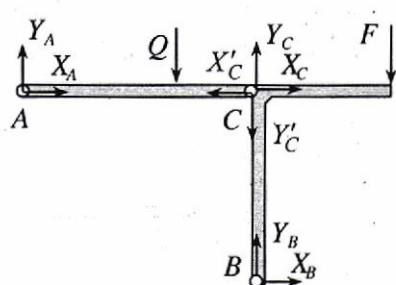
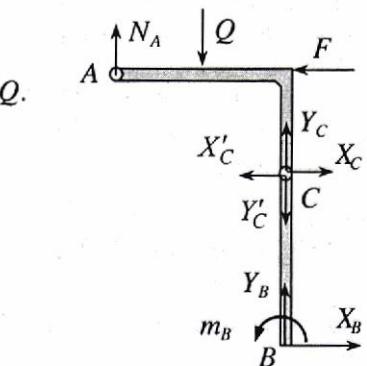
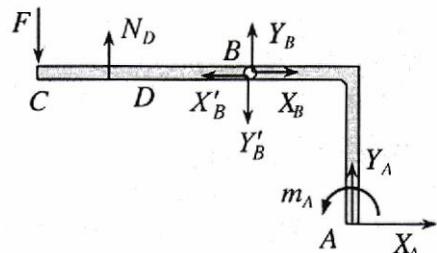
1-31. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .
Tách riêng khung AC:

$(\vec{N}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{Q}, \vec{F}) \equiv 0$
Lập 3 PTCB

Tách riêng khung BC:
 $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{m}_B, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C) \equiv 0$
Lập 3 PTCB

Giải hệ tìm 6 ẩn số: $N_A, X_B, Y_B, m_B, X_C, Y_C$.

1-32. Lực phân bố thu gọn về lực Q
Tách riêng khung AC: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}'_C, \vec{Y}'_C, \vec{Q}) \equiv 0$
Tách riêng khung BC: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}) \equiv 0$
Giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$.



1-33. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .

Tách riêng khung AC:

$$(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C, \bar{F}) \equiv 0$$

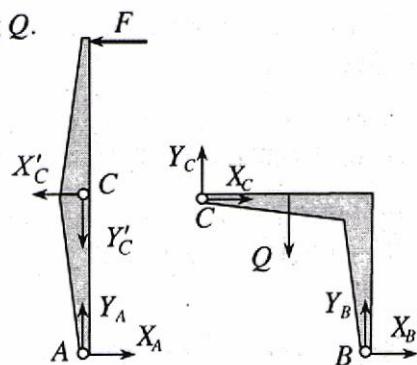
Lập 3 PTCB

Tách riêng khung BC:

$$(\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C, \bar{Q}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB

Giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$.



1-34. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .

Tách riêng khung AC:

$$(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C, \bar{Q}) \equiv 0$$

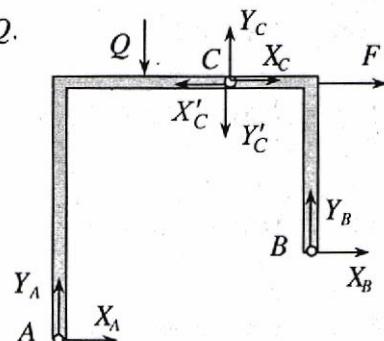
Lập 3 PTCB

Tách riêng khung BC:

$$(\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C, \bar{F}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB

Giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C$.



1-35. Tách riêng thanh BC, đưa lực phân bố trên thanh BC về lực Q_1 (đặt tại trung điểm của BC):

$$(\bar{X}_B, \bar{Y}_B, \bar{Q}_1, \bar{S}_C) \equiv 0$$

Viết PTCB: $\sum \bar{m}_B(\bar{F}_k) = 0$ tìm ẩn S_C .

Xét cân bằng của hệ thanh AB và BC (hóa rắn), thu gọn lực phân bố trên chiều dài AC về một lực Q (đặt tại trung điểm của AC):

$$(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Q}, \bar{S}_C, \bar{m}_A) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm ẩn số: X_A, Y_A, m_A .

1-36. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q đặt tại trung điểm thanh AB

Tách riêng thanh AB:

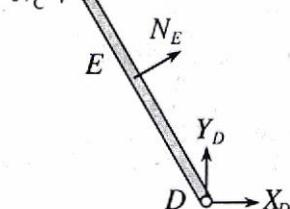
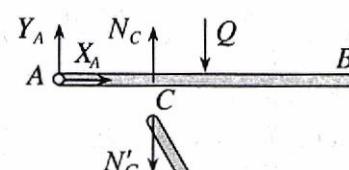
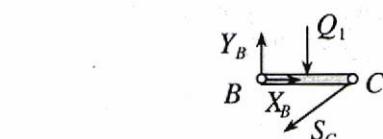
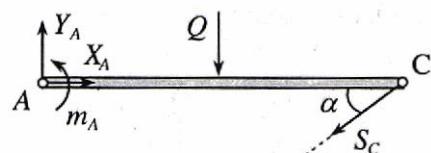
$$(\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{N}_C, \bar{Q}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_A, Y_A, N_C .

Tách riêng thanh CD

$$(\bar{X}_D, \bar{Y}_D, \bar{N}_E, \bar{N}'_C) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_D, Y_D, N_E .



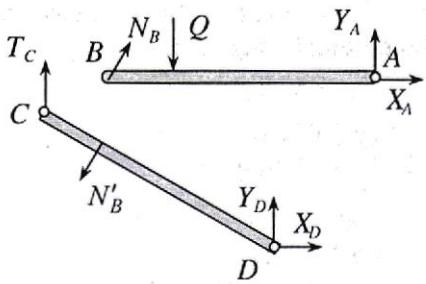
1-37. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .

Tách riêng thanh AB : $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_A, Y_A, N_B

Tách riêng thanh BC : $(\vec{N}'_B, \vec{X}_D, \vec{Y}_D, \vec{T}_C) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_D, Y_D, T_C



1-38. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .

Tách riêng thanh AB :

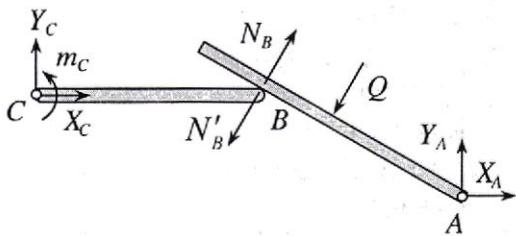
$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_A, Y_A, N_B

Tách riêng thanh BC :

$(\vec{N}'_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{m}_C) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_C, Y_C, m_C



1-39. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q .

Tách riêng thanh AB :

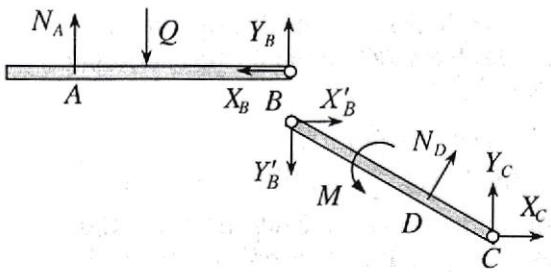
$(\vec{N}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: N_A, X_B, Y_B

Tách riêng thanh BC :

$(\vec{X}'_B, \vec{Y}'_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{N}_D, \vec{M}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_C, Y_C, N_D



1-40. Thu gọn lực phân bố về một lực tập trung Q đặt tại trung điểm của đoạn AF .

Tách riêng thanh AF :

$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{S}_{CD}, \vec{S}_{EF}, \vec{Q}) \equiv 0$

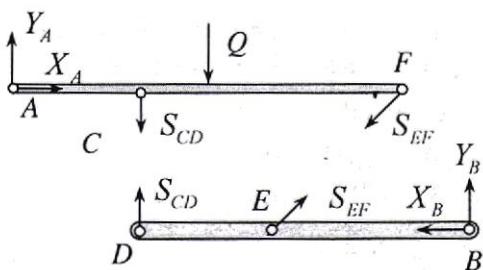
Lập 3 PTCB

Tách riêng thanh BD :

$(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{S}_{CD}, \vec{S}_{EF}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB

Giải hệ tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, X_B, Y_B, S_{CD}, S_{EF}$.



1-41. Xét cân bằng của toàn bộ hệ:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_B, \vec{F}, 2\vec{F}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_A, Y_A, N_B

Xét hệ gồm dầm BC , thanh 4 và 5 hóa rắn:

$$(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{N}_B, \vec{S}_3, 2\vec{F}) \equiv 0$$

Lập 3 PTCB tìm ẩn: X_C, Y_C, S_3 .

Xét nút D : $(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3) \equiv 0$

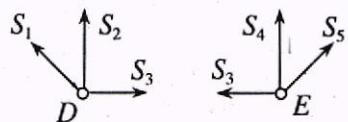
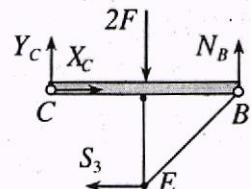
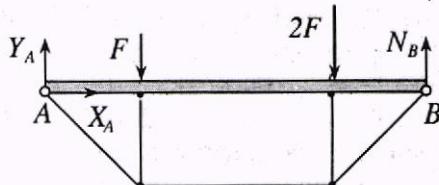
$$\text{Lập 2 PTCB: } \sum F_{kx} = 0 \text{ và } \sum F_{ky} = 0$$

Ta xác định được S_1, S_2 .

Xét nút E : $(\vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5) \equiv 0$

$$\text{Lập 2 PTCB: } \sum F_{kx} = 0 \text{ và } \sum F_{ky} = 0$$

Ta xác định được S_4, S_5 .



1-42. Đặt lực vào các nút A, B, D như hình vẽ

PTCB cho nút A : $(\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = -S_1 \sin 30 - S_2 = 0$$

$$\sum F_{ky} = S_1 \cos 30 - P = 0$$

Ta xác định được S_1, S_2 .

PTCB cho nút B : $(\vec{S}_1, \vec{S}_3, \vec{S}_4) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = S_1 \sin 30 - S_3 \cos 30 - S_4 = 0$$

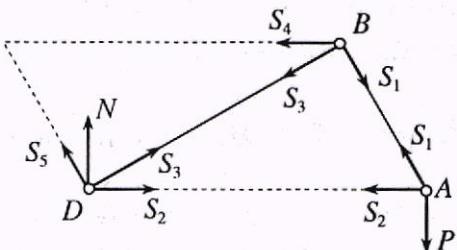
$$\sum F_{ky} = -S_1 \cos 30 - S_3 \sin 30 = 0$$

Ta xác định được S_3, S_4 .

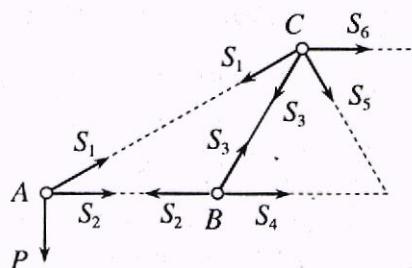
PTCB cho nút D : $(\vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_5, \vec{N}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = S_2 + S_3 \cos 30 - S_5 \sin 30 = 0$$

Ta xác định được S_5 .



1-43. Đặt lực vào các nút A, B, C như hình vẽ. Viết PTCB lần lượt cho các nút A, B, C , trong đó mỗi nút viết 2 phương trình. Tổng cộng ta nhận được 6 phương trình để giải 6 ẩn (ứng lực của các thanh).



1-44. Xét cân bằng của nhóm các thanh thuộc tam giác ABC. Phản lực từ các thanh 1, 2 và 3 tác dụng vào nhóm thanh ABC có phương chiếu như trên hình vẽ.

PTCB có dạng:

$$\sum F_{kx} = -S_1 \cos \alpha - S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = S_1 \sin \alpha + S_2 \sin 45^\circ - S_3 \sin \alpha - 2F = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = \frac{2aS_1}{3} \cos \alpha - aF - 2aF = 0$$

Với: $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Giải hệ ta tìm được S_1, S_2, S_3 .

1-45. Phân tích lực và phản lực lên hệ như hình vẽ.

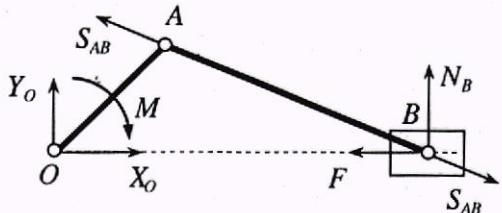
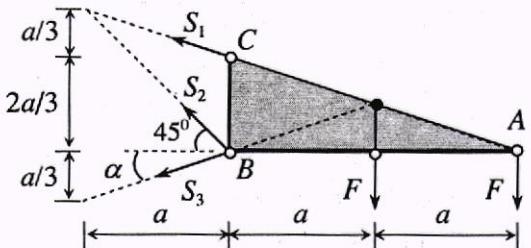
Tách riêng pít-tông B: $(\vec{S}_{AB}, \vec{N}_B, \vec{F}) \equiv 0$

Viết PTCB: $\sum F_{kx} = 0$ ta tìm được S_{AB} .

Tách riêng tay quay OA:

$(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{S}_{AB}, \vec{M}) \equiv 0$

Viết PTCB: $\sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0$ ta tìm được M .



1-46. Đặt lực lên hệ như hình vẽ. Tách riêng bánh răng và culit, sau đó viết PTCB cho từng vật:

PTCB cho bánh răng: $(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}_A, \vec{M}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_O(\vec{F}) = -M + RN_A \cos(\alpha + \varphi) = 0$$

PTCB cho culit BC: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}'_A, \vec{F}) \equiv 0$

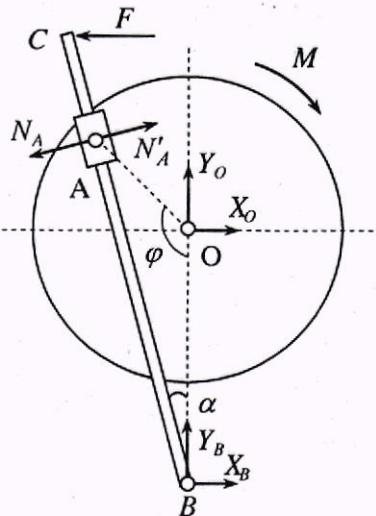
$$\sum F_{kx} = N'_A \cos \alpha + X_B - F = 0$$

$$\sum F_{ky} = N'_A \sin \alpha + Y_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = -AB.N'_A + lF \cos \alpha = 0$$

Với: $N_A = N'_A$; $AB = \frac{R \sin \varphi}{\sin \alpha}$

Giải hệ 4 phương trình tìm 4 ẩn số: M, X_B, Y_B, N_A .



1-47. Đặt lực lên hệ như hình vẽ. Tách riêng cam và cần đẩy AB, sau đó viết PTCB cho từng vật:

$$\text{PTCB cho cam: } (\vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{N}'_A, \vec{M}) \equiv 0$$

$$\sum \bar{m}_o(\vec{F}_k) = M - eN'_A \sin \alpha = 0$$

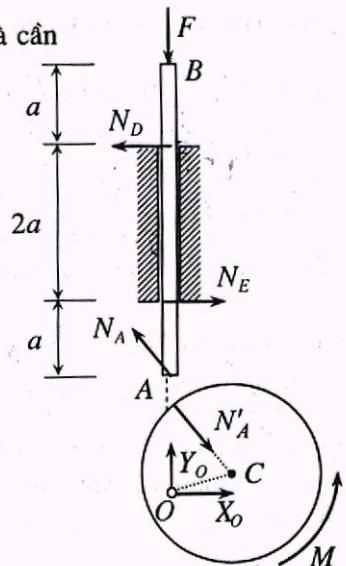
$$\text{PTCB cho thanh } AB: (\vec{N}_A, \vec{N}_D, \vec{N}_E, \vec{F}) \equiv 0$$

$$\sum F_{kx} = N_E - N_D - N_A \sin \beta = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_A \cos \beta - F = 0$$

$$\sum \bar{m}_E(\vec{F}_k) = 2aN_D - aN_A \sin \beta = 0$$

Giải hệ 4 phương trình tìm 4 ẩn số: F, N_A, N_E, N_D .



1-48. Tách riêng khối lăng trụ:

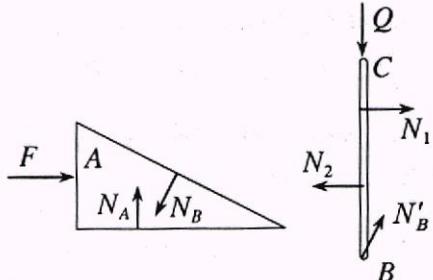
$$(\vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{F}) \equiv 0$$

Lập PTCB $\sum \bar{F}_{kx} = 0$ ta suy ra N_B .

Tách riêng thanh BC:

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}'_B, \vec{Q}) \equiv 0$$

Lập PTCB: $\sum \bar{F}_{ky} = 0$ ta suy ra Q .



1-49. Tách riêng tay quay OA:

$$(\vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{S}_{AB}, \vec{M}) \equiv 0$$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_o(\vec{F}_k) = 0$ ta suy ra S_{AB} .

Xét cân bằng của tam giác BCD:

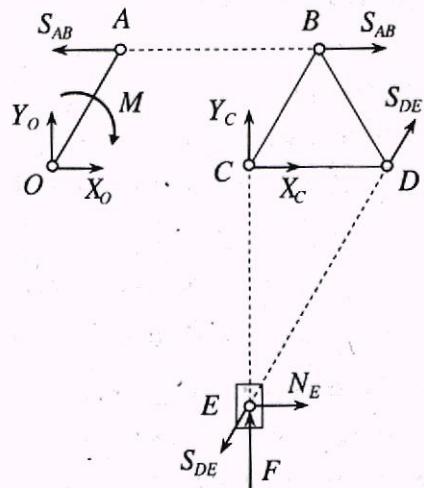
$$(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{S}_{AB}, \vec{S}_{DE}) \equiv 0$$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = 0$ ta suy ra S_{DE} .

Tách riêng pit-tông E:

$$(\vec{N}_E, \vec{S}_{DE}, \vec{F}) \equiv 0$$

Lập PTCB: $\sum F_{ky} = 0$ ta suy ra F .



1-50. Đặt lực lên hệ như hình vẽ. Xét cân bằng và viết PTCB cho từng vật:

PTCB cho tay đòn: $(\vec{N}_A, \vec{N}'_B, \vec{N}_C, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = N'_B \sin 45^\circ - N_C \sin 45^\circ = 0$$

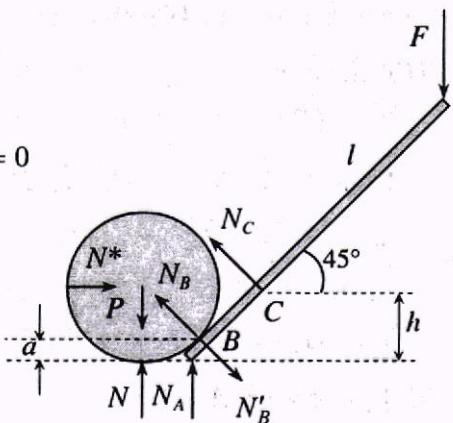
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = \frac{-aN'_B}{\cos 45^\circ} + \frac{hN_C}{\cos 45^\circ} - lF \cos 45^\circ = 0$$

với $a = r - r \cos 45^\circ$. Từ đó ta suy ra N'_B .

PTCB cho con lăn: $(\vec{N}, \vec{N}^*, \vec{N}_B, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{ky} = N + N_B \cos 45^\circ - P = 0$$

Thay giá trị $N_B = N'_B$ vừa tìm được vào phương trình này để tìm phản lực N .



1-51. Đặt lực lên hệ như hình vẽ.

PTCB cho tay đòn AOB : $(\vec{N}_A, \vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = eN_A \cos 60^\circ - lP = 0$$

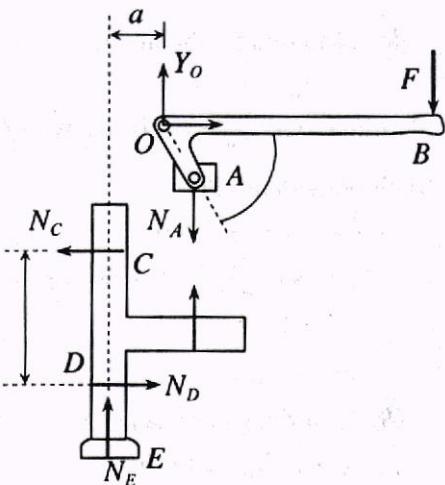
PTCB cho trục CDE : $(\vec{N}_C, \vec{N}_D, \vec{N}_E, \vec{N}'_A) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = N_D - N_C = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_E - N'_A = 0$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = bN_D - N'_A(a + e \cos 60^\circ) = 0$$

Từ đó ta suy ra các lực N_A, N_C, N_D, N_E .



1-52. Đặt lực lên hệ như hình vẽ.

PTCB cho tay đòn OA : $(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{S}_{CB}, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = bS_{CB} \cos \alpha - aF = 0$$

PTCB cho nút C : $(\vec{S}_{CB}, \vec{S}_{CD}, \vec{S}_{CE}) \equiv 0$

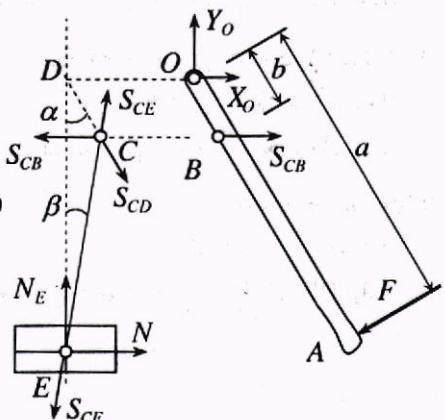
$$\sum F_{kx} = -S_{CB} + S_{CE} \sin \beta + S_{CD} \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = S_{CE} \cos \beta - S_{CD} \cos \alpha = 0$$

PTCB cho đầu ép E : $(\vec{S}_{CE}, \vec{N}_E, \vec{N}) \equiv 0$

$$\sum F_{ky} = N_E - S_{CE} \cos \beta = 0$$

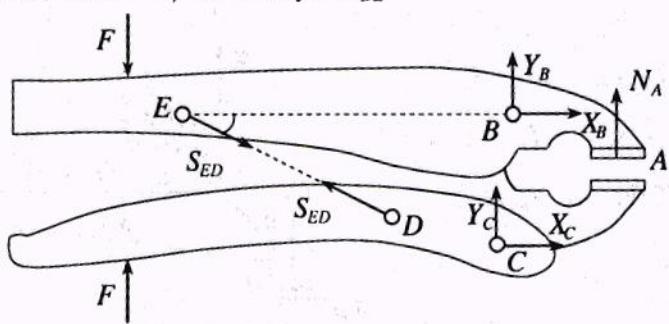
Từ đó ta suy ra $S_{CB}, S_{CD}, S_{CE}, N_E$.



1-53. PTCB cho cán kìm phía dưới: $(\vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{S}_{ED}, \vec{F}) \equiv 0$.

$$\sum \bar{m}_c(\vec{F}_k) = 5S_{DE} \cos \alpha - 40S_{DE} \sin \alpha - 140F = 0,$$

với $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$; $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ ta suy ra S_{DE} .



PTCB cho cán kìm phía trên: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{S}_{ED}, \vec{N}_A, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 130S_{DE} \sin \alpha + 40N_A + 150F = 0, \text{ ta suy ra } N_A.$$

1-54. Đặt lực lên hệ như hình vẽ.

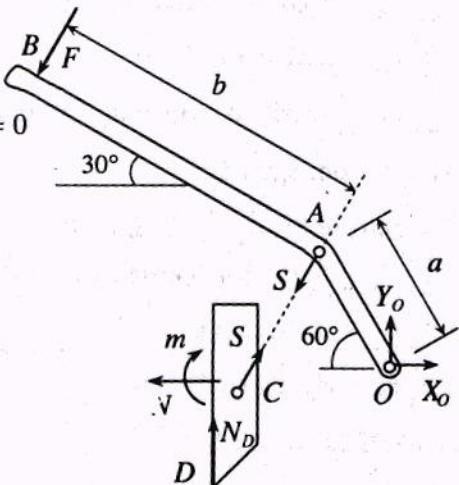
PTCB cho tay đòn AOB:

$$\sum \bar{m}_o(\vec{F}_k) = (a \cos 30 + b)F + aS \cos 30 = 0$$

PTCB cho dao cắt: $(\vec{S}, \vec{N}_D, \vec{N}, \vec{m}) \equiv 0$

$$\sum F_{ky} = N_D + S \cos 30 = 0$$

Từ đó ta suy ra các lực S và N .



CHƯƠNG 2: CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHÔNG GIAN

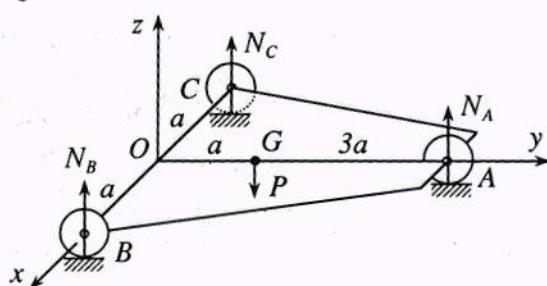
2-1. Đặt lực vào các bánh xe A, B, C như hình vẽ và lập 3 PTCB:

$$\sum F_{kz} = N_A + N_B + N_C - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_k) = -aP + 4aN_A = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = -aN_B + aN_C = 0$$

Giải hệ PT tìm N_A, N_B, N_C .



2-2. Đặt lực vào các nút A, B, C như hình vẽ.

PTCB cho nút A ($\vec{F}, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$) $\equiv 0$

$$\sum F_{kz} = S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = S_3 \cos 45^\circ + F = 0$$

$$\sum F_{kx} = -S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ - S_3 \sin 45^\circ = 0$$

Giải hệ PT tìm S_1, S_2, S_3 .

PTCB cho nút B: ($\vec{S}_2, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$) $\equiv 0$

$$\sum F_{kz} = S_2 \cos 45^\circ + S_4 \cos 45^\circ + S_6 = 0$$

$$\sum F_{ky} = S_4 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{kx} = S_2 \sin 45^\circ - S_5 = 0$$

Giải hệ PT tìm S_4, S_5, S_6 .

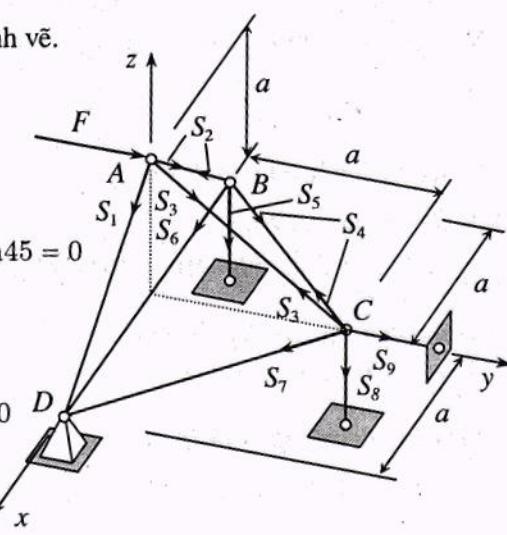
PTCB cho nút C: ($\vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_7, \vec{S}_8, \vec{S}_9$) $\equiv 0$

$$\sum F_{kz} = S_7 \cos 45^\circ - S_4 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{ky} = -S_3 \cos 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ - S_7 \sin 45^\circ + S_9 = 0$$

$$\sum F_{kx} = S_3 \sin 45^\circ - S_8 = 0$$

Giải hệ PT tìm S_7, S_8, S_9 .



2-3. Đặt lực lên trục quay và lập 6 PTCB:

$$\sum F_{kz} = X_A + X_B - T = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B = 0$$

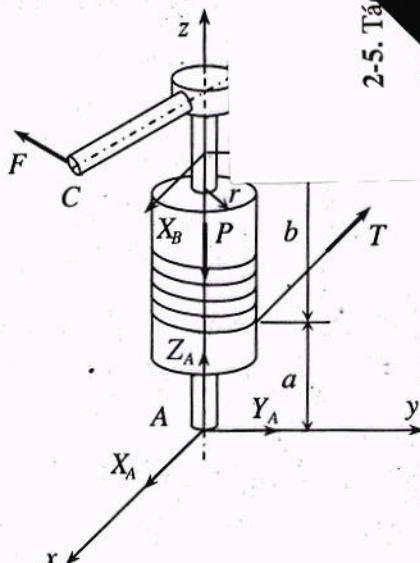
$$\sum F_{kx} = Z_A - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_k) = (a+b)Y_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = (a+b)X_B - aT = 0$$

$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) = -2RF + rT = 0$$

Giải hệ tìm 6 ẩn số $F, X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B$.



2-4. Đặt lực lên trục AC và lập 5 PTCB:

$$\sum F_{kz} = X_A + X_B - F \cos 30^\circ = 0$$

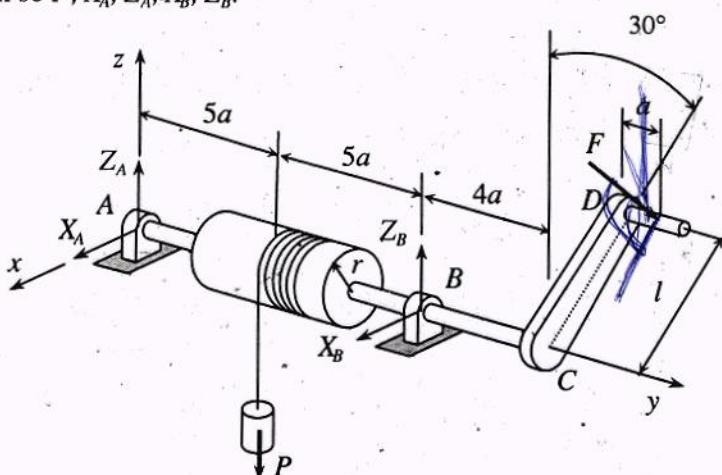
$$\sum F_{kx} = Z_A + Z_B - P - F \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_k) = 10aZ_B - 5aP - 15aF \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = rP - lF = 0$$

$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) = -10aX_B + 15aF \cos 30^\circ = 0$$

Giải hệ tìm 5 ẩn số F, X_A, Z_A, X_B, Z_B .



ch riêng 2 trục AB , CD và đặt lực vào các trục như hình vẽ.

PTCB cho trục CD : $(\vec{X}_C, \vec{Z}_C, \vec{X}_D, \vec{Z}_D, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = X_C + X_D + T_1 + T_2 \cos 30 = 0$$

$$\sum F_{kz} = Z_C + Z_D - T_2 \sin 30 - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_k) = 5aZ_D - 2aT_2 \sin 30 - 3aP = 0$$

$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = -RT_1 + RT_2 + rP = 0$$

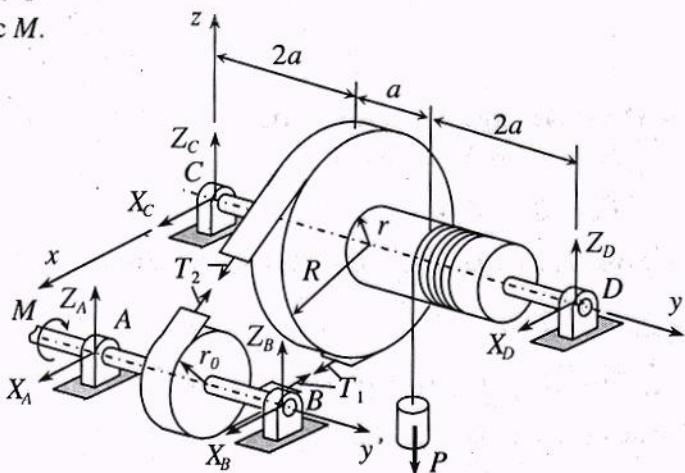
$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) = -5aX_D - 2aT_1 - 2aT_2 \cos 30 = 0$$

Với $T_1 = 2T_2$, giải hệ tìm 6 ẩn số $X_C, Y_C, X_D, Y_D, T_1, T_2$.

PTCB cho trục AB : $(\vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{M}) \equiv 0$

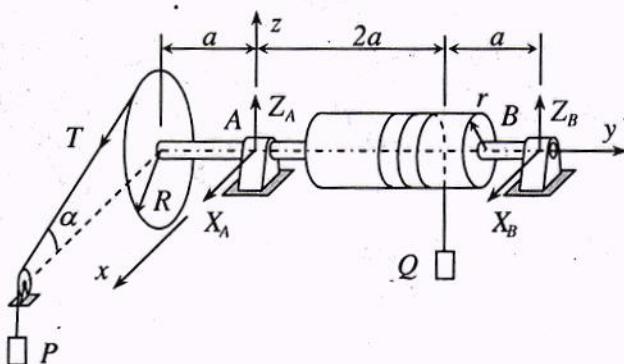
$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = r_0T_1 - r_0T_2 - M = 0$$

Từ đó suy ra ngẫu lực M .



2-6. Đặt lực vào trục AB . Lập 5 PTCB để tìm 5 ẩn số X_A, Z_A, X_B, Z_B, Q .

Lưu ý: Sức căng dây $T = P$.



2-7. Đặt lực lên dầm như hình vẽ và lập 6 PTCB:

$$\sum F_{kx} = X - F_3 = 0$$

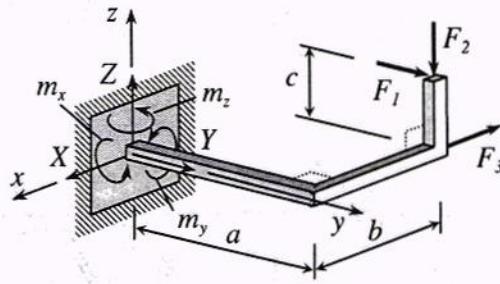
$$\sum F_{ky} = Y + F_1 = 0$$

$$\sum F_{kz} = Z - F_2 = 0$$

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_k) = m_x - cF_1 - aF_2 = 0$$

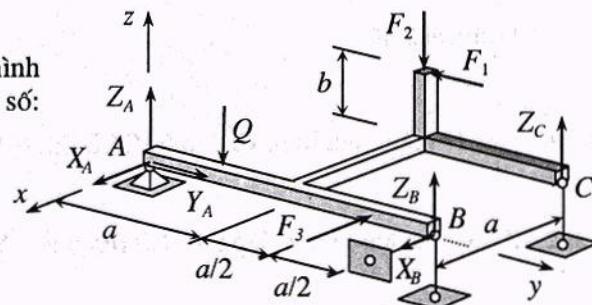
$$\sum \bar{m}_y(\vec{F}_k) = m_y - bF_2 = 0$$

$$\sum \bar{m}_z(\vec{F}_k) = m_z - bF_1 + aF_3 = 0$$

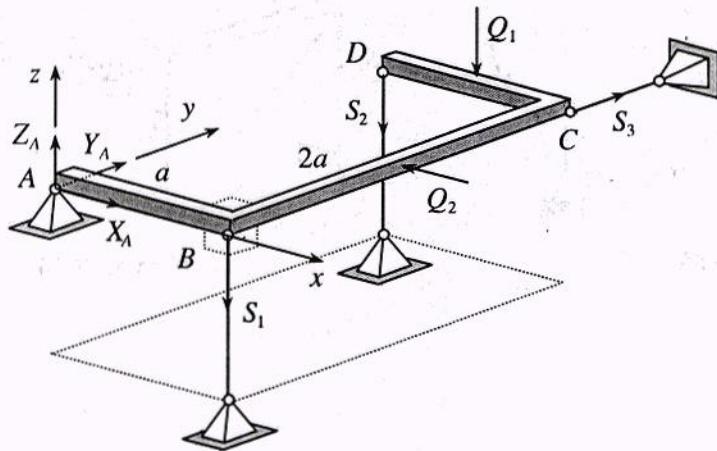


Giải hệ tìm 6 ẩn số X, Y, Z, m_x, m_y, m_z .

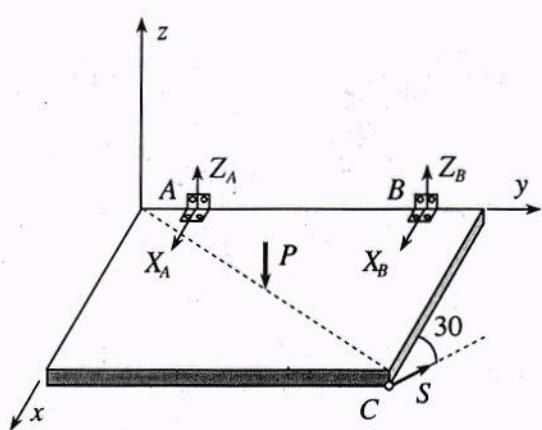
2-8. Đặt lực lên khung như hình vẽ và lập 6 PTCB để tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, Z_C$.



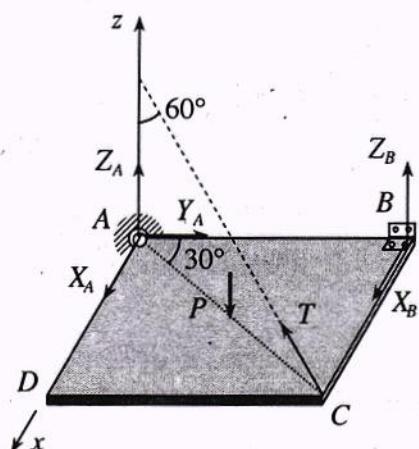
2-9. Phân tích phản lực liên kết tác dụng lên khung ABCD. Đưa hệ lực phân bố trên đoạn CD về lực tập trung Q_1 , và đưa hệ lực phân bố trên đoạn BC về lực tập trung Q_2 đặt tại trung điểm của mỗi đoạn. Lập 6 PTCB để tìm 6 thành phần ẩn số: $X_A, Y_A, Z_A, S_1, S_2, S_3$.



2-10. Đặt lực lên tấm như hình vẽ, lập 5 PTCB tìm 5 ẩn số X_A, Z_A, X_B, Z_B, S .



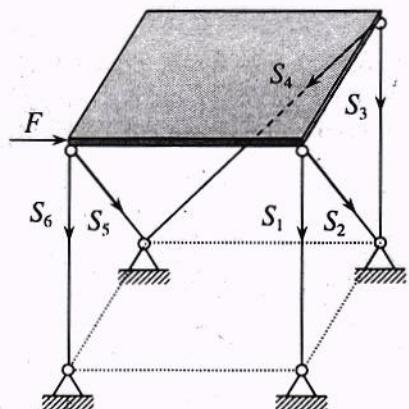
Hình bài 2-10



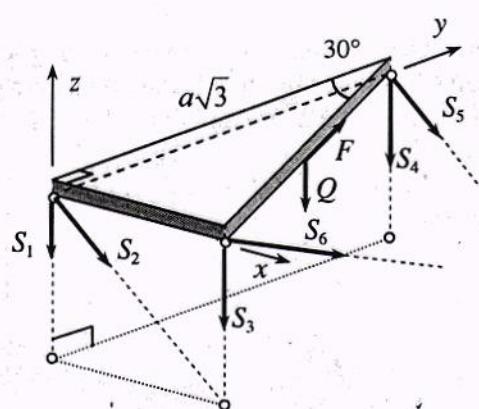
Hình bài 2-11

2-11. Đặt lực lên tấm như hình vẽ, lập 6 PTCB tìm 6 ẩn số $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, T$.

2-12, 2-13. Đặt lực lên tấm và lập 6 PTCB tìm 6 ẩn số $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.



Hình bài 2-12



Hình bài 2-13

2-14. Đặt lực P và phân tích các phản lực từ thanh tác dụng lên tấm như hình vẽ.
Phân tích lực S_6 thành 3 thành phần lực theo phương x , y và z :

$$S_{6x} = S_6 \cos \alpha \sin 30^\circ;$$

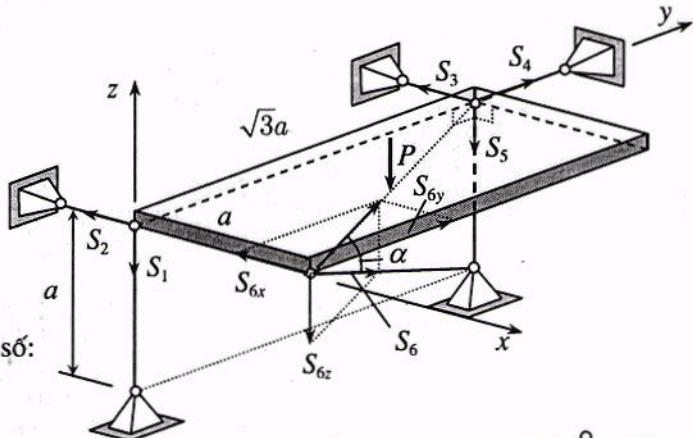
$$S_{6y} = S_6 \cos \alpha \cos 30^\circ;$$

$$S_{6z} = S_6 \sin \alpha$$

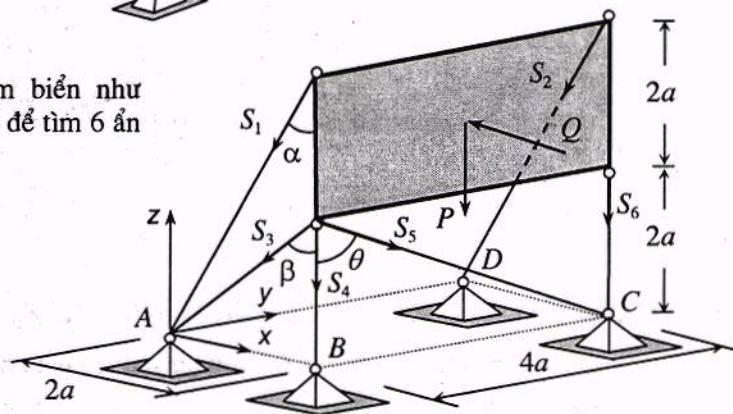
$$\text{Với: } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Lập 6 PTCB để tìm 6 ẩn số:
 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.



2-15. Đặt lực lên tấm biến như hình vẽ và lập 6 PTCB để tìm 6 ẩn số $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.



2-16. Đặt lực và thiết lập các PTCB sau:

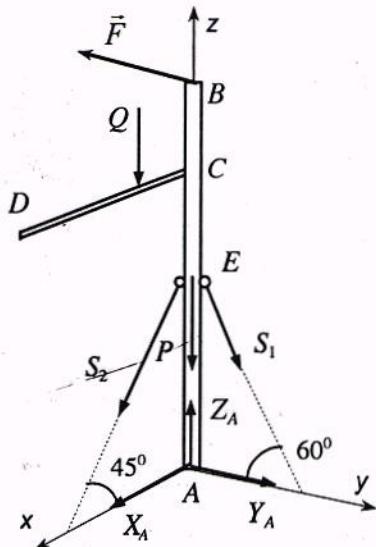
$$X_A + S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$Y_A + S_1 \frac{1}{2} - F = 0$$

$$Z_A - P - Q - S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$F AB - S_1 AE \frac{1}{2} = 0$$

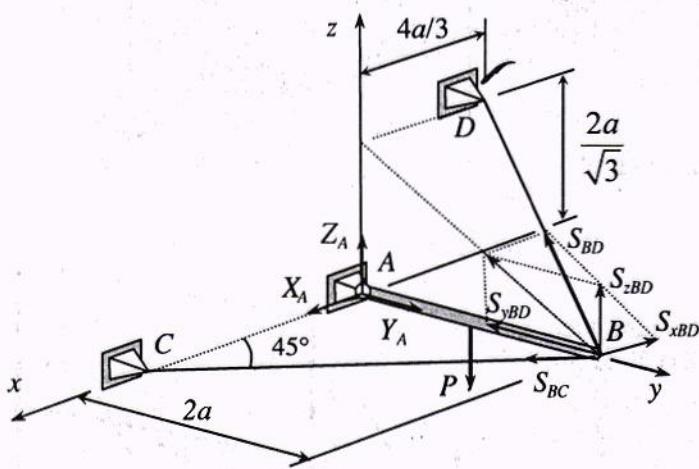
$$-Q CD \frac{1}{3} - S_2 AE \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$



2-17. Đặt lực lên thanh AB . Lập 5 PTCB để tìm 5 ẩn số: $X_A, Y_A, Z_A, S_{BC}, S_{BD}$.

Lưu ý: Để đơn giản khi viết PTCB, lực S_{BD} được phân tích thành 3 thành phần theo phương x, y và z :

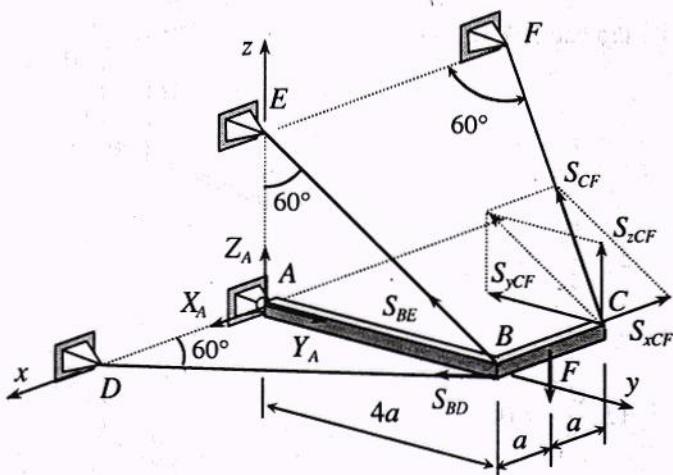
$$S_{xBD} = \frac{S_{BD}}{2}; S_{yBD} = \frac{3S_{BD}}{4}; S_{zBD} = \frac{\sqrt{3}S_{BD}}{4}.$$



2-18. Đặt lực lên khung ABC . Lập 6 PTCB để tìm 6 ẩn số: $X_A, Y_A, Z_A, S_{BD}, S_{BE}, S_{CF}$.

Lưu ý: Lực S_{CF} được phân tích thành 3 thành phần theo phương x, y và z :

$$S_{xCF} = S_{CF} \sin 30; S_{yCF} = S_{CF} \cos^2 30; S_{zCF} = S_{CF} \cos 30 \sin 30.$$



CHƯƠNG 3: CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN KHI CÓ MA SÁT

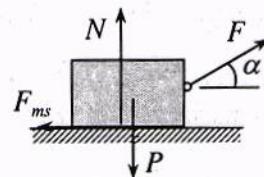
3-1. Đặt lực và lập PTCB cho hòn:

$$\sum F_{kx} = F \cos \alpha - F_{ms} = 0$$

$$\sum F_{ky} = N - P + F \sin \alpha = 0$$

Điều kiện ma sát: $F_{ms} = \mu_0 N$

Giải hệ tìm ẩn số F .



3-2. Đặt lực và lập PTCB cho khối lập phương:

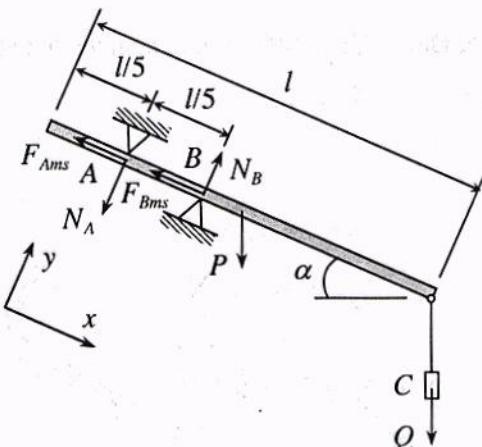
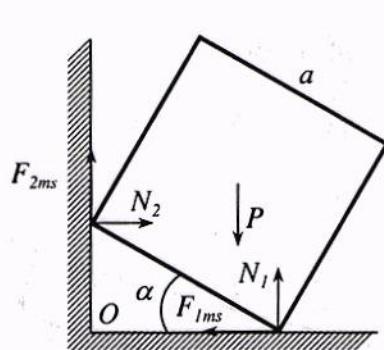
$$\sum F_{kx} = N_2 - F_{1ms} = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_1 + F_{2ms} - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_o(\vec{F}_k) = aN_1 \cos \alpha - aN_2 \sin \alpha - \frac{a}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha)P = 0$$

Điều kiện ma sát ở trạng thái sắp trượt: $F_{1ms} = \mu_0 N_1$; $F_{2ms} = \mu_0 N_2$;

Giải hệ tìm ẩn số α .



3-3. Đặt lực và lập PTCB cho đầm:

$$\sum F_{kx} = -F_{Ams} - F_{Bms} + P \sin \alpha + Q \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = -N_A + N_B - P \cos \alpha - Q \cos \alpha = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = \frac{lN_A}{5} - \frac{lP \cos \alpha}{10} - \frac{3lQ \cos \alpha}{5} = 0$$

Điều kiện ma sát: $F_{Ams} = \mu_0 N_A$; $F_{Bms} = \mu_0 N_B$;

Giải hệ tìm ẩn số N_A , N_B , μ_0 .

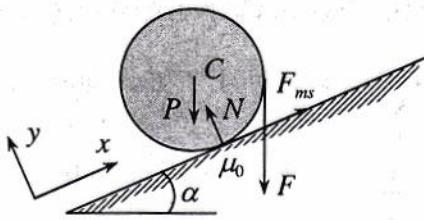
3-4. Đặt lực và lập PTCB cho con lăn:

$$\sum F_{kx} = F_{ms} - F \sin \alpha - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = N - F \cos \alpha - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = rF_{ms} - rF = 0$$

Điều kiện ma sát: $F_{ms} \leq \mu_0 N$



Giải hệ tìm ẩn số F, μ_0 .

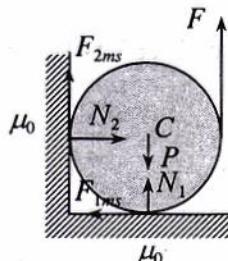
3-5. Đặt lực và lập PTCB cho con lăn:

$$\sum \bar{F}_x = N_2 - F_{1ms} = 0$$

$$\sum \bar{F}_y = N_1 + F_{2ms} + F - P = 0$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}) = -rF_{1ms} - rF_{2ms} + rF = 0$$

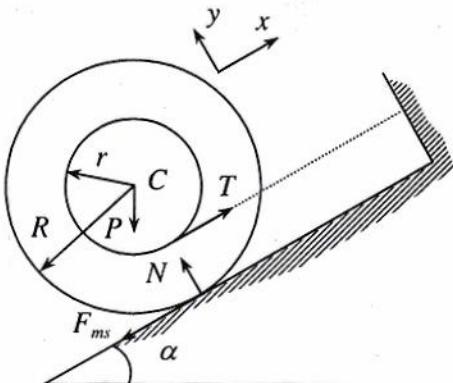
Điều kiện ma sát: $F_{1ms} = \mu_0 N_1; F_{2ms} = \mu_0 N_2$



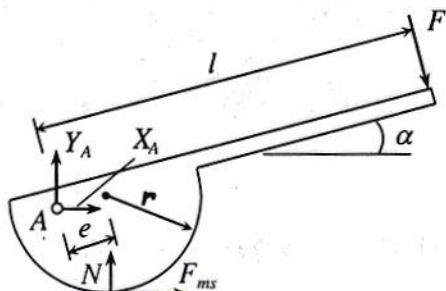
Giải hệ tìm ẩn số F .

3-6. Đặt lực, lập 3 PTCB cho cam và đưa vào điều kiện ma sát.

Giải hệ tìm ẩn số T, F_{ms}, μ_0 .



Hình bài 3-6



Hình bài 3-7

3-7. Đặt lực, lập PTCB cho con lăn: $\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$ và đưa vào điều kiện ma sát.

Giải hệ tìm ẩn số e .

3-8. Tách và đặt lực vào các vật như hình vẽ.

PTCB cho bánh răng 1: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}, \vec{M}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -M + r_1 N \cos \alpha = 0$$

PTCB cho bánh răng 2: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}', \vec{T}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = X_B + T \cos \beta - N' \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - T \sin \beta + N' \cos \alpha = 0$$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = -r_2 T + R_2 N' \cos \alpha = 0$$

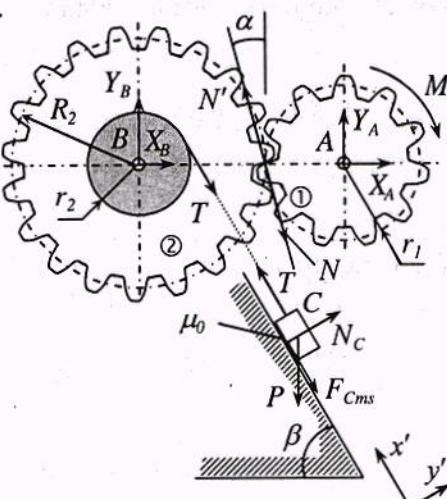
PTCB cho vật nặng: $(\vec{N}_C, \vec{F}_{Cms}, \vec{T}, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx'} = T - F_{Cms} - P \sin \beta = 0$$

$$\sum F_{ky'} = N_C - P \cos \beta = 0$$

Điều kiện ma sát: $F_{Cms} = \mu_0 N_C$

Giải hệ tìm ẩn số M, X_B, Y_B .



3-9. Đặt lực vào các vật như hình vẽ.

Để hệ cân bằng, lực F phải thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

① Điều kiện của lực F để vật B và C đứng cân bằng tương đối trên tấm A

PTCB cho vật B và C hóa rắn: $(\vec{N}_B, \vec{F}_{Bms}, \vec{P}_B, \vec{N}_C, \vec{F}_{Cms}, \vec{P}_C, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = F_{Bms} + F_{Cms} - F = 0$$

Điều kiện ma sát khi vật B và C chuẩn bị trượt trên tấm A (trạng thái tối hạn):

$$F_{Bms} = \mu_{01} N_B = \mu_{01} P_B; \quad F_{Cms} = \mu_{02} N_C = \mu_{02} P_C;$$

Giải hệ tìm F và doán dấu bất đẳng thức suy ra:

$$F \leq \mu_{01} P_B + \mu_{02} P_C \quad (*)$$

② Điều kiện của lực F để vật A không trượt trên nền

PTCB cho hệ hóa rắn: $(\vec{N}_A, \vec{F}_{Ams}, \vec{P}_A, \vec{P}_B, \vec{P}_C, \vec{F}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = F_{Ams} - F = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_A - P_A - P_B - P_C = 0$$

Từ điều kiện ma sát $F_{Ams} \leq \mu_{03} N_A$, ta suy ra $F \leq \mu_{03} (P_A + P_B + P_C)$ (**)

Kết hợp (*) và (**) suy ra: $F \leq \min [\mu_{01} P_B + \mu_{02} P_C; \mu_{03} (P_A + P_B + P_C)]$.

3-10. Đặt lực vào các vật như hình vẽ.

Hóa rắn hệ nêm và con lăn: $(\vec{T}, \vec{F}_{1ms}, \vec{N}_1, \vec{P}, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập 2 PTCB: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$

Điều kiện ma sát: $F_{1ms} \leq \mu_{01} N_1$;

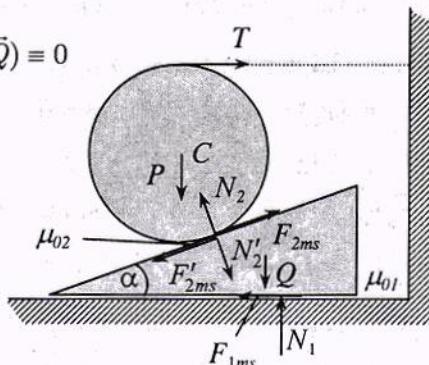
Giải hệ tìm μ_{01} .

Tách riêng con lăn: $(\vec{T}, \vec{N}_2, \vec{F}_{2ms}, \vec{P}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB

Điều kiện ma sát: $F_{2ms} \leq \mu_{02} N_2$;

Giải hệ tìm μ_{02} .



3-11. Đặt lực vào các vật như hình vẽ.

Tách riêng thanh:

$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_2, \vec{F}_{2ms}, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$

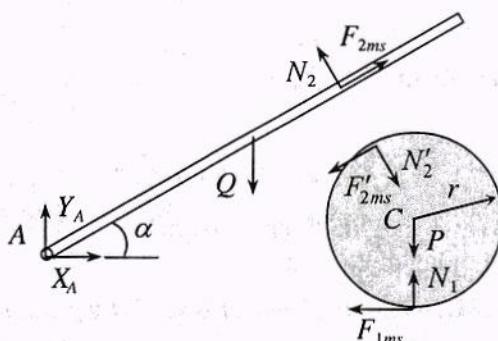
Tách riêng con lăn:

$(\vec{N}_1, \vec{F}_{1ms}, \vec{N}'_2, \vec{F}'_{2ms}, \vec{P}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB.

Điều kiện ma sát: $F_{1ms} \leq \mu_{01} N_1$;

$F_{2ms} \leq \mu_{02} N_2$;



Giải hệ tìm 4 ẩn số F_{1ms} , N_1 , F_{2ms} và N_2 , sau đó thay vào điều kiện ma sát để tìm μ_{01} và μ_{02} .

3-12. Đặt lực vào khung như hình vẽ.

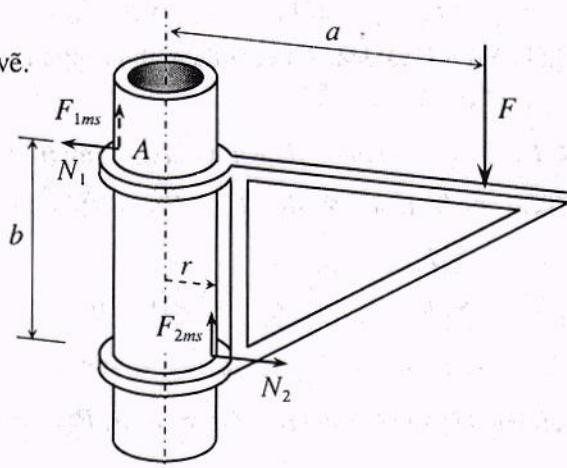
Lập 3 PTCB cho khung.

Đưa vào 2 điều kiện ma sát:

$F_{1ms} \leq \mu_0 N_1$;

$F_{2ms} \leq \mu_0 N_2$;

Giải bài toán khi khung ở trạng thái tối hạn để tìm μ_0 , sau đó đoán dấu bất đẳng thức của μ_0 .



3-13. Đặt lực vào các vật như hình vẽ.

Tách riêng thanh: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_1, \vec{F}_{1ms}, \vec{P}) \equiv 0$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$

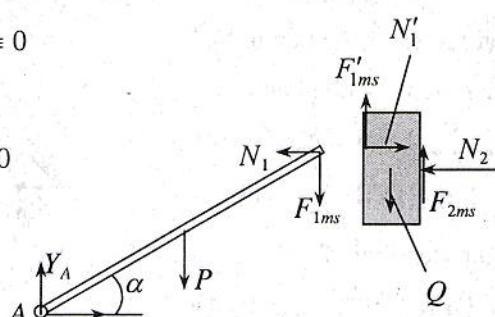
Tách riêng vật: $(\vec{N}'_1, \vec{F}'_{1ms}, \vec{N}'_2, \vec{F}'_{2ms}, \vec{Q}) \equiv 0$

Lập PTCB: $\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0$

Đưa vào 2 điều kiện ma sát:

$$F_{1ms} \leq \mu_{01} N_1;$$

$$F_{2ms} \leq \mu_{02} N_2;$$



Giải hệ ở trạng thái tới hạn tìm Q , sau đó đoán dấu bất đẳng thức của Q .

3-14. Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Lập PTCB cho toàn hệ hóa rắn: $\sum F_{ky} = 0$

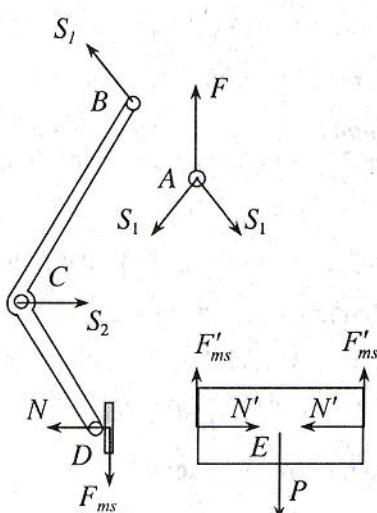
Lập PTCB cho nút A: $\sum F_{ky} = 0$

Lập PTCB cho vật E: $\sum F_{ky} = 0$

Lập PTCB cho thanh BCD: $\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = 0$

Đưa vào điều kiện ma sát: $F_{ms} \leq \mu_0 N$;

Giải hệ tìm ẩn số μ_0 .



3-15. Đặt lực vào các vật như hình vẽ, lập PTCB cho vật A: $\sum F_{ky} = 0$.

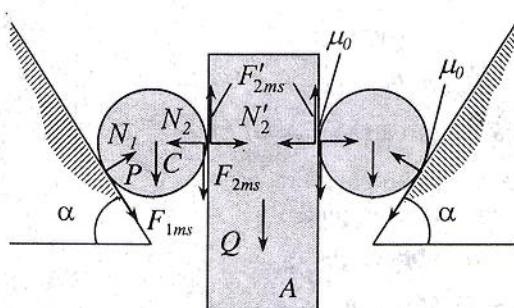
Lập 3 PTCB cho con lăn.

Đưa vào 2 điều kiện ma sát:

$$F_{1ms} \leq \mu_0 N_1;$$

$$F_{2ms} \leq \mu_0 N_2$$

Giải hệ ở trạng thái tới hạn tìm Q , sau đó gán dấu bất đẳng thức của Q .



3-16. Trường hợp ngẫu lực quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ:

Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Tách riêng bánh phanh:

$$(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}_B, \vec{F}_{Bms}, \vec{M}) \equiv 0$$

$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0$$

Tách riêng tay phanh:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}'_B, \vec{F}'_{Bms}, \vec{F}) \equiv 0$$

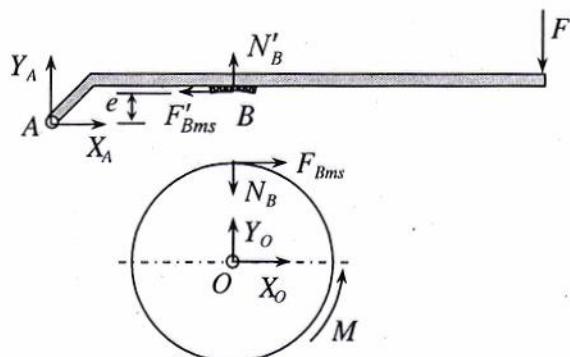
$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

Đưa vào điều kiện ma sát:

$$F_{Bms} \leq \mu_0 N_B$$

Giải hệ tìm ẩn số F .

Trường hợp ngẫu lực quay theo chiều thuận chiều kim đồng hồ: Phân tích lại chiều lực F_{Bms} , sau đó các bước làm tương tự như trên.



3-17. Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Tách riêng má phanh 1:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}'_1, \vec{F}'_{1ms}, \vec{F}) \equiv 0$$

$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

Tách riêng má phanh 2:

$$(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}'_2, \vec{F}'_{2ms}, \vec{F}) \equiv 0$$

$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0$$

Đưa vào điều kiện ma sát:

$$F_{1ms} = \mu_0 N_1;$$

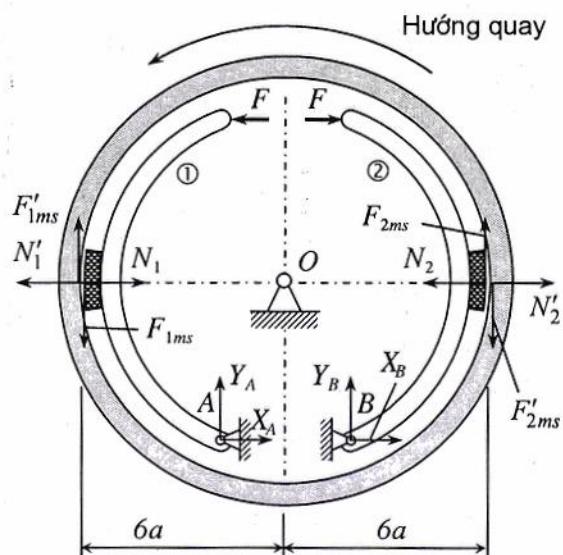
$$F_{2ms} = \mu_0 N_2;$$

Giải hệ tìm ẩn số F_{1ms} và F_{2ms} .

Tính mômen phanh tạo ra trong quá trình phanh:

$$M = 6a(F'_{1ms} + F'_{2ms})$$

Lưu ý: $F'_{1ms} = F_{1ms}$; $F'_{2ms} = F_{2ms}$



3-18. Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Tách riêng cam: $(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}_A, \vec{F}_{Ams}, \vec{M}) \equiv 0$

Lập PTCB: $\sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = 0$

Tách riêng cân đẩy:

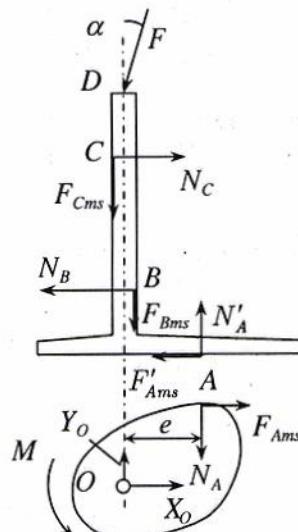
$(\vec{N}'_A, \vec{F}'_{Ams}, \vec{N}_B, \vec{F}_{Bms}, \vec{N}_C, \vec{F}_{Cms}, \vec{F}) \equiv 0$

Lập 3 PTCB.

Đưa vào điều kiện ma sát:

$$F_{Ams} = \mu_0 N_A; F_{Bms} = \mu_0 N_B; F_{Cms} = \mu_0 N_C$$

Giải hệ tìm ẩn số M .

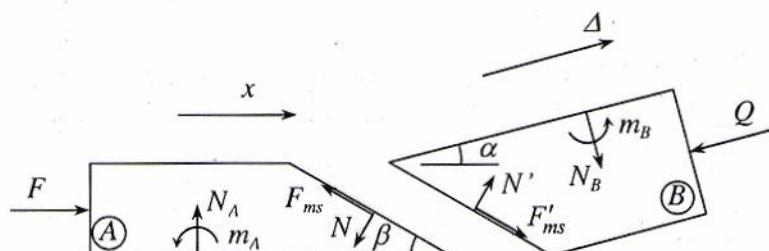


3-19. Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Tách riêng vật A: $(\vec{F}, \vec{N}_A, \vec{m}_A, \vec{N}, \vec{F}_{ms}) \equiv 0$, lập PTCB: $\sum F_{kx} = 0$.

Tách riêng vật B: $(\vec{Q}, \vec{N}_B, \vec{m}_B, \vec{N}', \vec{F}'_{ms}) \equiv 0$, lập PTCB: $\sum F_{k\Delta} = 0$

Đưa vào điều kiện ma sát: $F_{ms} \leq \mu_0 N$, giải hệ tìm ẩn số Q .



3-20. Xét trường hợp vật có xu hướng trượt lên: Đặt lực vào các vật như hình vẽ.

PTCB cho vật: $(\vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{T}, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = T - F_{ms} - P \cos \alpha = 0$$

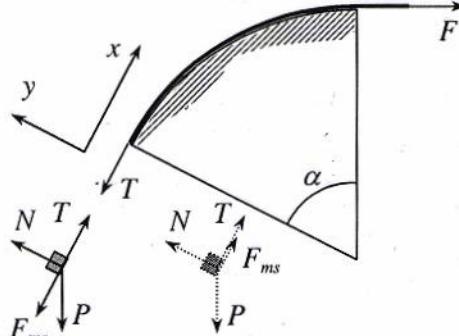
$$\sum F_{ky} = N - P \sin \alpha = 0$$

Đưa vào điều kiện ma sát:

$$F_{ms} \leq \mu_0 N;$$

$$F \leq T e^{\mu_0 \alpha}$$

Giải hệ tìm ẩn số F .



Trường hợp vật có xu hướng trượt xuống, ta thực hiện các bước tương tự với \vec{F}_{ms} ngược với chiều tại trường hợp đầu.

3-21. Trường hợp ngẫu lực quay ngược chiều kim đồng hồ.

Đặt lực vào các vật như hình vẽ

Tách riêng tay đòn: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}, \vec{T}) \equiv 0$

$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 0$$

Tách riêng bánh phanh: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{M}) \equiv 0$

$$\text{Lập PTCB: } \sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 0$$

Đưa vào điều kiện ma sát: $T_2 \leq T_1 e^{\mu_0 \alpha}$

Giải hệ tìm ẩn số F .

Trường hợp ngẫu lực quay thuận chiều kim đồng hồ, các bước làm tương tự.

3-22. Điều kiện ma sát để giữa cáp và tời không xảy ra trượt là:

$$F_2 \geq F_1 e^{-2\pi n \mu_0}.$$

3-23. Đặt lực vào các vật như hình vẽ

PTCB cho bánh dẫn: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{M}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -r_1 T_1 + r_1 T_2 + M = 0$$

PTCB cho bánh bị dẫn: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = R_2 T_1 - R_2 T_2 - r_2 T_3 = 0$$

PTCB cho vật nặng: $(\vec{N}_C, \vec{F}_{Cms}, \vec{T}_3, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = T_3 - F_{Cms} - P \sin \beta = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_C - P \cos \beta = 0$$

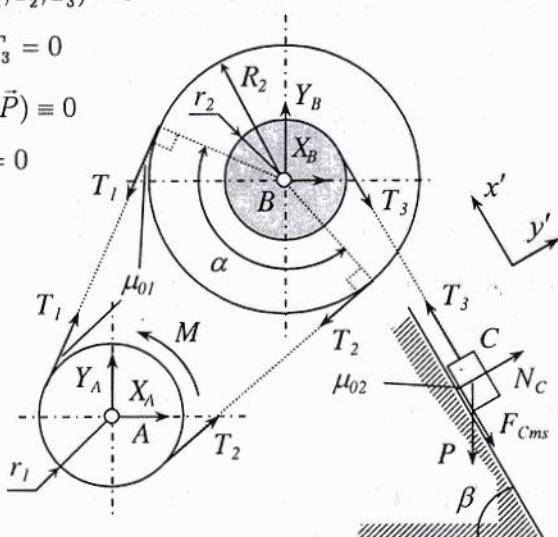
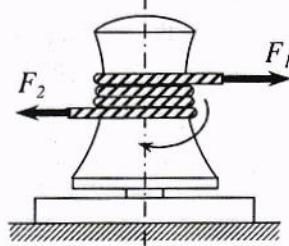
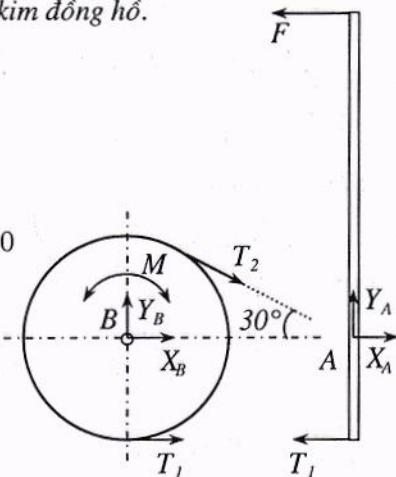
Điều kiện ma sát:

$$F_{Cms} = \mu_{02} N_C;$$

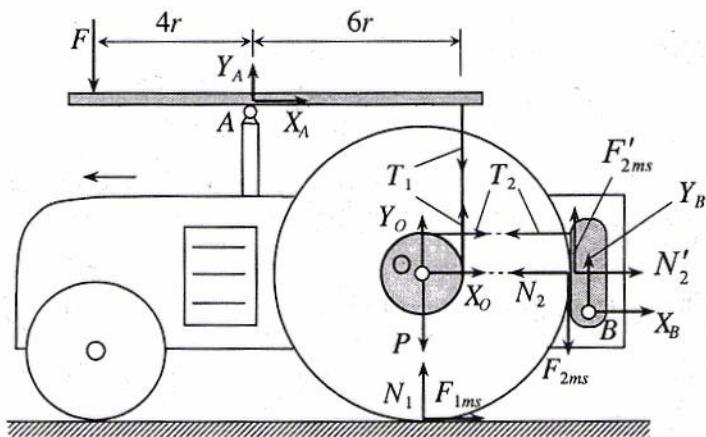
$$T_1 \leq T_2 e^{\mu_0 \alpha}.$$

Giả thiết: $T_1 + T_2 = 2T_0$

Giải hệ tìm ẩn số M, T_0 .



3-24. Đặt lực vào các vật như hình vẽ



PTCB cho tay đòn: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{F}, \vec{T}_1) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = 4rF - 6rT_1 = 0$$

$$\text{Ta suy ra: } T_1 = \frac{2}{3}F.$$

Điều kiện ma sát giữa dây đai với trục:

$$T_2 = T_1 e^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}} = \frac{2}{3}Fe^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}}$$

PTCB cho má phanh: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}_2', \vec{F}_{2ms}', \vec{T}_2) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = 2rT_2 - rN_2' - \Delta F_{2ms}' = 0$$

Điều kiện ma sát tại điểm tiếp xúc giữa má phanh với bánh xe:

$$F_{2ms}' = \mu_{02}N_2'$$

$$\text{Ta suy ra: } N_2' = \frac{4rFe^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}}}{3(\Delta\mu_{02} + r)}; F_{2ms}' = \frac{4r\mu_{02}Fe^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}}}{3(\Delta\mu_{02} + r)}.$$

PTCB cho bánh xe: $(\vec{X}_O, \vec{Y}_O, \vec{N}_1, \vec{F}_{1ms}, \vec{N}_2, \vec{F}_{2ms}, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_O(\vec{F}_k) = RF_{1ms} - RF_{2ms} + rT_1 - rT_2 = 0$$

$$\text{Ta suy ra: } F_{1ms} = \left[\frac{2r}{3R} (e^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}} - 1) + \frac{4r}{3(\Delta\mu_{02} + r)} \mu_{02} e^{\frac{3\pi}{2}\mu_{01}} \right] F.$$

3-25. Đặt lực và ngẫu lực vào các vật như hình vẽ

PTCB cho con lăn: $(\vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{M}_{ms}, \vec{T}, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = T \cos \alpha - F_{ms} = 0$$

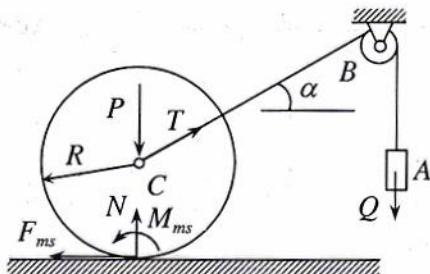
$$\sum F_{ky} = N - P + T \sin \alpha = 0$$

$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = M_{ms} - R T \cos \alpha = 0$$

Với: $T = Q$

Điều kiện ma sát: $F_{ms} \leq \mu_0 N$; $M_{ms} \leq k_0 N$;

Giải hệ tìm ẩn số Q .



3-26. Đặt lực và ngẫu lực vào con lăn và lập 3 PTCB. Dựa vào điều kiện ma sát trượt và lăn.

Giải hệ tìm ẩn α khi con lăn ở trạng thái tối hạn, sau đó gán dấu bất đẳng thức cho α .

3-27. Đặt lực và ngẫu lực vào các vật

PTCB cho vật A: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}'_A, \vec{F}'_{Ams}, \vec{M}'_{Ams}, \vec{M}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = M - RF'_{Ams} - M'_{Ams} = 0$$

PTCB cho vật B: $(\vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{N}'_B, \vec{F}'_{Bms}, \vec{M}'_{Bms}) \equiv 0$

$$\sum \bar{m}_B(\vec{F}_k) = RF'_{Bms} - M'_{Bms} = 0$$

PTCB cho vật C: $(\vec{N}_A, \vec{F}_{Ams}, \vec{M}_{Ams}, \vec{N}_B, \vec{F}_{Bms}, \vec{M}_{Bms}, \vec{P}) \equiv 0$

$$\sum F_{kx} = -F_{Ams} + F_{Bms} = 0$$

$$\sum F_{ky} = N_A + N_B - P = 0$$

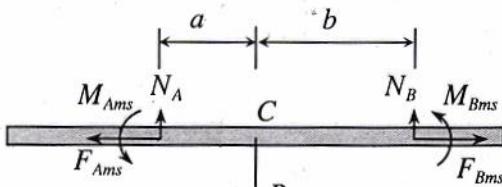
$$\sum \bar{m}_C(\vec{F}_k) = -aN_A + bN_B + M_{Ams} + M_{Bms} = 0$$

Điều kiện ma sát: $F_{Ams} \leq \mu_0 N_A$;

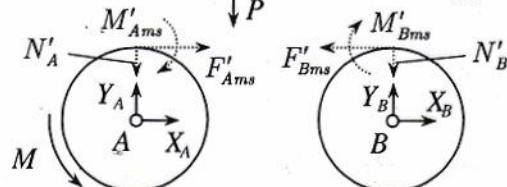
$$F_{Bms} \leq \mu_0 N_B;$$

$$M_{Ams} = k_0 N_A;$$

$$M_{Bms} = k_0 N_B;$$



Giải hệ tìm ẩn số M .



CHƯƠNG 4: TRỌNG TÂM VẬT RẮN

4-1. Chia thanh thành một số hữu hạn phần đã biết trọng tâm. Do trọng lượng của thanh tỷ lệ với độ dài nên công thức xác định trọng tâm của hệ thanh ghép có dạng:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_k l_k}{\sum l_k} \Rightarrow x_C = \frac{\sum x_k l_k}{\sum l_k}; \quad y_C = \frac{\sum y_k l_k}{\sum l_k}; \quad z_C = \frac{\sum z_k l_k}{\sum l_k}$$

Với: x_k, y_k, z_k là tọa độ trọng tâm của phần thanh ghép thứ k ;

l_k là chiều dài của phần thanh ghép thứ k .

4-2. Chia tấm thành một số hữu hạn hình chữ nhật đã biết trọng tâm. Do trọng lượng của tấm tỷ lệ với diện tích nên công thức xác định trọng tâm của tấm ghép là:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum \vec{r}_k A_k}{\sum A_k} \Rightarrow x_C = \frac{\sum x_k A_k}{\sum A_k}; \quad y_C = \frac{\sum y_k A_k}{\sum A_k}; \quad z_C = \frac{\sum z_k A_k}{\sum A_k}$$

Với: x_k, y_k, z_k là tọa độ trọng tâm của phần tấm ghép thứ k

A_k là diện tích của phần tấm ghép thứ k

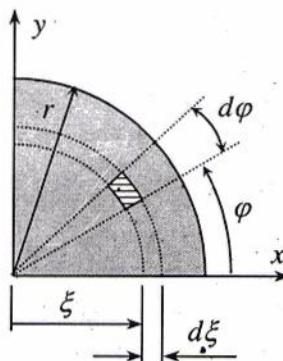
4-3. a) Chia tấm thành các phân tử nhỏ. Do trọng lượng của tấm tỷ lệ với diện tích nên công thức xác định trọng tâm của tấm có dạng:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{A} \int_A \vec{r} dA$$

$$x_C = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{4}{\pi r^2} \int_A \xi \cos \varphi \xi d\varphi d\xi$$

$$= \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r \xi^2 d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{4r}{3\pi}$$

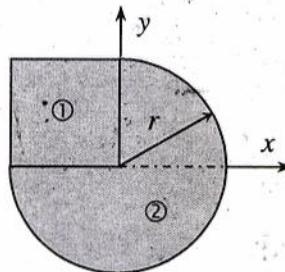
$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{4}{\pi r^2} \int_0^r \xi^2 d\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{4r}{3\pi}$$



b) Chia tấm thành 2 phần, sau đó sử dụng công thức tìm trọng tâm vật ghép:

$$x_C = \frac{\sum x_k A_k}{\sum A_k}; \quad y_C = \frac{\sum y_k A_k}{\sum A_k};$$

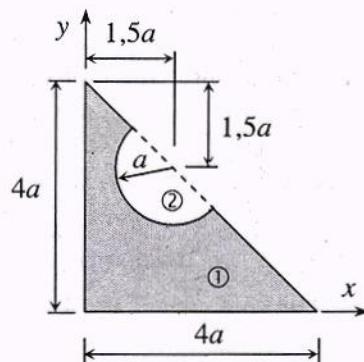
$$\text{Với: } \begin{cases} x_1 = -\frac{r}{2}; & y_1 = \frac{r}{2} \\ x_2 = \frac{4r}{9\pi}; & y_2 = -\frac{4r}{9\pi} \end{cases}; \quad \begin{cases} A_1 = r^2 \\ A_2 = \frac{3\pi r^2}{4} \end{cases}$$



c) Công thức tìm trọng tâm tấm giác nguyên ghép với phần khuyết là nửa tấm tròn:

$$x_C = \frac{\sum x_k A_k}{\sum A_k}; \quad y_C = \frac{\sum y_k A_k}{\sum A_k};$$

Với: $\begin{cases} x_1 = \frac{4a}{3} \\ y_1 = \frac{4a}{3} \\ A_1 = \frac{16a^2}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{3a}{2} - \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2} \\ y_2 = \frac{5a}{2} - \frac{4r}{3\pi} \sqrt{2} \\ A_2 = \frac{-\pi r^2}{2} \end{cases}$



4-4. Trọng tâm của tấm phẳng được tính tương tự như bài 4-3.

4-5. a) Sử dụng công thức tìm trọng tâm của tấm dưới dạng:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{A} \int_A \vec{r} dA$$

Với: $A = \int_0^a b \sqrt{\frac{x}{a}} dx = \frac{2}{3} ab$

$$x_C = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{3}{2ab} \int_A x dx dy$$

$$= \frac{3}{2ab} \int_0^{b\sqrt{\frac{x}{a}}} dy \int_0^a x dx = \frac{3}{5} a$$

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{3}{2ab} \int_A y dx dy = \frac{3}{2ab} \int_0^{b\sqrt{\frac{x}{a}}} y dy \int_0^a dx = \frac{3}{8} b$$

Trường hợp b, c, d làm tương tự

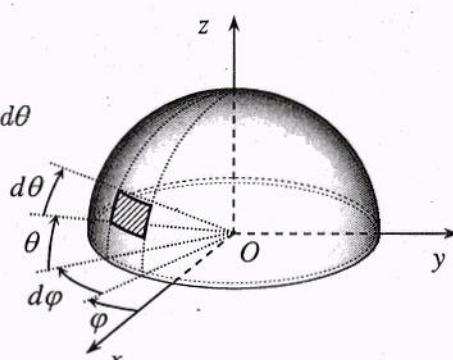
4-6. a) Trọng tâm bán cầu rỗng:

$$z_C = \frac{1}{A} \int_A z dA = \frac{1}{A} \int_A R \sin \theta R \cos \theta d\varphi R d\theta$$

Với: $A = \int_A R \cos \theta d\varphi R d\theta$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2$$

$$z_C = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R}{2}$$



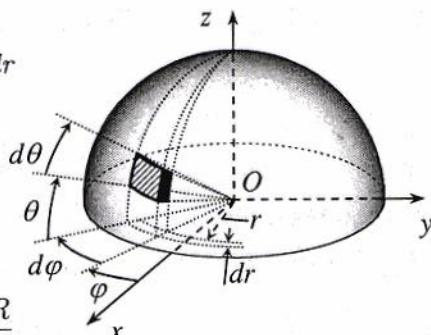
b) Trọng tâm bán cầu đặc:

$$z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV = \frac{1}{V} \int_V r \sin \theta r \cos \theta d\varphi r d\theta dr$$

Với: $V = \int_V r \cos \theta d\varphi r d\theta dr$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$z_C = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{3R}{8}$$

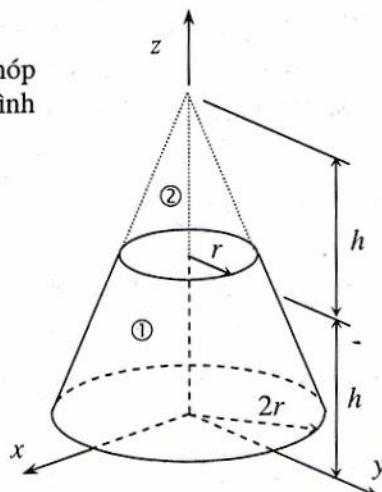


4-7. c) Công thức tìm trọng tâm của hình chóp nguyên chiều cao $2h$ ghép với phần khuyết là hình chóp có chiều cao h có dạng :

$$z_C = \frac{\sum z_k V_k}{\sum V_k}$$

$$\text{Với: } \begin{cases} z_1 = \frac{h}{2} \\ z_2 = \frac{5h}{4} \end{cases}; \quad \begin{cases} V_1 = \frac{8\pi r^2 h}{3} \\ V_2 = \frac{-\pi r^2 h}{3} \end{cases}$$

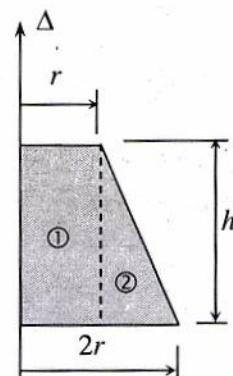
Trường hợp a, b, d làm tương tự



4-8. c) Chia tấm thành 2 phần, sau đó tính thể tích do từng phần quay quanh trục Δ và cộng chúng lại với nhau.

Trường hợp a, b, d áp dụng trực tiếp công thức Guldin sẽ tính ra ngay được kết quả cần tìm.

4-9. Từ bài tập 4-6 ta đã tính được diện tích bề mặt và thể tích của hình cầu bán kính R . Trên cơ sở đó áp dụng công thức Guldin khi quay nửa đường tròn và nửa tấm tròn O bán kính R quanh trục y sẽ tìm được khoảng cách từ trục y đến trọng tâm của nửa đường tròn cũng như nửa tấm tròn.



CHƯƠNG 5: CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

5-1. a) Phương trình quỹ đạo $f(x, y) = 0$ được xác định bằng cách khử biến t từ phương trình chuyển động: $x = t^3 + 2 \Rightarrow t^3 = x - 2$ với $x \geq 2$, thế biểu thức này vào phương trình của tọa độ y ta nhận được phương trình quỹ đạo: $x + y = 5$ với $x \geq 2$ (đường thẳng).

$$- Vận tốc $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(3t^2)^2 + (3t^2)^2} = 3t^2\sqrt{2}$ (cm/s).$$

$$- Gia tốc $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(6t)^2 + (6t)^2} = 6t\sqrt{2}$ (cm/s²).$$

b) Tính toán tương tự như câu a): Phương trình quỹ đạo $x^2 + y^2 = 100$ (đường tròn bán kính 10 cm). Vận tốc $v = 4\pi$ (cm/s). Gia tốc $a = 1,6\pi^2$ (cm/s²).

5-2. Khi xe A dừng lại: $v_1 - a_1 T = 0 \Rightarrow T = \frac{v_1}{a_1}$. Quãng đường xe A đi được:

$$s_A = v_1 T - \frac{1}{2} a_1 T^2 = \frac{v_1^2}{2a_1}. Quãng đường xe B đi được: s_B = v_2 T = \frac{v_1 v_2}{a_1}.$$

$$\text{Khoảng cách giữa hai xe: } d = |s_B - s_A| = \left| \frac{2v_1 v_2 - v_1^2}{2a_1} \right|$$

5-3. Gia tốc của xe: $a = \dot{v} = 6t + 2$.

$$\text{Từ quan hệ } v = \dot{s} \text{ và khi } t = 0, s = 0 \text{ ta suy ra } \int_0^s ds = \int_0^t v dt \Leftrightarrow s = t^3 + t^2.$$

Khi $t = 3$ (s): Gia tốc $a = 20$ m/s, quãng đường $s = 36$ m.

5-4. Do viên đạn chuyển động chậm dần với quỹ đạo thẳng, $a = -kv^3 = \dot{v}$ (chiều của \vec{a} ngược với \vec{v}), ta suy ra:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{-kv^3} = \int_0^t dt \Leftrightarrow \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2} \right) = t$$

$$\text{Do đó: } v = \left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Mặt khác ta có quan hệ $v = \dot{s}$, khi $t = 0$ thì $s = 0$. Do đó:

$$\int_0^s ds = \int_0^t v dt = \int_0^t \left(\frac{1}{v_0^2} + 2kt \right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

Thay số với $k = 0,4$; $v_0 = 60$; $t = 4$ ta nhận được $v \approx 0,559 \text{ m/s}$, $s \approx 4,43 \text{ m}$.

5-5. Đạo hàm hai lần phương trình quỹ đạo $y^2 = 4kx$ theo biến t ta có :

$$2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 4k\ddot{x} \quad (1)$$

Do $v_y = \dot{y} = \beta t$ ta suy ra $a_y = \ddot{y} = \beta$

Mặt khác $a_x = \ddot{x}$. Từ phương trình (1) ta có:

$$2v_y^2 + 2ya_y = 4ka_x \Rightarrow a_x = \frac{\beta}{2k}(\beta t^2 + y).$$

5-6. Vận tốc của điểm P: $v(t) = \dot{s} = 3at^2 + 2bt + c$, gia tốc: $a(t) = \dot{v} = 6at + 2b$.

Do hàm gia tốc có dạng tuyến tính nên giá trị lớn nhất của gia tốc trong khoảng $0 \leq t \leq 10$ đạt được tại $t = 0$ hoặc $t = 10 \text{ s}$:

$$a_{\max} = \max \{a(t=0), a(t=10)\} = 42 \text{ cm/s}^2.$$

Vận tốc có thể đạt giá trị lớn nhất tại hai biên $t = 0$ hoặc $t = 10 \text{ s}$, hoặc khi gia tốc triệt tiêu tại t_0 , ta suy ra $t_0 = -\frac{b}{3a} = 3 \text{ (s)}$. Từ đó ta suy ra:

$$v_{\max} = \max \{v(t=0), v(t=10), v(t=t_0)\} = 135 \text{ cm/s}.$$

5-7. Xe chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái đứng yên với $a^r = 2 \text{ m/s}^2$. Vận tốc của xe $v = a^r t = 2t \text{ m/s}$, $a^n = v^2 / R = 4t^2 / 90$. Tại thời điểm $t = T$, gia tốc của xe:

$$a = \sqrt{(a^r)^2 + (a^n)^2} = 2,4 \Rightarrow \sqrt{(2)^2 + \left(\frac{4T^2}{90}\right)^2} = 2,4$$

Vậy: $T \approx 5,46 \text{ s}$.

Vận tốc của xe khi $t = T$: $v = 2T \approx 10,93 \text{ m/s}$.

5-8. Nếu chọn hệ trục tọa độ $\{xy\}$ như hình vẽ, phương trình chuyển động của hạt vật liệu có dạng:

$$x = v_0 t, y = \frac{1}{2} g t^2, \quad (1)$$

với $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

Từ (1) ta suy ra phương trình quỹ đạo:

$$y(x) = \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Để vật lọt vào khe chứa BC ta có các điều kiện:
 $y(x = 3) \leq 2$, $y(x = 4) \geq 1,5$

Suy ra:

$$\frac{9g}{2v_0^2} \leq 2, \quad \frac{16g}{2v_0^2} \geq 1,5 \quad (2)$$

Giải (2) ta được $4,698 \leq v_0 \leq 7,233$ (m/s).

5-9. Với hệ trục tọa độ cho trước như hình vẽ ta có phương trình chuyển động của bao:

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

Khi $y = -h$ thì $t = T$:

$$-h = -\frac{1}{2} g T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 1,11 \text{ s.}$$

Khoảng cách: $d = v_0 T \approx 13,3 \text{ m.}$

5-10. Từ hình vẽ ta có quan hệ: $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

Suy ra:

$$\frac{y}{x} = \omega_0 t \quad (1)$$

Phương trình quỹ đạo cho trước:

$$y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2 \quad (2)$$

Giải (1), (2) ta nhận được:

$$x = \frac{a^2}{b} \omega_0 t, \quad y = \frac{a^2}{b} (\omega_0 t)^2$$

Biểu thức vận tốc:

$$\dot{x} = \frac{a^2 \omega_0}{b}, \quad \dot{y} = \frac{2a^2 \omega_0^2}{b} t \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{a^2 \omega_0}{b} \sqrt{1 + 4\omega_0^2 t^2}$$

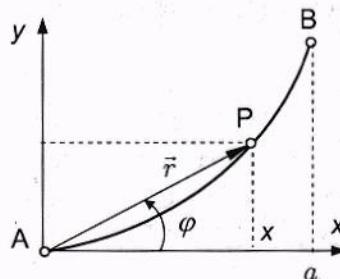
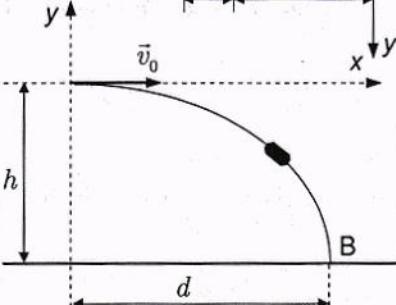
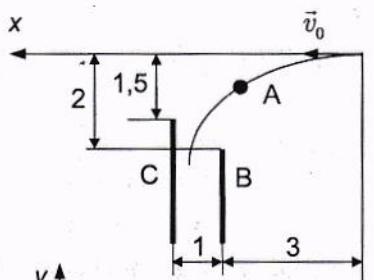
Khi $P \equiv B$, $x = a, t = t_B$: $\frac{a^2}{b} \omega_0 t_B = a \Rightarrow t_B = \frac{b}{a \omega_0}$. Vận tốc của P khi đó:

$$v_P = \frac{a^2 \omega_0}{b} \sqrt{1 + 4 \frac{b^2}{a^2}}$$

5-11. Ta có phương trình $\ddot{x} = 4$, $\ddot{y} = 2t$. Ta suy ra:

$$\dot{x}(t) = 4t + C_1, \quad \dot{y}(t) = t^2 + D_1 \quad (1)$$

$$x(t) = 2t^2 + C_1 t + C_2, \quad y(t) = t^3 / 3 + D_1 t + D_2 \quad (2)$$



Tại $t = 2$: $\dot{x}(t=2) = 12\sqrt{2} \cos 45^\circ = 12$, $\dot{y}(t=2) = 12\sqrt{2} \cos 45^\circ = 12$ cm/s.

Từ (1) ta suy ra $C_1 = 4$, $D_1 = 8$.

Khi $t = 0$: $x(0) = y(0) = 0$, từ (2) ta suy ra $C_2 = D_2 = 0$.

Phương trình chuyển động của điểm: $x = 2t^2 + 4t$, $y = \frac{t^3}{3} + 8t$.

5-12. a) $v_x = \dot{x} = 6t$, $v_y = \dot{y} = 8t \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 10t$

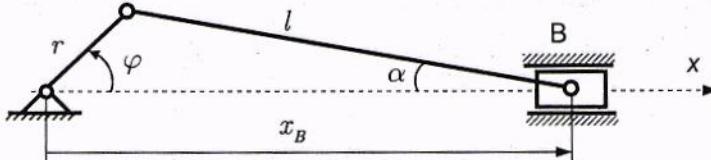
$$v = \dot{s} \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t v dt \Leftrightarrow s = 5t^2$$

b) $v_x = \dot{x} = e^t (\cos t - \sin t)$, $v_y = \dot{y} = e^t (\cos t + \sin t)$, $v_z = \dot{z} = e^t$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{3} e^t$$

$$v = \dot{s} \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t v dt \Leftrightarrow s = \sqrt{3} (e^t - 1).$$

5-13.



Phương trình chuyển động của con trượt B có dạng: $x_B = x_B(t)$, $y_B = 0$.

Từ hình vẽ ta có: $x_B = r \cos \varphi + l \cos \alpha$

Chú ý rằng: $\sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \varphi \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi}$

Vậy phương trình chuyển động của B: $x_B = r \cos \omega t + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}$

Vận tốc $v_B = \dot{x}_B = -r \omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin 2\omega t}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \omega t}}$.

5-14. Phương trình chuyển động của điểm C:

$$x_C = x + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2),$$

$$y_C = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2).$$

Từ đó ta suy ra vận tốc điểm C:

$$\dot{x}_C = \dot{x} + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2),$$

$$\dot{y}_C = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Gia tốc điểm C:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_C &= \ddot{x} + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 - l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \ddot{y}_C &= l_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \cos(\theta_1 + \theta_2).\end{aligned}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 100 \cos(50t) \text{ cm/s}, \ddot{x} = -5000 \sin(50t) \text{ cm/s}^2 \\ \dot{\theta}_1 &= 10\pi \cos(50t) \text{ rad/s}, \ddot{\theta}_1 = -500\pi \sin(50t) \text{ rad/s}^2 \\ \dot{\theta}_2 &= 10\pi \cos(50t - \pi/3) \text{ rad/s}, \ddot{\theta}_2 = -500\pi \sin(50t - \pi/3) \text{ rad/s}^2.\end{aligned}$$

5-15. Chọn hệ tọa độ cực với gốc tại A như hình vẽ. Ta có:

$$AB = r = 2\rho \cos \varphi$$

Từ đó ta suy ra :

$$\dot{r} = -2\rho\dot{\varphi} \sin \varphi, \ddot{r} = -2\rho(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi)$$

Áp dụng công thức (5.6) ta có :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = -2\rho\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}_r + 2\rho\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}_\varphi.$$

Áp dụng công thức (5.7) ta có

$$\vec{a} = -2\rho(\ddot{\varphi} \sin \varphi + 2\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \vec{e}_r + 2\rho(\dot{\varphi} \cos \varphi - 2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

5-16. Các tọa độ cho trước: $r = 90 = \text{const}$, $\theta = 0,5t$ và $z = 3 \sin 4\theta = 3 \sin 2t$. Ta suy ra các đạo hàm:

$$\dot{r} = 0; \dot{\theta} = 0,5; \dot{z} = 6 \cos 2t.$$

$$\ddot{r} = 0; \ddot{\theta} = 0; \ddot{z} = -12 \sin 2t.$$

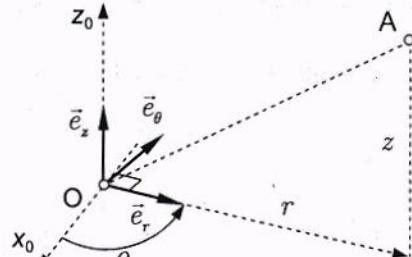
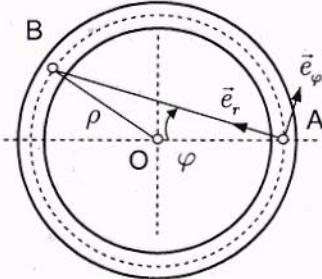
Áp dụng công thức (5.8) với hệ tọa độ trục:

$$\vec{v}_A = 45\vec{e}_\theta + 6 \cos 2t \vec{e}_z$$

Áp dụng công thức (5.9):

$$\vec{a}_A = -22,5\vec{e}_r - 12 \sin 2t \vec{e}_z$$

Tại $t = 3$ s: $v_A \approx 45,37 \text{ cm/s}$ và $a_A \approx 22,75 \text{ cm/s}^2$.



CHƯƠNG 6: CHUYỂN ĐỘNG CƠ BẢN CỦA VẬT RĂN

6-1. Vận tốc góc tại thời điểm $t = t_1$: $\omega(t_1) = 1000 \frac{\pi}{30} \text{ rad/s.}$

Bánh đà chuyển động quay nhanh dần đều từ trạng thái tĩnh:

$$\omega(t_1) = \varepsilon t_1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega(t_1)}{t_1} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad/s}^2$$

Số vòng quay được sau $t_2 = 30 \text{ s:}$

$$N = \frac{\varphi(t_2)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \varepsilon t_2^2 = 375 \text{ vòng}$$

Tại thời điểm $t_3 = 1 \text{ s: } \omega(t_3) = \varepsilon t_3 = \frac{5\pi}{3} \text{ rad/s, áp dụng các công thức (6.8)-(6.10)}$

ta có:

$$v_A = R\omega(t_3) = \frac{d}{2} \omega(t_3) \approx 157,1 \text{ cm/s.}$$

$$a_A = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\omega^2)^2} = \frac{d}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4(t_3)} \approx 837,3 \text{ cm/s}^2.$$

6-2. $\varphi(T) = 2\pi N = \frac{1}{2} \varepsilon T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi N}{\varepsilon}} \approx 4,09 \text{ s.}$

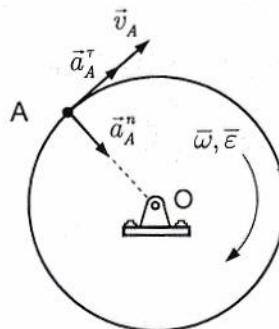
Vận tốc góc của đĩa tại thời điểm $t = T$:

$$\omega = \varepsilon T \approx 24,56 \text{ rad/s.}$$

Ta suy ra:

$$v_A = R\omega \approx 11,05 \text{ m/s}$$

$$a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4(T)} \approx 271,45 \text{ m/s}^2$$



6-3. Gia tốc góc $\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = 10t \text{ rad/s}^2$.

Tại thời điểm $t = 0,5 \text{ s: } \omega = 3,25 \text{ rad/s và } \varepsilon = 5 \text{ rad/s}^2$. Ta suy ra:

$$v_A = R\omega = 2,6 \text{ m/s}$$

$$a_A = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4(T)} \approx 9,35 \text{ m/s}^2.$$

6-4. Vận tốc góc $\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = 3t - 4 \text{ rad/s}$ và gia tốc góc $\varepsilon = \dot{\omega}(t) = 3 \text{ rad/s}^2$.

Như vậy vật quay biến đổi đều.

Tại thời điểm $t = 1 \text{ s: } \bar{\omega} = -1, \bar{\varepsilon} = 3$, vật quay chậm dần. Vận tốc và gia tốc của điểm A: $v_A = 0,2 \text{ m/s}, a_A \approx 0,633 \text{ m/s}^2$.

Tại thời điểm $t = 2$ s: $\bar{\omega} = 2$, $\bar{\varepsilon} = 3$, vật quay nhanh dần. Vận tốc và gia tốc của điểm A: $v_A = 0,4$ m/s, $a_A = 1$ m/s 2 .

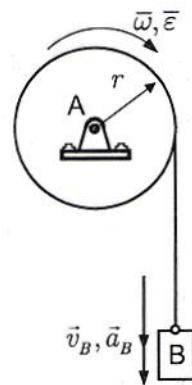
6-5. Vận tốc góc $\varepsilon = \dot{\omega} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt = \int_0^t (0,6t^2 + 0,75) dt$

Suy ra: $\omega = \omega_0 + 0,2t^3 + 0,75t$.

Tại thời điểm $t = 2$ s: $\omega = 9,1$ rad/s và $\varepsilon = 3,15$ rad/s 2 .

Vận tốc và gia tốc của vật B:

$v_B = r\omega = 1,365$ m/s, $a_B = r\varepsilon \approx 0,473$ m/s 2 .



6-6. Vận tốc của thanh răng $v = \dot{x} = kx_0 \cos kt$. Từ hình vẽ của hệ truyền động ta suy ra vận tốc góc, gia tốc góc của kim:

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 r_4} v = \frac{r_3 k x_0}{r_2 r_4} \cos kt, \quad \varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = -\frac{r_3 k^2 x_0}{r_2 r_4} \sin kt.$$

6-7. Bánh đai A chuyển động nhanh dần đều từ trạng thái đứng yên, vậy vận tốc góc bánh A: $\omega_A = \varepsilon_0 t$.

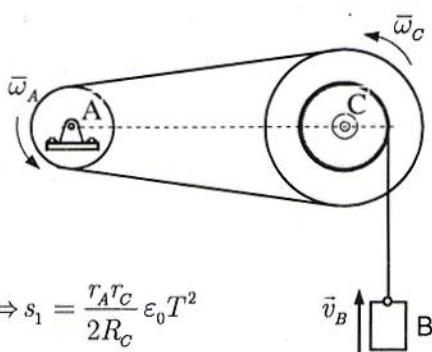
Vận tốc góc bánh C:

$$\omega_C = \frac{r_A}{R_C} \omega_A = \frac{r_A}{R_C} \varepsilon_0 t.$$

Vận tốc vật nâng B:

$$v_B(t) = \omega_C r_C = \frac{r_A r_C}{R_C} \varepsilon_0 t.$$

Mặt khác $v_B = \dot{s} \Rightarrow \int_0^{s_1} ds = \int_0^T \frac{r_A r_C}{R_C} \varepsilon_0 t dt \Leftrightarrow s_1 = \frac{r_A r_C}{2 R_C} \varepsilon_0 T^2$



Từ đó ta suy ra thời điểm khảo sát: $T = \sqrt{\frac{2 s_1 R_C}{r_A r_C \varepsilon_0}}$

Vậy $v_B(T) = \frac{r_A r_C}{R_C} \varepsilon_0 T = \sqrt{\frac{2 s_1 r_A r_C \varepsilon_0}{R_C}} \approx 1,34$ m/s.

6-8. Vận tốc góc của bánh răng 1: $\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = 32\pi$ rad/s.

a) Tỷ số truyền của hộp số: $i = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_4 / Z_3}{Z_1 / Z_2} = 16$.

b) Vận tốc góc tời B: $\omega_B = \omega_4 = \frac{\omega_1}{i} = 2\pi \Rightarrow n_B = \frac{30\omega_B}{\pi} = 60$ vòng/phút.

c) Vận tốc của vật C: $v_C = \frac{d}{2}\omega_B = 30\pi \approx 94,25$ cm/s (hoặc 56,55 m/phút).

6-9. Quan hệ vận tốc góc của bộ truyền: $\omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2$.

Khi $t = T$: $\omega_2 = 50 \Rightarrow \omega_1 = \frac{R_2}{R_1} \omega_2 = 90$ rad/s.

Mặt khác: $\omega_1 = \varepsilon_1 T \Rightarrow T = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = 45$ s.

6-10. AB chuyển động tịnh tiến:

$$x_B = r + r \cos \alpha$$

Biểu thức vận tốc và gia tốc của AB:

$$v_{AB} = \dot{x}_B = -r\dot{\alpha} \sin \alpha$$

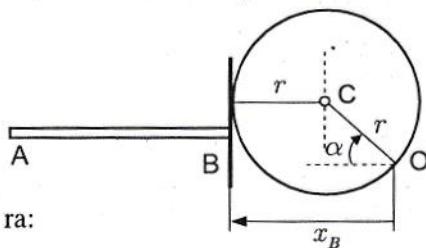
$$a_{AB} = \ddot{x}_B = -r\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - r\ddot{\alpha} \sin \alpha.$$

Với $\alpha = 0,5t^2 \Rightarrow \dot{\alpha} = t$, $\ddot{\alpha} = 1$. Từ đó ta suy ra:

$$v_{AB} = \dot{x}_B = -rt \sin(0,5t^2)$$

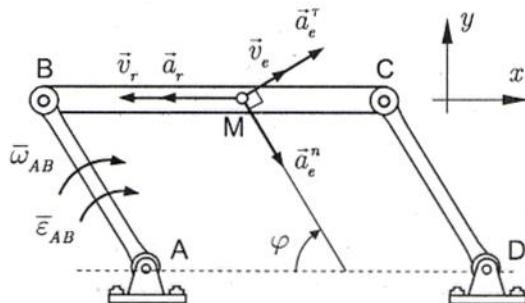
$$a_{AB} = \ddot{x}_B = -rt^2 \cos(0,5t^2) - r \sin(0,5t^2).$$

Khi $t = 5$ s: $v_{AB} \approx 3,32$ cm/s và $a_{AB} \approx 2,49$ m/s² (ngược chiều \vec{v}_B).



CHƯƠNG 7: CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM

7-1. Vận tốc góc và gia tốc góc của AB: $\omega_{AB} = \dot{\varphi} = \frac{\pi t}{8}$, $\varepsilon_{AB} = \ddot{\varphi} = \frac{\pi}{8}$.



Chọn BC là hệ quy chiếu động. Chuyển động tương đối của M là chuyển động thẳng theo đường CB:

$$v_r = \dot{s} = \frac{t}{4}, a_r = \ddot{s} = \frac{1}{4}.$$

Chuyển động theo là chuyển động tịnh tiến:

$$v_e = AB\omega_{AB} = \frac{\pi t}{16}, a_e^r = AB\varepsilon_{AB} = \frac{\pi}{16}, a_e^n = AB\omega_{AB}^2 = \frac{\pi^2 t^2}{128}.$$

Chú ý rằng trong trường hợp này gia tốc Coriolis $a_c = 0$.

Chiếu công thức cộng vận tốc (6.1): $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$ lên các trục x, y ($x \perp y$) như hình vẽ ta có:

$$v_{ax} = v_e \sin \varphi - v_r = \frac{\pi t}{16} \sin \left(\frac{\pi t^2}{16} \right) - \frac{t}{4}$$

$$v_{ay} = v_e \cos \varphi = \frac{\pi t}{16} \cos \left(\frac{\pi t^2}{16} \right)$$

Theo cách tương tự, chiếu công thức cộng gia tốc (6.2): $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$ lên các trục x, y ta nhận được các phương trình đại số:

$$a_{ax} = a_e^r \sin \varphi + a_e^n \cos \varphi - a_r = \frac{\pi}{16} \sin \left(\frac{\pi t^2}{16} \right) + \frac{\pi^2 t^2}{128} \cos \left(\frac{\pi t^2}{16} \right) - \frac{1}{4}$$

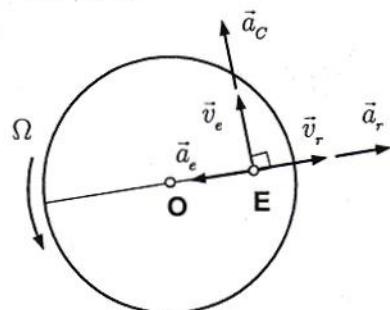
$$a_{ay} = a_e^r \cos \varphi - a_e^n \sin \varphi = \frac{\pi}{16} \cos \left(\frac{\pi t^2}{16} \right) - \frac{\pi^2 t^2}{128} \sin \left(\frac{\pi t^2}{16} \right)$$

Tại thời điểm $t = 2$ s:

$$v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} \approx 0,356 \text{ m/s}$$

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 0,133 \text{ m/s}^2.$$

7-2. Chọn đĩa làm hệ quy chiếu động.



Chuyển động tương đối của E có quỹ đạo thẳng:

$$v_r = \dot{a} = R\omega \cos \omega t, \quad a_r = \ddot{a} = -R\omega^2 \sin \omega t.$$

Chuyển động theo là chuyển động quay xung quanh trục cố định qua O:

$$v_e = a\Omega = R\Omega \sin \omega t, \quad a_e = a\Omega^2 = R\Omega^2 \sin \omega t.$$

Gia tốc Coriolis: $a_C = 2\Omega v_r = 2R\Omega \omega \cos \omega t$.

Áp dụng công thức cộng vận tốc và cộng gia tốc ta nhận được:

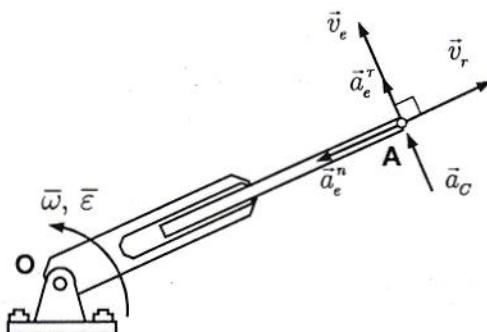
$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = R \sqrt{\omega^2 \sin^2 \omega t + \Omega^2 \cos^2 \omega t}$$

$$a_a = \sqrt{(a_r - a_e)^2 + a_C^2} = R \sqrt{(\omega^4 + \Omega^4 + 2\omega^2\Omega^2) \sin^2 \omega t + 4\omega^2\Omega^2 \cos^2 \omega t}$$

7-3. Với hệ quy chiếu động quay xung quanh trục cố định, các thành phần vận tốc và gia tốc được biểu diễn trên hình vẽ, trong đó:

$$v_r = v, \quad a_r = 0.$$

$$v_e = OA\omega, \quad a_e^\tau = OA\varepsilon, \quad a_e^n = OA\omega^2, \quad a_C = 2\omega v.$$



Vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm cuối A:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \approx 7,52 \text{ m/s}; \quad a_a = \sqrt{(a_e^\tau + a_C)^2 + (a_e^n)^2} \approx 38,06 \text{ m/s}^2.$$

7-4. Chọn OA là hệ quy chiếu động.

$$\omega_e = \dot{\theta} = 3t^2, \varepsilon_e = \ddot{\theta} = 6t.$$

Các thành phần vận tốc và gia tốc của B:

$$v_r = \dot{r} = 200t, a_r = 200.$$

$$v_e = r\omega_e, a_e^\tau = r\varepsilon_e, a_e^n = r\omega_e^2, a_C = 2\omega_e \dot{r}.$$

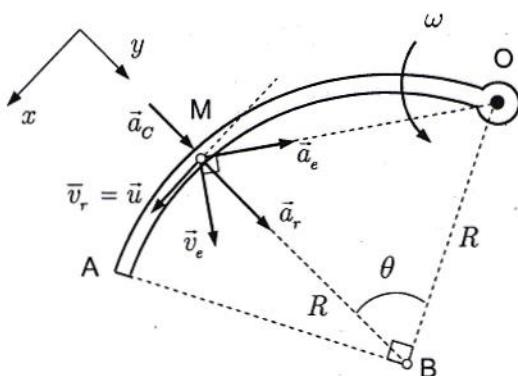
Vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của B tại $t = 1$ s:

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} \approx 0,36 \text{ m/s.}$$

$$a_a = \sqrt{(a_e^\tau + a_C)^2 + (a_r - a_e^n)^2} \approx 1,93 \text{ m/s}^2.$$

Chú ý: Có thể giải bài toán nhờ các công thức (5.6), (5.7) trên hệ tọa độ cực tại chương 5.

7-5. Chọn hệ quy chiếu động là OA. Chuyển động tương đối của M trên quỹ đạo tròn tâm B.



Vận tốc và gia tốc tương đối:

$$v_r = u, a_r = a_r^n = \frac{u^2}{R}.$$

Vận tốc và gia tốc theo:

$$v_e = OM\omega = 2R\omega \sin \frac{\theta}{2}, a_e = a_e^n = 2R\omega^2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Gia tốc Coriolis: $a_C = 2u\omega$.

Chiếu công thức cộng vận tốc và cộng gia tốc lên hai trục x, y ta nhận được biểu thức vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của M:

$$v_{ax} = u + 2R\omega \sin^2 \frac{\theta}{2}, v_{ay} = R\omega \sin \theta$$

$$a_{ax} = -R\omega^2 \sin \theta, a_{ay} = 2u\omega + \frac{u^2}{R} + 2R\omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

7-6. Các thành phần vận tốc:

$$v_r = u, v_e = R\omega(1 - \cos \varphi).$$

Các thành phần gia tốc:

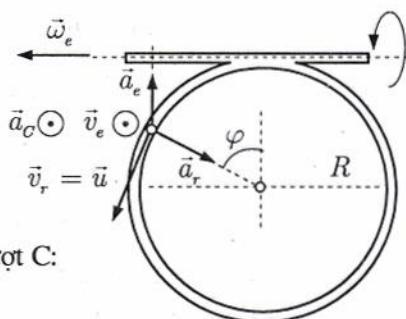
$$a_r = \frac{u^2}{R}, a_e = R\omega^2(1 - \cos \varphi),$$

$$a_c = 2u\omega \sin \varphi.$$

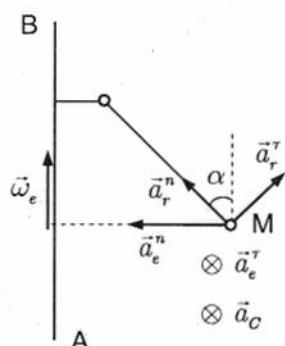
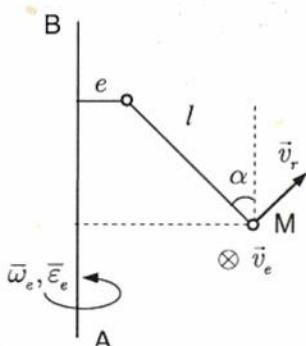
Vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của con trượt C:

$$v_a = \sqrt{u^2 + R^2\omega^2(1 - \cos \varphi)^2},$$

$$a_a = \sqrt{\left[\frac{u^2}{R} \cos \varphi - R\omega^2(1 - \cos \varphi)\right]^2 + 4u^2\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$



7-7. Hai quả cầu M, N có vận tốc và gia tốc như nhau. Chọn hệ quy chiếu động là trục quay AB, $\omega_e = \omega$, $\varepsilon_e = \varepsilon$.



Các thành phần vận tốc tương đối và vận tốc theo:

$$v_r = l\omega_1, v_e = (e + l \sin \alpha) \omega.$$

Các thành phần gia tốc:

$$a_r^n = l\omega_1^2, a_r^\tau = l\varepsilon_1, a_e^n = (e + l \sin \alpha) \omega^2, a_e^\tau = (e + l \sin \alpha) \varepsilon,$$

$$a_c = 2l\omega_1 \omega \cos \alpha.$$

Vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của quả văng M: $v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$,

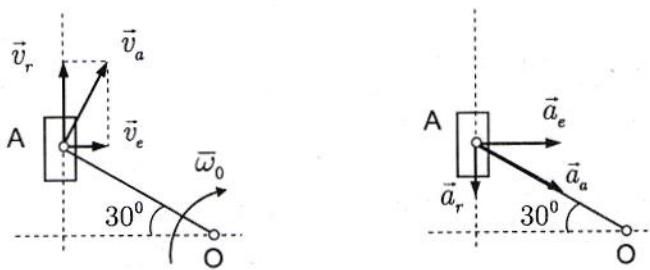
$$a_a = \sqrt{(a_e^\tau + a_c)^2 + (a_r^n \cos \alpha - a_r^n \sin \alpha - a_e^n)^2 + (a_r^\tau \sin \alpha + a_r^n \cos \alpha)^2}.$$

Thay số ta nhận được:

$$v_a \approx 100,9 \text{ cm/s}$$

$$a_a \approx 293,7 \text{ cm/s}^2.$$

7-8. Chọn culit K là hệ quy chiếu động: chuyển động theo là tịnh tiến.



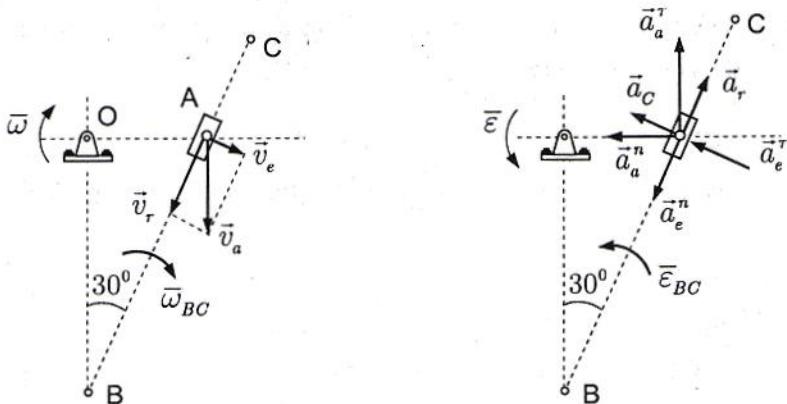
$$Bài toán vận tốc: v_r = v_a \cos 30^\circ = \frac{l\omega_0 \sqrt{3}}{2}, v_K = v_e = v_a \sin 30^\circ = \frac{l\omega_0}{2}.$$

Bài toán gia tốc: $a_a^n = a_a^r = l\omega_0^2$, $a_C = 0$. Từ quan hệ $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r$ ta suy ra giá tốc của culit K:

$$a_K = a_e = a_a \cos 30^\circ = \frac{l\omega_0^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Chiều của \vec{a}_K phù hợp với chiều trên hình vẽ.

7-9. Chọn BC là hệ quy chiếu động.



$$Bài toán vận tốc: v_a = OA\omega, v_r = v_a \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}, v_e = v_a \sin 30^\circ = 1,5 \text{ m/s.}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_e}{AB} = 1,5 \text{ rad/s.}$$

Bài toán gia tốc: $a_a^n = OA\omega^2 = 18$; $a_a^r = OA\varepsilon = 1$; $a_C = 2v_r\omega_{BC} = 4,5\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.

Dựa trên quan hệ $\vec{a}_a^r + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_C$ và từ hình vẽ các thành phần này ta suy ra phương trình:

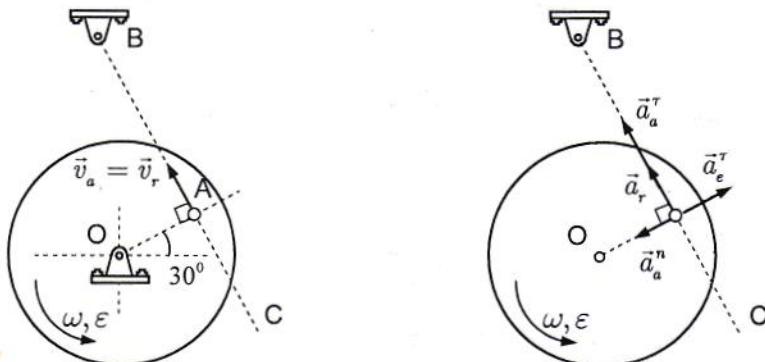
$$a_a^r \sin 30^\circ + a_a^n \cos 30^\circ = a_e^r + a_C$$

Vậy $a_e^\tau = \frac{a_a^\tau}{2} + \frac{a_a^n \sqrt{3}}{2} - a_c = 0,5 \text{ m/s}^2$. Gia tốc góc của BC là:

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_e^\tau}{AB} = 0,5 \text{ rad/s}^2.$$

Chiều của \vec{a}_e^τ và $\vec{\varepsilon}_{BC}$ phù hợp với chiều trên hình vẽ.

7-10. Chọn BC là hệ quy chiếu động.



Bài toán vận tốc: Điểm A có chuyển động tương đối theo quỹ đạo thẳng dọc theo BC, chuyển động tuyệt đối theo quỹ đạo tròn tâm O với bán kính r . Tại vị trí khảo sát, OA vuông góc với BC. Do đó phương của \vec{v}_a trùng với phương của \vec{v}_r . Từ công thức cộng vận tốc ta suy ra:

$$v_e = 0 \Rightarrow \omega_{BC} = 0$$

$$v_r = v_a = r\omega = 1,8 \text{ m/s.}$$

Bài toán gia tốc: Do $\omega_e = 0 \Rightarrow a_c = 0$, từ công thức cộng gia tốc và hình vẽ trên ta có quan hệ:

$$a_a^n = -a_e^\tau$$

$$a_a^\tau = a_r$$

Như vậy chiều của \vec{a}_e^τ ngược với chiều hình vẽ. Cuối cùng ta có các kết quả sau:

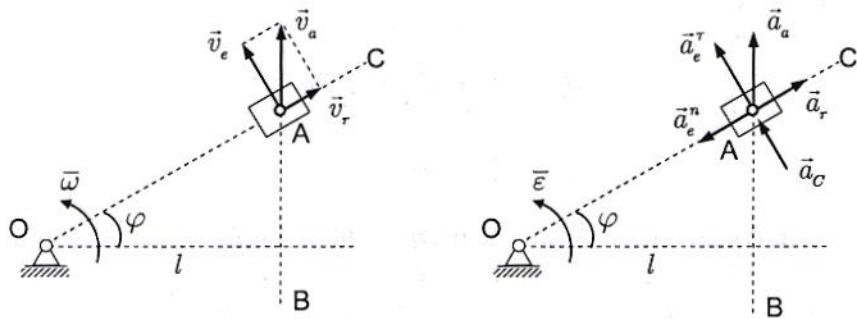
$$a_e^\tau = r\omega^2 \Rightarrow \varepsilon_{BC} = \frac{a_e^\tau}{AB} = \frac{r\omega^2}{l} = 14,4 \text{ rad/s}^2 \text{ (thuận chiều đồng hồ).}$$

$$a_r = r\varepsilon = 3 \text{ m/s}^2.$$

7-11. Chọn OC là hệ quy chiếu động. Các thành phần vận tốc và gia tốc (tuyệt đối, tương đối và theo) của con trượt A được biểu diễn trên hình vẽ.

Bài toán vận tốc: Vận tốc theo $v_e = OA\omega = \frac{l\omega}{\cos \varphi}$. Mặt khác từ công thức cộng vận tốc ta có: $v_a \cos \varphi = v_e$, $v_a \sin \varphi = v_r$.

Ta suy ra: $v_{AB} = v_a = \frac{v_e}{\cos \varphi} = \frac{l\omega}{\cos^2 \varphi}$, $v_r = v_a \sin \varphi = \frac{l\omega \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.



$$Bài toán gia tốc: a_e^\tau = OA\varepsilon = \frac{l}{\cos \varphi} \varepsilon; a_c = 2v_r\omega = \frac{2l\omega^2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Sử dụng công thức cộng gia tốc, từ hình vẽ ta suy ra:

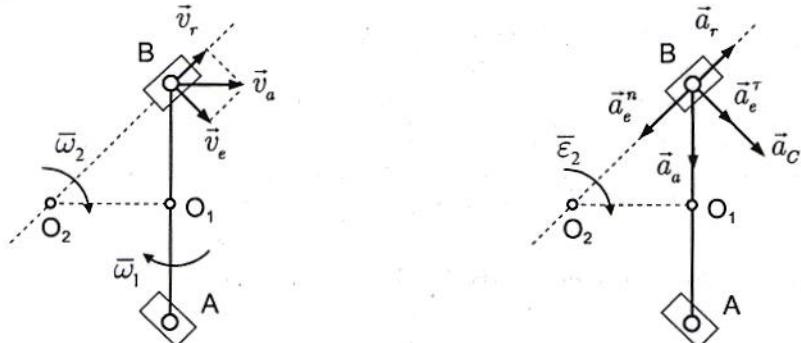
$$a_a \cos \varphi = a_e^\tau + a_c \Rightarrow a_a = \frac{1}{\cos \varphi} (a_e^\tau + a_c) = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \varepsilon + \frac{2l \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \omega^2.$$

Vậy gia tốc của AB là:

$$a_{AB} = a_a = \frac{l}{\cos^2 \varphi} \varepsilon + \frac{2l \sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \omega^2.$$

Chiều của \vec{a}_{AB} giống như chiều trên hình vẽ.

7-12. Chọn máng chữ thập là hệ quy chiếu động.



Bài toán vận tốc: Vận tốc tuyệt đối của B là $\vec{v}_a = b\omega_1$. Tại vị trí khảo sát ta có:

$$v_e = v_r = \frac{v_a}{\sqrt{2}} = \frac{b\omega_1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_e}{O_2 B} = \frac{\omega_1}{2}.$$

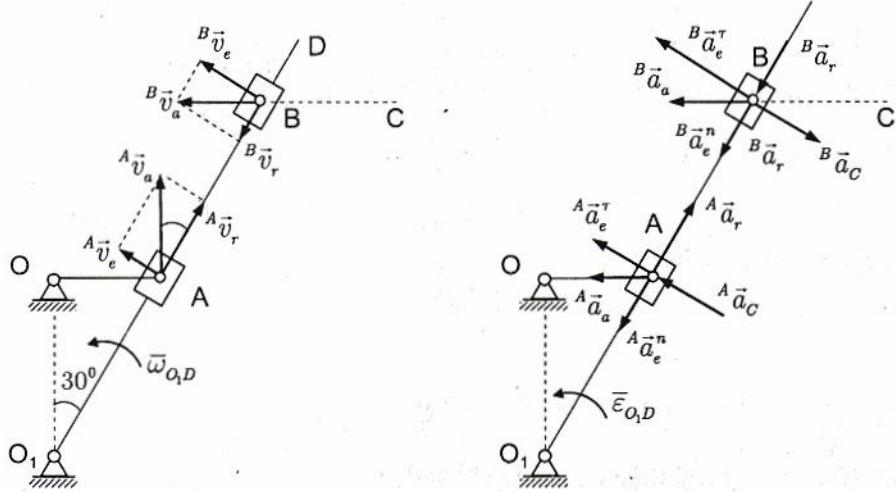
$$Bài toán gia tốc: \quad a_a = a_a^n = b\omega^2; \quad a_C = 2\omega_2 v_r = \frac{b\omega_1^2}{\sqrt{2}}.$$

Sử dụng công thức cộng gia tốc, từ hình vẽ ta suy ra:

$$\frac{a_a}{\sqrt{2}} = a_e^\tau + a_C \Rightarrow a_e^\tau = \frac{a_a}{\sqrt{2}} - a_C = 0.$$

Như vậy gia tốc góc của máng chữ thập là $\varepsilon_g = \frac{a_e^\tau}{O_2B} = 0$.

7-13. Hai con trượt A, B đều có chuyển động tương đối so với O₁D. Ta chọn O₁D là hệ qui chiếu động khi khảo sát chuyển động của A và B.



Bài toán vận tốc: ${}^A v_a = r\omega_0$, từ hình vẽ ta suy ra:

$${}^A v_r = {}^A v_a \cos 30^\circ = \frac{r\omega_0 \sqrt{3}}{2}, \quad {}^A v_e = {}^A v_a \sin 30^\circ = \frac{r\omega_0}{2}.$$

Vận tốc góc của O₁D: $\omega_{O_1D} = \frac{{}^A v_e}{O_1A} = \frac{\omega_0}{4}$ (chiều biểu diễn trên hình vẽ).

Khảo sát chuyển động của con trượt B: ${}^B v_e = O_1B \omega_{O_1D} = r\omega_0$.

$${}^B v_a = \frac{{}^B v_e}{\cos 30^\circ} = \frac{2r\omega_0}{\sqrt{3}}, \quad {}^B v_r = {}^B v_a \sin 30^\circ = \frac{r\omega_0}{\sqrt{3}}.$$

Vận tốc của BC: $v_{BC} = {}^B v_a = \frac{2r\omega_0}{\sqrt{3}}$.

Bài toán gia tốc: ${}^A a_a = {}^A a_a^n = r\omega_0^2$; ${}^A a_C = 2 {}^A v_r \omega_{O,D} = \frac{r\omega_0^2 \sqrt{3}}{4}$. Ta suy ra:

$${}^A a_a \cos 30^\circ = {}^A a_e + {}^A a_C \Rightarrow {}^A a_e = {}^A a_a \frac{\sqrt{3}}{2} - {}^A a_C = \frac{r\omega_0^2 \sqrt{3}}{4}.$$

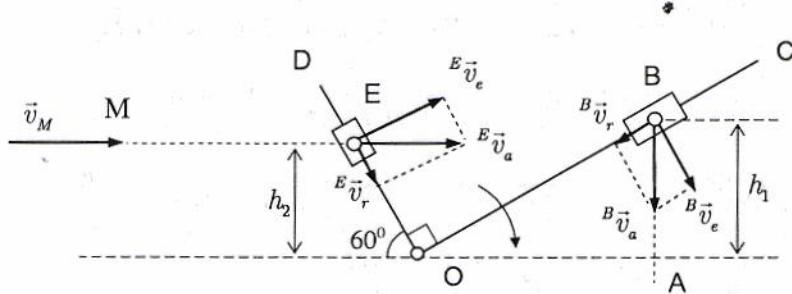
Gia tốc góc của O₁D: $\varepsilon_{O_1D} = \frac{{}^A a_e}{O_1 A} = \frac{\omega_0^2 \sqrt{3}}{8}$ (chiều biểu diễn trên hình vẽ).

Xét chuyển động của B: ${}^B a_e = \frac{r\omega_0^2 \sqrt{3}}{2}$; ${}^B a_C = 2 {}^B v_r \omega_{O,D} = \frac{r\omega_0^2}{2\sqrt{3}}$. Ta suy ra:

$${}^B a_a \cos 30^\circ = {}^B a_e - {}^B a_C \Rightarrow {}^B a_a = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{r\omega_0^2 \sqrt{3}}{2} - \frac{r\omega_0^2}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{3} r\omega_0^2.$$

Gia tốc của BC: $a_{BC} = {}^B a_a = \frac{2}{3} r\omega_0^2$.

7-14. Chọn DOC là hệ quy chiếu động.



Bài toán vận tốc: ${}^E v_a = v_M = 10 \text{ cm/s}$. Từ hình vẽ ta suy ra:

$${}^E v_e = {}^E v_a \cos 30^\circ, {}^E v_r = {}^E v_a \sin 30^\circ.$$

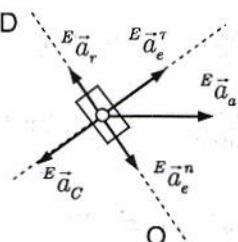
Vận tốc góc của OC: $\omega_{OC} = \frac{{}^E v_e}{OE} = 0,5 \text{ rad/s}$.

Vận tốc của AB: ${}^B v_e = OB \omega_{OC}, v_{AB} = {}^B v_a = \frac{{}^B v_e}{\cos 30^\circ} = \frac{40}{\sqrt{3}} \approx 23 \text{ cm/s}$.

Bài toán gia tốc: ${}^E a_a = a_M; {}^E a_C = 2 \omega_{OC} {}^E v_r$.

$${}^E a_e = {}^E a_C + \frac{\sqrt{3}}{2} {}^E a_a = 5 + \sqrt{3}.$$

$$\varepsilon_{OC} = \frac{\sqrt{3} a_e}{2 h_2} = \frac{\sqrt{3}(5 + \sqrt{3})}{30} \approx 0,39 \text{ rad/s}^2.$$

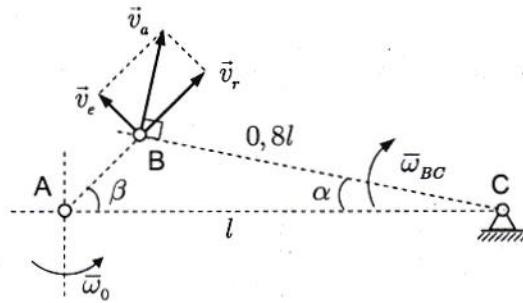


7-16. Tại vị trí khảo sát như hình vẽ, ta xác định được khoảng cách AB và góc β nhờ quan hệ hình học sau:

$$AB \sin \beta = BC \sin \alpha$$

$$AB \cos \beta = AC - BC \cos \alpha$$

Với $\alpha = 20^\circ$ ta xác định được: $\beta \approx 47,78^\circ$ và $AB \approx 0,37l$.



Chọn đĩa là hệ quy chiếu động.

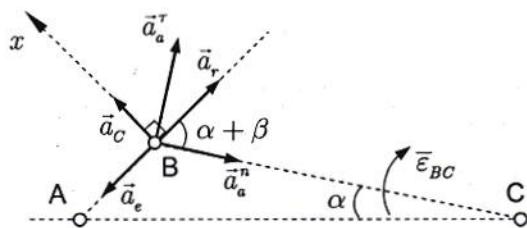
Bài toán vận tốc: $v_e = AB\omega_0 = 0,37l\omega_0$. Từ hình vẽ trên ta suy ra:

$$v_a \cos(\alpha + \beta) = v_e \Rightarrow v_a = \frac{0,37l\omega_0}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 0,98l\omega_0$$

$$v_a \sin(\alpha + \beta) = v_r \Rightarrow v_r = 0,37l\omega_0 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \approx 0,91l\omega_0$$

Vận tốc góc của BC: $\omega_{BC} = \frac{v_a}{BC} \approx 1,225 \omega_0$

Bài toán gia tốc: $a_a^n = BC\omega_{BC}^2$; $a_c = 2v_r\omega_0$; $a_e = a_e^n = AB\omega_0^2$.



Chiếu công thức cộng gia tốc $\vec{a}_a^r + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$ lên trục x ta nhận được:

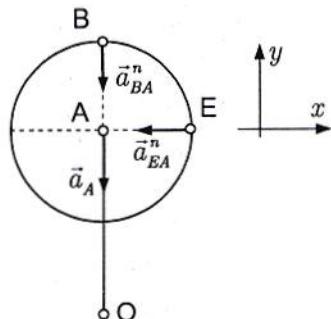
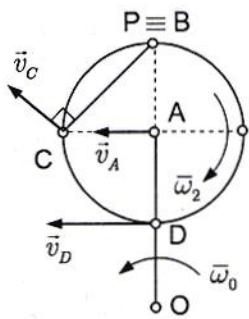
$$a_a^r \cos(\alpha + \beta) - a_a^n \sin(\alpha + \beta) = a_c$$

Ta suy ra: $a_a^r = a_a^n \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} + a_c \approx 4,76l\omega_0^2$.

Gia tốc góc của BC: $\epsilon_{BC} = \frac{a_a^r}{BC} \approx 5,95 \omega_0^2$ (chiều được biểu diễn trên hình vẽ).

CHƯƠNG 8: CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

8-1.



Bài toán vận tốc: $v_A = OA\omega_0 = 2r\omega_0$. Tâm vận tốc tức thời P \equiv B. Ta suy ra:

$$\frac{v_A}{r} = \frac{v_D}{2r} = \frac{v_C}{r\sqrt{2}} = \omega_2$$

$$\omega_2 = 2\omega_0, v_D = 4r\omega_0, v_C = 2r\sqrt{2}\omega_0$$

Bài toán gia tốc: $a_A = a_A^n = OA\omega_0^2 = 2r\omega_0^2$. Gia tốc góc của bánh 2 $\epsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{r} = 0$.

Các thành phần gia tốc: $a_{BA}^n = r\omega_2^2 = 4r\omega_0^2$, $a_{BA}^\tau = r\epsilon_2 = 0$. Chiếu công thức:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

lên hệ trục x, y ta có:

$$a_{Bx} = 0, a_{By} = -a_A - a_{BA}^n = -6r\omega_0^2$$

Vậy: $a_B = \sqrt{(a_{Bx})^2 + (a_{By})^2} = 6r\omega_0^2$ (chiều hướng từ B về A).

Tính toán tương tự với công thức quan hệ $\vec{a}_E = \vec{a}_A + \vec{a}_{EA}^n + \vec{a}_{EA}^\tau$ ta nhận được:

$$a_E = \sqrt{(a_A)^2 + (a_{EA}^n)^2} = 2r\omega_0^2\sqrt{5}$$

8-2. Vận tốc góc và gia tốc góc của trụ:

$$\omega = v_B / r = 7,5 \text{ (rad/s)}; \epsilon = a_B / r = 30 \text{ (rad/s}^2)$$

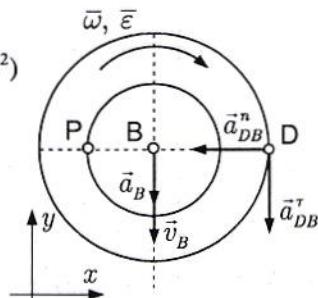
Từ quan hệ gia tốc:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^\tau$$

ta suy ra: $a_{Dx} = -a_{DB}^n, a_{Dy} = -a_B - a_{DB}^\tau$.

Với $a_{DB}^n = R\omega^2, a_{DB}^\tau = R\epsilon$ ta xác định được

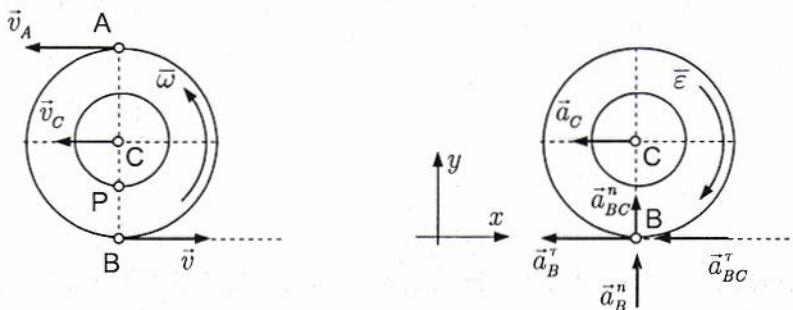
$$a_D \approx 14 \text{ m/s}^2$$



8-3. Bài toán vận tốc: $v_B = v$. Sử dụng phương pháp tâm vận tốc tức thời P ta có:

$$\frac{v_B}{R-r} = \frac{v_C}{r} = \frac{v_A}{R+r} = \omega$$

$$\omega = 0,5 \text{ (rad/s)}; v_C = 10 \text{ (cm/s)}; v_A = 30 \text{ (cm/s)}$$



Bài toán gia tốc: $a_B^\tau = a$, $\epsilon = \frac{a_B^\tau}{PB} = \frac{a}{r}$, $a_{BC}^\tau = R\epsilon = \frac{R}{r}a$, $a_{BC}^n = R\omega^2$. Chiếu công thức $\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}^\tau + \vec{a}_{BC}^n$ lên hai trục x, y ta nhận được:

$$a_B^n = a_{BC}^n, -a_B^\tau = -a_C - a_{BC}^\tau.$$

Ta suy ra: $a_B^n = R\omega^2$, $a_C = a_B^\tau - a_{BC}^\tau = -a$ (\vec{a}_C ngược chiều trên hình vẽ).

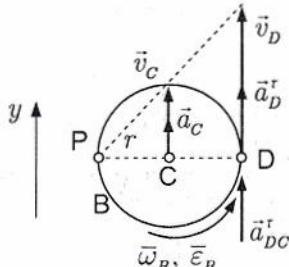
$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} \approx 11,18 \text{ cm/s}^2, a_C = 5 \text{ cm/s}^2.$$

8-4. Bài toán vận tốc: $v_D = R\omega_A$, $\omega_B = \frac{v_D}{DP} = \frac{R\omega_A}{2r}$.

$$v_C = r\omega_B = \frac{R\omega_A}{2} = 225 \text{ cm/s.}$$

Bài toán gia tốc: $a_D^\tau = R\epsilon_A$, $\epsilon_B = \frac{a_D^\tau}{DP} = \frac{R\epsilon_A}{2r}$. Ta có quan hệ gia tốc giữa hai điểm D và C:

$$\vec{a}_D^\tau + \vec{a}_D^n = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^\tau + \vec{a}_{DC}^n$$



Chiếu phương trình vectơ trên trục y ta nhận được:

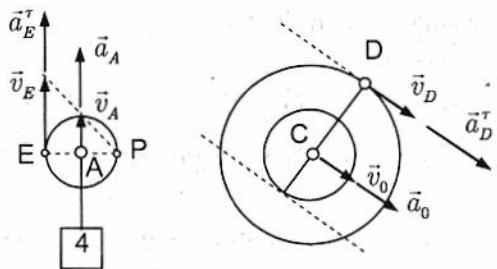
$$a_D^\tau = a_C + a_{DC}^\tau \Rightarrow a_C = a_D^\tau - a_{DC}^\tau = R\epsilon_A - r\epsilon_B = 22,5 \text{ cm/s}^2.$$

8-5. Bài toán vận tốc: Từ hình vẽ ta có :

$$\frac{v_D}{R+r} = \frac{v_0}{r} \Rightarrow v_D = \frac{R+r}{r} v_0.$$

Mặt khác ta có các quan hệ:

$$v_E = v_D, v_4 = v_A = \frac{v_E}{2} \Rightarrow v_4 = \frac{R+r}{2r} v_0.$$



Bài toán gia tốc: $a_E^\tau = a_D^\tau = \frac{R+r}{r} a_0$. Tính toán tương tự như bài 8-4 ta có:

$$a_4 = a_A = a_E^\tau - a_{EA}^\tau \Rightarrow a_4 = \frac{R+r}{2r} a_0.$$

8-6. Ta có quan hệ sau:

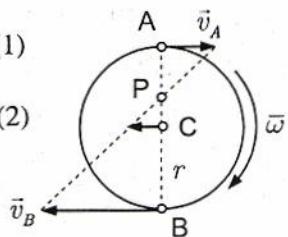
$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A + v_B}{AP + BP} = \frac{v_A + v_B}{2r} \quad (1)$$

$$\omega = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B - v_C}{BP - CP} = \frac{v_B - v_C}{r} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{2r} = 2,6 \text{ rad/s}$$

$$v_C = \frac{v_B - v_A}{2} = 0,075 \text{ m/s.}$$



8-7. Tỷ số truyền: $\frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3}$.

Mặt khác: $\omega_4 = \omega_B = \frac{v}{r}$, $v = 3 \text{ m/s}$, $r = 0,3 \text{ m}$.

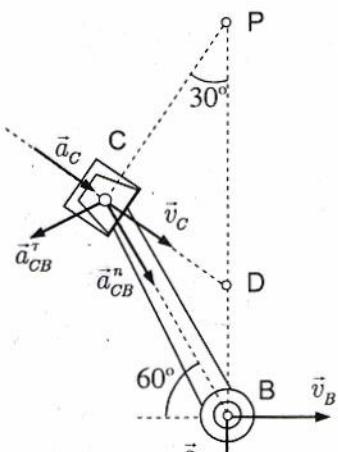
Vậy ta có: $\frac{r\omega_1}{v} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} \Rightarrow Z_2 = 51$.

8-8. Bài toán vận tốc: Từ hình vẽ ta có:

$$\omega_{BC} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{AB\omega}{BP}.$$

Trong đó: $CP = BC$, $BP = BC\sqrt{3}$.

Ta suy ra: $\omega_{BC} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ rad/s}$; $v_C \approx 0,577 \text{ m/s}$.



Chú ý: Ta có thể xác định v_C từ quan hệ hình chiếu vận tốc: $hc_{BC}(\vec{v}_C) = hc_{BC}(\vec{v}_B)$.

Bài toán gia tốc: $a_B = AB\omega^2$, $a_{CB}^n = BC\omega_{BC}^2$.

Ta có quan hệ gia tốc giữa hai điểm B và C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{CB}^n$$

Chiếu phương trình vectơ trên theo phương \overrightarrow{CB} ta nhận được:

$$a_C \cos 30^\circ = a_{CB}^n + a_B \cos 30^\circ \Rightarrow a_C = \frac{2}{\sqrt{3}} a_{CB}^n + a_B \approx 5,96 \text{ m/s}^2.$$

8-9. Bài toán vận tốc: Tâm vận tốc tức thời P của tấm vuông có vị trí như trên hình vẽ. Ta có quan hệ:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_D}{DP}.$$

với $AP = AB \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BP = \frac{AB}{2}$,

$$DP = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2AP \cdot AD \cos 60^\circ}.$$

$$v_B \approx 4,62; v_D \approx 8,69 \text{ m/s}$$

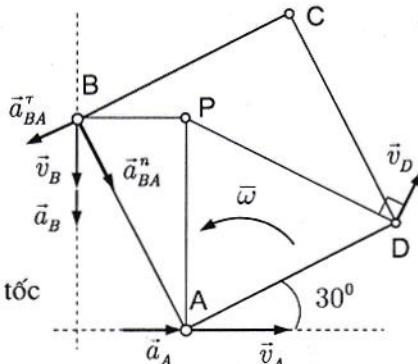
$$\omega \approx 30,79 \text{ rad/s.}$$

Bài toán gia tốc: $a_{BA}^n = AB\omega^2$. Từ quan hệ gia tốc

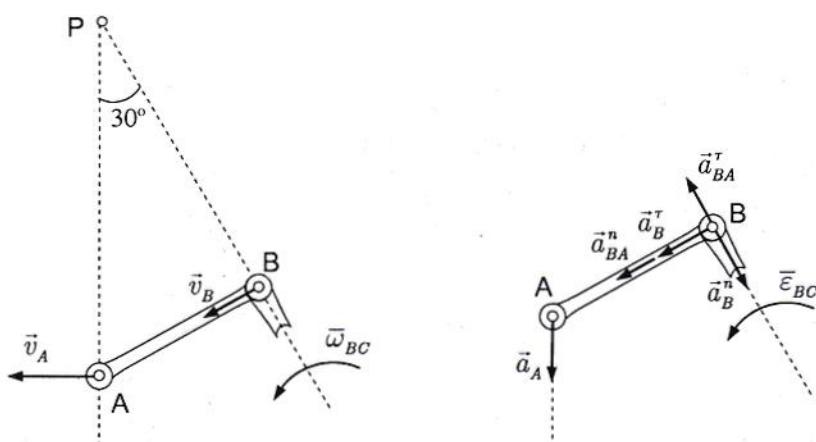
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n,$$

ta suy ra:

$$a_B \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a_A}{2} + a_{BA}^n \Rightarrow a_B = \frac{a_A + 2a_{BA}^n}{\sqrt{3}} \approx 329,56 \text{ m/s}^2.$$



8-10. Bài toán vận tốc: Tâm vận tốc P của AB có vị trí như trên hình vẽ.



Ta suy ra:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{OA\omega_0}{AP} = 5 \text{ rad/s}$$

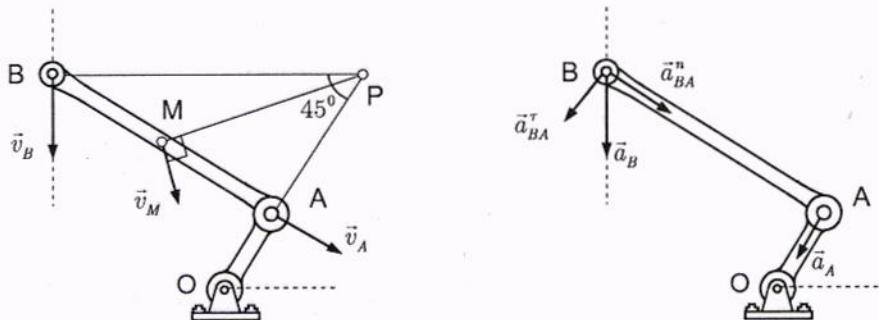
$$v_B = \omega_{AB}BP; \omega_{BC} = \frac{v_B}{BC} = 5 \text{ rad/s.}$$

Bài toán gia tốc: $a_A = a_A^n = OA\omega_0^2$, $a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2$, $a_B^n = BC\omega_{BC}^2$. Từ quan hệ gia tốc $\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, ta suy ra:

$$a_B^\tau = \frac{a_A}{2} + a_{BA}^n \Rightarrow \varepsilon_{BC} = \frac{a_B^\tau}{BC} \approx 43,30 \text{ rad/s}^2 \text{ (chiều như hình vẽ).}$$

8-11. Bài toán vận tốc: $v_A = OA\omega_{OA} = 1,8 \text{ m/s}$. Từ hình vẽ ta có:

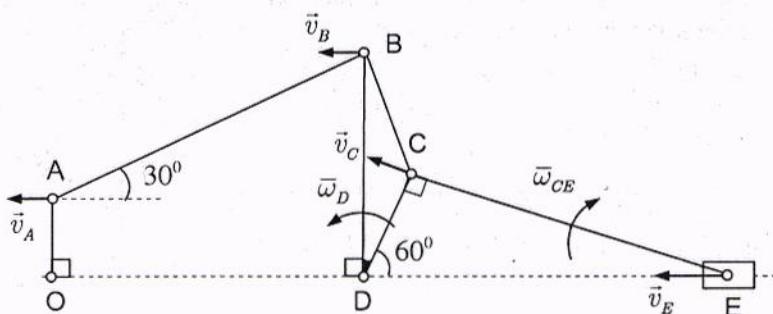
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = 1,8 \text{ rad/s}; v_B = \omega_{AB}BP \approx 2,55 \text{ m/s}; v_M = \omega_{AB}MP \approx 2,01 \text{ m/s.}$$



Bài toán gia tốc: $a_A = a_A^n = OA\omega_{OA}^2$, $a_{BA}^n = AB\omega_{AB}^2$. Từ phương trình quan hệ gia tốc giữa hai điểm A, B và từ hình vẽ trên ta có kết quả:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_B = a_{BA}^n \Rightarrow a_B = \sqrt{2} AB \omega_{AB}^2 \approx 4,58 \text{ m/s}^2 \text{ (chiều như hình vẽ).}$$

8-12. Bài toán vận tốc: $v_A = r\omega_0$. Thanh AB chuyển động tịnh tiến tức thời, $\omega_{AB} = 0$, $\vec{v}_B = \vec{v}_A$.



Ta suy ra:

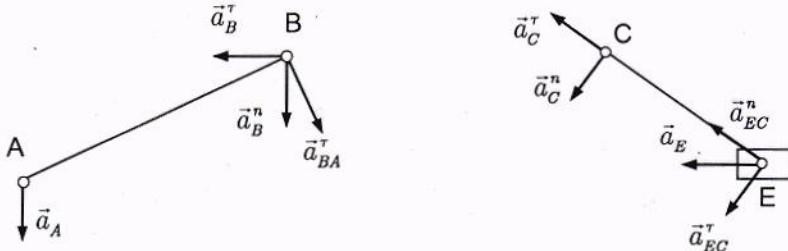
$$\omega_D = \frac{r\omega_0}{3r} = \frac{10}{3} \text{ rad/s}; \quad v_C = \omega_D DC = \frac{r\omega_0}{\sqrt{3}}. \quad \text{Khảo sát chuyển động}$$

phẳng của CE ta xác định được:

$$\omega_{CE} = \frac{\omega_0}{9}, \quad v_E = \frac{2}{3} r\omega_0 \approx 133,33 \text{ cm/s.}$$

Bài toán gia tốc: Trước hết ta xác định gia tốc góc ε_D của khung BDC nhờ quan hệ
gia tốc $\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$, trong đó $a_A = r\omega_0^2$, $a_{BA}^n = 0$, $a_B^n = BD\omega_D^2$. Từ
hình vẽ dưới bên trái ta có:

$$\frac{\sqrt{3}a_B^\tau}{2} + \frac{a_B^n}{2} = \frac{a_A}{2} \Rightarrow a_B^\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_A - a_B^n) = \frac{2\sqrt{3}}{9}r\omega_0^2, \quad \varepsilon_D = \frac{a_B^\tau}{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\omega_0^2.$$



Gia tốc điểm C: $a_C^\tau = CD\varepsilon_D = \frac{2}{9}r\omega_0^2$, $a_C^n = CD\omega_D^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}r\omega_0^2$. Ta có quan hệ:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_C^n + \vec{a}_{EC}^\tau + \vec{a}_{EC}^n$$

Từ hình vẽ phải ta suy ra:

$$a_E \frac{\sqrt{3}}{2} = a_C^\tau + a_{EC}^n \Rightarrow a_E = \frac{2}{\sqrt{3}}(a_C^\tau + a_{EC}^n) = \frac{14}{27\sqrt{3}}r\omega_0^2.$$

Thay số ta nhận được: $a_E = 598,73 \text{ cm/s}^2$.

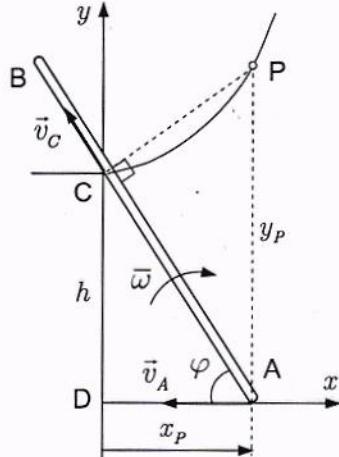
8-13. Vận tốc của điểm C có phương dọc theo AB, bởi vậy tâm vận tốc tức thời P có vị trí như trên
hình vẽ. Ta thiết lập được biểu thức:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v}{h} \sin^2 \varphi$$

Từ công thức trên ta suy ra:

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{h} \sin^2 \varphi \right) = 2 \frac{v^2}{h^2} \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

Nếu ký hiệu x_P và y_P là tọa độ của tâm vận tốc P
trên hệ Dxy ; ta có:



$$x_p = h \cotg \varphi$$

$$y_p = h + x_p \cotg \varphi$$

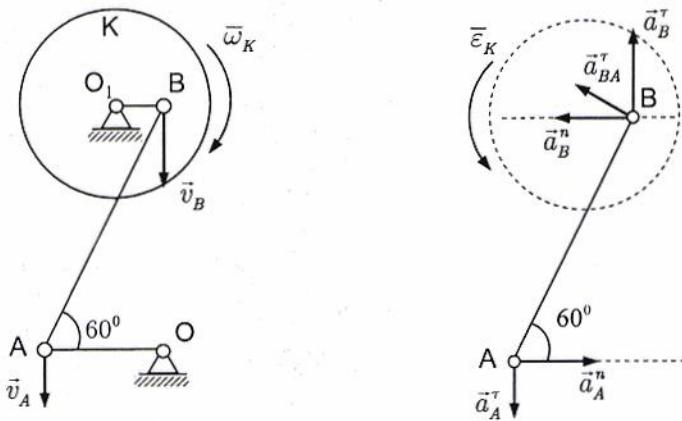
Vậy đường tâm vận tốc có dạng: $y_p = \frac{x_p^2}{h} + h$

8-14. Bài toán vận tốc: $\omega_{OA} = \dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{12} \cos \frac{\pi t}{2}$; $v_A = OA\omega_{OA}$.

Do AB chuyển động tịnh tiến tức thời, ta suy ra: $\vec{v}_A = \vec{v}_B$, $\omega_{AB} = 0$. Tại thời điểm

$t = 4$ s ta xác định được:

$$\omega_{OA} = \frac{\pi^2}{12}, v_B = 2\pi^2, \omega_K = \frac{v_B}{O_1B} = \frac{\pi^2}{6} \text{ rad/s (chiều như hình vẽ).}$$



Bài toán gia tốc: $\epsilon_{OA} = \ddot{\varphi}$, $a_A^\tau = OA\epsilon_{OA}$, $a_A^n = OA\omega_{OA}^2$, $a_B^n = O_1B\omega_K^2$. Xét quan hệ
gia tốc $\vec{a}_B^\tau + \vec{a}_B^n = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau$, ($\vec{a}_{BA}^\tau = 0$), ta suy ra:

$$-\frac{\sqrt{3}a_B^\tau}{2} + \frac{a_B^n}{2} = \frac{\sqrt{3}a_A^\tau}{2} - \frac{a_A^n}{2} \Rightarrow a_B^\tau = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_A^n + a_B^n) - a_A^\tau$$

Tại $t = 4$ s ta tìm được: $a_B^\tau = \frac{\sqrt{3}\pi^4}{6} \Rightarrow \epsilon_K = \frac{a_B^\tau}{O_1B} = \frac{\sqrt{3}\pi^4}{72} \text{ rad/s}^2$.

8-15. Bài toán vận tốc: Ta có quan hệ vận tốc

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

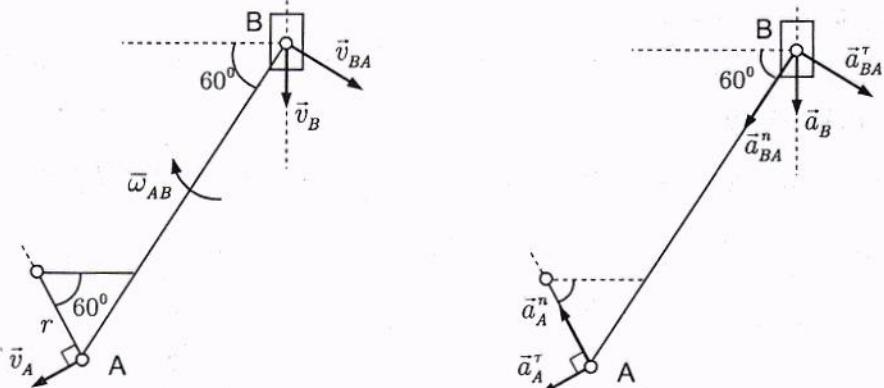
Từ phương trình vectơ trên ta nhận được 2 phương trình đại số (xem hình vẽ dưới):

$$v_B \frac{\sqrt{3}}{2} = v_A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_B = r\omega = 0,6 \text{ m/s.}$$

$$v_B \frac{1}{2} = v_{BA} - v_A \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{r\omega}{l}.$$

Bài toán gia tốc: Từ quan hệ gia tốc $\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$ ta suy ra:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_B = \frac{\sqrt{3}}{2} a_A^\tau - \frac{1}{2} a_A^n + a_{BA}^n \Rightarrow a_B = \frac{1}{\sqrt{3}} (2a_{BA}^n - a_A^n) + a_A^\tau.$$



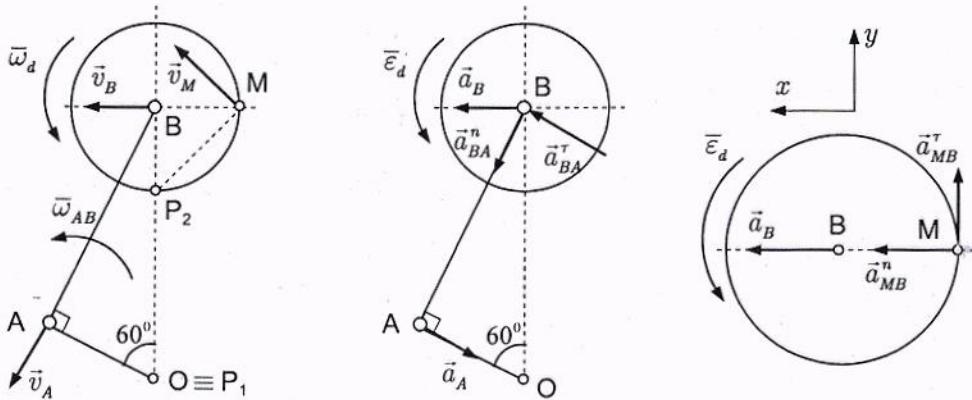
Với $a_A^\tau = r\varepsilon$, $a_A^n = r\omega^2$, $a_{BA}^n = l\omega_{AB}^2$ ta xác định được:

$$a_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{r^2 \omega^2}{l} - r \omega^2 \right) + r \varepsilon \approx 1,384 \text{ m/s}^2 \text{ (có chiều như hình vẽ).}$$

8-16. Bài toán vận tốc: Gọi P_1 là tâm vận tốc tức thời của AB và P_2 là tâm vận tốc tức thời của đĩa, từ hình vẽ ta có các hệ thức sau:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_1}, \quad v_B = \omega_{AB} BP_1 = v_A \frac{BP_1}{AP_1} = 6 \text{ m/s}$$

$$\omega_d = \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_B}{R}, \quad v_M = MP \omega_d = \sqrt{2} v_B = 6\sqrt{2} \text{ m/s.}$$



Phương chiêu của \vec{v}_B và \vec{v}_M được biểu diễn trên hình vẽ trái.

Bài toán gia tốc: Từ quan hệ gia tốc giữa hai điểm A và B ta suy ra hệ thức:

$$\frac{a_B}{2} = a_{BA}^n \Rightarrow a_B = 2a_{BA}^n = 2AB\omega_{AB}^2 = 18 \text{ m/s}^2 \text{ (chiêu như hình vẽ).}$$

Gia tốc góc của đĩa được xác định bởi: $\epsilon_d = \frac{a_B}{R}$. Ta có thể tính toán gia tốc của điểm M nhờ hệ thức:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_B + \vec{a}_{MB}^\tau + \vec{a}_{MB}^n.$$

Trong đó: $a_{MB}^n = R\omega_d^2$, $a_{MB}^\tau = R\epsilon_d = a_B$. Chiếu phương trình vectơ trên theo hai phương x, y nhu trên hình vẽ ta nhận được:

$$a_{Mx} = a_B + a_{MB}^n, \quad a_{My} = a_{MB}^\tau$$

Cuối cùng ta có kết quả: $a_M = \sqrt{(a_{Mx})^2 + (a_{My})^2} \approx 56,92 \text{ m/s}^2$.

8-17. Trước hết ta cần tính vận tốc và gia tốc của chốt A gắn với đĩa. Vận tốc của A xác định bởi:

$$v_A = \left(R + \frac{R}{2} \right) \omega = 2,4 \text{ m/s.}$$

Quan hệ gia tốc giữa hai điểm O và A có dạng:

$$\vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}^\tau + \vec{a}_{AO}^n,$$

trong đó $a_O = R\epsilon$, $a_{AO}^n = \frac{R}{2}\omega^2$, $a_{AO}^\tau = \frac{R}{2}\epsilon$. Từ

hình vẽ ta xác định được gia tốc điểm A:

$$a_A^\tau = a_O + a_{AO}^\tau = \left(R + \frac{R}{2} \right) \epsilon = 4,8 \text{ m/s}^2$$

$$a_A^n = a_{AO}^n = \frac{R}{2}\omega^2 = 1,6 \text{ m/s}^2.$$

Để tính toán vận tốc góc và gia tốc góc của BC ta cần áp dụng các công thức cộng vận tốc và cộng gia tốc của điểm (chương trước). Xét chuyển động tương đối của A so với hệ quy chiếu động BC, ta suy ra vận tốc tuyệt đối $v_a = v_A = 2,4 \text{ m/s}$ và gia tốc tuyệt đối $a_a^\tau = a_A^\tau = 4,8$; $a_a^n = a_A^n = 1,6 \text{ m/s}^2$.

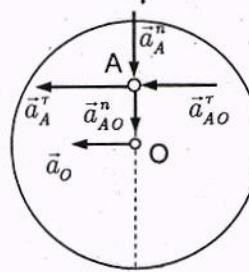
Từ họa đồ vận tốc (hình dưới) ta suy ra:

$$v_r = \frac{\sqrt{3}}{2} v_a, \quad v_e = \frac{1}{2} v_a \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{v_e}{BC} = \frac{v_a}{2BC} = 0,5 \text{ rad/s.}$$

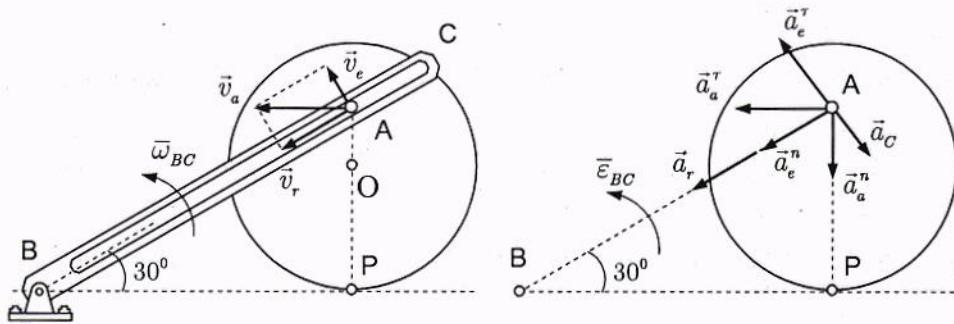
Ta có quan hệ giữa các thành phần gia tốc như biểu diễn trên hình vẽ:

$$\vec{a}_a^\tau + \vec{a}_a^n = \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_e^n + \vec{a}_r + \vec{a}_c,$$

với $a_c = 2v_r\omega_{BC}$. Chiếu phương trình vectơ trên theo phương vuông góc với AB ta suy ra:



$$\frac{a_a^\tau}{2} - \frac{a_a^n \sqrt{3}}{2} = a_e^\tau - a_C \Rightarrow a_e^\tau = \frac{a_a^\tau}{2} - \frac{a_a^n \sqrt{3}}{2} + a_C.$$



Cuối cùng ta nhận được gia tốc góc của BC:

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_e^\tau}{BC} \approx 3,09 \text{ rad/s}^2 \text{ (chiều như hình vẽ).}$$

8-18. Vận tốc của trung điểm D^* thuộc AB ($D^* \equiv D$) có phương dọc theo AB, bởi vậy vị trí của tâm vận tốc tức thời được xác định như trên hình vẽ. Ta suy ra:

$$\omega_{AB} = \frac{\vec{v}_A}{AP} = \frac{r}{l} \omega \cos \varphi,$$

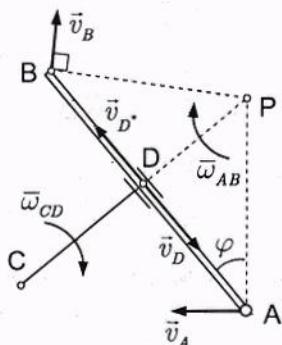
$$v_B = BP\omega_{AB} = r\omega.$$

Mặt khác, do CD và AB liên kết với nhau bởi khớp trượt tại D nên ta có hệ thức:

$$\omega_{CD} = \omega_{AB} = \frac{r}{l} \omega \cos \varphi.$$

Từ kết quả trên ta suy ra vận tốc của điểm D:

$$v_D = r\omega_{CD} = \frac{r^2}{l} \omega \cos \varphi \text{ (chiều như hình vẽ).}$$



8-19. Trước hết ta cần xác định vận tốc góc và gia tốc góc của OB. Do con trượt B có chuyển động tương đối so với hệ quy chiếu động OB, ta có thể áp dụng công thức cộng vận tốc và cộng gia tốc để tìm $\omega_{OB} = \omega_e$, $\varepsilon_{OB} = \varepsilon_e$ như đã thực hiện

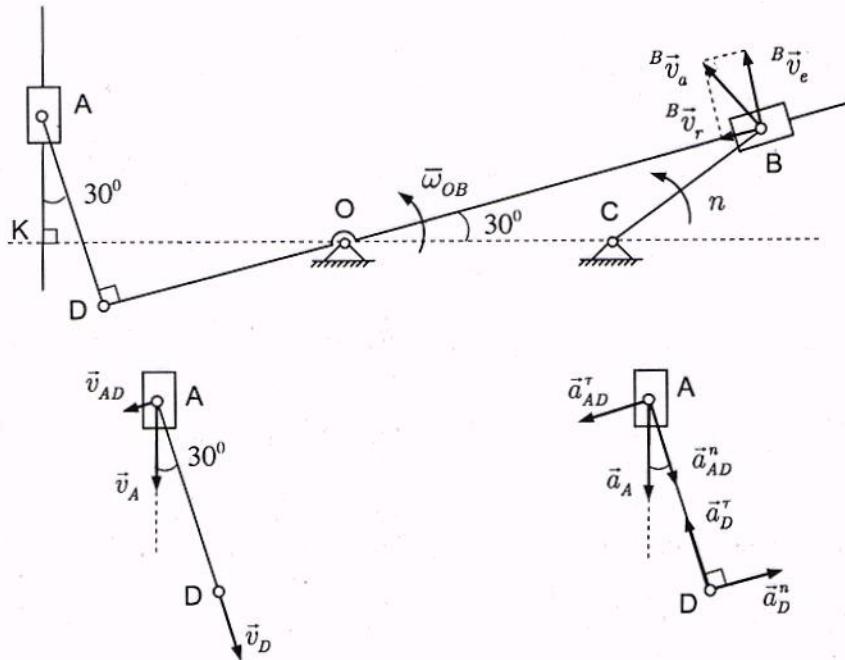
trong một số bài tập của chương trước. Với $\omega_{BC} = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \text{ rad/s}$, ta xác định được: $\omega_{OB} = 20\pi$, $\varepsilon_{OB} = 0$.

Xét chuyển động phẳng của AD, ta có quan hệ vận tốc:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_D + \vec{v}_{AD}$$

Suy ra: $v_A = \frac{v_D}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega_{OB} OD \approx 43,53 \text{ m/s.}$

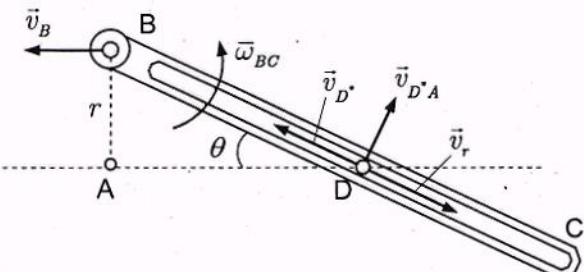
$$v_{AD} = v_A \sin 30^\circ \Rightarrow \omega_{AD} = \frac{v_{AD}}{AD} = \frac{20\pi}{\sqrt{3}}$$



Từ quan hệ gia tốc: $\vec{a}_A = \vec{a}_D + \vec{a}_D^n + \vec{a}_{AD} + \vec{a}_{AD}^n$, với $a_D^r = 0$, $a_{AD}^n = AD\omega_{AD}^2$. Ta suy ra phương trình:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a_A = a_{AD}^n \Rightarrow a_A = \frac{2}{\sqrt{3}} a_{AD}^n \approx 911,71 \text{ m/s}^2.$$

8-20. Thanh BC chuyển động song phẳng. Khi $\theta = 30^\circ$, khoảng cách $BD = 2r$, vận tốc điểm B $v_B = r\omega$.



Điểm D cố định nên có vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối bằng 0. Tuy nhiên điểm D có chuyển động tương đối so với hệ quy chiếu động BC. Vận tốc tương đối và gia tốc tương đối của D cùng có phương dọc theo BC. Vận tốc của trung điểm D' thuộc BC (vận tốc theo) có phương dọc theo BC. Ta có các quan hệ vận tốc:

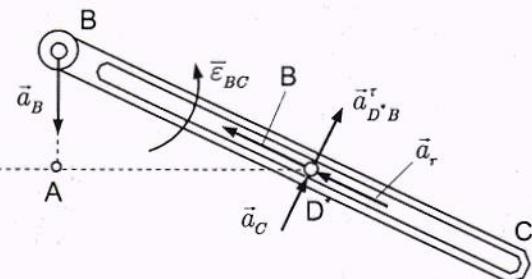
$$\vec{v}_{D^*} = \vec{v}_B + \vec{v}_{D^*B} \quad (1)$$

$$0 = \vec{v}_{D^*} + \vec{v}_r \quad (2)$$

Từ phương trình (1) ta nhận được:

$$v_{D^*B} = BD\omega_{BC} = \frac{v_B}{2} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{\omega}{4}, v_{D^*} = v_e = \frac{\sqrt{3}}{2} v_B = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega.$$

Từ (2) ta suy ra: $v_r = v_{D^*} = \frac{\sqrt{3}}{2} r\omega$.



Lập luận tương tự, ta có thể thiết lập được các hệ thức sau đối với gia tốc:

$$\vec{a}_{D^*} = \vec{a}_B + \vec{a}_{D^*B}^\tau + \vec{a}_{D^*B}^n \quad (3)$$

$$0 = \vec{a}_{D^*} + \vec{a}_r + \vec{a}_C \quad (4)$$

trong đó: $a_B = r\omega^2$, $a_C = 2v_r\omega_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega^2$.

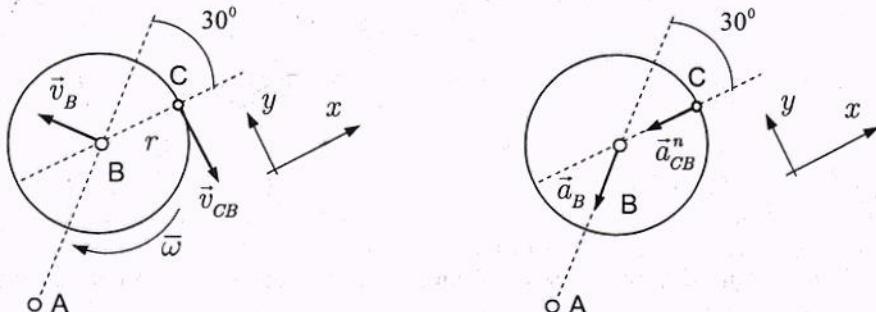
Cộng hai vế của các phương trình (3), (4) với nhau và chiều phương trình nhận được theo phương vuông góc với BC ta suy ra:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} a_B + a_{D^*B}^\tau + a_C \Rightarrow a_{D^*B}^\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} a_B - a_C = \frac{\sqrt{3}}{4} r\omega^2.$$

Cuối cùng ta nhận được:

$$\varepsilon_{BC} = \frac{a_{D^*B}^\tau}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{8} r\omega^2 \text{ (chiều như hình vẽ).}$$

8-21.



Vận tốc góc và gia tốc góc (tuyệt đối) của đĩa:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \Rightarrow \omega = -\omega_1 + \omega_2 = 55 \text{ rad/s}, \bar{\varepsilon} = 0 \text{ (do } \omega \text{ là hằng số).}$$

Bài toán vận tốc: Ta có quan hệ vận tốc giữa hai điểm C và B

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB} \quad (1)$$

trong đó $v_B = l\omega_1$, $v_{CB} = r\omega$. Chiếu phương trình (1) lên hai trục vuông góc x, y như trên hình vẽ ta nhận được:

$$v_{Cx} = -\frac{1}{2}v_B = -\frac{l\omega_1}{2}, \quad v_{Cy} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_B - v_{CB} = \frac{\sqrt{3}}{2}l\omega_1 - r\omega.$$

Vậy: $v_C = \sqrt{(v_{Cx})^2 + (v_{Cy})^2} \approx 3,56 \text{ m/s.}$

Bài toán gia tốc: Ta có quan hệ gia tốc giữa hai điểm C và B:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^\tau + \vec{a}_{CB}^n, \quad (2)$$

trong đó $a_B = l\omega_1^2$, $a_{CB}^\tau = 0$, $a_{CB}^n = r\omega^2$. Chiếu phương trình (2) lên hai trục x, y :

$$a_{Cx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}a_B - a_{CB}^n = -\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega_1^2 - r\omega^2, \quad a_{Cy} = -\frac{1}{2}a_B = -\frac{l\omega_1^2}{2}.$$

Ta suy ra: $a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} \approx 313,39 \text{ m/s}^2$.

8-22. Áp dụng công thức Villise

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{1}{2},$$

trong đó $\bar{\omega}_{tq} = \omega_0$, $\bar{\omega}_1 = -3\omega_0$. Ta suy ra:

$$\bar{\omega}_2 = 3\bar{\omega}_{tq} - 2\bar{\omega}_1 = -3\bar{\omega}_0 \Rightarrow \omega_2 = 3\omega_0.$$

Gia tốc góc $\bar{\varepsilon}_{tq} = \bar{\varepsilon}_0$, $\bar{\varepsilon}_1 = -3\bar{\varepsilon}_0$. Do hệ thức (1)

đúng tại mọi thời điểm t , ta suy ra:

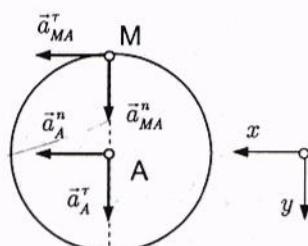
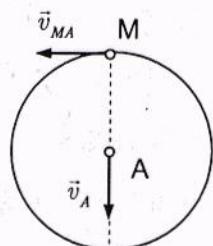
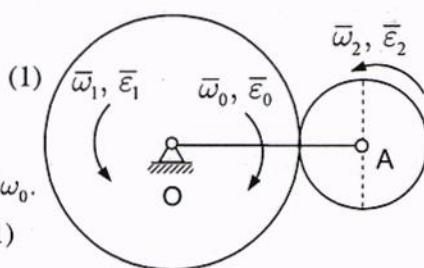
$$\bar{\varepsilon}_2 = 3\bar{\varepsilon}_{tq} - 2\bar{\varepsilon}_1 = -3\bar{\varepsilon}_0 \Rightarrow \varepsilon_2 = 3\varepsilon_0.$$

Vận tốc của điểm M (hình vẽ bên dưới) được xác định từ quan hệ vận tốc:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \quad (2)$$

trong đó $v_A = 3R\omega_0$, $v_{MA} = R\omega_2 = 3R\omega_0$. Do \vec{v}_A vuông góc với \vec{v}_{MA} , từ hệ thức (2) ta suy ra:

$$v_M = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{MA})^2} = 3\sqrt{2}R\omega_0.$$



Từ quan hệ gia tốc giữa hai điểm A và M:

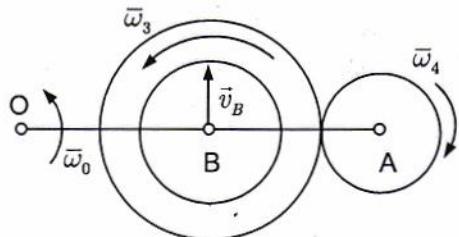
$$\ddot{a}_M = \ddot{a}_A^\tau + \ddot{a}_A^n + \ddot{a}_{MA}^\tau + \ddot{a}_{MA}^n, \quad (3)$$

trong đó $\ddot{a}_A^\tau = 3R\varepsilon_0$, $\ddot{a}_A^n = 3R\omega_0^2$, $\ddot{a}_{MA}^\tau = 3R\varepsilon_0$, $\ddot{a}_{MA}^n = 9R\omega_0^2$. Chiếu phương trình (3) lên hai trục x, y ta nhận được:

$$a_{Mx} = a_A^n + a_{MA}^\tau = 3R(\varepsilon_0 + \omega_0^2)$$

$$a_{My} = a_A^\tau + a_{MA}^n = 3R(\varepsilon_0 + 3\omega_0^2).$$

8-23. Các vận tốc góc: $\bar{\omega}_{tq} = \bar{\omega}_0 = \frac{\pi n_0}{30} = \pi$, $\bar{\omega}_1 = 0$.



Chọn tay quay OA làm hệ quy chiếu động, áp dụng công thức Villise cho cặp bánh răng 1-2 ta có:

$$\frac{-\bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 = \frac{5}{2}\bar{\omega}_0 = \frac{5}{2}\pi.$$

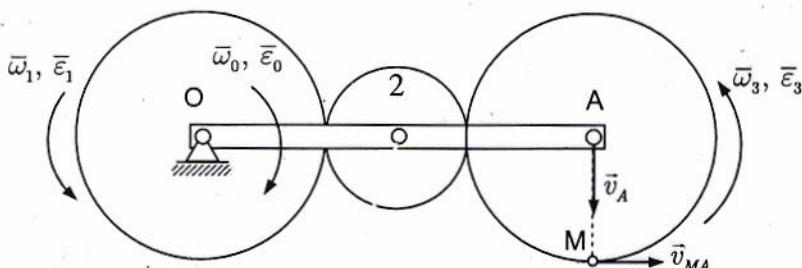
Tương tự, áp dụng công thức Villise cho cặp bánh răng 3-4 ta có:

$$\frac{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_0} = -\frac{Z_4}{Z_3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \bar{\omega}_4 = 3\bar{\omega}_0 - 2\bar{\omega}_3 = -2\bar{\omega}_0 = -2\pi.$$

Vậy tốc độ quay của bánh răng 3 và 4 là:

$$n_3 = \frac{30\omega_3}{\pi} = 30, \quad n_4 = \frac{30\omega_4}{\pi} = 60 \text{ vòng/phút.}$$

8-24. Trước hết ta cần xác định vận tốc góc và gia tốc góc của bánh răng 3.



Chọn tay quay OA làm hệ quy chiếu động, áp dụng công thức Villise cho cặp bánh răng 1-2 và 2-3 ta có:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_3}{r_2} = -2.$$

Từ hệ thức trên ta suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}} = 1 \Rightarrow \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_1 = -\bar{\omega}_0.$$

Hệ thức trên đúng trong mọi vị trí của cơ cấu, bởi vậy ta suy ra $\bar{\varepsilon}_3 = \bar{\varepsilon}_1 = -\bar{\varepsilon}_0$.

Điểm M thuộc bánh răng 3 chuyển động phẳng, quan hệ vận tốc giữa 2 điểm A và M có dạng:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}$$

với $v_A = 6r\omega_0$, $v_{MA} = 2r\omega_0$. Do $\vec{v}_A \perp \vec{v}_{MA}$, ta có:

$$v_M = \sqrt{(v_A)^2 + (v_{MA})^2} = 2r\omega_0\sqrt{10}.$$

Quan hệ gia tốc giữa 2 điểm A và M có dạng:

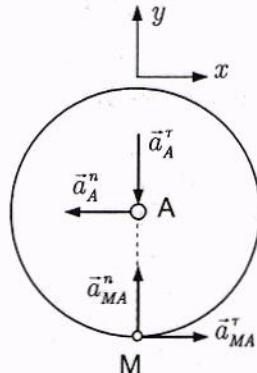
$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^\tau + \vec{a}_{MA}^n,$$

trong đó $a_A^\tau = 6r\varepsilon_0$, $a_A^n = 6r\omega_0^2$, $a_{MA}^\tau = 2r\varepsilon_0$, $a_{MA}^n = 2r\omega_0^2$.

Chiếu phương trình trên lên hai trục x, y ta nhận được:

$$a_{Mx} = -a_A^n + a_{MA}^\tau = 2r(\varepsilon_0 - 3\omega_0^2)$$

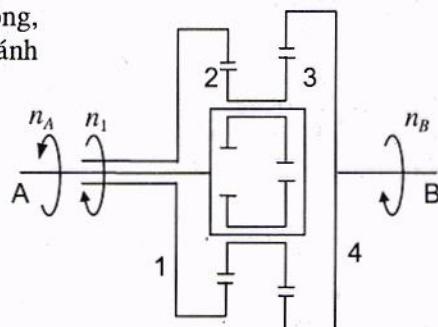
$$a_{My} = -a_A^\tau + a_{MA}^n = 2r(\omega_0^2 - 3\varepsilon_0).$$



8-25. Chọn trục dẫn A làm hệ quy chiếu động, áp dụng công thức Villise cho các cặp bánh răng 1-2 và 3-4 ta có:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}} = \frac{Z_2}{Z_1},$$

$$\frac{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_{tq}} = \frac{Z_4}{Z_3},$$



với $\bar{\omega}_{tq} = \bar{\omega}_A$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3$, $\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_B$.

Ta suy ra: $\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A}{\bar{\omega}_B - \bar{\omega}_A} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} = \frac{16}{21} \Rightarrow \bar{\omega}_B = \frac{21}{16} \bar{\omega}_1 - \frac{5}{16} \bar{\omega}_A$.

Với $\bar{\omega}_1 = -\frac{\pi n_1}{30}$ (ngược chiều quay dương), $\bar{\omega}_A = \frac{\pi n_A}{30}$, ta xác định được:

$$\bar{\omega}_B = -\frac{21}{16} \frac{\pi n_1}{30} - \frac{5}{16} \frac{\pi n_A}{30}.$$

Vậy ta có:

$$n_B = \frac{30\omega_B}{\pi} = 585 \text{ vòng/phút (ngược chiều với chiều quay trục dẫn A).}$$

CHƯƠNG 9: ĐỘNG HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

Vật rắn quay quanh điểm cố định

9-1. Vật quay tiến động đều, OA là trục quay tức thời. Sử dụng các công thức:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi, \quad \vec{\epsilon} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi,$$

trong đó $\omega_\psi = \frac{\pi n}{30} = 4\pi$ rad/s, ta suy ra:

$$\omega_\varphi = \omega_\psi = 4\pi, \quad \omega = \sqrt{2}\omega_\psi = 4\sqrt{2}\pi$$

$$\varepsilon = \omega_\psi \omega_\varphi = 16\pi^2 \text{ rad/s}^2.$$

Vận tốc điểm B xác định bởi:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB}$$

Ta suy ra $v_B = OB\omega = 80\pi$ cm/s.

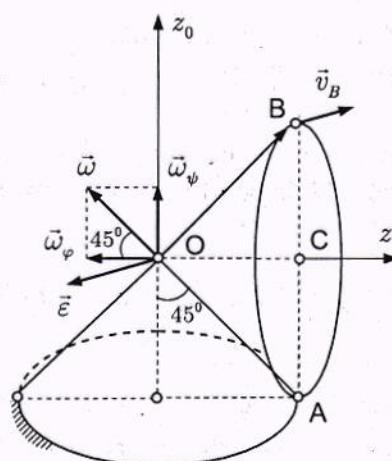
Gia tốc điểm B xác định bởi:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^\varepsilon + \vec{a}_B^\omega,$$

trong đó ta sử dụng ký hiệu $\vec{a}_B^\varepsilon = \vec{\epsilon} \times \vec{OB}$, $\vec{a}_B^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}_B$. Từ hình vẽ ta có:

$$a_B^\varepsilon = OB\varepsilon = 160\sqrt{2}\pi^2, \quad a_B^\omega = \omega v_B = 320\sqrt{2}\pi^2.$$

Vậy gia tốc điểm B là $a_B = \sqrt{(a_B^\varepsilon)^2 + (a_B^\omega)^2} = 160\sqrt{10}\pi^2$ cm/s².



9-2. Con lăn quay tiến động đều xung quanh điểm O cố định. OC là trục quay tức thời.

Vận tốc góc của con lăn:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi$$

Vận tốc điểm A xác định theo công thức:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{OA} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{OA},$$

Từ hình vẽ ta suy ra:

$$\omega_\varphi = \omega_\psi = \frac{v_A}{R} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\omega = \sqrt{2}\omega_\psi = 3 \text{ rad/s}.$$

Vận tốc của các điểm C, B:

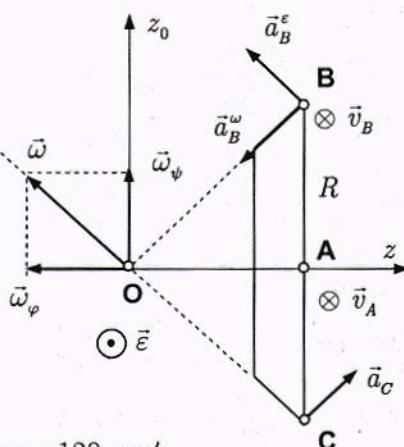
$$v_C = 0, \quad \vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{OB} \Rightarrow v_B = OB\omega = 120 \text{ cm/s}.$$

Gia tốc của điểm C:

$$\vec{a}_C = \vec{\epsilon} \times \vec{OC} + \vec{\omega} \times \vec{v}_C = \vec{\epsilon} \times \vec{OC}$$

trong đó $\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi \Rightarrow \varepsilon = \omega_\psi \omega_\varphi = 4,5 \text{ rad/s}^2$. Vậy $a_C = OC\varepsilon = 180 \text{ cm/s}^2$.

Gia tốc của điểm B:



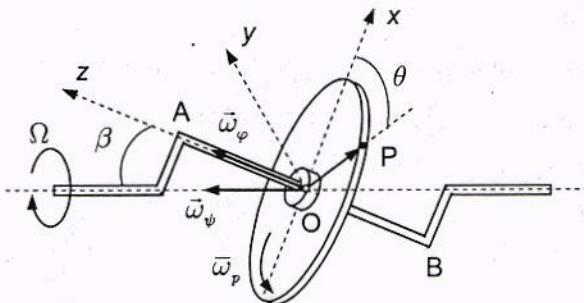
$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^\epsilon + \vec{a}_B^\omega,$$

trong đó $\vec{a}_B^\epsilon = \vec{\epsilon} \times \vec{OB}$, $\vec{a}_B^\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}_B$. Từ hình vẽ ta có:

$$a_B^\epsilon = OB\epsilon = 180, a_B^\omega = \omega v_B = 360 \text{ cm/s}^2.$$

Vậy giá tốc điểm B là $a_B = \sqrt{(a_B^\epsilon)^2 + (a_B^\omega)^2} = 180\sqrt{5} \text{ cm/s}^2$.

9-3. Đĩa chuyển động quay tiến động đều xung quanh O cố định.



Trên hệ tọa độ $\{xyz\}$ gắn với trục AB (các vectơ đơn vị là $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) ta xác định được:

$$\vec{\omega}_\varphi = \omega_p \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_\psi = -\Omega \sin \beta \vec{e}_1 + \Omega \cos \beta \vec{e}_3.$$

Ta suy ra:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi = -\Omega \sin \beta \vec{e}_1 + (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_3,$$

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi = (-\Omega \sin \beta \vec{e}_1 + \Omega \cos \beta \vec{e}_3) \times (\omega_p \vec{e}_3) = \Omega \omega_p \sin \beta \vec{e}_2.$$

Điểm P có vị trí trên hệ $\{xyz\}$:

$$\overrightarrow{OP} = R \cos \theta \vec{e}_1 - R \sin \theta \vec{e}_2$$

Từ đó ta xác định được vận tốc của điểm P:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = [-\Omega \sin \beta \vec{e}_1 + (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_3] \times (R \cos \theta \vec{e}_1 - R \sin \theta \vec{e}_2)$$

$$\vec{v}_P = R \sin \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_1 + R \cos \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_2 + R \Omega \sin \beta \sin \theta \vec{e}_3$$

Gia tốc của điểm P được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}_P = \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P.$$

Thay các đại lượng đã biết vào công thức trên ta tìm được:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P = & -R \cos \theta (\omega_p + \Omega \cos \beta)^2 \vec{e}_1 + R \sin \theta (\Omega^2 + \omega_p^2 + 2\omega_p \Omega \cos \beta) \vec{e}_2 \\ & - R \Omega \cos \theta \sin \beta (2\omega_p + \Omega \cos \beta) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

9-4. Do điểm O cố định, ta thiết lập được các phương trình sau:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \overrightarrow{ON},$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM},$$

với $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi$. Sử dụng hệ trục tọa độ $\{xyz\}$ gắn với OH (các vectơ đơn vị tương ứng là $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) như trên hình vẽ, ta có thể biểu diễn các phương trình trên dưới dạng:

$$v_1 \vec{e}_1 = (\omega_\psi \vec{e}_2 + \omega_\varphi \vec{e}_3) \times (r \vec{e}_2 + l \vec{e}_3) = (l \omega_\psi - r \omega_\varphi) \vec{e}_1 \quad (1)$$

$$-v_2 \vec{e}_1 = (\omega_\psi \vec{e}_2 + \omega_\varphi \vec{e}_3) \times (-r \vec{e}_2 + l \vec{e}_3) = (l \omega_\psi + r \omega_\varphi) \vec{e}_1 \quad (2)$$

Từ các phương trình (1) và (2) ta suy ra:

$$l \omega_\psi - r \omega_\varphi = v_1,$$

$$l \omega_\psi + r \omega_\varphi = -v_2.$$

Ta suy ra: $\vec{\omega} = \frac{v_1 - v_2}{2l} \vec{e}_2 - \frac{v_1 + v_2}{2r} \vec{e}_3 = -7 \vec{e}_2 - 70 \vec{e}_3$, $\omega \approx 70,35 \text{ rad/s}$.

Vận tốc tâm H:

$$\vec{v}_H = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OH} = (-7 \vec{e}_2 - 70 \vec{e}_3) \times \frac{1}{14} \vec{e}_3 = -0,5 \vec{e}_1 \Rightarrow v_H = 0,5 \text{ m/s.}$$

Gia tốc góc của đĩa:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_\psi \times \vec{\omega}_\varphi = (-7 \vec{e}_2) \times (-70 \vec{e}_3) = 490 \vec{e}_1 \Rightarrow \epsilon = 490 \text{ rad/s}^2.$$

9-5. Sử dụng hệ tọa độ động $\{xyz\}$ gắn với trục AB (các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) như hình vẽ, ta có thể biểu diễn vận tốc góc của BC dưới dạng:

$$\vec{\omega}_{BC} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1 \vec{e}_2 + \omega_2 \vec{e}_1.$$

Gia tốc góc của BC:

$$\vec{\epsilon}_{BC} = \frac{d}{dt} \vec{\omega}_{BC} = \omega_2 \frac{d}{dt} \vec{e}_1 + \dot{\omega}_2 \vec{e}_1,$$

với $\frac{d}{dt} \vec{e}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{e}_1 = \omega_1 \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\omega_1 \vec{e}_3$. Ta suy ra:

$$\vec{\epsilon}_{BC} = \dot{\omega}_2 \vec{e}_1 - \omega_1 \omega_2 \vec{e}_3.$$

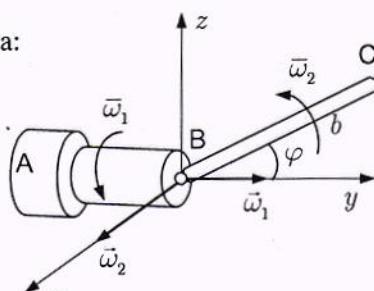
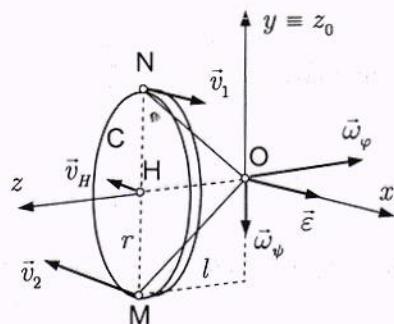
Vận tốc của điểm cuối C có dạng:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC}$$

Thế các đại lượng đã biết vào biểu thức trên ta nhận được:

$$\begin{aligned} \vec{v}_C &= (\omega_1 \vec{e}_2 + \omega_2 \vec{e}_1) \times (b \cos \varphi \vec{e}_2 + b \sin \varphi \vec{e}_3) \\ &= b \omega_1 \sin \varphi \vec{e}_1 - b \omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + b \omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Thay các giá trị số ta nhận được:



$$\vec{v}_C = 90\vec{e}_1 - 120\vec{e}_2 + 120\sqrt{3}\vec{e}_3, v_C \approx 256,32 \text{ cm/s.}$$

Gia tốc của điểm C được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}_C = \vec{\epsilon}_{BC} \times \overrightarrow{BC} + \vec{\omega}_{BC} \times \vec{v}_C.$$

Thay các đại lượng đã biết vào biểu thức gia tốc của điểm C ta tìm được:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= (\dot{\omega}_2\vec{e}_1 - \omega_1\omega_2\vec{e}_3) \times (b \cos \varphi \vec{e}_2 + b \sin \varphi \vec{e}_3) \\ &\quad + (\omega_1\vec{e}_2 + \omega_2\vec{e}_1) \times (b\omega_1 \sin \varphi \vec{e}_1 - b\omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + b\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3) \end{aligned}$$

Ta suy ra:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= 2b\omega_1\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_1 - (b\dot{\omega}_2 \sin \varphi + b\omega_2^2 \cos \varphi) \vec{e}_2 \\ &\quad + (b\dot{\omega}_2 \cos \varphi - b\omega_1^2 \sin \varphi - b\omega_2^2 \sin \varphi) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Thay các giá trị số ta nhận được:

$$\vec{a}_C = 720\sqrt{3} \vec{e}_1 - (150 + 480\sqrt{3}) \vec{e}_2 + (150\sqrt{3} - 750) \vec{e}_3, a_C \approx 16,61 \text{ m/s}^2.$$

9-6. Vận tốc góc của đĩa:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_p$$

trong đó $\Omega = \frac{\pi N}{30} = \pi$, $\omega_p(t) = \dot{\omega}_p t$. Sử dụng hệ tọa độ động $\{xyz\}$ gắn với trục OC với các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ta có thể biểu diễn vận tốc góc của đĩa dưới dạng:

$$\vec{\omega} = \Omega \cos \gamma \vec{e}_2 + (\Omega \sin \gamma + \omega_p) \vec{e}_3.$$

Gia tốc góc của đĩa được xác định bởi:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Omega \cos \gamma \frac{d\vec{e}_2}{dt} + (\Omega \sin \gamma + \omega_p) \frac{d\vec{e}_3}{dt} + \dot{\omega}_p \vec{e}_3,$$

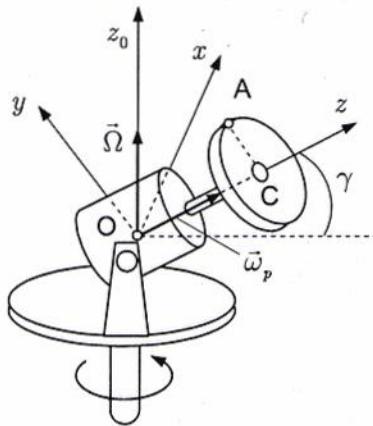
với $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_2 = -\Omega \sin \gamma \vec{e}_1$, $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_3 = \Omega \cos \gamma \vec{e}_1$. Gia tốc góc $\dot{\omega}_p$ được xác định từ dữ kiện của đầu bài như sau:

$$\omega_p(t=2) = \frac{\pi n_p}{30} = 100\pi \Rightarrow \dot{\omega}_p = \frac{\omega_p}{2} = 50\pi \text{ rad/s}^2.$$

Thế các biểu thức nhận được vào công thức tính $\vec{\epsilon}$ ta suy ra:

$$\vec{\epsilon} = \Omega \dot{\omega}_p \cos \gamma \vec{e}_1 + \dot{\omega}_p \vec{e}_3 = 25\pi^2 t \sqrt{3} \vec{e}_1 + 50\pi \vec{e}_3.$$

Tại thời điểm $t = 1/3$ s ta có trị số của gia tốc góc:



$$\vec{\epsilon}(t = \frac{1}{3}) = \frac{25\sqrt{3}}{3} \pi^2 \vec{e}_1 + 50\pi \vec{e}_3.$$

Biểu thức vận tốc điểm A có dạng:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = [\Omega \cos \gamma \vec{e}_2 + (\Omega \sin \gamma + \omega_p) \vec{e}_3] \times (R \vec{e}_2 + l \vec{e}_3) \\ &= [l\Omega \cos \gamma - R(\Omega \sin \gamma + \omega_p t)] \vec{e}_1\end{aligned}$$

Tại thời điểm $t = 1/3$ s, vận tốc \vec{v}_A nhận giá trị:

$$\vec{v}_A \approx -6,158 \vec{e}_1, v_A \approx 6,158 \text{ m/s.}$$

9-7. Hệ tọa độ động $\{xyz\}$ quay xung quanh trục x cố định với vận tốc góc $\Omega_\gamma = \dot{\gamma}$ và gia tốc góc $\dot{\Omega}_\gamma = \ddot{\gamma}$. Vận tốc góc của đĩa:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega}_\gamma + \vec{\omega}_p.$$

Từ hình vẽ ta suy ra:

$$\vec{\omega} = -\Omega_\gamma \vec{e}_1 + \omega_p \vec{e}_3.$$

Do \vec{e}_1 là vectơ hằng, biểu thức gia tốc góc của đĩa có dạng:

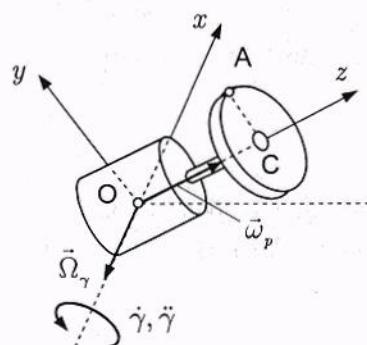
$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\dot{\Omega}_\gamma \vec{e}_1 + \dot{\omega}_p \vec{e}_3 + \omega_p \frac{d\vec{e}_3}{dt},$$

với $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\Omega}_\gamma \times \vec{e}_3 = -\Omega_\gamma \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \Omega_\gamma \vec{e}_2, \dot{\omega}_p = \varepsilon_p$. Ta suy ra:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\ddot{\gamma} \vec{e}_1 + \omega_p \dot{\gamma} \vec{e}_2 + \varepsilon_p \vec{e}_3$$

Thay các giá trị số vào công thức trên ta có:

$$\vec{\epsilon} = -15\vec{e}_1 + 48\pi\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3 \text{ rad/s}^2.$$



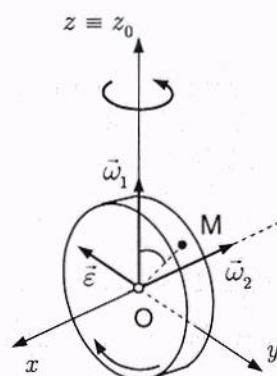
9-8. Hệ tọa độ động $\{Oxyz\}$ quay đều xung quanh trục $z_0 \equiv z$ cố định với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$. Vận tốc góc của đĩa có dạng:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = -\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3.$$

Do \vec{e}_3 là vectơ hằng, gia tốc góc của đĩa có dạng:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\omega_2 \frac{d\vec{e}_1}{dt} = -\omega_2 (\vec{\omega}_1 \times \vec{e}_1) = -\omega_2 (\omega_1 \vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = -\omega_1 \omega_2 \vec{e}_2.$$

Vận tốc điểm M xác định theo công thức:



$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OM} = (-\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (R \sin \alpha \vec{e}_2 + R \cos \alpha \vec{e}_3)$$

$$= -R\omega_1 \sin \alpha \vec{e}_1 + R\omega_2 \cos \alpha \vec{e}_2 - R\omega_2 \sin \alpha \vec{e}_3.$$

Gia tốc điểm M xác định bởi:

$$\vec{a}_M = \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_M$$

Thay các đại lượng đã biết vào công thức gia tốc trên ta có:

$$\vec{a}_M = (-\omega_1 \omega_2 \vec{e}_2) \times (R \sin \alpha \vec{e}_2 + R \cos \alpha \vec{e}_3)$$

$$+ (-\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (-R\omega_1 \sin \alpha \vec{e}_1 + R\omega_2 \cos \alpha \vec{e}_2 - R\omega_2 \sin \alpha \vec{e}_3)$$

$$= -2R\omega_1 \omega_2 \cos \alpha \vec{e}_1 - R \sin \alpha (\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{e}_2 - R\omega_2^2 \cos \alpha \vec{e}_3.$$

9-9. Cách giải giống như bài tập 9-7, vận tốc góc của đĩa có dạng:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3.$$

Gia tốc góc của đĩa có dạng:

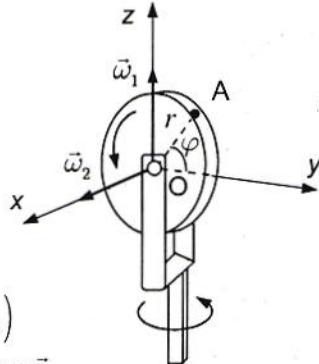
$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega_2 \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \omega_1 \omega_2 \vec{e}_2.$$

Vận tốc điểm A:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$$

$$= (\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3)$$

$$= -r\omega_1 \cos \varphi \vec{e}_1 - r\omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + r\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3.$$



Gia tốc điểm A: $\vec{a}_A = \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times \vec{v}_A$

$$\vec{a}_A = (\omega_1 \omega_2 \vec{e}_2) \times (r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3)$$

$$+ (\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (-r\omega_1 \cos \varphi \vec{e}_1 - r\omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + r\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3)$$

$$= 2r\omega_1 \omega_2 \sin \varphi \vec{e}_1 - r \cos \varphi (\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{e}_2 - r\omega_2^2 \sin \varphi \vec{e}_3.$$

Khi $\varphi = 0^\circ$: $\vec{a}_A = -r(\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{e}_2.$

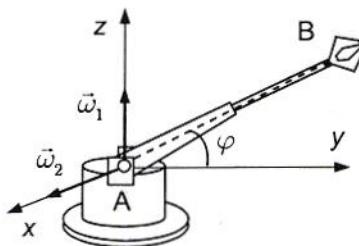
Khi $\varphi = 90^\circ$: $\vec{a}_A = 2r\omega_1 \omega_2 \vec{e}_1 - r\omega_2^2 \vec{e}_3.$

9-10. Vận tốc góc của AB có dạng:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3.$$

a) Khi ω_1, ω_2 là hằng số

Gia tốc góc của AB:



$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega_2 \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \omega_1 \omega_2 \vec{e}_2.$$

Vận tốc điểm B:

$$\begin{aligned}\vec{v}_B &= \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} \\ &= (\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (l \cos \varphi \vec{e}_2 + l \sin \varphi \vec{e}_3) \\ &= -l\omega_1 \cos \varphi \vec{e}_1 - l\omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + l\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Gia tốc điểm B: $\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= (\omega_1 \omega_2 \vec{e}_2) \times (l \cos \varphi \vec{e}_2 + l \sin \varphi \vec{e}_3) \\ &\quad + (\omega_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \vec{e}_3) \times (-l\omega_1 \cos \varphi \vec{e}_1 - l\omega_2 \sin \varphi \vec{e}_2 + l\omega_2 \cos \varphi \vec{e}_3) \\ &= 2l\omega_1 \omega_2 \sin \varphi \vec{e}_1 - l \cos \varphi (\omega_1^2 + \omega_2^2) \vec{e}_2 - l\omega_2^2 \sin \varphi \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Thay các giá trị số ta nhận được:

$$\vec{v}_B = 12,48\vec{e}_1 - 14,57\vec{e}_2 + 20,81\vec{e}_3 \text{ cm/s.}$$

$$\vec{a}_B = 4,37\vec{e}_1 - 7,07\vec{e}_2 - 3,64\vec{e}_3 \text{ cm/s}^2.$$

b) Khi ω_1, ω_2 biến thiên

Vận tốc của điểm B có trị số giống như đã kết quả ở mục a):

$$\vec{v}_B = 12,48\vec{e}_1 - 14,57\vec{e}_2 + 20,81\vec{e}_3 \text{ cm/s.}$$

Gia tốc góc của AB:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega_2 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \dot{\omega}_2 \vec{e}_1 + \dot{\omega}_1 \vec{e}_3 = \dot{\omega}_2 \vec{e}_1 + \omega_1 \omega_2 \vec{e}_2 + \dot{\omega}_1 \vec{e}_3.$$

Gia tốc điểm B: $\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_B$

$$\begin{aligned}\vec{a}_B &= [2l\omega_1 \omega_2 \sin \varphi - l\dot{\omega}_1 \cos \varphi] \vec{e}_1 \\ &\quad - [l \cos \varphi (\omega_1^2 + \omega_2^2) + l\dot{\omega}_2 \sin \varphi] \vec{e}_2 - [l\omega_2^2 \sin \varphi - l\dot{\omega}_2 \cos \varphi] \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Do ω_1, ω_2 cùng giảm dần, ta suy ra: $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = -0,02$. Thay các giá trị số vào công thức trên ta nhận được:

$$\vec{a}_B = 6,04\vec{e}_1 - 5,91\vec{e}_2 - 5,31\vec{e}_3 \text{ cm/s}^2.$$

9-11. Hệ tọa độ động $\{Oxyz\}$ quay đều xung quanh trục $z_0 \equiv z$ cố định với vận tốc góc $\vec{\Omega}$. Vận tốc góc của đĩa có dạng:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_p = -\omega_p \sin \alpha \vec{e}_2 + (\Omega + \omega_p \cos \alpha) \vec{e}_3.$$

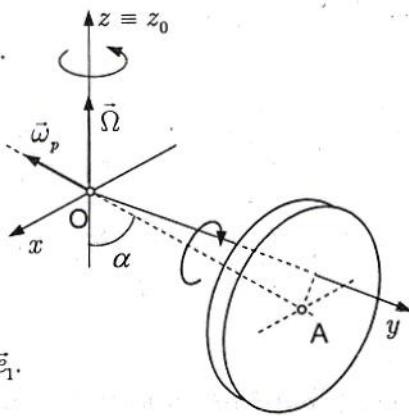
Với $\alpha = 60^\circ$, $\omega_p = \frac{\pi n_p}{30} = 120\pi$, $\Omega = 20$:

$$\vec{\omega} = -326,48 \vec{e}_2 + 208,5 \vec{e}_3 \text{ rad/s.}$$

Gia tốc góc của đĩa:

$$\begin{aligned}\vec{\epsilon} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\omega_p \sin \alpha \frac{d\vec{e}_2}{dt} \\ &= -\omega_p \sin \alpha (\Omega \vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \omega_p \Omega \sin \alpha \vec{e}_1.\end{aligned}$$

Thay số ta có: $\vec{\epsilon} \approx 6530 \vec{e}_1 \text{ rad/s}^2$.



9-12. Chọn hệ tọa độ động $\{Axyz\}$ gắn với AB

núi hình vẽ. Vận tốc góc của đĩa có dạng:

$$\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_p \quad (1)$$

Từ hình vẽ ta có:

$$\vec{\Omega} = -\Omega \sin \beta \vec{e}_2 - \Omega \cos \beta \vec{e}_3, \quad \vec{\omega}_p = \omega_p \vec{e}_3,$$

$$\vec{\omega} = -\omega \sin \alpha \vec{e}_2 + \omega \cos \alpha \vec{e}_3,$$

Thế các biểu thức trên vào (1) ta nhận được:

$$-\omega \sin \alpha \vec{e}_2 + \omega \cos \alpha \vec{e}_3 = -\Omega \sin \beta \vec{e}_2 + (\omega_p - \Omega \cos \beta) \vec{e}_3.$$

Từ đó ta suy ra:

$$\omega = \Omega \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \Rightarrow \vec{\omega} = -\Omega \sin \beta \vec{e}_2 + \Omega \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha} \vec{e}_3.$$

Với $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{l}{R}$ ta suy ra:

$$\vec{\omega} = -\Omega \sin \beta \vec{e}_2 + \Omega \frac{l}{R} \sin \beta \vec{e}_3.$$

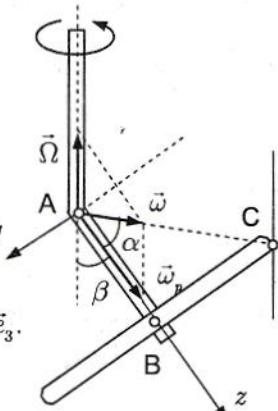
Gia tốc góc của đĩa được xác định bởi:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\Omega \sin \beta \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \Omega \frac{l}{R} \sin \beta \frac{d\vec{e}_3}{dt} \quad (2)$$

trong đó $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_2 = (-\Omega \sin \beta \vec{e}_2 - \Omega \cos \beta \vec{e}_3) \times \vec{e}_2 = \Omega \cos \beta \vec{e}_1$, tương tự ta

có: $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_3 = -\Omega \sin \beta \vec{e}_1$. Thế các biểu thức nhận được vào (2) ta suy ra:

$$\vec{\epsilon} = -\Omega^2 \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{l}{R} \sin \beta \right) \vec{e}_1$$



Do $v_C = 0$, gia tốc điểm C xác định nhờ công thức sau:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{AC} = -\Omega^2 \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{l}{R} \sin \beta \right) \vec{e}_1 \times (-R\vec{e}_2 + l\vec{e}_3) \\ &= l\Omega^2 \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{l}{R} \sin \beta \right) \vec{e}_2 + R\Omega^2 \sin \beta \left(\cos \beta + \frac{l}{R} \sin \beta \right) \vec{e}_3\end{aligned}$$

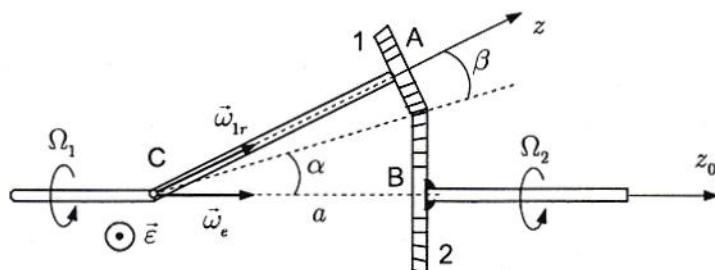
Thay các giá trị số ta nhận được:

$$\vec{a}_C \approx 3065 \vec{e}_2 + 2299 \vec{e}_3 \text{ cm/s}^2.$$

Truyền động hành tinh - vi sai nón

9-13. Nếu coi trục AC là hệ quy chiếu động, $\vec{\omega}_e = \vec{\Omega}_1$, $\vec{\omega}_2 = \vec{\Omega}_2$, ta có hệ thức sau:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \bar{\omega}_{1r} = -\frac{r_2}{r_1} \bar{\omega}_{2r} \quad (1)$$



Xét chuyển động của bánh răng 2, ta có quan hệ:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_{2r} \Rightarrow \bar{\omega}_{2r} = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$\bar{\omega}_{1r} = (\bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_2) \frac{r_2}{r_1} = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Vận tốc góc của bánh răng 1 được xác định bởi công thức:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_{1r}$$

Từ đó ta suy ra:

$$\omega_1 = \sqrt{\left[\Omega_1 + (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos(\alpha + \beta) \right]^2 + \left[(\Omega_1 - \Omega_2) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sin(\alpha + \beta) \right]^2}$$

Thay số ta được: $\omega_1 \approx 76,78 \text{ rad/s.}$

Do các thành phần vận tốc góc đều có trị số hằng số, vận tốc góc của bánh răng 1 được xác định bởi công thức:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_{1r} \Rightarrow \varepsilon_1 = \Omega_1 (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sin(\alpha + \beta).$$

Thay số ta được: $\varepsilon_1 \approx 868,1 \text{ rad/s}^2$.

9-14. Chọn OA làm hệ quy chiếu động, $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_A$, ta có công thức biểu diễn quan hệ giữa các vận tốc góc tương đối $\bar{\omega}_{1r}, \bar{\omega}_{2r}$ của hai cặp bánh răng 1-2 và 2-3:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_2}$$

Ta suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_3}{r_1} = -1 \Rightarrow \bar{\omega}_{3r} = -\bar{\omega}_{1r}.$$

Với bánh răng 1 ta có hệ thức:

$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{1r} \Rightarrow \bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A$$

Ta suy ra:

$$\bar{\omega}_{3r} = \bar{\omega}_A - \bar{\omega}_1$$

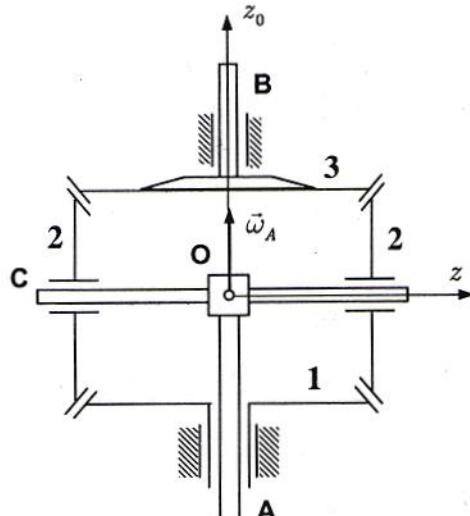
Với bánh răng 3 ta có hệ thức:

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{3r} = 2\bar{\omega}_A - \bar{\omega}_1$$

a) Khi $\bar{\omega}_1 = 0 \Rightarrow \bar{\omega}_B = 2\bar{\omega}_A$

b) Khi $\bar{\omega}_1 = 2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\omega}_B = 0$

c) Khi $\bar{\omega}_1 = -2\bar{\omega}_A \Rightarrow \bar{\omega}_B = 4\bar{\omega}_A$



9-15. Chọn OA làm hệ quy chiếu động, $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_A$, ta có các hệ thức sau:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_{3r}}{\bar{\omega}_{4r}} = \frac{r_4}{r_3} \quad (1)$$

Do $\bar{\omega}_{2r} = \bar{\omega}_{3r}$, từ (1) ta suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{4r}} = -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \quad (2)$$

Với bánh răng 1 ta có hệ thức:

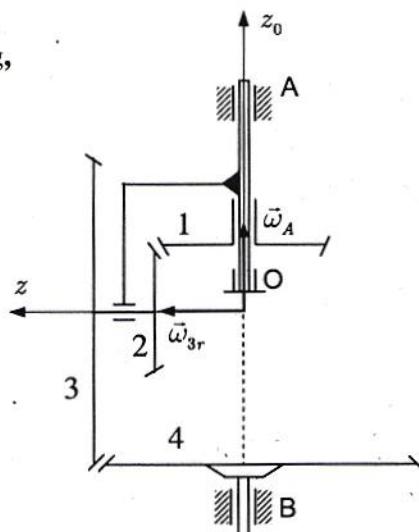
$$\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{1r} \Rightarrow \bar{\omega}_{1r} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta nhận được:

$$\bar{\omega}_{4r} = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A) \quad (4)$$

Với bánh răng 4 ta có hệ thức:

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{4r} \Rightarrow \bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_A - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A)$$



Thay các giá trị số ta được:

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_4 \approx 132,7 \text{ rad/s.}$$

Thế (4) vào (1) ta nhận được:

$$\bar{\omega}_{3r} = -\frac{r_1}{r_2} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_A) = 80 \text{ rad/s.}$$

Với bánh răng 3 ta có hệ thức:

$$\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{3r} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_{3r}^2} = 100 \text{ rad/s.}$$

9-16. Chọn OB làm hệ quy chiếu động, $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_B$, ta có các hệ thức sau:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = \frac{r_3}{r_2}$$

Ta suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_e}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_e} = -1,$$

$$\bar{\omega}_e = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3),$$

$$\bar{\omega}_{2r} = -\frac{r_1}{r_2} \bar{\omega}_{1r} = -\frac{r_1}{r_2} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_e).$$

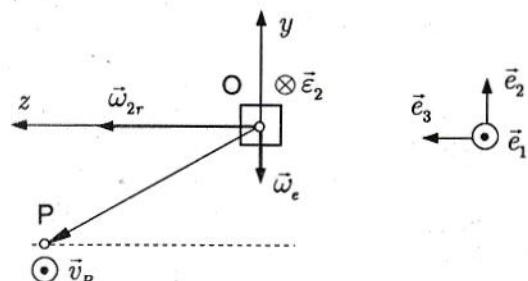
Thay các giá trị số $\bar{\omega}_1 = -10$, $\bar{\omega}_3 = 6$ ta được:

$$\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_B = -2 \text{ rad/s.}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{2r}^2 + \omega_e^2} \approx 12,17 \text{ rad/s.}$$

$$\varepsilon_2 = \omega_e \omega_{2r} = 24 \text{ rad/s}^2 \text{ (chiều như hình vẽ).}$$

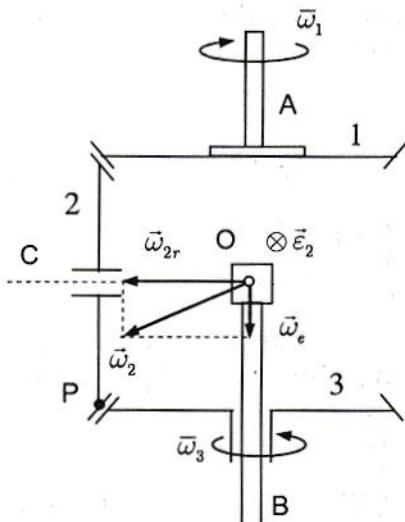
Để xác định vận tốc và gia tốc điểm P, ta sử dụng hệ tọa độ $\{Oxyz\}$ như hình vẽ dưới đây.



Ta có các hệ thức:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_{2r} = -2\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 = \bar{\omega}_e \times \bar{\omega}_{2r} = -2\vec{e}_2 \times (12\vec{e}_3) = -24\vec{e}_1,$$



$$\overrightarrow{OP} = -4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

Vận tốc của điểm P:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{OP} = (-2\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3) \times (-4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3) = 36\vec{e}_1$$

$$v_P = 36 \text{ cm/s.}$$

Gia tốc của điểm P:

$$\vec{a}_P^\epsilon = \vec{\epsilon}_2 \times \overrightarrow{OP} = -24\vec{e}_1 \times (-4\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3) = 144\vec{e}_2 + 96\vec{e}_3$$

$$\vec{a}_P^\omega = \vec{\omega}_2 \times \vec{v}_P = (-2\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3) \times 36\vec{e}_1 = 432\vec{e}_2 + 72\vec{e}_3$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^\omega + \vec{a}_P^\epsilon = 576\vec{e}_2 + 168\vec{e}_3$$

$$a_P = 600 \text{ cm/s}^2.$$

9-17. Chọn hộp làm hệ quy chiếu động, $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}_{CD}$, ta có các hệ thức sau:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{r}{R} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\bar{\omega}_{3r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{R}{r} = 2.$$

Ta suy ra:

$$\frac{\bar{\omega}_{1r}}{\bar{\omega}_{2r}} = \frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_e}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_e} = -1$$

$$\bar{\omega}_e = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2)$$

$$\bar{\omega}_{3r} = -2\bar{\omega}_{1r} = -2(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_e).$$

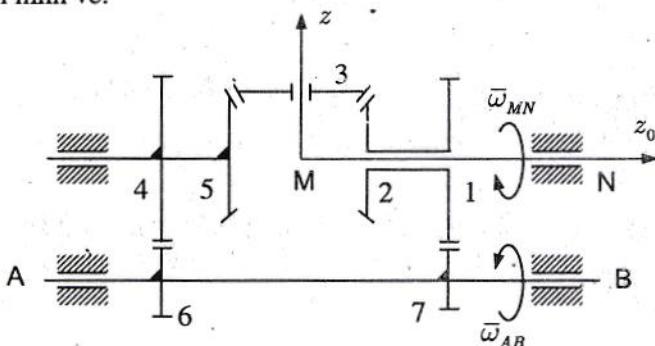
Với $\bar{\omega}_1 = 6$, $\bar{\omega}_2 = 4$ ta tính được vận tốc góc của hộp:

$$\bar{\omega}_{CD} = \bar{\omega}_e = 5 \text{ rad/s.}$$

Vận tốc góc của bánh răng 3:

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_{3r}^2 + \omega_e^2} \approx 5,39 \text{ rad/s.}$$

9-18. Chọn tay quay MN làm hệ quy chiếu động và có vận tốc góc $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_{MN}$ với chiều như trên hình vẽ.



Ta suy ra các hệ thức sau:

$$\frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{3r}} = -\frac{Z_3}{Z_2}, \quad \frac{\bar{\omega}_{3r}}{\bar{\omega}_{5r}} = \frac{Z_5}{Z_3} \Rightarrow \frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{5r}} = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_e}{\bar{\omega}_5 - \bar{\omega}_e} = -1.$$

Từ biểu thức trên ta có:

$$\bar{\omega}_e = \frac{1}{2}(\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_5) \quad (1)$$

Từ hình vẽ ta suy ra các quan hệ vận tốc góc:

$$\bar{\omega}_5 = \bar{\omega}_4 = -\frac{Z_6}{Z_4} \bar{\omega}_6 = -\frac{Z_6}{Z_4} \bar{\omega}_{AB}, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 = -\frac{Z_7}{Z_1} \bar{\omega}_7 = -\frac{Z_7}{Z_1} \bar{\omega}_{AB}. \quad (2)$$

Thế các hệ thức (2) vào (1) ta nhận được:

$$\bar{\omega}_e = \bar{\omega}_{MN} = -\frac{1}{2}\left(\frac{Z_7}{Z_1} + \frac{Z_6}{Z_4}\right)\bar{\omega}_{AB}$$

Vậy tỷ số truyền là:

$$k = \frac{\omega_{MN}}{\omega_{AB}} = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_7}{Z_1} + \frac{Z_6}{Z_4}\right).$$

Vật rắn chuyển động tổng quát

9-19. Sử dụng hệ tọa độ động $\{Oxyz\}$ gắn với đĩa 1 (các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) như hình vẽ, ta có thể biểu diễn vận tốc góc của đĩa 2 dưới dạng:

$$\bar{\omega}_2 = \omega \vec{e}_1 + \Omega \vec{e}_3 \quad (1)$$

Gia tốc góc của đĩa 2:

$$\ddot{\epsilon}_2 = \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = \omega \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \Omega \frac{d\vec{e}_3}{dt}$$

Do hệ động quay xung quanh trục cố định với vận tốc góc $\bar{\Omega}$, ta suy ra:

$$\ddot{\epsilon}_2 = \omega \Omega \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \omega \Omega \vec{e}_2 \quad (2)$$

Vận tốc của điểm gốc O có dạng:

$$\vec{v}_o = -a\Omega \vec{e}_1$$

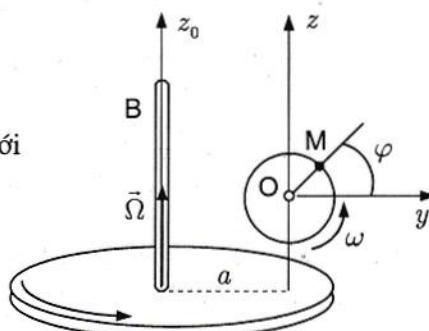
Ta suy ra gia tốc của điểm O:

$$\ddot{a}_o = \frac{d}{dt} \vec{v}_o = -a\Omega \frac{d}{dt} \vec{e}_1 = -a\Omega (\Omega \vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = -a\Omega^2 \vec{e}_2 \quad (3)$$

Gia tốc của điểm M được xác định từ công thức tổng quát:

$$\ddot{a}_M = \ddot{a}_o + \ddot{\epsilon}_2 \times \overrightarrow{OM} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \overrightarrow{OM}) \quad (4)$$

với $\overrightarrow{OM} = r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3$. Thế các công thức (1), (2), (3) vào (4) ta nhận được biểu thức gia tốc của M:



$$\begin{aligned}
\vec{a}_M &= -a\Omega^2 \vec{e}_2 + \omega\Omega \vec{e}_2 \times (r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3) \\
&\quad + (\omega\vec{e}_1 + \Omega \vec{e}_3) \times [(\omega\vec{e}_1 + \Omega \vec{e}_3) \times (r \cos \varphi \vec{e}_2 + r \sin \varphi \vec{e}_3)] \\
&= 2r\omega\Omega \sin \varphi \vec{e}_1 - (a\Omega^2 + r\omega^2 \cos \varphi + r\Omega^2 \cos \varphi) \vec{e}_2 - r\omega^2 \sin \varphi \vec{e}_3
\end{aligned}$$

9-20. Hệ tọa độ động $\{Oxyz\}$ gắn với OC (các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) quay xung

quanh trục cố định với vận tốc góc $\vec{\omega}_e = \vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$.

Chuyển động tương đối của AB trên hệ động là chuyển động phẳng với tâm vận tốc tức thời P như hình vẽ. Vận tốc góc tương đối $\vec{\omega}_r$ của AB được xác định bởi công thức:

$$\vec{\omega}_r = -\frac{v_A}{AP} \vec{e}_1 = -\frac{v_A}{\sqrt{l^2 - d^2}} \vec{e}_1$$

Thay các giá trị số ta nhận được:

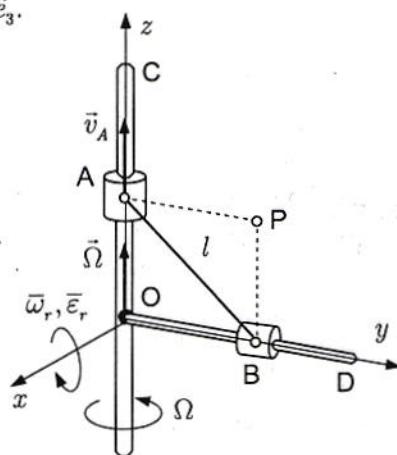
$$\vec{\omega}_r = -2\vec{e}_1$$

Để tìm vận tốc góc tương đối của AB, ta cần sử dụng biểu thức quan hệ vận tốc giữa hai điểm A và B trong chuyển động phẳng. Từ đó ta suy ra:

$$\vec{\epsilon}_r = -3\vec{e}_1$$

Vận tốc góc (tuyệt đối) của AB được tính toán từ công thức:

$$\vec{\epsilon}_{AB} = \vec{\epsilon}_e + \vec{\epsilon}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 \times (-2\vec{e}_1) = -3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2.$$



9-21. Hệ tọa độ động $\{Cxyz\}$ gắn với OBC (các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) quay xung quanh trục cố định với vận tốc góc:

$$\vec{\omega}_e = \vec{\Omega} = \Omega \cos \alpha \vec{e}_2 + \Omega \sin \alpha \vec{e}_3.$$

Vận tốc của điểm C:

$$v_C = \Omega(R + r \sin \alpha)$$

Vận tốc góc tương đối của đĩa:

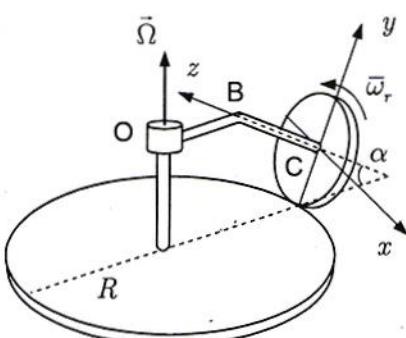
$$\vec{\omega}_r = \frac{\Omega(R + r \sin \alpha)}{r} \vec{e}_3$$

Từ đó ta suy ra vận tốc góc (tuyệt đối) của đĩa:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = \Omega \cos \alpha \vec{e}_2 + \Omega \left(2 \sin \alpha + \frac{R}{r} \right) \vec{e}_3.$$

Do $\epsilon_e = \epsilon_r = 0$, ta suy ra vận tốc góc tuyệt đối của đĩa:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \Omega^2 \left(\frac{R}{r} + \sin \alpha \right) \cos \alpha \vec{e}_1.$$



9-22. Các thành phần vận tốc góc:

$$\vec{\omega}_e = \Omega \vec{e}_3, \vec{\omega}_r = \omega_p \vec{e}_2$$

Ta suy ra vận tốc góc của đĩa:

$$\vec{\omega} = \omega_p \vec{e}_2 + \Omega \vec{e}_3 = 10\pi \vec{e}_2 + 4\pi \vec{e}_3,$$

và gia tốc góc của đĩa:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = -\Omega \omega_p \vec{e}_1 = -40\pi^2 \vec{e}_1.$$

Gia tốc của điểm O có dạng:

$$\vec{a}_O = -l\Omega^2 \vec{e}_1 = -480\pi^2 \vec{e}_1 \text{ cm/s}^2.$$

Véc-tơ $\overrightarrow{OA} = r\vec{e}_1 = 10\vec{e}_1 \text{ cm}$. Thế các hệ thức nhận được vào công thức:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}),$$

ta xác định được gia tốc của điểm A:

$$\vec{a}_A = -480\pi^2 \vec{e}_1 + (10\pi \vec{e}_2 + 4\pi \vec{e}_3) \times [(10\pi \vec{e}_2 + 4\pi \vec{e}_3) \times 10\vec{e}_1] = -1640\pi^2 \vec{e}_1 \text{ cm/s}^2.$$

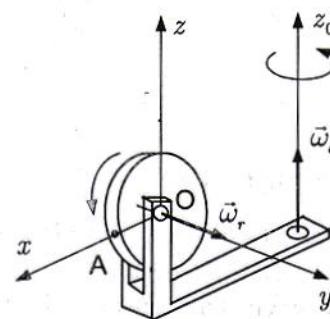
9-23. Các vận tốc góc:

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = 2\pi, \omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = 40\pi.$$

Các thành phần vận tốc góc được biểu diễn trên tọa độ động $\{Oxyz\}$:

$$\vec{\omega}_e = \omega_1 \cos \beta \vec{e}_2 + \omega_1 \sin \beta \vec{e}_3 = \pi \vec{e}_2 + \pi \sqrt{3} \vec{e}_3$$

$$\vec{\omega}_r = -\omega_2 \vec{e}_2 = -40\pi \vec{e}_2.$$



Vận tốc góc của đĩa:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r = -39\pi \vec{e}_2 + \pi \sqrt{3} \vec{e}_3 \quad (1)$$

Do $\epsilon_e = \epsilon_r = 0$, gia tốc góc của đĩa là:

$$\vec{\epsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r = \omega_1 \omega_2 \sin \beta \vec{e}_1 = 40\pi^2 \sqrt{3} \vec{e}_1 \quad (2)$$

Vận tốc của điểm gốc O có dạng:

$$\vec{v}_O = -(l + 2l \cos \beta) \omega_1 \vec{e}_1 = -2\pi \vec{e}_1 \quad (3)$$

Gia tốc của điểm O có dạng:

$$\vec{a}_o = -2l\omega_1^2 \sin \beta \vec{e}_2 + 2l\omega_1^2 \cos \beta \vec{e}_3 = -2\pi^2 \sqrt{3} \vec{e}_2 + 2\pi^2 \vec{e}_3 \quad (4)$$

Vectơ \overrightarrow{OE} được biểu diễn trên hệ tọa độ động:

$$\overrightarrow{OE} = -r\vec{e}_3 = -0,2\vec{e}_3 \quad (5)$$

Thế các biểu thức (1), (3), (5) vào công thức vận tốc $\vec{v}_E = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OE}$ ta nhận được:

$$\vec{v}_E = (7,8 - 2\pi)\vec{e}_1 \approx 1,52\vec{e}_1 \text{ m/s.}$$

Gia tốc của điểm E được xác định từ công thức tổng quát:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_o + \vec{\epsilon} \times \overrightarrow{OE} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OE})$$

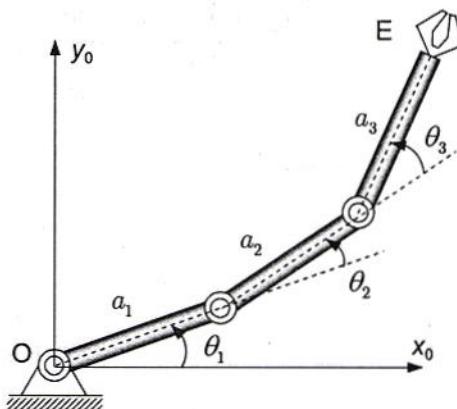
Thế các biểu thức (1), (2), (3), (5) vào công thức tính gia tốc ở trên ta nhận được:

$$\vec{a}_E \approx 236\vec{e}_2 + 3022\vec{e}_3 \text{ m/s}^2.$$

Động học rôbốt công nghiệp

9-24. Ta xây dựng bảng các tham số động học DH như sau:

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	a_1	0
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0



Áp dụng công thức:

$$D_3 = {}^0H_1 {}^1H_2 {}^2H_3,$$

trong đó:

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2H_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ta suy ra:

$$D_3 = \begin{bmatrix} C_{123} & -S_{123} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123} \\ S_{123} & C_{123} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} + a_3S_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

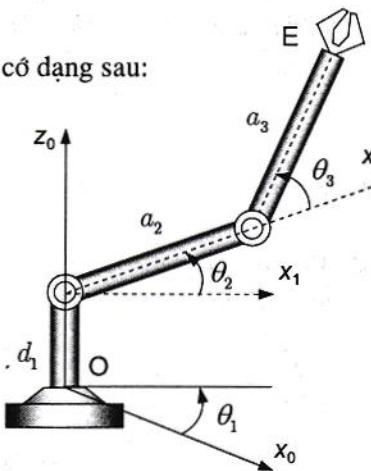
Trong đó ta sử dụng ký hiệu: $C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$, $S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$.

Các tọa độ của điểm E:

$$x_E = a_1C_1 + a_2C_{12} + a_3C_{123}, y_E = a_1S_1 + a_2S_{12} + a_3S_{123}.$$

9-25. Bảng các tham số động học DH của robot có dạng sau:

Trục	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	0	$\pi / 2$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0



Áp dụng công thức:

$$D_3 = {}^0H_1 {}^1H_2 {}^2H_3,$$

trong đó:

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & -\cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1H_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2H_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ta suy ra:

$$D_3 = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}) \\ S_{23} & C_{23} & 0 & d_1 + a_2S_2 + a_3S_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_E = C_1(a_2C_2 + a_3C_{23}), y_E = S_1(a_2C_2 + a_3C_{23}), z_E = d_1 + a_2S_2 + a_3S_{23}.$$

CHƯƠNG 10: ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

10-1. Áp dụng định luật cơ bản của động lực học đối với chất điểm

$$m\ddot{a} = \vec{F} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{ms} + \vec{Q}$$

Chiếu lên hai phương:

$$m\ddot{x} = P \cos 30^\circ - F_{ms}$$

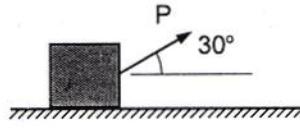
$$m\ddot{y} = N + P \sin 30^\circ - Q = 0$$

$$F_{ms} = \mu N, \quad Q = mg$$

Giải được $N = Q - P \sin 30^\circ$,

$$m\ddot{x} = P \cos 30^\circ - \mu(mg - P \sin 30^\circ)$$

$$= P(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ) - \mu mg$$



Tích phân lên được: $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{1}{m}[P(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ) - \mu mg]t$ m/s.

Thay số vào nhận được: $v(t = 2) = 10,37$ m/s.

10-2. Phương trình vi phân chuyển động theo phương thẳng đứng của viên đạn

$$m\ddot{y} = -mg - F_D, \text{ với điều kiện đầu } \dot{y}(0) = v_0 = 50 \text{ m/s.}$$

a) Bỏ qua lực cản của không khí

$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow v(t) = v_0 - gt, \quad y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Thời gian viên đạn di lên đến điểm cao nhất:

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = v_0 / g$$

độ cao cực đại mà quả đạn có thể đạt được:

$$y(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}v_0^2 / g$$

Thay số vào được:

$$t_1 = v_0 / g = 5,097 \text{ s}, \quad y(t_1) = \frac{1}{2}v_0^2 / g = 127,42 \text{ m.}$$

b) Khi tính đến lực cản của không khí là $F_D = 0,01v^2$

$$m\ddot{v} = -mg - \alpha^2 v^2, \quad \dot{y} = v, \quad \alpha = 0,1 \text{ hay } \frac{mdv}{mg + \alpha^2 v^2} = -dt, \quad \dot{y} = v.$$

với điều kiện đầu $v(0) = 50, \quad y(0) = 0$, giải phương trình vi phân ta nhận được:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{\sqrt{mg}}{\alpha} \tan \left[\arctan(\alpha v_0 / \sqrt{mg}) - \sqrt{g/m} \alpha t \right], \\ y(t) &= \frac{1}{2\alpha^2} \left[2m \ln \left(\sqrt{mg} + \alpha v_0 \tan(\sqrt{g/m} \alpha t) \right) \right. \\ &\quad \left. - m \ln \left(1 + \tan(\sqrt{g/m} \alpha t)^2 \right) - m \ln(mg) \right]. \end{aligned}$$

Thay số ta nhận được giá trị: $t_1 = 4,720 \text{ s}, \quad y(t_1) = 113,504 \text{ m.}$

10-3. Khi xe chạy đều

$$m\ddot{v} = 0 = mg \sin \alpha - S - \mu N, \quad N = mg \cos \alpha,$$

$$S = mg \sin \alpha - \mu N = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Khi hâm với gia tốc $a = -v/t = -1,6/4 = -0,4 \text{ m/s}^2$,

$$ma = mg \sin \alpha - S - \mu N$$

$$S = mg \sin \alpha - \mu N - ma = m[g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - a].$$

10-4. Tính được gia tốc của tàu $a = v/t$.

Lực kéo của đầu tàu $F = ma + F_c = m(a + \mu g)$

10-5. Lực cản của không khí $F_c = \alpha v^2$, với $v = 1, F = 0,49 \Rightarrow \alpha = 0,49$.

Lực đẩy của cánh quạt khi máy bay chạy đều:

$$F \cos 10^\circ = F_c = \alpha v^2 \Rightarrow F = \alpha v^2 / \cos 10^\circ.$$

10-6. Xe chạy chậm dần đều $F = ma, T - T_0 = Fs = mas \Rightarrow a = 2s/v^2$.

Tổng lực của hai cáp bằng lực hâm xe, lực căng mỗi cáp:

$$S = F/2 = ma/2.$$

10-7. $F = ma = m\ddot{x} = -mr\omega^2(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t), F_{\max} = mr\omega^2(1 + r/l)$.

10-8. Xét một hạt vật liệu chuyển động cùng với sàng, $y = a \sin kt$. Các lực tác dụng lên hạt là trọng lực P và phản lực N . Theo phương thẳng đứng ta có:

$$m\ddot{y} = N - P \Rightarrow N = m(\ddot{y} + g) = m(g - ak^2 \sin kt), N_{\min} = m(g - ak^2).$$

Để hạt vật liệu bật lên khỏi mặt sàng thì $N_{\min} = 0 \Rightarrow k \geq \sqrt{g/a}$.

10-9. Phương trình chuyển động của đầu tàu theo phương pháp tuyến:

$$m \frac{v^2}{\rho} = N - P \Rightarrow N = P + m \frac{v^2}{\rho}.$$

Vậy áp lực phụ là :

$$N_d = mv^2/\rho, \quad (1)$$

trong đó ρ là bán kính cong tại điểm giữa cầu, được tính theo mômen uốn $M = N_d L/4$ dưới dạng:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{N_d L/4}{EI} \quad (2)$$

Dưới tác dụng của áp lực phụ này cầu bị võng, theo giáo trình Sức bền vật liệu ta có công thức tính độ võng:

$$h = \frac{N_d L^3}{48EI} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta giải được $\rho^{-1} = 12h / L^2$, suy ra $N_d = mv^2 / \rho = 12hmv^2 / L^2$.

10-10. Dưới tác dụng của trọng lực vật nặng rơi không vận tốc ban đầu theo phương trình: $z(t) = \frac{1}{2} gt^2$

Gọi chiều sâu của giếng là z , thời gian rơi của vật nặng là t_1 và thời gian tiếng động đi từ đáy giếng lên là t_2 .

Ta có các phương trình:

$$t_1 + t_2 = 6,5; \frac{1}{2} gt_1^2 = z; t_2 = z / 330.$$

Giải hệ này được:

$$t_1 = 5,97 \text{ s}, t_2 = 0,53 \text{ s}, z = 174,8 \text{ m}.$$

10-11. Phương trình vi phân chuyển động của tàu:

$$m\ddot{x} = F(t) - 1,96 \cdot 10^3 \operatorname{sgn}(\dot{x})$$

$$x(0) = 0, \dot{x}(t) = 0, \text{ khi } (F(t) - 1,96 \cdot 10^3 \operatorname{sgn}(\dot{x})) < 0$$

trong đó hàm lực động cơ theo thời gian $F(t) = 1177t \text{ N}$.

Thời điểm lực đủ lớn để kéo toa tàu chuyển động được xác định từ phương trình:

$$1177t_1 - 1,96 \cdot 10^3 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,665 \text{ s}.$$

Viết lại phương trình vi phân chuyển động:

$$m\ddot{x} = 1177(t - t_1),$$

$$x(t_1) = 0, \dot{x}(t_1) = 0, t \geq t_1.$$

Ta suy ra: $x(t) = \frac{1177}{6m}(t - t_1)^3, t \geq t_1$.

10-12. Phương trình vi phân mô tả cùng với các điều kiện đầu:

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - \mu N, N = mg \cos \alpha, \dot{x}(0) = v_0 = 1,5, x(0) = 0,$$

$$\ddot{x} = a = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Suy ra $v(t) = v_0 + at, x(t) = v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

Thời gian chuyển động đến khi dừng và quãng đường đi được:

$$t^* = v_0 / a, s = x(t^*) = v_0t^* + \frac{1}{2}at^{*2}.$$

10-13. Phương trình vi phân chuyển động của quả cầu khi rơi (z hướng từ trên xuống)

$$m\ddot{z} = mg - R = mg - kS\dot{z}^2, \dot{z}(0) = 0.$$

Vận tốc cực đại được xác định từ phương trình:

$$0 = mg - kS\dot{z}^2.$$

Ta suy ra:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{kS}} = \sqrt{\frac{mg}{k\pi r^2}} = \sqrt{\frac{10g}{0,2352.\pi.0,08^2}} \approx 144 \text{ m/s.}$$

10-14. Phương trình chuyển động ngang của tàu:

$$m\ddot{x} = Q - R, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{hay} \quad m\dot{v} = Q - mk^2v^2, \quad v(0) = 0.$$

Giải phương trình vi phân:

$$\frac{mdv}{Q - mk^2v^2} = dt$$

$$\text{ta tìm được: } v(t) = \sqrt{\frac{Q}{mk^2}} \tanh(\sqrt{\frac{Q}{m}} kt) = \sqrt{\frac{Q}{mk^2}} \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}},$$

$$\text{trong đó: } \alpha = \sqrt{\frac{Q}{m}} k.$$

10-15. Phương trình chuyển động của tàu theo phương đứng

$$m\dot{v} = P - kSv, \text{ với điều kiện đầu } v(0) = 0.$$

Từ đó giải được:

$$\frac{dv}{P/m - (kS/m)v} = dt \Rightarrow \frac{d[P/m - (kS/m)v]}{P/m - (kS/m)v} = -\frac{kS}{m} dt$$

$$v(t) = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m}t}\right), \quad v_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{P}{kS}$$

Giải tìm T từ phương trình :

$$v(T) = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m}T}\right) = 0,95 \frac{P}{kS}.$$

$$\text{Vậy ta có: } e^{-\frac{kS}{m}T} = 0,05 \Rightarrow T = \frac{m}{kS} \ln 20.$$

10-16. Xét chuyển động của hai quả cầu nhỏ trong hệ Oxy.

Quả cầu 1.

$$m_1\ddot{x}_1 = 0, \quad m_1\ddot{y}_1 = -m_1g$$

với các điều kiện đầu:

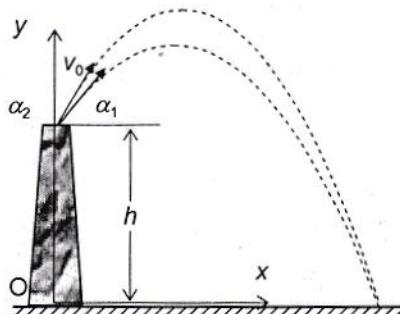
$$x_1(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = v_0 \cos \alpha_1$$

$$y_1(0) = h \quad \dot{y}_1(0) = v_0 \sin \alpha_1$$

Quả cầu 2.

$$m_2\ddot{x}_2 = 0, \quad m_2\ddot{y}_2 = -m_2g$$

với các điều kiện đầu:



$$x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_2(0) = v_0 \cos \alpha_2,$$

$$y_2(0) = h \quad \dot{y}_2(0) = v_0 \sin \alpha_2$$

Tích phân các phương trình vi phân chuyển động nhận được:

$$x_1(t) = v_0 t \cos \alpha_1 \quad x_2(t) = v_0 t \cos \alpha_2$$

$$y_1(t) = h + v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} g t^2 \quad y_2(t) = h + v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{1}{2} g t^2$$

Phương trình quỹ đạo chuyển động

$$t = \frac{x_1(t)}{v_0 \cos \alpha_1}, \quad y_1 = h + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} x_1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} x_1^2$$

$$y_1 = h + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} x^2$$

$$y_2 = h + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_2} x^2$$

Tọa độ điểm chạm đất $(L, 0)$ với L thỏa mãn phương trình:

$$0 = h + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} L - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} L^2, \quad 0 = h + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} L - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_2} L^2$$

Giải hệ trên ta được:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} - \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{g}{2v_0^2} \left[\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} \right] L, \quad L = \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}.$$

Thay L vào xác định được chiều cao của tháp:

$$h = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_1} L^2 - \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} L, \quad \text{với } L = \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}.$$

10-17. Xét chuyển động của quả cầu (chất điểm) chuyển động trên quỹ đạo tròn dưới tác dụng của trọng lực P và lực căng dây T .

$$m\ddot{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Ta có $\ddot{a} = \ddot{a}^t + \ddot{a}^n$, với $\ddot{a}^t = L\ddot{\varphi}$, $\ddot{a}^n = L\dot{\varphi}^2$.

Sử dụng phương pháp tọa độ tự nhiên:

$$ma^t = P \cos \varphi$$

$$ma^n = T - P \sin \varphi.$$

Ta suy ra:

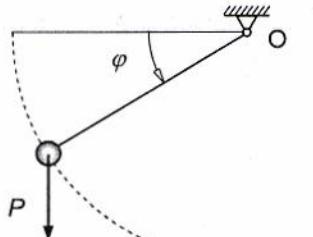
$$mL\ddot{\varphi} = mg \cos \varphi$$

$$mL\dot{\varphi}^2 = T - mg \sin \varphi.$$

Sử dụng hệ thức

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}, \quad L\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = g \cos \varphi \Rightarrow L\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = g \cos \varphi d\varphi.$$

Dựa vào các điều kiện đầu của chuyển động, ta có:



$$\int_0^\varphi L\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \int_{\varphi_0}^\varphi g \cos \varphi d\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}L\dot{\varphi}^2 = g(\sin \varphi - \sin \varphi_0),$$

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2g}{L}}(\sin \varphi - \sin \varphi_0).$$

Như thế: $v(\varphi) = L\dot{\varphi} = \sqrt{2gL(\sin \varphi - \sin \varphi_0)}$

$$T = mL\dot{\varphi}^2 + mg \sin \varphi = 2mg(\sin \varphi - \sin \varphi_0) + mg \sin \varphi \\ = mg(3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0).$$

Với $\varphi_0 = 0$, ta suy ra $v(\varphi) = \sqrt{2gL \sin \varphi}$, $T = 3mg \sin \varphi$.

10-18.

Xét chuyển động của quả cầu (chất điểm) chuyển động trên quỹ đạo tròn dưới tác dụng của trọng lực P và lực căng dây T .

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Ta có: $\vec{a} = \vec{a}^t + \vec{a}^n$, với $a^t = 0$, $a^n = v^2 / L \sin \theta$.

Sử dụng phương pháp tọa độ tự nhiên:

$$ma^t = 0$$

$$ma^n = T \sin \theta$$

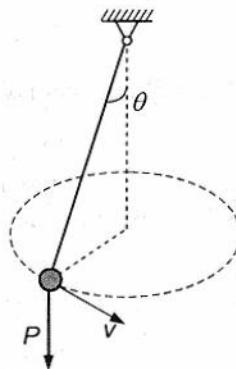
$$ma^b = T \cos \theta - P = 0.$$

Hay: $T \sin \theta = mv^2 / L \sin \theta$, $T \cos \theta = P = mg$.

Ta suy ra:

$$\sin^2 \theta / \cos \theta = (1 - \cos^2 \theta) / \cos \theta = \frac{v^2}{gL}, T = P / \cos \theta.$$

Thay số vào lời giải ta được: $T \approx 32,3$ N; $\theta = 24,15^\circ$.



10-19. Phương trình vi phân chuyển động của pit-tông

$$m\ddot{v} = P + R, m\dot{v} = P - kv, \dot{x} = v.$$

điều kiện đầu: $v(0) = 0$, $x(0) = 0$.

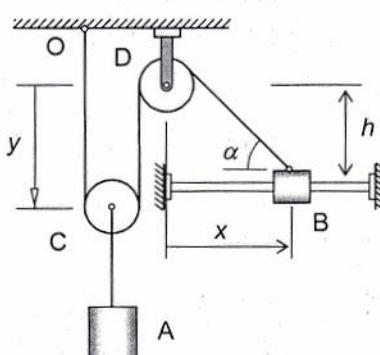
Ta suy ra:

$$v(t) = \frac{P}{k} \left(1 - e^{-kt/m} \right),$$

$$x(t) = \frac{P}{k} t - \frac{Pm}{k^2} \left(1 - e^{-kt/m} \right).$$

10-20. Có $v_B = \dot{x}$, $a_B = \ddot{x}$

Tìm giá tốc vật A, từ điều kiện dây không giãn:



$$\sqrt{x^2 + h^2} + 2y = \text{const} \Rightarrow \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}} + 2\dot{y} = 0$$

Ta suy ra:

$$\ddot{y} = -\frac{x\ddot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}} = -\frac{1}{2}\dot{x}\cos\alpha, \quad \ddot{y} = -\frac{1}{2}\ddot{x}\cos\alpha + \frac{1}{2}\dot{x}\dot{\alpha}\sin\alpha.$$

Khi B có giá tốc a , vận tốc $v_B = 0$, vật A có giá tốc là:

$$a_A = \ddot{y} = -\frac{1}{2}a\cos\alpha.$$

Từ phương trình vi phân chuyển động của A:

$$m\ddot{y} = mg - F \Rightarrow F = m(g - \ddot{y})$$

Lực căng dây: $F = m(g + \frac{1}{2}a\cos\alpha)$.

10-21. Tàu chuyển động tịnh tiến nên ta có thể sử dụng mô hình chất điểm để khảo sát chuyển động của nó. Các lực tác dụng gồm trọng lực \vec{P} , lực đẩy Acsimet \vec{N} và lực \vec{F} . Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng vectơ

$$m\ddot{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{N}$$

Chiếu phương trình lên phương ngang ta được:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx} = c - b\dot{x},$$

với điều kiện đầu $\dot{x}(0) = v_0 = 0$; $x(0) = x_0 = 0$, hoặc viết dưới dạng:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{m} - \frac{b}{m}v = \alpha - \beta v, \text{ trong đó } \alpha = c/m; \beta = b/m.$$

Nếu ký hiệu v_1 là vận tốc giới hạn của tàu, khi đó $dv_1/dt = 0$. Ta suy ra

$$\alpha - \beta v_1 = 0 \text{ hay } v_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{c}{b} = \text{const} > 0.$$

Để giải phương trình vi phân chuyển động, trước hết ta nhận xét rằng tàu khởi hành từ trạng thái nghỉ với giá tốc ban đầu $a_0 = \alpha$ (vì $v_0 = 0$) và tại thời điểm t thì $a = \alpha - \beta v$. Rõ ràng là a giảm dần khi v tăng dần cho đến khi $v = v_1$ thì $a = 0$.

Vậy trong quá trình chuyển động luôn luôn có hệ thức $\alpha - \beta v > 0$.

Do đó ta có thể tích phân phương trình trên với các cận tương ứng:

$$\int_0^v \frac{dv}{\alpha - \beta v} = \int_0^t dt$$

$$\text{Ta nhận được: } \ln(\alpha - \beta v)|_0^v = \beta t \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta v}{\alpha} = e^{-\beta t}.$$

Ta suy ra:

$$v = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) = \frac{c}{b}(1 - e^{-\beta t}).$$

Hàm $e^{-\beta t}$ giảm rất nhanh nên sau một thời gian t dù lớn có thể coi như chất điểm chuyển động với vận tốc $v_1 = c/b$ như đã nói ở trên.

Từ phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{b}(1 - e^{-\beta t}) \Leftrightarrow dx = \frac{c}{b}(1 - e^{-\beta t})dt.$$

Ta có: $\int_0^x dx = \int_0^t (c/b)(1 - e^{-\beta t})dt$, suy ra: $x = \frac{c}{b}t - \frac{mc}{b^2}(1 - e^{-\beta t})$.

10-22. Người lái chuyển động theo đường cong (C), chịu tác dụng của trọng lượng \vec{P} và lực liên kết \vec{R} của ghế. Lực \vec{R} được phân tích theo hai phương tiếp tuyến và pháp tuyến với quỹ đạo tại điểm đó:

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

Phương trình vi phân chuyển động dạng vectơ:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$$

Khi chiếu lên phương pháp tuyến n, ta có:

$$ma^n = -P + N$$

Suy ra:

$$N = P + mv^2 / R = m(v^2 / R + g) = 11065 \text{ N.}$$

Vậy người đã ép lên mặt ghế một áp lực pháp tuyến bằng 11065 N, giống như trong điều kiện tĩnh người ấy nặng gấp 14 lần. Trong điều kiện đó người lái, ghế, giá đỡ đều phải làm việc ở trạng thái siêu tải trọng.

10-23. Ròng rọc C chuyển động phẳng, tâm vận tốc tại điểm tiếp xúc với nhánh dây

bên trái, nên di chuyển $s_B = \frac{1}{2}s_A$ suy ra $\ddot{s}_B = \frac{1}{2}\ddot{s}_A$ hay $a_B = \frac{1}{2}a_A$

Đối với vật A: $m_A a_A = T_1$

Đối với vật B: $m_B a_B = m_B g - T_2$

Đối với ròng rọc C: $m_C a_C = T_2 - 2T_1$

Khi thay số và giải các phương trình trên được:

$$a_A = 8,40 \text{ m/s}^2; \quad a_B = 4,20 \text{ m/s}^2$$

$$T_1 = 840 \text{ N}; \quad T_2 = 1680 \text{ N.}$$

CHƯƠNG 11: CÁC ĐẶC TRUNG HÌNH HỌC KHỐI LƯỢNG

11-1. Bỏ qua đường kính của thanh, xét phân tố khối lượng dm cách O một khoảng bằng x , $-\frac{3}{4}l \leq x \leq \frac{1}{4}l$:

$$J_{\Delta} = \int \rho^2 dm = \frac{m}{L} \int_{-3l/4}^{l/4} (x \sin \alpha)^2 dx, \quad \rho = x \sin \alpha, \quad dm = \frac{m}{L} dx$$

$$J_{\Delta} = \frac{7}{48} mL^2 \sin^2 \alpha = \frac{7}{192} mL^2.$$

11-2. Coi chi tiết được ghép từ 3 phần:

– Nửa đĩa bán kính R :

$$m_1 = \frac{1}{2} \gamma(\pi R^2 h); \quad J_{1x} = \frac{1}{2} m_1 R^2; \quad J_{1y} = J_{1z} = \frac{1}{4} m_1 R^2$$

– Hình hộp chữ nhật dài L , rộng $2R$:

$$\begin{aligned} m_2 &= \gamma abh, \quad J_{2x} = \frac{1}{12} m_2 b^2, \quad J_{2y} = \frac{1}{12} m_2 (a^2 + b^2) + m_2 (\frac{1}{2} a)^2, \\ &\quad J_{2z} = \frac{1}{12} m_2 a^2 + \frac{1}{4} m_2 a^2 = \frac{1}{3} m_2 a^2 \end{aligned}$$

– Đĩa tròn bán kính r (bị khoét) $m_3 = -\gamma(\pi r^2 h)$

$$J_{3x} = \frac{1}{4} m_3 r^2, \quad J_{3y} = \frac{1}{2} m_3 r^2 + m_3 (\frac{1}{2} a)^2, \quad J_{3z} = \frac{1}{4} m_3 r^2 + m_3 (\frac{1}{2} a)^2.$$

Mômen quán tính của chi tiết đối với trục z:

$$J_x = \sum J_{ix}, \quad J_y = \sum J_{iy}, \quad J_z = \sum J_{iz}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Lưu ý ở đây ta bỏ qua bề dày của tấm.

11-3. Coi chi tiết được ghép từ 5 phần:

– Nửa đĩa bên trái bán kính R : $J_1 = \frac{1}{2} m_1 R^2, \quad m_1 = \frac{1}{2} \gamma(\pi R^2 h)$

– Nửa đĩa bên phải bán kính R : $J_2 = J_{c2} + m_1 \left(L + \frac{4R}{3\pi} \right)^2, \quad m_1 = \frac{1}{2} \gamma(\pi R^2 h)$

– Hình hộp chữ nhật dài L , rộng $2R$:

$$J_3 = \frac{1}{12} m_2 (L^2 + 4R^2) + m_2 (\frac{1}{2} L)^2, \quad m_2 = \gamma(2RLh)$$

– Trụ đặc bán kính r , cao $2h$: $J_4 = \frac{1}{2} m_4 r^2 + m_4 L^2, \quad m_4 = \gamma(\pi r^2 2h)$

– Trụ rỗng bán kính r , cao h (bị khoét): $J_5 = \frac{1}{2} m_5 r^2, \quad m_5 = -\gamma(\pi r^2 h)$

Tính mômen quán tính khối của đĩa đối với trục qua khối tâm của đĩa :

$$J_O = \frac{1}{2} mR^2, \quad J_O = J_C + m \left(\frac{3R}{4\pi} \right)^2 \Rightarrow J_C = J_O - m \left(\frac{3R}{4\pi} \right)^2$$

$$J_{C2} = \frac{1}{2} m_2 R^2 - m_2 \left(\frac{3R}{4\pi} \right)^2$$

Mômen quán tính của chi tiết đối với trục z:

$$J_z = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5.$$

11-4. a) Xét phân tố của cung ở vị trí xác định bởi góc φ , $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Chiều dài và khối lượng của phân tố:

$$dL = rd\varphi, \quad L = r\pi/2, \quad dm = \frac{m}{L} dL = \frac{m}{L} rd\varphi.$$

Tọa độ của phân tố:

$$x = r \sin \varphi \cos \alpha, \quad y = r \sin \varphi \sin \alpha, \quad z = r \cos \varphi$$

Các mômen quán tính khối:

$$J_x = \int (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} mr^2 (2 - \cos^2 \alpha)$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} mr^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} mr^2$$

$$J_{xy} = \int xy dm = \frac{1}{2} mr^2 \cos \alpha \sin \alpha$$

$$J_{yz} = \int yz dm = \frac{1}{\pi} mr^2 \sin \alpha$$

$$J_{zx} = \int zx dm = \frac{1}{\pi} mr^2 \cos \alpha$$

b) Dụng hệ trục Cxyz, C là khối tâm của vật. Do tính đối xứng của vật nên đây là hệ quán tính chính trung tâm.

$$J_{Cxy} = 0, J_{Cyz} = 0, J_{Czx} = 0$$

Tọa độ khối tâm C trong hệ Oxyz:

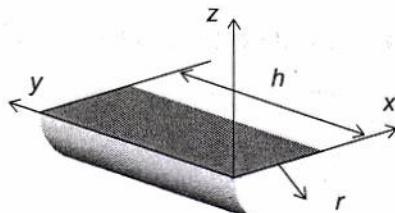
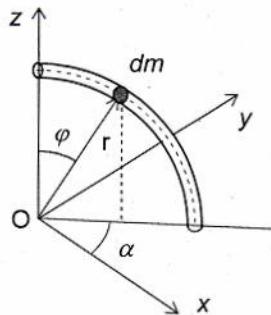
$$x_C = r, y_C = \frac{1}{2} h, z_C = -\frac{4}{3\pi} r$$

Áp dụng công thức chuyển trục song song

$$J_{zx} = J_{Czx} + m(y_C^2 + z_C^2); \quad J_{xy} = J_{Cxy} + mx_C y_C$$

$$J_{yy} = J_{Cyy} + m(x_C^2 + z_C^2); \quad J_{yz} = J_{Cyz} + my_C z_C$$

$$J_{zz} = J_{Czz} + m(x_C^2 + y_C^2); \quad J_{xx} = J_{Cxx} + mx_C z_C$$



11-5. a) Tám tam giác.

Xét phân bố khối lượng dm có tọa độ (x, y) , khối lượng $dm = \gamma dA = \frac{2m}{ab} dx dy$.

Theo định nghĩa:

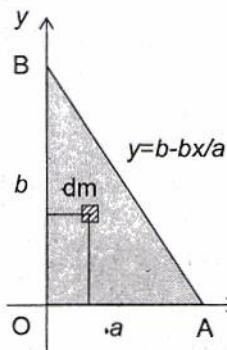
$$J_z = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx \int_0^{b-bx/a} (x^2 + y^2) dy = \frac{1}{6} m(a^2 + b^2)$$

$$J_x = \int (z^2 + y^2) dm = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx \int_0^{b-bx/a} y^2 dy = \frac{1}{6} mb^2$$

$$J_y = \int (z^2 + x^2) dm = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx \int_0^{b-bx/a} x^2 dy = \frac{1}{6} ma^2$$

$$J_{xy} = J_{xz} = 0$$

$$J_{xy} = \int xy dm = \frac{2m}{ab} \int_0^a dx \int_0^{b-bx/a} xy dy = \frac{1}{12} mab$$



Ma trận quán tính có dạng:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} mb^2 & -\frac{1}{12} mab & 0 \\ -\frac{1}{12} mab & \frac{1}{6} ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

b) Vật hình hộp chữ nhật

Xét phân bố khối lượng dm , ở tọa độ (x, y, z) , có $dm = \gamma dV = \frac{m}{abc} dx dy dz$

Theo định nghĩa:

$$J_z = \int (z^2 + y^2) dm = \frac{m}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (z^2 + y^2) dz dy dx = \frac{1}{3} m(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2) dm = \frac{m}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + z^2) dz dy dx = \frac{1}{3} m(a^2 + c^2).$$

$$J_x = \int (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2) dz dy dx = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$$

$$J_{xy} = \int xy dm = \frac{m}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c xy dz dy dx = \frac{1}{4} mab$$

$$J_{yz} = \int yz dm = \frac{1}{4} mbc, \quad J_{xz} = \int xz dm = \frac{1}{4} mac$$

Ma trận quán tính:

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m(b^2 + c^2) & -\frac{1}{4}mab & -\frac{1}{4}mac \\ -\frac{1}{4}mba & \frac{1}{3}m(a^2 + c^2) & -\frac{1}{4}mbc \\ -\frac{1}{4}mca & -\frac{1}{4}mcb & \frac{1}{3}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}.$$

11-6.

a) $J_{Oz} = \frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{12}m_2R^2 + m_2(R + \frac{1}{2}R)^2 + m_3(2R)^2$

b) $J_{Oz} = 2\frac{1}{3}ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m(l \cos 30^\circ)^2$

c) $J_{Oz} = 2\frac{1}{3}ml^2 + 2[\frac{1}{12}ml^2 + m(l\sqrt{5}/2)^2]$

hoặc: $J_{Oz} = J_C + m_\Sigma d^2 = 4[\frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{1}{2}l)^2] + 4m(l\sqrt{2}/2)^2$.

11-7.

a) $m = \rho V = \rho \frac{1}{2}\pi R^2 h, OG = \frac{4R}{3\pi}, J_O = \frac{1}{2}mR^2$.

b) Xét vật được ghép từ hai phần (tấm vuông bị khoét lỗ tròn):

- Tấm vuông:

$$m_1 = \rho V_1 = \rho a^2 h, OG = a \frac{\sqrt{2}}{2}, J_{O1} = \frac{1}{12}m_1(a^2 + a^2) + m_1(a \frac{\sqrt{2}}{2})^2$$

- Lỗ tròn: $m_2 = -\rho V_2 = \rho \pi r^2 h, OG = a \frac{\sqrt{2}}{2}, J_{O2} = \frac{1}{2}m_2r^2 + m_2(a \frac{\sqrt{2}}{2})^2$

$$J_{Oz} = J_{O1} + J_{O2} = \frac{1}{12}m_1(a^2 + a^2) + m_1(a \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2}m_2r^2 + m_2(a \frac{\sqrt{2}}{2})^2.$$

Chú ý khối lượng m_2 có giá trị âm.

11-8. Tính mômen quán tính khối đối với trục tâm của trụ rỗng có bán kính ngoài R , bán kính trong r , khối lượng m .

$$J_n = \frac{1}{2}m_nR^2, J_t = \frac{1}{2}m_t r^2 \Rightarrow J = J_n - J_t = \frac{1}{2}m_nR^2 - \frac{1}{2}m_t r^2$$

$$m_n = \rho \pi R^2 h, m_t = \rho \pi r^2 h, m = \rho \pi h(R^2 - r^2)$$

$$J = \frac{1}{2}\rho \pi h(R^4 - r^4) = \frac{1}{2}\rho \pi h(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)$$

$$J = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2), m = \rho \pi h(R^2 - r^2)$$

Coi bánh xe như được ghép từ:

– Trụ rỗng bán kính ngoài $R+h$, bán kính trong R :

$$J_G^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 [(R+h)^2 + R^2], \quad m_1 = \rho \pi b [(R+h)^2 - R^2]$$

– Trụ đặc (đĩa) bán kính R : $J_G^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 R^2$, $m_2 = \rho \pi R^2 b / 4$

– Trụ đặc (đĩa) bán kính r (khối lượng âm do bị khoét):

$$J_G^{(3)} = \frac{1}{2} m_3 r^2, \quad m_3 = -\rho \pi r^2 b / 4.$$

Mômen quán tính khối của bánh xe đối với trục qua khối tâm G: $J_G = \Sigma J_G^{(i)}$

Mômen quán tính khối của bánh xe đối với trục qua O:

$$J_{Oz} = J_G + m_\Sigma (R+h)^2, \quad m_\Sigma = m_1 + m_2 + m_3$$

11-9. Coi bánh xe như được ghép từ:

– Trụ rỗng bán kính ngoài $R+h$, bán kính trong R :

$$J_G^{(1)} = \frac{1}{2} m_1 [(R+h)^2 + R^2], \quad m_1 = \rho \pi b [(R+h)^2 - R^2]$$

– Trụ đặc (đĩa) bán kính R : $J_G^{(2)} = \frac{1}{2} m_2 R^2$, $m_2 = \rho \pi R^2 b / 4$

– Bốn trụ đặc (đĩa) bán kính a có khối lượng âm (do bị khoét):

$$J_G^{(3)} = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} m_3 \left(\frac{1}{2} a \right)^2 + m_3 r^2 \right], \quad m_3 = -\rho \pi \left(\frac{1}{2} a \right)^2 b / 4.$$

Mômen quán tính khối của bánh xe đối với trục qua khối tâm G: $J_G = \Sigma J_G^{(i)}$

Mômen quán tính khối của bánh xe đối với trục qua O:

$$J_{Oz} = J_G + m_\Sigma (R+h)^2, \quad m_\Sigma = m_1 + m_2 + 4m_3.$$

11-10. Coi trục khuỷu được ghép từ ba chi tiết trụ và hai chi tiết khối hộp chữ nhật:

$$J_{1x} = \frac{1}{2} m_1 \frac{1}{4} d^2 = J_{5x}, \quad m_1 = \frac{1}{4} \rho \pi d^2 a$$

$$J_{2x} = \frac{1}{12} m_2 (r+2e)^2 + m_2 \left(\frac{1}{2} r \right)^2 = J_{4x}, \quad m_2 = \rho (r+2e) ch$$

$$J_{3x} = \frac{1}{2} m_3 r^2 + m_3 r^2, \quad m_3 = \frac{1}{4} \rho \pi d^2 b$$

Mômen quán tính khối của trục khuỷu đối với trục quay x :

$$J_x = J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} + J_{4x} + J_{5x} = 2J_{1x} + 2J_{2x} + J_{3x}$$

11-11. Cách giải tương tự bài 11-10.

11-12. Với $x_0y_0z_0$ là hệ trục quán tính chính trung tâm

$$J_{x_0} = \frac{1}{12} mb^2; \quad J_{y_0} = \frac{1}{12} ma^2; \quad J_{z_0} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \text{ các thành phần khác bằng } 0.$$

Ta suy ra: $J_z = J_{z_0} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$.

Xét phân tử có khối lượng dm , ở vị trí có tọa độ $(x, y, 0)$ trong hệ Oxyz; có tọa độ $(x_0, y_0, 0)$ trong hệ $Ox_0y_0z_0$.

Ta có:

$$J_{x_0} = \int y_0^2 dm, \quad J_{y_0} = \int x_0^2 dm, \quad J_{x_0y_0} = \int x_0 y_0 dm = 0, \quad J_{z_0} = \int (x_0^2 + y_0^2) dm.$$

Chú ý rằng ta có quan hệ tọa độ:

$$x = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha, \quad y = -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha.$$

Ta tính được:

$$\begin{aligned} J_x &= \int y^2 dm = \int (-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha)^2 dm = \\ &= \int x_0^2 dm \sin^2 \alpha + \int y_0^2 dm \cos^2 \alpha - 2 \int x_0 y_0 dm \cos \alpha \sin \alpha \\ &= J_{y_0} \sin^2 \alpha + J_{x_0} \cos^2 \alpha. \\ J_y &= \int x^2 dm = \int (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)^2 dm = J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{x_0} \sin^2 \alpha. \\ J_{xy} &= \int xy dm = \int (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha)(-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha) dm \\ &= \cos \alpha \sin \alpha (J_{x_0} - J_{y_0}) = \frac{1}{2} (J_{x_0} - J_{y_0}) \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

11-13. Cách làm tương tự bài 11-12.

CHƯƠNG 12: CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LƯỢNG

Định lý biến thiên động lượng và định lý chuyển động khối tâm

12-1. Đầu đạn tăng vận tốc từ 0 đến v trong khoảng thời gian Δt dưới tác dụng của lực coi như không đổi. Áp dụng định lý biến thiên động lượng, ta có:

$$mv - m \cdot 0 = F\Delta t \Rightarrow F = \frac{mv}{\Delta t}.$$

Áp suất trung bình của hơi nổ là:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mv}{S\Delta t} = \frac{0,02 \times 650}{150 \times 10^{-6} \times 0,000955} = 90\ 750\ 436 \text{ N/m}^2.$$

Lưu ý: $1\text{N/mm}^2 = 1\text{MPa}$ (Mega Pascal), $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$.

12-2. Áp dụng định lý bảo toàn động lượng theo phương ngang.

Ban đầu: $P_x = (M+m)v_0 = 0$

Khi viên đạn ra khỏi nòng: $P_x = Mu + mv$

$$P_x = P_x(0) \Rightarrow Mu + mv = 0 \Rightarrow u = -mv/M.$$

12-3. Áp dụng định lý biến thiên động lượng đối với khối chất lỏng trong phần ống như trên hình.

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = (\vec{R}_x + \vec{R}_y)dt \quad (1)$$

với \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 là động lượng của khối chất lỏng tại thời điểm t và $t+dt$.

Ta có :

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_A + \vec{Q}^*, \quad \vec{Q}_2 = \vec{Q}^* + \vec{Q}_B$$

trong đó \vec{Q}^* , là động lượng của khối chất lỏng hiện đang nằm trong ống AB.

Động lượng của phần chất lỏng di vào ống trong khoảng thời gian dt .

$$\vec{Q}_A = m_A \vec{v}_A = (\rho S_A v_A dt) \vec{v}_A$$

Động lượng của phần chất lỏng di ra khỏi ống trong khoảng thời gian dt .

$$\vec{Q}_B = m_B \vec{v}_B = (\rho S_B v_B dt) \vec{v}_B$$

Do chất lỏng không nén được nên:

$$S_A v_A = S_B v_B \Rightarrow v_B = v_A S_A / S_B.$$

Thay hệ thức trên vào (1) ta được:

$$\rho S_B v_B dt \vec{v}_B - \rho S_A v_A dt \vec{v}_A = (\vec{R}_x + \vec{R}_y)dt \Rightarrow \rho S_B v_B \vec{v}_B - \rho S_A v_A \vec{v}_A = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

Chiếu lên hai phương được:

$$R_x = (\rho S_B v_B) v_B \cos \beta - (\rho S_A v_A) v_A \sin \alpha$$

$$R_y = -(\rho S_B v_B) v_B \sin \beta + (\rho S_A v_A) v_A \cos \alpha.$$

Nếu thay $m = \rho S_B v_B = \rho S_A v_A$ (lưu lượng dòng chất lỏng qua ống) ta được:

$$R_x = mv_B \cos \beta - mv_A \sin \alpha, \quad R_y = -mv_B \sin \beta + mv_A \cos \alpha.$$

Nếu kể đến áp suất thủy tĩnh p_A, p_B tại hai tiết diện A và B thì sẽ có thêm các ngoại lực vuông góc hướng vào khối chất lỏng:

$$F_A = p_A S_A, \quad F_B = p_B S_B.$$

Khi đó:

$$R_x = mv_B \cos \beta - mv_A \sin \alpha - F_A \sin \alpha + F_B \cos \beta$$

$$R_y = -mv_B \sin \beta + mv_A \cos \alpha + F_A \cos \alpha - F_B \sin \beta.$$

12-4. Áp dụng định lý động lượng đối với phần chất lỏng tách ra như trên hình vẽ.

Theo phương vuông góc với tấm ta có:

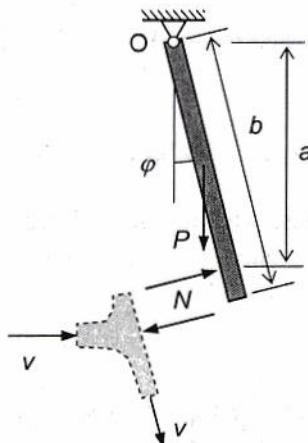
$$m \cdot 0 - mv \cos \varphi = -N, \quad m = \rho v S.$$

Ta suy ra: $N = \rho S m v^2 \cos \varphi$.

Xét cân bằng của thanh OA, ta có phương trình mômen:

$$Na / \cos \varphi - \frac{1}{2} Pb \sin \varphi = 0$$

Vậy: $\sin \varphi = 2\rho a S m v^2 / Pb$.



12-5. Ta khảo sát toàn bộ động cơ. Ngoại lực tác dụng lên động cơ bao gồm các trọng lực \vec{P}, \vec{Q} , lực liên kết \vec{N} của nền và hợp các lực cắt các bulong \vec{R} . Gọi C là khối tâm của hệ, áp dụng định lý khối tâm ta có :

$$m\ddot{a}_C = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} + \vec{R} \quad (1)$$

Chiếu (1) lên trục x ta có :

$$(m_1 + m_0)\ddot{x}_C = R \quad (2)$$

Chọn gốc toạ độ là O cố định :

$$x_C = \frac{m_0 x_A + m_1 x_O}{m_0 + m_1} = \frac{m_0 x_A}{m_0 + m_1}$$

Vì: $x_A = e \sin \omega t$ nên $\ddot{x}_A = -e\omega^2 \sin \omega t$.

$$\text{Rút ra: } \ddot{x}_C = -\frac{m_0 e \omega^2 \sin \omega t}{m_1 + m_0}.$$

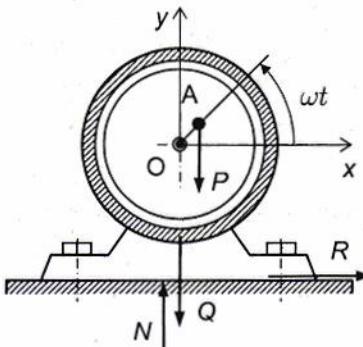
Theo (2) ta có: $R = -m_0 e \omega^2 \sin \omega t$. Giá trị cực đại $R_{\max} = m_0 e \omega^2$.

Nhận xét:

Nếu ω lớn, lực R_{\max} rất lớn dù độ lệch tâm e nhỏ, trong kỹ thuật thường tìm cách khắc phục để $e \approx 0$. Nếu động cơ đặt tự do trên nền nhẵn, khi đó ta có phương trình

$$m\ddot{a}_C = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N} \quad (3)$$

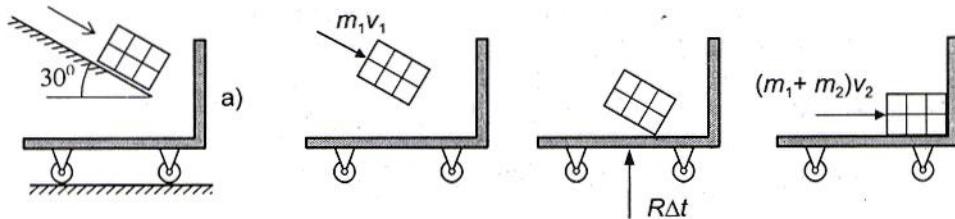
Khi chiếu (3) lên trục x và y ta nhận được hai phương trình cho phép xác định di chuyển ngang của động cơ và lực liên kết với nền.



12-6.

a) Xét hệ gồm kiện hàng và xe. Gọi vận tốc của xe khi có hàng là v_2 , khi đó:

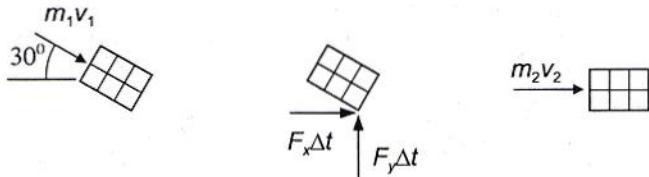
$$(m_1 + m_2)\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 = \vec{R}\Delta t$$



Chiều lên trục x : $(m_1 + m_2)v_2 - m_1v_1 \cos 30^\circ = 0$.

Thay số vào ta được: $v_2 = 0,742 \text{ m/s}$.

b) Xét riêng kiện hàng:



Ta có quan hệ:

$$m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t$$

Chiều lên trục x và y : $m_2v_2 - m_1v_1 \cos 30^\circ = F_x\Delta t$, $0 - m_1v_1 \sin 30^\circ = F_y\Delta t$.

Thay số ta được: $S_x^e = F_x\Delta t = -18,56 \text{ Ns}$; $S_y^e = F_y\Delta t = 15 \text{ Ns}$.

Do đó xung lượng đặt vào kiện hàng là: $S_F = F\Delta t = 33,9 \text{ Ns}$.

12-7. Bỏ qua lực cản theo phương ngang, các ngoại lực tác dụng đều song song với phương thẳng đứng. Ban đầu hệ đứng yên. Do đó khối tâm hệ theo phương ngang x được bảo toàn.

Thời điểm đầu: $Mx_C(0) = Mx_1 + mx_2$, $x_2 = x_1 + d + L \sin \alpha$

Thời điểm cuối (giả sử thân tàu tiến một đoạn bằng Δ)

$$Mx_C(t_1) = M(\Delta + x_1) + m(x_2 + \Delta + d - L \sin \alpha)$$

Suy ra: $Mx_C(t_0) = Mx_C(t_1) \Rightarrow \Delta = \frac{mL \sin \alpha}{M + m}$.

12-8. Phương trình vi phân chuyển động ngang của tàu:

$$m\ddot{s} = -F_h \Rightarrow m\ddot{s} = -0,1mg.$$

Với điều kiện đầu: $\dot{s}(0) = v(0) = 54 \times 10^3 / 3600 = 15 \text{ (m/s)}$, $s(0) = 0$, ta suy ra:

$$v(t) = v_0 - 0,1gt, \quad s(t) = v_0t - \frac{1}{2}0,1gt^2.$$

Khi tàu dừng hẳn: $0 = v_0 - 0,1gT \Rightarrow T = 15,29 \text{ s}$, $s(T) = 114,68 \text{ m}$.

12-9. Do sức đẩy của chén vịt luôn luôn cân bằng với lực cản của nước nên:

$$(M+m)a_C = 0 \Rightarrow (M+m)v_C = 10(M+m).$$

$$(M+m)v_C = Mv + m(v + v_r)$$

Chu kỳ dao động điều hoà của pit-tông (chuyển động tương đối):

$$T = 60 / (240 / 2) = 0,5 \text{ s}$$

$$x_r = 0,5 \times 1 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0,5 \times 1 \sin(4\pi t), v_r = \dot{x}_r = 2\pi \sin(4\pi t).$$

$$v(t) = 10 - \frac{mv_r}{M+m} = 10 - 0,00314 \cos(4\pi t)$$

12-10. Khối tâm theo phương ngang x được bảo toàn, do đó:

$$(m_1 + m_2 + m_3)x_C(0) = m_1 x_1^{(0)} + m_2 x_2^{(0)} + m_3 x_3^{(0)}$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)x_C(t_1) = m_1 x_1^{(1)} + m_2 x_2^{(1)} + m_3 x_3^{(1)}$$

Khi A trượt xuống một đoạn bằng s , lăng trụ D di chuyển sang phải lượng Δ :

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta + s \cos \alpha, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta + s, \quad x_3^{(1)} = x_3^{(0)} + \Delta$$

$$\Delta = \frac{(m_1 \cos \alpha + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} s.$$

12-11. Áp dụng định lý bảo toàn động lượng trên trục ngang x.

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_C = \text{const} = (m_1 + m_2)\dot{x}_C(0) = (m_1 + m_2)v_0$$

$$m_1 v + m_2(v + at \cos \alpha) = (m_1 + m_2)v_0$$

$$v = v_0 - \frac{m_2 at \cos \alpha}{m_1 + m_2} = v_0 - \frac{P_2 at \cos \alpha}{P_1 + P_2}.$$

12-12. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm

$$m\ddot{x}_C = 0, m\ddot{y}_C = N - P.$$

Ta có: $\dot{x}_C(0) = 0 \Rightarrow x_C = \text{const} = 0$.

Tọa độ điểm M được tính bởi :

$$x_M = CM \cos \varphi,$$

$$y_M = AM \sin \varphi = 3CM \sin \varphi.$$

Ta có các quan hệ hình học:

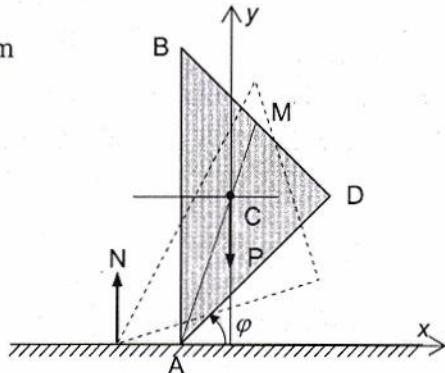
$$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 12^2 + 6^2,$$

$$CM = \frac{1}{3} AM$$

Khử biến φ ta nhận được:

$$(x_M / CM)^2 + (y_M / 3CM)^2 = 1$$

hay là: $9x^2 + y^2 = 9CM^2$.



12-13. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm:

$$(\Sigma m_k) \ddot{y}_C = N - P_1 + P_2 + P_3$$

$$\text{ta suy ra: } (\Sigma m_k) \ddot{y}_C = -\frac{1}{g} \left[P_1 h_1 + P_2 \frac{a}{2} \sin \omega t + P_3 (a \sin \omega t + h_3) \right],$$

$$\text{với } h_1, h_3 \text{ là các hằng số: } (\Sigma m_k) \ddot{y}_C = \frac{a \omega^2}{2g} (P_2 + 2P_3) \sin \omega t.$$

$$\text{Vậy: } N = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{a \omega^2}{2g} (P_2 + 2P_3) \sin \omega t$$

12-14. Áp dụng định lý chuyển động khối tâm

$$\text{a)} \quad (\Sigma m_k) \ddot{x}_C = 0$$

Ban đầu vỏ máy đứng yên $\dot{x}_o(0) = 0$, và khi $\varphi = 0$ các thành phần vận tốc ngang của A và B đều bằng 0, $\dot{x}_A(0) = \dot{x}_B(0) = 0$, nên $\dot{x}_C(0) = 0$. Do đó:

$$x_C(t) = x_C(0).$$

Ta có các quan hệ:

$$(\Sigma m_k) x_C(0) = m_1[x_o(0) + r] + m_2[x_o(0) + 2r] + m_3[x_o(0) + \text{const}],$$

$$(\Sigma m_k) x_C(t) = m_1[x_o + r \cos \varphi] + m_2[x_o + 2r \cos \varphi] + m_3(x_o + \text{const}).$$

Di chuyển của vỏ máy:

$$x = x_o - x_o(0) = \frac{(m_1 + 2m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} r(\cos \omega t - 1).$$

$$\text{b)} \quad (\Sigma m_k) \ddot{x}_C = F$$

$$(\Sigma m_k) \ddot{y}_C = N - P_1 + P_2 + P_3.$$

Ta có:

$$(\Sigma m_k) \ddot{x}_C(t) = -(m_1 + 2m_2) r \omega^2 \cos \varphi, \quad (\Sigma m_k) \ddot{y}_C = -m_1 r \omega^2 \sin \omega t.$$

Ta suy ra:

$$F = (m_1 + 2m_2) r \omega^2 \cos \omega t, \quad N = P_1 + P_2 + P_3 - m_1 r \omega^2 \sin \omega t.$$

12-15. a) Bỏ qua lực cản của nước lên xà lan, động lượng của hệ bảo toàn trên trục x , ta suy ra:

$$(\Sigma m) \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow (\Sigma m) \dot{x}_C = \text{const}$$

$$(\Sigma m) x_C = M x_A + m(x_A + s + \text{const})$$

$$(\Sigma m) \dot{x}_C = M \dot{x}_A + m(\dot{x}_A + \dot{s})$$

$$(\Sigma m) \dot{x}_C(0) = M \dot{x}_A(0) + m[\dot{x}_A(0) + \dot{s}(0)] = 0$$

$$\dot{s}(t) = b(\alpha - \alpha e^{-\alpha t})$$

$$\text{suy ra: } v_{Ax} = -\frac{m \dot{s}}{M + m} = -\frac{m b \alpha}{M + m} (1 - e^{-\alpha t}).$$

b) $(M+m)\ddot{x}_C = F$
 $(M+m)x_C = Mx_A + m(x_A + s + \text{const}), x_A = \text{const.}$
 $(M+m)\ddot{x}_C = m\ddot{s} = mb\alpha^2 e^{-\alpha t}.$

Lực căng cáp:

$$F = mb\alpha^2 e^{-\alpha t}.$$

Định lý biến thiên mômen động lượng

12-16. Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm các trọng lượng và lực liên kết ở trục quay. Vì $\sum \bar{m}_z (\vec{F}_k^e) = 0$ nên mômen động lượng của cơ hệ đối với trục z được bảo toàn, do đó :

$$\begin{aligned}\bar{l}_z &= \bar{l}_z(0) \\ \bar{l}_z &= \bar{l}_{1z} + \bar{l}_{2z}\end{aligned}\quad (1)$$

trong đó \bar{l}_{1z} và \bar{l}_{2z} là mômen động lượng của đĩa và của chất điểm. Giả thiết $\bar{\omega}$ có chiều dương, ta có :

$$\begin{aligned}\bar{l}_{1z} &= J_z \bar{\omega} = \frac{1}{2} m R^2 \omega, \\ \bar{l}_{2z} &= \bar{m}_z (m \bar{v}) = R m_0 v = R m_0 (u + R \omega).\end{aligned}$$

Như vậy : $\bar{l}_z = \frac{1}{2} (m + 2m_0) R^2 \omega + m_0 R u.$

Ban đầu: $u = 0, \omega = \omega_0, \bar{l}_z(0) = \frac{1}{2} (m + 2m_0) R^2 \omega_0.$

Thay vào (1) ta có : $\omega = \omega_0 - \frac{2m_0 u}{(m + 2m_0) R}.$

12-17. Do tổng mômen các ngoại lực đối với trục quay z bằng 0 nên mômen động lượng của hệ được bảo toàn:

$$\begin{aligned}l_z(t) &= \text{const} = l_z(0), \quad l_z(t) = J_z \omega + (ut) \cdot m_2 (ut) \omega, \\ l_z(0) &= J_z \omega_0, \quad J_z = \frac{1}{2} m_1 r^2, \text{ suy ra } \omega(t) = \frac{J_z \omega_0}{J_z + m_2 (ut)^2}.\end{aligned}$$

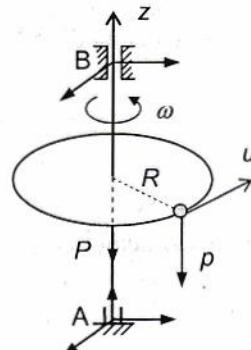
12-18. Khi tang tời quay với vận tốc góc ω thuận chiều kim đồng hồ, ta có:

$$l_{Oz} = m\rho^2 \omega + m_1 r^2 \omega + m_2 R^2 \omega = (m\rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2) \omega,$$

$$\sum m_O (\vec{F}_k) = M + m_1 gr - m_2 gR$$

$$\frac{d}{dt} l_{Oz} = (m\rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2) \dot{\omega} = M + m_1 gr - m_2 gR.$$

Vậy ta có: $\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{M + m_1 gr - m_2 gR}{m\rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}.$



12-19. Tách hệ, viết phương trình vi phân chuyển động cho từng trục:

$$J_A \frac{d\bar{\omega}_A}{dt} = \sum \bar{m}_A (\vec{F}_k^e) = r_A F, J_B \frac{d\bar{\omega}_B}{dt} = M - r_B F$$

trong đó: $J_A = m_A \rho_A^2$, $J_B = m_B \rho_B^2$. Giải hệ hai phương trình trên ta được:

$$\bar{\varepsilon}_A = \frac{d\bar{\omega}_A}{dt} = \frac{r_A F}{J_A}, \bar{\varepsilon}_B = \frac{d\bar{\omega}_B}{dt} = \frac{M - r_B F}{J_B}.$$

Ta suy ra:

$$\bar{\omega}_A = \frac{r_A F}{J_A} t, \bar{\omega}_B = \frac{M - r_B F}{J_B} t.$$

Với $\omega_B = \frac{\pi n_B}{30}$, $T = 0,871$ s và $F = 46,2$ N.

12-20. Mômen động lượng của hệ đối với trục z được bảo toàn, do đó:

$$l_z(t) = l_z(0),$$

$$l_z(t) = J\omega + L \cdot mL\omega = (J + mL^2)\omega.$$

$$l_z(0) = J\omega_0 + a \cdot ma\omega_0 = (J + ma^2)\omega_0, \quad \omega = \frac{(J + ma^2)\omega_0}{(J + mL^2)}.$$

12-21. $J\varepsilon = M \Rightarrow J\dot{\omega} = a - b\omega$, $\omega(0) = 0$.

$$\frac{Jd\omega}{a - b\omega} = dt \Rightarrow \int_0^\omega \frac{Jd\omega}{a - b\omega} = \int_0^t dt,$$

$$\int_0^\omega \frac{d(a - b\omega)}{a - b\omega} = -\frac{b}{J} \int_0^t dt \Rightarrow \ln(a - b\omega)|_0^\omega = -\frac{b}{J} t, \quad \omega = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt/J}).$$

12-22. $J\varepsilon = M_o - M_1 \Rightarrow J\dot{\omega} = M_o - \alpha\omega^2$, $\omega(0) = 0$.

$$\frac{Jd\omega}{M_o - \alpha\omega^2} = dt \Rightarrow \int_0^\omega \frac{Jd\omega}{M_o - \alpha\omega^2} = \int_0^t dt$$

Chú ý rằng:

$$\frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{dx}{a - x} + \frac{dx}{a + x} \right).$$

Ta nhận được:

$$\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$$

trong đó: $\beta = \frac{2}{J} \sqrt{\alpha M_0}$, $\omega_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}}$.

12-23. Phương trình vi phân chuyển động của con lắc

$$J_o \ddot{\varphi} = -mgh \sin \varphi.$$

Xét dao động nhỏ $\sin \varphi \approx \varphi \Rightarrow J_o \ddot{\varphi} + mgh\varphi = 0$.

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgh}{J_o} \varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{mgh}{J_o}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Kết hợp với $J_o = J_c + mh^2$, ta có:

$$J_o = \frac{mgh}{\omega^2} = \frac{mghT^2}{(2\pi)^2}.$$

$$\text{Vậy: } J_{AB} = J_c = J_o - mh^2 = \frac{mghT^2}{(2\pi)^2} - mh^2 = mh\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - h\right).$$

12-24. a) Phương trình vi phân chuyển động của con lắc:

$$J_o \ddot{\varphi} = -c\varphi - mgh \sin \varphi, \quad h = OA.$$

Xét dao động nhỏ $\sin \varphi \approx \varphi$, ta có:

$$J_o \ddot{\varphi} + (c + mgh)\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

$$\text{với } \omega^2 = \frac{c + mgh}{J_o}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Theo dữ kiện cho trước ($mgh = 4,5 \text{ Ncm}$) ta tính được $T = 0,507 \text{ s}$.

b) Phương trình vi phân chuyển động của con lắc:

$$J_o \ddot{\varphi} = -c\varphi - mgh \sin \varphi - F^{qt}h \cos \varphi$$

Xét dao động nhỏ $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$, ta có:

$$F^{qt} = m\ddot{x} = ma\Omega^2 \sin \Omega t, \quad (\Omega = 60 \text{ s}^{-1})$$

Từ đó phương trình vi phân có dạng:

$$J_o \ddot{\varphi} + (c + mgh)\varphi = -mha\Omega^2 \sin \Omega t,$$

hay là:

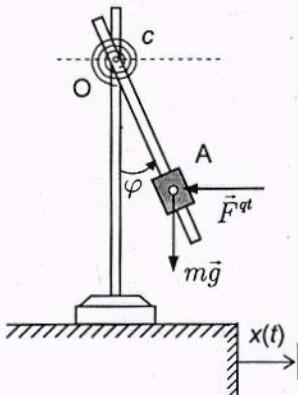
$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = -\frac{mha\Omega^2}{J_o} \sin \Omega t = -H \sin \Omega t.$$

Nghiệm phương trình trên có dạng:

$$\varphi = \frac{H}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \Omega t = \frac{mha\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega^2)J_o} \sin \Omega t = \varphi_0 \sin \Omega t,$$

với $\varphi_0 = 6 \frac{\pi}{180}$. Biên độ dao động của móng máy:

$$a = \varphi_0 \frac{(\Omega^2 - \omega^2)J_o}{mh\Omega^2}.$$

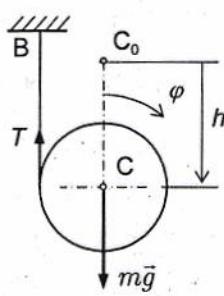


Từ các phương trình trên ta suy ra: $T = \frac{1}{3}mg$, $\ddot{y}_C = \ddot{h} = \frac{2}{3}g$.

Sử dụng biến đổi: $\ddot{h} = \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{d\dot{h}}{dt} \frac{dh}{dh} = \frac{d\dot{h}}{dh} \frac{dh}{dt} = \dot{h} \frac{d\dot{h}}{dh}$

$$\dot{h} \frac{d\dot{h}}{dh} = \frac{2}{3}g \Rightarrow \dot{h} d\dot{h} = \frac{2}{3}gdh \Rightarrow \int_0^h \dot{h} d\dot{h} = \frac{2}{3} \int_0^h g dh$$

$$\frac{1}{2} \dot{h}^2 = \frac{2}{3}gh \Rightarrow v = \dot{h} = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}.$$



12-36. PTVP vật chuyển động song phẳng

$$m\ddot{x}_C = P \sin \alpha - 2T - F_{ms}$$

$$m\ddot{y}_C = N - P \cos \alpha = 0$$

$$J_C \ddot{\varphi} = -RF_{ms} + 2rT.$$

với $J_C = m\rho^2$, T là lực căng trên một dây.

Do dây không giãn:

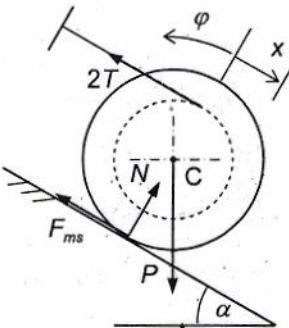
$$v_C = r\dot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{x}_C / r.$$

Tại điểm tiếp xúc (có trượt): $F_{ms} = fN = fP \cos \alpha$.

Từ các phương trình trên ta suy ra:

$$\ddot{x}_C = \frac{P[\sin \alpha - f \cos \alpha(R + r)/r]}{m(r^2 + \rho^2)/r^2}, \quad \dot{x}_C(0) = 0, x_C(0) = 0.$$

$$x_C(t) = \frac{r \sin \alpha - f \cos \alpha(R + r)}{2(r^2 + \rho^2)} rgt^2.$$



Lực căng dây:

$$T = \frac{P[mRrf \cos \alpha + J_C(\sin \alpha - f \cos \alpha)]}{2(mr^2 + J_C)} = \frac{mg[Rrf \cos \alpha + \rho^2(\sin \alpha - f \cos \alpha)]}{2(r^2 + \rho^2)}.$$

12-37. Thanh AB chuyển động song phẳng

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = T \sin \theta, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = T \cos \theta - P$$

$$J_C \ddot{\varphi} = T \frac{1}{2}l \sin(\pi/2 - \theta + \varphi) = T \frac{1}{2}l \cos(\varphi - \theta).$$

với $l = AB$, $J_C = \frac{P}{12g} l^2$ và T là lực căng dây.

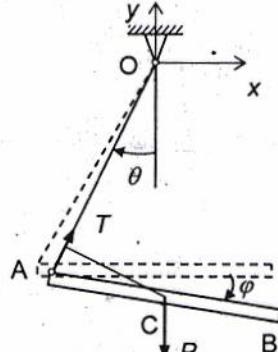
Ta có các quan hệ:

$$x_C = -l \sin \theta + (l/2) \cos \varphi,$$

$$y_C = -l \cos \theta - (l/2) \sin \varphi,$$

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\theta} \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta - (l/2)\ddot{\varphi} \sin \varphi - (l/2)\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}_C = l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta - (l/2)\ddot{\varphi} \cos \varphi + (l/2)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi.$$



Tại thời điểm ban đầu: $\varphi(0) = 0$, $\theta(0) = 30^\circ$, $\dot{\varphi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$.

$$\ddot{x}_C = -l\ddot{\theta} \cos 30^\circ - (l/2)\ddot{\varphi} \sin 0^\circ, \quad \ddot{y}_C = l\ddot{\theta} \sin 30^\circ + (l/2)\ddot{\varphi} \cos 0^\circ.$$

Ta suy ra: $T \approx 0,266P$, $\ddot{\theta} = -0,1538g/l$, $\ddot{\varphi} = 1,3846g/l$.

12-38. Sau khi dây bị đứt thanh AB sẽ chuyển động song phẳng. Viết phương trình vi phân chuyển động song phẳng cho thanh AB lân cận thời điểm dây bị đứt:

$$m\ddot{x}_C = 0, \quad m\ddot{y}_C = P - T, \quad J_C\ddot{\varphi} = -Tl.$$

Lân cận thời điểm dây bị đứt có thể xem \dot{y}_C là gia tốc tiếp của điểm C khi thanh AB quay quanh A với gia tốc góc $\bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} = -\dot{y}_C/l$.

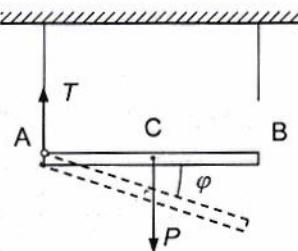
Từ hệ thức: $y_C = -l \sin \varphi$ (lưu ý rằng $y_C > 0$, $\varphi < 0$),

ta có: $\dot{y}_C = -l\dot{\varphi} \cos \varphi$; $\ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi} \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 \sin \varphi$.

vì $\varphi \approx 0$ nên $\sin \varphi \approx 0$, $\cos \varphi \approx 1 \Rightarrow \ddot{y}_C = -l\ddot{\varphi}$.

Mặt khác: $J_C = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2$, từ đó ta có:

$$m\ddot{y}_C = P - T, \quad \frac{1}{2}ml^2\ddot{y}_C/l = -Tl.$$



Khử \ddot{y}_C từ hai phương trình trên ra được: $T = \frac{1}{4}P$.

12-39. Gọi T là lực căng dây. Trụ A quay quanh trục cố định và trụ B chuyển động song phẳng: $J_1\ddot{\varphi} = r_1T$, $m_2\ddot{s} = m_2g - T$, $J_C\varepsilon_2 = r_2T$ (1)

với: $J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2$, $J_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2$.

Dây không giãn: $\omega_2 = (\dot{s} - r_1\dot{\varphi})/r_2$, $\varepsilon_2 = (\ddot{s} - r_1\ddot{\varphi})/r_2$. (2)

Giải hệ (1) và (2) ta tìm được: $\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1$, $a_C = \ddot{s}$, $\varepsilon_2 = (\ddot{s} - r_1\ddot{\varphi})/r_2$ và lực căng dây T .

12-40. PTVPCĐ của thanh :

$$m\ddot{x}_C = N_B \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N_A + N_B \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) - P \quad (2)$$

$$J_c \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} l N_A \cos \varphi + \frac{1}{2} l N_B \sin(\varphi + \frac{1}{4} \pi) \quad (3)$$

với: $J_c = \frac{1}{12} m l^2$. Ta có quan hệ động học:

$$x_c = x_A - \frac{1}{2} l \cos \varphi \Rightarrow \dot{x}_c = \dot{x}_A + \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\ddot{x}_c = \ddot{x}_A + \frac{1}{2} l \ddot{\varphi} \sin \varphi + \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi. \quad (4)$$

$$y_c = \frac{1}{2} l \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}_c = \frac{1}{2} l \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$\ddot{y}_c = \frac{1}{2} l \ddot{\varphi} \cos \varphi - \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (5)$$

Lưu ý định lý sin trong tam giác ABD:

$$\frac{x_A - x_D}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\frac{3}{4} \pi)} = \frac{l}{\sin(\frac{3}{4} \pi)}, \alpha = \frac{1}{4} \pi - \varphi$$

$$x_A - x_D = \frac{l}{\sin(\frac{3}{4} \pi)} \sin(\frac{1}{4} \pi - \varphi), x_D = \text{const.}$$

$$\text{Ta suy ra: } \dot{x}_A = \frac{l}{\sin(\frac{3}{4} \pi)} \dot{\varphi} \cos(\frac{1}{4} \pi - \varphi), \ddot{x}_A = \ddot{\varphi}(\dots) + \dot{\varphi}^2(\dots). \quad (6)$$

Tại thời điểm đầu $\varphi = \frac{1}{6} \pi$, $\dot{\varphi} = 0$. Giải hệ sáu phương trình (1-6) trên tìm được sáu ẩn: $N_A, N_B, \ddot{\varphi}, \ddot{x}_A, \ddot{x}_C, \ddot{y}_C$.

12-41. PTVPCĐ cho từng bánh xe như sau:

Bánh 1:

$$m \ddot{x}_A = mg \sin \alpha + S - F_A$$

$$m \ddot{y}_A = N_A - mg \cos \alpha = 0$$

$$mr^2 \ddot{\varphi}_A = F_A r$$

Do lăn không trượt:

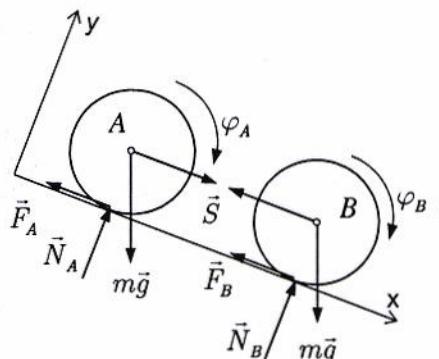
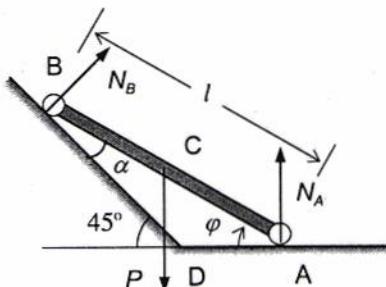
$$\dot{x}_A = r \dot{\varphi}_A \Rightarrow \ddot{\varphi}_A = \ddot{x}_A / r.$$

Bánh 2:

$$m \ddot{x}_B = mg \sin \alpha - S - F_B$$

$$m \ddot{y}_B = N_B - mg \cos \alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} mr^2 \ddot{\varphi}_B = F_B r.$$



Do lăn không trượt: $\dot{x}_B = r\dot{\varphi}_B \Rightarrow \ddot{\varphi}_B = \ddot{x}_B / r$.

Với $\ddot{x}_A = \ddot{x}_B$, từ các quan hệ trên nhận được $a_A = \ddot{x}_A$ và ứng lực S .

12-43. Khi mất liên kết tại B, tấm chuyển động quay quanh A. Phương trình chuyển động quanh A của tấm:

$$J_A \ddot{\varphi} = mgh \cos \varphi, \text{ với } h = AC \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_C = X_A, \quad mij_C = Y_A - mg. \quad (2)$$

với: $J_A = J_C + mh^2$

$$J_C = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2), \quad h = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

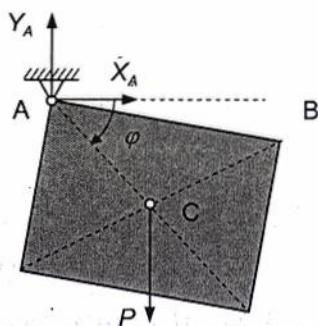
và gia tốc khối tâm:

$$x_C = h \cos \varphi \Rightarrow \ddot{x}_C = -h\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - h\ddot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$y_C = -h \sin \varphi \Rightarrow \ddot{y}_C = h\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - h\ddot{\varphi} \cos \varphi.$$

Tại thời điểm đầu $\dot{\varphi}_0 = 0, \sin \varphi_0 = 3/5, \cos \varphi_0 = 4/5$.

Giải hệ phương trình (1-2) ta tìm được ba ẩn số $\ddot{\varphi}, X_A, Y_A$.



CHƯƠNG 13: CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

13-1. $T_A = \frac{1}{2}m_1v_A^2 = \frac{1}{2}m_1r^2\omega^2, T_B = T_C = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m_2r^2\omega^2$

$$T_d = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2} m_3 r^2 \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}m_2r^2 + m_3r^2)\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)r^2\omega^2.$$

13-2. $T_A = \frac{1}{2}m_1v_A^2, T_B = \frac{1}{4}m_2v^2, T_C = \frac{3}{4}m_2v^2, T_d = \frac{1}{2} \int v^2 dm = \frac{1}{2}mv^2$

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{3}{2}m_2 + m \right) v^2,$$

$$\Pi = -m_1gx - \frac{m}{l}gx \frac{x}{2} = -[m_1gx + \frac{1}{2}(mg/l)x^2].$$

13-3. Động năng của hệ

$$T = \frac{1}{2}m_1v^2 + 4(\frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2) + 2T_{xich}, J_2 = \frac{1}{2}m_2r^2, \omega = v/r.$$

Khối lượng xích trên một đơn vị dài là: $\rho = m_3/(2l + 2\pi r)$. Chia xích thành 4 phần: phần dưới dài l tiếp đất, không chuyển động; phần trên dài l có vận tốc bằng $2v$; hai phần ôm vào bánh xích được ghép lại coi như vành đồng chất, có vận tốc tâm vành là v .

$$T_{xich} = \frac{1}{2}[0 + \rho l(2v)^2 + \rho 2\pi r v^2 + \rho 2\pi r r^2 \omega^2] = 2\rho(l + \pi r)v^2.$$

Vậy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1v^2 + 4(\frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}m_2v^2) + 4\rho[l + \pi r]v^2 \\ &= \frac{1}{2}[m_1 + 6m_2 + 8\rho(l + \pi r)]v^2. \end{aligned}$$

Công sinh ra do động cơ: $T - T_0 = A$

Tính được công suất trung bình của động cơ:

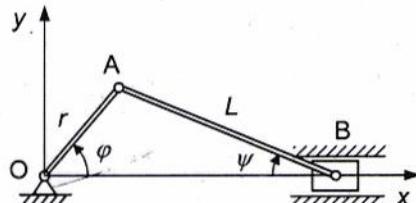
$$W = \frac{A}{t} = \frac{T - T_0}{t}.$$

13-4. Động năng :

$$T = \frac{1}{2}J_O\omega^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2, J_O = \frac{1}{3}m_1r^2$$

Tính v_B :

$$x_B = r \cos \varphi + L \cos \psi \Rightarrow v_B = \dot{x}_B = -r\dot{\varphi} \sin \varphi - L\dot{\psi} \sin \psi.$$



$$y_B = r \sin \varphi - L \sin \psi = 0 \Rightarrow 0 = r\dot{\varphi} \cos \varphi - L\dot{\psi} \cos \psi$$

$$\sin \psi = (r/L) \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \frac{r \cos \varphi}{L \cos \psi} \dot{\varphi}.$$

Ta có quan hệ:

$$\frac{\sin \psi}{r} = \frac{\sin \varphi}{L} \Rightarrow \sin \psi = \frac{r}{L} \sin \varphi \Rightarrow \cos \psi = \sqrt{1 - (r/L)^2 \sin^2 \varphi}$$

Sử dụng xấp xỉ $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + 2x$ khi x nhỏ.

$$\cos \psi = \sqrt{1 - (r/L)^2 \sin^2 \varphi} \approx 1 - \frac{1}{2}(r/L)^2 \sin^2 \varphi$$

$$v_B = \dot{x}_B = -r\dot{\varphi} \sin \varphi - L \frac{r \cos \varphi}{L \cos \psi} \frac{r \sin \varphi}{L} \dot{\varphi}$$

$$= -r\dot{\varphi} \left[\sin \varphi + \frac{r}{L} \frac{\sin 2\varphi}{2(1 - \frac{1}{2}(r/L)^2 \sin^2 \varphi)} \right].$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} m_1 + m_2 \left[\sin \varphi - \frac{r}{L} \frac{\sin 2\varphi}{2[1 - \frac{1}{2}(r/L)^2 \sin^2 \varphi]} \right]^2 \right\} r^2 \dot{\varphi}^2$$

Khi OA thẳng đứng hướng lên, $\varphi = \pi/2$, thanh AB chuyển động tịnh tiến tức thời:

$$T = \frac{1}{2} (m_1/3 + m_2) r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 r^2 \dot{\varphi}^2.$$

13-5. Ta có các quan hệ động học:

$$v_B = 2r\omega, \quad v_A = 4r\omega \quad v_K = 2v_B = 4r\omega$$

$$\omega_2 = v_B/r = 2\omega, \quad \omega_3 = (v_A - v_K)/r = 0.$$

Động năng của hệ có dạng:

$$T = T_{OA} + T_2 + T_3$$

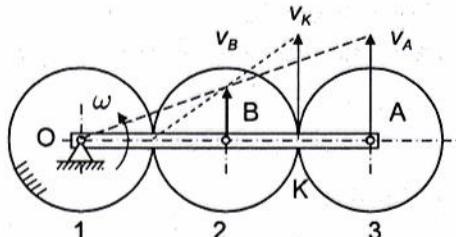
$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega^2, \quad J_O = \frac{1}{3} m_1 (4r)^2$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} m_1 r^2 \omega^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_2^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_3^2.$$

$$\text{Vậy ta có: } T = \frac{1}{3} (33m + 8m_1) r^2 \omega^2.$$



13-6. a) Động năng của con lăn có dạng:

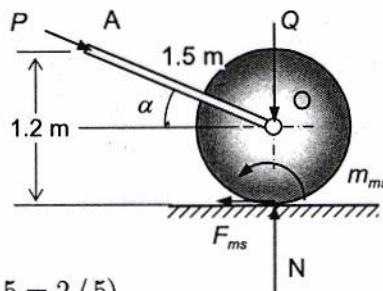
$$T = \frac{3}{4} mv^2$$

Công của lực đẩy

$$A = Ps \cos \alpha,$$

$$T - T_0 = \sum A_k$$

$$mv^2 - 0 = Ps \cos \alpha, (\sin \alpha = 0,6 / 1,5 = 2 / 5).$$



Ta suy ra:

$$P = \frac{3mv^2}{4s \cos \alpha} = 102,65 \text{ N.}$$

b) Công của lực đẩy và ma sát lăn

$$\sum A_k = Ps \cos \alpha - kN\varphi, \quad \varphi = s/r, \quad N = P \sin \alpha + mg$$

Vậy: $\sum A_k = Ps \cos \alpha - k(P \sin \alpha + mg)s/r.$

$$T - T_0 = \sum A_k, \quad \frac{3}{4} mv^2 = Ps(\cos \alpha - k \sin \alpha / r) - kmgs / r,$$

$$P = \frac{3mv^2 + 4kmgs / r}{4s(\cos \alpha - k \sin \alpha / r)} = 138,12 \text{ N.}$$

c) Lực duy trì chuyển động đều

$$0 = Ps(\cos \alpha - k \sin \alpha / r) - kmgs / r \Rightarrow P = \frac{kmg / r}{(\cos \alpha - k \sin \alpha / r)} = 35,09 \text{ N.}$$

Vậy cần giảm đi một lượng là $\Delta P = 138,12 - 35,09 = 103,02 \text{ N.}$

13-7. Tính động năng

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad J_O = \frac{1}{2} m_1 R^2, \quad v_2 = R\omega.$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 / 2 + m_2) R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_{tg} \omega^2, \quad J_{tg} = \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) R^2.$$

Tính tổng công các lực và ngẫu lực:

$$\sum A_k = M\varphi - (P_2 \sin \alpha - F_2)s$$

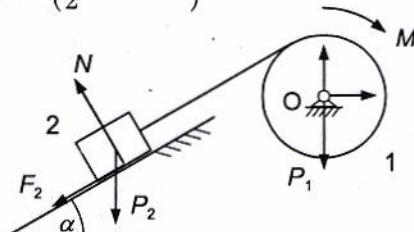
$$s = R\varphi, \quad F_2 = fP_2 \cos \alpha$$

$$\sum A_k = [M - m_2 g R (\sin \alpha + f \cos \alpha)] \varphi.$$

Áp dụng định lý động năng dạng:

$$T - T_0 = \sum A_k,$$

$$\text{ta suy ra: } \omega = \sqrt{\frac{2[M - m_2 g R (\sin \alpha + f \cos \alpha)]}{J_{tg}}} \varphi.$$

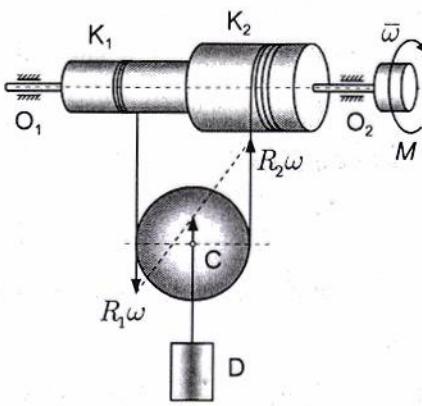


13-8. Tời quay quanh trục cố định, ròng rọc coi như chuyển động song phẳng, và vật nặng D chuyển động tịnh tiến.

Động năng hệ khi tời quay với vận tốc góc ω :

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 + \frac{1}{2}(mv_C^2 + J_C\omega_2^2) + \frac{1}{2}m_3v_D^2,$$

$$J_C = \frac{1}{2}mr^2.$$



Các quan hệ động học:

$$v_D = v_C = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)\omega, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\omega(R_2 + R_1)/r,$$

$$v_D = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)\omega \Rightarrow h = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)\varphi$$

$$T = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2 + \frac{1}{2}[m\frac{1}{4}(R_2 - R_1)^2 + J_C\frac{1}{4}(R_2 + R_1)^2/r^2]\omega^2 + \frac{1}{2}m_3\frac{1}{2}(R_2 - R_1)^2\omega^2.$$

Vậy ta có: $T = \frac{1}{2}J_{tg}\omega^2$

Với: $J_{tg} = (J_1 + J_2) + \frac{1}{4}m(R_2 - R_1)^2 + \frac{1}{4}J_C(R_2 + R_1)^2/r^2 + \frac{1}{4}m_3(R_2 - R_1)^2$.

Tổng công các lực khi tời quay được góc φ và vật nặng đi lên đoạn h :

$$\sum A_k = M\varphi - (m + m_3)gh,$$

$$\sum A_k = M\frac{2}{R_2 - R_1}h - (m + m_3)gh = [2M/(R_2 - R_1) - (m + m_3)g]h.$$

Áp dụng định lý động năng: $T - T_0 = \sum A_k$, ta suy ra:

$$\omega = \sqrt{\frac{2h[2M - (m + m_3)g(R_2 - R_1)]}{J_{tg}(R_2 - R_1)}}.$$

13-9. Động năng và thế năng

$$T_A = \frac{1}{2}m_1v_A^2 = \frac{1}{2}(P/g)v^2, \quad \omega = v/R,$$

$$T_B = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(J/R^2)v^2, \quad T_d = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}(pL/g)v^2.$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g} + \frac{J}{R^2} + \frac{pL}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}\frac{gJ + (P + pL)R^2}{gR^2}v^2 = \frac{1}{2}m_{tg}v^2.$$

$$\Pi = -P(x + x_0) - \frac{1}{2} p(x + x_0)(x + x_0).$$

Với hệ bảo toàn ta có:

$$T + \Pi = T_0 + \Pi_0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{gJ + (P + pL)R^2}{gR^2} v^2 = -Px_0 - p \frac{x_0 x_0}{2} + P(x + x_0) + p \frac{(x + x_0)(x + x_0)}{2}$$

Ta suy ra:

$$v = \sqrt{\frac{gR^2[2Px + px(2x_0 + x)]}{gJ + (P + pL)R^2}}.$$

13-10. Trước hết ta cần thiết lập các quan hệ động học:

$$v_{C2} = v_A = (r_1 + r_2)\omega_I, \bar{\omega}_{tq} = \bar{\omega}_I$$

$$\frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_1}{r_2}, \frac{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_3}{r_4}, \bar{\omega}_1 = 0, \bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_2.$$

Từ các quan hệ vận tốc trên ta tính được $\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_4$ theo $\bar{\omega}_I$.

Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_I^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (m_2 v_A^2 + J_2 \omega_2^2) + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 = \frac{1}{2} J_{tg} \omega_I^2.$$

Tổng công suất:

$$\sum W_k = M_1 \omega_I - M_4 \omega_4 = M_{tg} \omega_I$$

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm ta suy ra: $\varepsilon_I = M_{tg} / J_{tg}$.

13-11. Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_B^2, v_B = \dot{x}, v_A = \dot{y}.$$

Tìm v_A từ phương trình liên kết và đạo hàm của nó.

$$\sqrt{x^2 + h^2} + 2y = \text{const} \Rightarrow \frac{2x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}} + 2\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{2\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Vậy ta có:

$$T = T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m_{tg}(x) \dot{x}^2 \text{ với } m_{tg}(x) = \frac{x^2}{4(x^2 + h^2)} m_1 + m_2.$$

Tổng công suất các lực tác dụng:

$$\sum W_k = m_1 g \dot{y} = -m_1 g \frac{x}{2\sqrt{x^2 + h^2}} \dot{x} = F_{td} \dot{x}, F_{td} = -m_1 g \frac{x}{2\sqrt{x^2 + h^2}}.$$

Áp dụng định lý động năng dạng đạo hàm ta nhận được:

$$\frac{d}{dt} T = \sum W_k \Rightarrow m_{tg}(x) \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [m_{tg}(x)] \dot{x}^3 = F_{td} \dot{x}.$$

Từ đó ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của hệ:

$$m_{tg}(x)\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[m_{tg}(x)]\dot{x}^2 = -m_1g\frac{x}{2\sqrt{x^2+h^2}}.$$

13-12. Nếu vận tốc góc bánh 1 là ω , ta có các quan hệ động học:

$$\omega_2 = r_1\omega / 2r_2, \quad v_A = r_2\omega_2, \quad \omega_{tg} = v_A / (r_1 + r_2).$$

$$\text{Động năng hệ: } T = \frac{1}{2}J_1\omega^2 + \frac{1}{2}(m_2v_A^2 + J_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}J_0\omega_{tg}^2 = \frac{1}{2}J_{tg}\omega^2.$$

$$\text{Tổng công suất: } \sum W_k = M_0\omega_{tg} - M_1\omega_1.$$

Áp dụng định lý biến thiên động năng $\frac{d}{dt}T = \sum W_k$ ta thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của hệ theo ω , giải PTVP với $\omega(0) = 0$ ta nhận được biểu thức $\omega(t)$.

13-13. Cách giải tương tự bài 13-12 với lưu ý: khi các bánh răng 1 và 2 làm từ cùng vật liệu cùng bề dày h thì ta có liên hệ sau:

$$m = \rho\pi r^2 h, \quad J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\rho\pi hr^4,$$

$$m_1 / m_2 = (r_1 / r_2)^2, J_1 / J_2 = (r_1 / r_2)^4.$$

13-14. Động năng:

$$T = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad J = (Q/g)\rho^2, \quad m = P/g, \quad v = R\omega,$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q\rho^2 + PR^2}{g}\omega^2 = \frac{1}{2}J_{tg}\omega^2, \quad J_{tg} = (Q\rho^2 + PR^2)/g.$$

Tổng công suất các lực và ngẫu lực:

$$\sum W_k = M\omega - Pv = (M - PR)\omega.$$

Áp dụng công thức:

$$\frac{d}{dt}T = \sum W_k \Rightarrow J_{tg}\omega \frac{d\omega}{dt} = (M_0 - PR - \alpha\omega^2)\omega,$$

$$\text{Vậy: } J_{tg} \frac{d\omega}{dt} = M_0 - PR - \alpha\omega^2.$$

Giải phương trình vi phân với điều kiện đầu $\omega(0) = 0$ nhận được:

$$\omega(t) = \omega_{gh} \frac{e^{\sqrt{ABt}} - e^{-\sqrt{ABt}}}{e^{\sqrt{ABt}} + e^{-\sqrt{ABt}}}, \quad \omega_{gh} = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\text{trong đó: } A = g \frac{M_0 - PR}{PR^2 + Q\rho^2}, \quad B = g \frac{\alpha}{PR^2 + Q\rho^2}.$$

13-15. Cánh quạt quay đều nên mômen động cơ cân bằng với mômen cản của không khí trên các cánh. Như vậy ta có:

$$\{\vec{P}, \vec{N}, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{M}\} \equiv 0$$

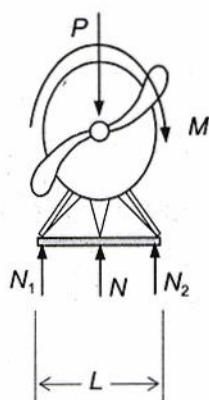
Từ đó ta có các hệ thức:

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = (N_2 - N_1)L / 2 - M = 0$$

$$\text{vậy: } M_{dc} = M = (N_2 - N_1)L / 2.$$

Công suất động cơ:

$$\begin{aligned} W_{dc} &= \eta^{-1} M_{dc} \omega = \eta^{-1} M_{dc} \frac{n\pi}{30} \\ &= \eta^{-1} \frac{(N_2 - N_1)L}{2} \frac{n\pi}{30} = 918,5 \text{ kW}. \end{aligned}$$



13-16. Khi đòn ABF cân bằng ta có:

$$(T_B - T_A)R = PL$$

Trục động cơ quay đều nên mômen động cơ cân bằng với mômen ma sát, mômen ma sát thì lại cân bằng với lực căng hai nhánh đai.

$$M_{dc} = R \int dF_{ms} = R(T_B - T_A).$$

$$\text{Do đó: } M_{dc} = PL.$$

Công suất động cơ:

$$W_{dc} = M_{dc} \omega = PL \frac{\pi n}{30} = 29,4 \cdot 0,5 \cdot \frac{240\pi}{30} = 369,45 \text{ W.}$$

13-17. Ta có các quan hệ động học sau:

$$\omega = \frac{v}{R+r}, \quad v_C = R\omega = \frac{R}{R+r}v.$$

Biểu thức động năng của hệ theo vận tốc v của vật A có dạng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} m_1 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 \\ T &= \frac{1}{2} \frac{m_2(R+r)^2 + m_1 R^2 + J}{(R+r)^2} v^2 = \frac{1}{2} m_{tg} v^2. \end{aligned}$$

Tổng công các lực: $\sum A_k = Ph$, áp dụng công thức $T - T_0 = \sum A_k$ ta suy ra:

$$v_A = v = \sqrt{\frac{2Ph(R+r)^2}{m_2(R+r)^2 + m_1 R^2 + J}}.$$

Áp dụng công thức $\frac{d}{dt} T = \sum W_k$ ta có:

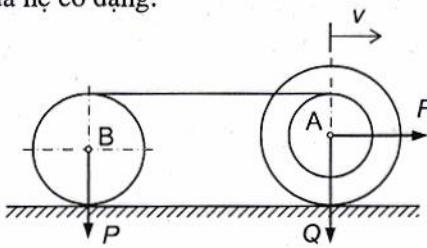
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{P}{m_{tg}}, \text{ suy ra } a_C = \dot{v}_C = \frac{R}{R+r} a.$$

13-18. Khi tâm A có vận tốc v , động năng của hệ có dạng:

$$T = T_A + T_B$$

$$T_A = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} J_A \omega_1^2, \quad J_A = m_1 \rho^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_2^2, \quad J_B = \frac{1}{2} m_2 r_B^2.$$



Các quan hệ hình học và động học:

$$r_B = (R + r) / 2, \quad \omega_1 = v / R,$$

$$v_B = 0,5(R + r)\omega_1 = 0,5(R + r)v / R,$$

$$\omega_2 = v_B / r_B = 0,5(R + r)v / (Rr_B) = v / R = \omega_1.$$

Vậy:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_1 \rho^2 / R^2) v^2 + \frac{3}{4} m_2 v_B^2 = \frac{1}{2} m_{tg} v^2,$$

$$m_{tg} = \frac{8m_1(R^2 + \rho^2) + 3m_2(R + r)^2}{8R^2}.$$

Tổng công suất các lực: $\sum W_k = Fv$.

Áp dụng công thức $\frac{d}{dt} T = \sum W_k$ ta có:

$$a_A = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m_{tg}} = \frac{8R^2 F}{8m_1(R^2 + \rho^2) + 3m_2(R + r)^2}, \quad a_B = \frac{R + r}{2R} a_A.$$

13-19. Khi vật 1 có vận tốc v , động năng của hệ có dạng:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 v^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \quad J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_3^2, \quad J_C = m_3 \rho^2.$$

Các quan hệ động học:

$$\omega_2 = v / r_2, \quad \omega_3 = v / (R_3 + r_3), \quad v_C = R_3 \omega_3 = \frac{R_3}{R_3 + r_3} v \Rightarrow s_C = \frac{R_3}{R_3 + r_3} h.$$

$$\text{Vậy: } T = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{r_2^2} \frac{v^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} m_3 \frac{R_3^2}{(R_3 + r_3)^2} v^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 \rho^2}{(R_3 + r_3)^2} v^2 = \frac{1}{2} m_{tg} v^2,$$

$$m_{tg} = m_1 + \frac{m_2}{2} + m_3 \frac{R_3^2 + \rho^2}{(R_3 + r_3)^2}.$$

Tổng công các lực khi vật 1 di xuống được một đoạn bằng h

$$\sum A_k = m_1 gh - m_3 g s_C \sin \alpha = \frac{m_1(R_3 + r_3) - m_3 R_3 \sin \alpha}{R_3 + r_3} gh.$$

Áp dụng công thức $T - T_0 = \sum A_k$ ta suy ra:

$$v = \sqrt{\frac{2[m_1(R_3 + r_3) - m_3 R_3 \sin \alpha]}{m_{tg}(R_3 + r_3)}} gh.$$

Nhận xét: Vật 1 chuyển động đồng xuống khi $m_1(R_3 + r_3) - m_3 R_3 \sin \alpha > 0$.

13-20. Tính động năng của hệ dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_B^2 + \frac{1}{2}J_B\omega_2^2$$

trong đó:

$$J_A = m\rho^2 = mRr, J_B = \frac{1}{2}m_2r_2^2$$

$$v_A = \dot{s}, \omega_1 = \dot{s}/r$$

$$v_B = \frac{1}{2}\omega_1(R - r) = \frac{1}{2}[(R - r)/r]\dot{s}$$

$$\omega_2 = v_B/r_2 = \frac{1}{2}[(R - r)/(r r_2)]\dot{s}$$

Vậy ta có: $T = \frac{1}{2}m_{tg}\dot{s}^2$,

với $m_{tg} = m + mR/r + m_2[\frac{1}{2}(R - r)/r]^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2[\frac{1}{2}(R - r)/(r r_2)]^2$.

a) Ta tìm tổng công các lực: $\sum A_k = Fs$.

Áp dụng công thức $T - T_0 = \sum A_k$ ta suy ra:

$$v = \dot{s} = \sqrt{2Fs/m_{tg}}.$$

Áp dụng công thức $\frac{d}{dt}T = \sum W_k$ ta có:

$$\frac{d}{dt}T = m_{tg}\dot{s}\ddot{s} = F\dot{s} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow a_A = \ddot{s} = F/m_{tg} = \text{const.}$$

$$v_B = \frac{1}{2}[(R - r)/r]\dot{s} \Rightarrow a_B = \frac{1}{2}[(R - r)/r]\ddot{s}$$

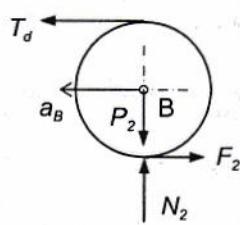
$$\omega_2 = \frac{1}{2}[(R - r)/(r r_2)]\dot{s} \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1}{2}[(R - r)/(r r_2)]\ddot{s}$$

$$a_B = \frac{F(R - r)}{r m_{tg}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{F(R - r)}{2r r_2 m_{tg}}$$

b) Sức căng của dây

Ta thiết lập các phương trình:

$$\begin{aligned}
m_2 a_B &= T_d - F_2 \\
m_2 0 &= N_2 - P_2 = 0 \\
J_B \varepsilon_2 &= T_d r_2 + F_2 r_2 \\
T_d &= \frac{1}{2} (m_2 a_B + J_B \varepsilon_2 / r_2).
\end{aligned}$$



c) Quy luật vận tốc của tâm A.

Tổng công suất của các lực hoạt động:

$$\sum_k W_k = F \dot{s} - b v_B v_B = \left\{ F - b \left[\frac{1}{2} (R - r) / r \right]^2 \dot{s} \right\} \dot{s}.$$

Áp dụng công thức $\frac{d}{dt} T = \sum W_k$ ta có:

$$m_{tg} \frac{d\dot{s}}{dt} = \left\{ F - b \left[\frac{1}{2} (R - r) / r \right]^2 \dot{s} \right\}, \quad \dot{s}(0) = 0.$$

$$v_A(t) = \dot{s}(t) = v_{gh} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$\text{trong đó } v_{gh} = \frac{F}{b \left[\frac{1}{2} (R - r) / r \right]^2}, \quad \alpha = \frac{b \left[\frac{1}{2} (R - r) / r \right]^2}{m_{tg}}.$$

13-21. Tính động năng của hệ: $T = T_{OA} + T_2$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \omega^2, \quad l = r_1 + r_2, \quad T_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A^2$$

Các quan hệ động học:

$$v_A = l\omega = r_2 \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = l\omega / r_2.$$

Vậy ta có:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_2 \right) l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_{tg} \omega^2, \quad J_{tg} = \left(\frac{1}{3} m + \frac{3}{2} m_2 \right) l^2.$$

a) Khi $M = \text{const}$: $\sum W_k = M\omega$, áp dụng công thức $\frac{d}{dt} T = \sum W_k$ ta có:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = M / J_{tg}.$$

b) Khi $M = M_0 - k\omega$: $\sum W_k = (M_0 - k\omega)\omega$, ta suy ra:

$$J_{tg} \omega \frac{d\omega}{dt} = (M_0 - k\omega)\omega,$$

Giải phương trình vi phân trên với điều kiện đầu $\omega(0) = 0$, ta suy ra:

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{M_0 - k\omega} = \frac{1}{J_{tg}} \int_0^t dt.$$

Đặt $\alpha = k / J_{tg}$ ta có $\omega = \frac{M_0}{k} (1 - e^{-\alpha t})$.

13-22. a) Biểu thức động năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2$$

với $v_C = r_1 \omega_1$, $\omega_2 = \omega_1 r_1 / r_2$.

Vậy ta có:

$$T = \frac{1}{2} J_{tg} \omega_1^2$$

trong đó $J_{tg} = \frac{1}{2g} (P_1 + 3P_2)r_1^2$.

Tổng công suất của các lực:

$$\sum W_k = (M_0 - P_2 r_1 \sin \alpha - b\omega_1) \omega_1 = (M_0^* - b\omega_1) \omega_1$$

trong đó $M_0^* = M_0 - P_2 r_1 \sin \alpha$.

Áp dụng công thức $\frac{d}{dt} T = \sum W_k$ ta có:

$$\frac{d(\alpha - \beta \omega_1)}{\alpha - \beta \omega_1} = -\beta dt,$$

với $\alpha = \frac{M_0^*}{J_{tg}} = 2g \frac{M_0 - P_2 r_1 \sin \alpha}{(P_1 + 3P_2)r_1}$; $\beta = \frac{b}{J_{tg}} = \frac{2bg}{(P_1 + 3P_2)r_1^2}$.

Với $\alpha - \beta \omega \geq 0$ và điều kiện đầu tiên cho: $t = 0$, $\omega_1(0) = 0$ ta nhận được:

$$\omega_1(t) = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}).$$

b) Xác định chuyển động của con lăn khi dây đứt.

Trường hợp I: Khi dây đứt con lăn vẫn tiếp tục chuyển động lên. Phương trình vi phân chuyển động của con lăn có dạng:

$$m_2 \ddot{x}_C = -m_2 g \sin \alpha + F_{ms}, \quad m_2 \ddot{y}_C = N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0$$

$$J_C \ddot{\varphi}_2 = F_{ms} r_2.$$

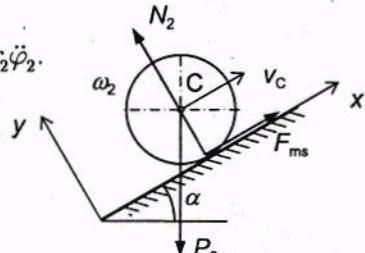
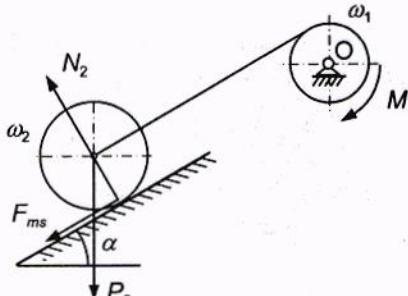
Chú ý rằng ta có quan hệ: $\dot{x}_C = -r_2 \dot{\varphi}_2 \Rightarrow \ddot{x}_C = -r_2 \ddot{\varphi}_2$.

Từ các phương trình trên ta nhận được:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha, \quad F_{ms} = \frac{1}{3} m_2 g \sin \alpha;$$

$$\ddot{x}_C = -\frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{2g}{3r_2} \sin \alpha.$$

Gọi ω_1^* là vận tốc góc của con lăn khi bị dây đứt, chọn gốc thời gian và gốc tọa độ ứng với vị trí điểm C khi dây đứt thì:



$$x_C = -\frac{1}{3}(g \sin \alpha)t^2 + r_1 \omega_1^* t$$

Nhận xét: Khoảng thời gian T kể từ lúc dây bị đứt tới khi khối tâm C của con lăn lên đến vị trí cao nhất:

$$\dot{x}_C(T) = 0 \Rightarrow T = 1,5 \frac{r_1 \omega_1^*}{g \sin \alpha}.$$

Trường hợp 2: Khi dây đứt con lăn lập tức chuyển động xuống. Phương trình vi phân chuyển động của con lăn có dạng:

$$m_2 \ddot{x}_C = m_2 g \sin \alpha - F_{ms}, \quad m_2 \ddot{y}_C = N_2 - m_2 g \cos \alpha = 0,$$

$$J_C \ddot{\varphi}_2 = F_{ms} r_2, \quad \ddot{x}_C = r_2 \ddot{\varphi}_2.$$

Từ hệ phương trình trên ta nhận được:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha, \quad F_{ms} = \frac{1}{3} m_2 g \sin \alpha,$$

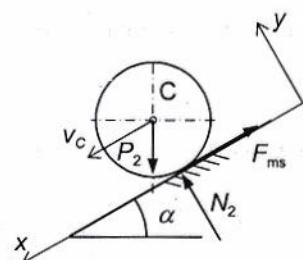
$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{2g}{3r_2} \sin \alpha.$$

Nếu chọn gốc thời gian và gốc tọa độ ứng với vị trí khối tâm C lên cao nhất và trục x hướng xuống thì:

$$x_C = \frac{1}{3}(g \sin \alpha)t^2.$$

Kiểm tra điều kiện lăn không trượt $F_{ms} < fN_2$, ta suy ra:

$$f > \frac{1}{3} \tan \alpha.$$



CHƯƠNG 14: NGUYÊN LÝ CÔNG ẢO

14-1. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$. Các lực hoạt động P và F . Tổng công ảo khi AD thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$ có dạng:

$$\delta A = m_o(P)\delta\varphi - F\delta x_C = -2PL\delta\varphi - F\delta x_C$$

Ta có:

$$x_C = 2L \cos \varphi \Rightarrow \delta x_C = -2L \sin \varphi \delta\varphi$$

Vậy:

$$\delta A = (-2PL + 2FL \sin \varphi) \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$$

Lực suy rộng: $Q_\varphi = -2PL + 2FL \sin \varphi = 0 \Rightarrow F = P / \sin \varphi$.

14-2. Cơ hệ một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng $q = \alpha$. Các lực hoạt động là P và Q . Cho hệ một di chuyển ảo $\delta\alpha$ (tưởng tượng thanh OK di chuyển một góc nhỏ $\delta\alpha$). Tổng công ảo của các lực hoạt động trong di chuyển ảo $\delta\alpha$ là:

$$\delta A = -P\delta x_C - Q\delta y_D$$

Từ sơ đồ cơ cấu cho ta các liên hệ hình học sau:

$$x_C = L \cos \alpha \Rightarrow \delta x_C = -L \sin \alpha \delta\alpha, \quad y_D = 3L \sin \alpha \Rightarrow \delta y_D = L \cos \alpha \delta\alpha$$

Ta suy ra:

$$\delta A = PL \sin \alpha \delta\alpha - 3QL \cos \alpha \delta\alpha = L(P \sin \alpha - 3Q \cos \alpha) \delta\alpha$$

Vậy lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với tọa độ suy rộng α là:

$$Q_\alpha = L(P \sin \alpha - 3Q \cos \alpha), \quad Q_\alpha = 0 \Rightarrow P = 3Q \cot \alpha.$$

Nhận xét: trường hợp ở đây thang có 3 tầng và $P = 3Q \cot \alpha$, có thể suy ra rằng nếu thang có n tầng ta có: $P = nQ \cot \alpha$.

14-3. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn vectơ tọa độ suy rộng là $q = [\varphi_1, \varphi_2]^T$, với φ_1, φ_2 là góc định vị của trục 1 và ròng rọc 2.

Các lực hoạt động gồm: ngẫu lực M , các trọng lực P và Q . Cho hệ thực hiện một di chuyển ảo $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2$.

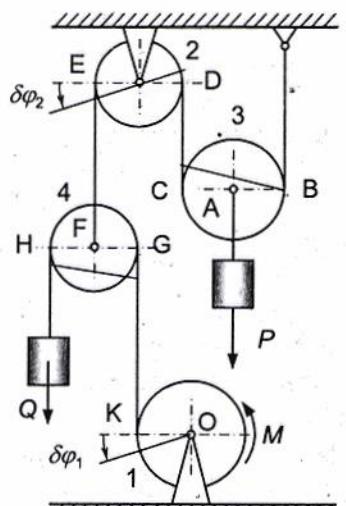
Tổng công ảo của các lực hoạt động trong di chuyển ảo này là:

$$\delta A = M \delta\varphi_1 - P \delta s_A + Q \delta s_H.$$

Ròng rọc 3 chuyển động song phẳng với tâm vận tốc tức thời B, nên ta suy ra:

$$\delta s_A = \frac{1}{2} \delta s_C, \quad \delta s_C = \delta s_D = \delta s_F = \delta s_E = r \delta\varphi_2.$$

Ròng rọc 4 chuyển động song phẳng, tâm F là trung điểm của GH nên ta có:



$$\delta s_F = \frac{1}{2}(\delta s_G + \delta s_H)$$

Ta suy ra: $\delta s_H = 2\delta s_F - \delta s_G$, $\delta s_G = \delta s_K = R\delta\varphi_1$.

Thay $\delta s_A = \frac{1}{2}r\delta\varphi_2$, $\delta s_H = 2r\delta\varphi_2 - R\delta\varphi_1$ vào biểu thức tính công ảo nhận được:

$$\delta A = M\delta\varphi_1 - \frac{1}{2}P r\delta\varphi_2 + Q(2r\delta\varphi_2 - R\delta\varphi_1) = (M - QR)\delta\varphi_1 + (2Qr - \frac{1}{2}Pr)\delta\varphi_2$$

Vậy các lực suy rộng là: $Q_1 = (M - QR)$, $Q_2 = (2Qr - \frac{1}{2}Pr)$.

Điều kiện cân bằng của cơ hệ:

$$Q_1 = (M - QR) = 0, \quad Q_2 = (2Qr - \frac{1}{2}Pr) = 0.$$

Từ đó nhận được: $M = QR$, $P = 4Q$.

14-4. Hệ một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng là góc quay của trục vít, $q = \varphi$. Coi như các lực hoạt động gồm ngẫu lực mômen M và lực ép N .

Tổng công ảo có dạng:

$$\delta A = M\delta\varphi + N\delta y_C.$$

Từ sơ đồ máy ép ta có:

$$y_C = 2a \cos \alpha \Rightarrow \delta y_C = -2a \sin \alpha \delta\alpha, \quad x_A = a \sin \alpha \Rightarrow \delta x_A = a \cos \alpha \delta\alpha$$

Để tìm liên hệ $\delta\varphi$ và $\delta\alpha$ ta chú ý đến bước ren h : $\delta x_A = (h/2\pi)\delta\varphi$

$$a \cos \alpha \delta\alpha = (h/2\pi)\delta\varphi \Rightarrow \delta\alpha = \frac{h}{2\pi a \cos \alpha} \delta\varphi.$$

$$\delta y_C = -2a \sin \alpha \delta\alpha$$

$$= -\frac{2a \sin \alpha}{a \cos \alpha} \cdot \frac{h}{2\pi} \delta\varphi = -\frac{h \tan \alpha}{\pi} \delta\varphi$$

Vậy tổng công ảo được tính là:

$$\delta A = \left(M - N \frac{h \tan \alpha}{\pi} \right) \delta\varphi.$$

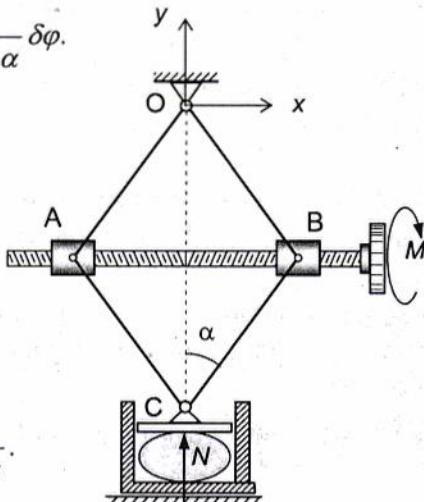
Từ đó ta có lực suy rộng:

$$Q_\varphi = M - N \frac{h \tan \alpha}{\pi} = 0$$

Từ điều kiện cân bằng của hệ: $N = M \frac{\pi}{h \tan \alpha}$.

14-5. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$ là góc quay của tay quay OA. Các lực hoạt động gồm ngẫu lực có mômen M và lực F . Cho tay quay OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$. Điểm đặt lực F cũng di chuyển một lượng $(\delta x_B, \delta y_B)$, ta tính được tổng công ảo dưới dạng:

$$\delta A = M\delta\varphi + F\delta x_B.$$



Từ sơ đồ cơ cấu ta có: $x_B = L \sin \alpha \Rightarrow \delta x_B = L \cos \alpha \delta \alpha$.

Để tìm liên hệ $\delta \varphi$ và $\delta \alpha$ ta chú ý đến tam giác OAC:

$$d \sin \alpha - a \sin(\varphi + \alpha) = 0$$

Ta suy ra:

$$\delta \alpha = \frac{a \cos(\varphi + \alpha)}{d \cos \alpha - a \cos(\varphi + \alpha)} \delta \varphi.$$

Vậy tổng công ảo được tính là:

$$\delta A = M \delta \varphi + FL \cos \alpha \delta \alpha = \left(M + FL \frac{a \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha)}{d \cos \alpha - a \cos(\varphi + \alpha)} \right) \delta \varphi$$

Từ đó nhận lực suy rộng: $Q_\varphi = M + \frac{FL a \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha)}{d \cos \alpha - a \cos(\varphi + \alpha)}$

Từ điều kiện cân bằng của hệ: $Q_\varphi = 0 \Rightarrow M = \frac{FL a \cos \alpha \cos(\varphi + \alpha)}{a \cos(\varphi + \alpha) - d \cos \alpha}$.

14-6. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là góc quay của trục vít: $q = \varphi$. Coi phản lực do vật ép tác dụng lên má ép N là lực hoạt động. Tưởng tượng cho trục vít xoay một góc nhỏ $\delta \varphi$, khi đó điểm đặt lực N cũng di chuyển:

$$\delta x = \delta x_K \text{ và } \delta x = \delta x_D.$$

Tổng công ảo:

$$\delta A = M \delta \varphi + N \delta x_K - N \delta x_D.$$

Từ sơ đồ máy ép ta có:

$$x_K = L \sin \alpha \Rightarrow \delta x_K = L \cos \alpha \delta \alpha,$$

$$x_D = -x_K \Rightarrow \delta x_D = -L \cos \alpha \delta \alpha$$

với $L = OK = OD$, $a = KB = CD$.

Để tìm liên hệ $\delta \alpha$ và $\delta \varphi$ ta chú ý đến bước ren h cùng với $y_B = y_C = \text{const}$:

$$\delta x_B = -(h/2\pi) \delta \varphi$$

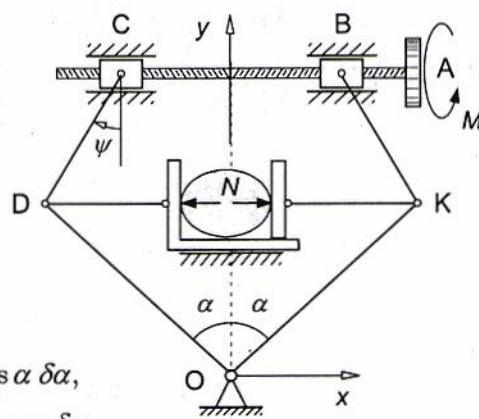
$$x_B = L \sin \alpha - a \sin \psi, \quad y_B = L \cos \alpha + a \cos \psi = \text{const}$$

$$\delta x_B = L \cos \alpha \delta \alpha - a \cos \psi \delta \psi = -(h/2\pi) \delta \varphi \quad (1)$$

$$\delta y_C = -L \sin \alpha \delta \alpha - a \sin \psi \delta \psi = 0 \quad (2)$$

Nhân (1) với $\sin \psi$, nhân (2) với $\cos \psi$ rồi trừ cho nhau ta được:

$$\delta \alpha = -\frac{(h/2\pi) \sin \psi}{L(\sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha)} \delta \varphi = -\frac{(h/2\pi) \sin \psi}{L \sin(\psi + \alpha)} \delta \varphi;$$



$$\delta A = M\delta\varphi + 2N\delta x_K = \left(M - N \frac{h \cos \alpha \sin \psi}{\pi \sin(\psi + \alpha)} \right) \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi$$

$$Q_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{M}{h} \cdot \frac{\pi \sin(\psi + \alpha)}{\cos \alpha \sin \psi}.$$

14-7. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$ (góc quay của cần OA). Các lực hoạt động F và Q (coi phản lực Q của vật ép M lên tấm trượt S_2 là lực hoạt động). Tính tổng công ảo khi cho cần OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$:

$$\delta A = Fa\delta\varphi - Q\delta y$$

trong đó δy là di chuyển ảo của tấm S_2 .

Có $\delta y_B = b\delta\varphi$ hướng xuống, tấm S_1 dịch chuyển một đoạn bằng δy_B . Để tính dịch chuyển của tấm S_2 ta cần chú ý đến tính không nén được của chất lỏng sử dụng trong máy ép:

$$S_1\delta y_B = S_2\delta y \Rightarrow \delta y = \frac{S_1}{S_2}\delta y_B = \frac{S_1}{S_2}b\delta\varphi$$

$$\delta A = Fa\delta\varphi - Q\delta y = (Fa - QbS_1/S_2)\delta\varphi$$

Lực suy rộng:

$$Q_\varphi = (Fa - QbS_1/S_2), \quad Q_\varphi = 0 \Rightarrow Q = F \frac{aS_2}{bS_1}.$$

Nhận xét: với $a > b$, $S_2 > S_1$ nên $Q \gg F$.

14-8. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$ (góc quay của thanh OA). Các lực hoạt động Q , F_1 , và F_2 (coi phản lực F_1 và F_2 là lực hoạt động).

Khi cho cần OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$, điểm đặt của các lực hoạt động sẽ di chuyển một lượng nhỏ theo phương ngang. Các di chuyển ảo này có liên hệ với $\delta\varphi$ như sau:

$$\delta x_D = a\delta\varphi, \quad \delta x_A = (a + b + c)\delta\varphi, \quad \delta x_B = \delta x_A.$$

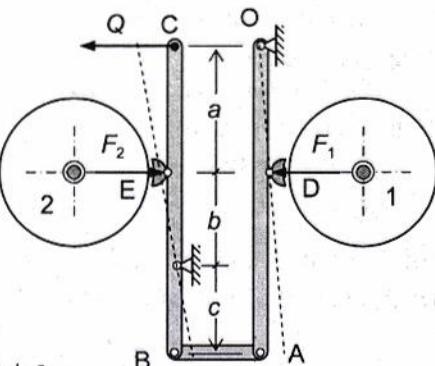
$$\text{Góc xoay của thanh BC: } \delta\theta = \delta x_B / c = \frac{a + b + c}{c} \delta\varphi$$

Ta suy ra:

$$\delta x_C = (a + b)\delta\theta = \frac{(a + b)(a + b + c)}{c} \delta\varphi, \quad \delta x_E = b\delta\theta = b \frac{a + b + c}{c} \delta\varphi.$$

Tổng công ảo của các lực hoạt động ứng với di chuyển ảo $\delta\varphi$:

$$\delta A = Q\delta x_C - F_2\delta x_E - F_1\delta x_D$$



$$\delta A = Q \frac{(a+b)(a+b+c)}{c} \delta\varphi - F_2 \frac{b(a+b+c)}{c} \delta\varphi - F_1 a \delta\varphi$$

Lực suy rộng:

$$Q_\varphi = Q \frac{(a+b)(a+b+c)}{c} - F_2 \frac{b(a+b+c)}{c} - F_1 a$$

Khi hệ cân bằng tại vị trí đang xét:

$$Q \frac{(a+b)(a+b+c)}{c} - F_2 \frac{b(a+b+c)}{c} - F_1 a = 0 \quad (1)$$

Giả sử rằng các lực phanh tỷ lệ với biến dạng của bánh phanh, như thế để lực phanh trên hai má bằng nhau thì chuyển vị ảo tại D và E có giá trị như nhau:

$$\delta x_D = \delta x_E, \quad a\delta\varphi = b \frac{a+b+c}{c} \delta\varphi \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+b+c}{c}. \quad (2)$$

Từ phương trình (1) với $F_1 = F_2 = F$ và (2) suy ra:

$$F = Q \frac{(a+b)(a+b+c)}{2b(a+b+c)} = Q \frac{a+b}{2b}.$$

14-9. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \beta$. Các lực hoạt động P, P và Q .

Tính tổng công ảo khi cho thanh OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\beta$ như sau:

$$\delta A = P\delta y_D - P\delta y_C - Q\delta y_B.$$

Ta có:

$$x_C = x_B = x_D$$

$$x_C = OA \sin \beta - AE + EC \cos \alpha = \text{const.}$$

Ta suy ra:

$$\delta x_C = OA \cos \beta \delta\beta - EC \sin \alpha \delta\alpha = 0 \Rightarrow \delta\alpha = \frac{OA \cos \beta}{EC \sin \alpha} \delta\beta$$

$$y_B = 2OA \cos \beta \Rightarrow \delta y_B = -2OA \sin \beta \delta\beta.$$

$$y_C = OA \cos \beta + EC \sin \alpha \Rightarrow \delta y_C = -OA \sin \beta \delta\beta + EC \cos \alpha \delta\alpha$$

$$y_D = OA \cos \beta - EC \sin \alpha \Rightarrow \delta y_D = -OA \sin \beta \delta\beta - EC \cos \alpha \delta\alpha$$

$$\delta A = [-2P \cos \beta \cot \alpha + 2Q \sin \beta] OA \delta\beta$$

Lực suy rộng:

$$Q_\beta = [-2P \cos \beta \cot \alpha + 2Q \sin \beta] OA, Q_\beta = 0 \Rightarrow Q = P \cot \alpha \cot \beta.$$

14-10. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$, là góc quay của cần OA.

Các lực hoạt động P, Q, X . Cho OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$. Từ các quan hệ hình học:

$$\delta y_A = (L_2 + a + x)\delta\varphi, \quad \delta y_C = b\delta\theta, (\delta\theta \text{ là di chuyển ảo của BC})$$

$$\delta y_B = L_1\delta\theta = \delta y_F = L_2\delta\varphi, \quad \delta\theta = (L_2 / L_1)\delta\varphi$$

$$\delta y_D = \delta y_E = e \delta\theta = \frac{eL_2}{L_1} \delta\varphi.$$

Ta tính được tổng công ảo:

$$\begin{aligned}\delta A &= P\delta y_A - Q\delta y_C - X\delta y_D \\ &= [P(L_2 + a + x) - QbL_2 / L_1 - XeL_2 / L_1]\delta\varphi\end{aligned}$$

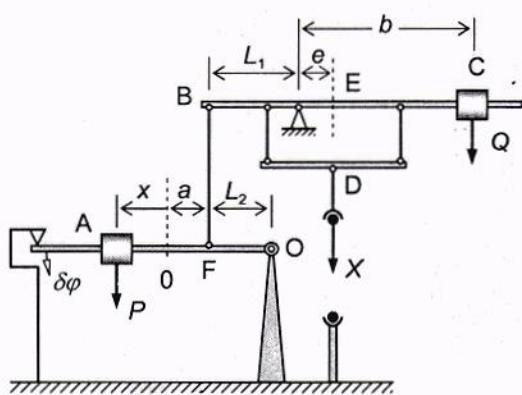
Lực suy rộng Q_φ : $Q_\varphi = P(L_2 + a + x) - QbL_2 / L_1 - XeL_2 / L_1$

Khi hệ cân bằng ở vị trí “0”: $x = 0, X = 0$, ta suy ra:

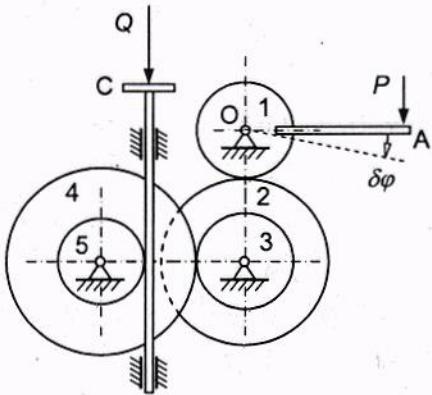
$$0 = P(L_2 + a) - QbL_2 / L_1 \Rightarrow Q = P(L_2 + a)L_1 / (bL_2).$$

Lực kéo mâu thử:

$$0 = P(L_2 + a) - Q \frac{bL_2}{L_1} + Px - X \frac{eL_2}{L_1} \Rightarrow X = \frac{PL_1}{eL_2}x.$$



Hình bài 14-10



Hình bài 14-11

14-11. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$, là góc quay của cần OA. Các lực hoạt động P, Q . Cho OA thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$. Từ các các quan hệ hình học:

$$\delta y_A = R\delta\varphi, \delta\varphi_2 = r_1\delta\varphi / r_2, \quad \delta\varphi_3 = \delta\varphi_2$$

$$\delta\varphi_4 = r_3\delta\varphi_3 / r_4 = r_3r_1 / r_2r_4\delta\varphi, \quad \delta\varphi_5 = \delta\varphi_4, \quad \delta y_C = r_5\delta\varphi_5 = r_5r_3r_1 / r_2r_4\delta\varphi,$$

ta suy ra tổng công ảo:

$$\delta A = P\delta y_A - Q\delta y_C = (PR - Qr_5r_3r_1 / r_2r_4)\delta\varphi.$$

Lực suy rộng Q_φ :

$$Q_\varphi = PR - Qr_5r_3r_1 / r_2r_4$$

Từ điều kiện cân bằng của hệ:

$$Q_\varphi = 0 \Rightarrow P = \frac{Qr_5r_3r_1}{r_2r_4R}.$$

14-12. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng φ là góc quay của cần BC. Các lực hoạt động P, Q . Cho BC thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$.

Các quan hệ hình học:

$$\delta y_C = R\delta\varphi$$

$$\delta y_D = \delta y_E = \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\delta\varphi$$

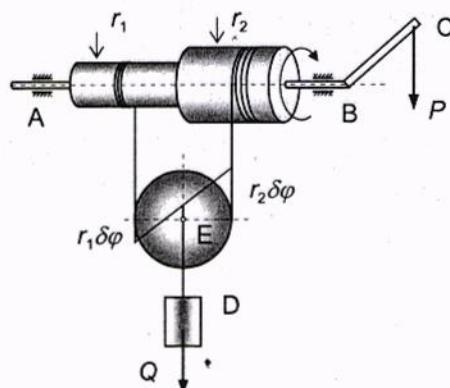
Tổng công ảo:

$$\delta A = P\delta y_C - Q\delta y_D$$

$$= \left(PR - Q \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \right) \delta\varphi$$

Lực suy rộng Q_φ :

$$Q_\varphi = PR - \frac{1}{2}Q(r_2 - r_1)$$



Từ điều kiện cân bằng của hệ:

$$Q_\varphi = 0 \Rightarrow P = Q \frac{r_2 - r_1}{2R}$$

14-13. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng φ là góc quay của cần AD. Các lực hoạt động P, Q . Vị trí của tải trọng Q trên bàn cân được xác định bởi x . Cho AD thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$.

Các quan hệ hình học:

$$\delta y_A = a\delta\varphi, \quad \delta y_C = b\delta\varphi$$

$$\delta y_D = (b + c)\delta\varphi$$

$$\delta y_H = \delta y_D, \quad \delta y_E = \delta y_C$$

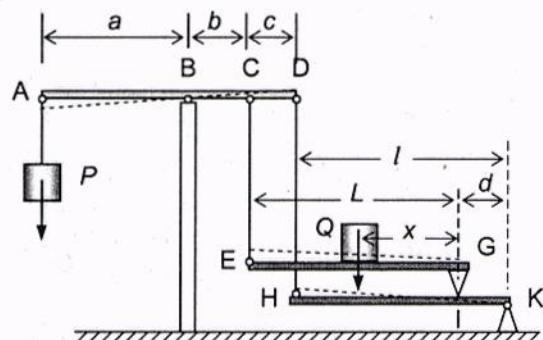
$$\delta y_I = (d/l)\delta y_H$$

$$= (b + c)(d/l)\delta\varphi$$

$$\delta y_G = \delta y_I$$

$$\delta y_Q = \delta y_G(1 - \frac{x}{L}) + \frac{x}{L}\delta y_E$$

$$= (1 - x/L)(b + c)(d/l)\delta\varphi + \frac{x}{L}b\delta\varphi.$$



Tổng công ảo:

$$\delta A = P\delta y_A - Q\delta y_Q = \left(Pa - Q \left[\frac{(b+c)d}{l} - \frac{x}{L} \frac{(b+c)d - bl}{l} \right] \right) \delta\varphi.$$

$$\text{Lực suy rộng: } Q_\varphi = Pa - Q \left[\frac{(b+c)d}{l} - \frac{x}{L} \frac{(b+c)d - bl}{l} \right]$$

Để hệ cân bằng không phụ thuộc vào vị trí đặt tải thì hệ số trước x phải bằng 0. Do

$$\text{đó ta có: } \frac{(b+c)d - bl}{l} = 0 \Rightarrow (b+c)d = bl, Q_\varphi = 0 \Rightarrow Q = P \frac{al}{(b+c)d} = P \frac{a}{b}.$$

14-14. Hệ bánh răng hành tinh một bậc tự do. Tổng công ảo của các ngẫu lực hoạt động trong di chuyển ảo $\delta\varphi_I, \delta\varphi_{IV}$ có dạng:

$$\delta A = M_1 \delta\varphi_I + M \delta\varphi_{IV}$$

Áp dụng công thức ăn khớp:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_2}{r_1}, \quad \frac{\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_{tq}} = -\frac{r_4}{r_3}$$

với $\bar{\omega}_2 \equiv \bar{\omega}_3$ do hai bánh răng cùng gắn trên 1 trục, và $\bar{\omega}_1 = 0$ do bánh 1 cố định.

Nhân hai vế hai hệ thức trên ta được:

$$\frac{-\bar{\omega}_{tq}}{\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_{tq}} = \frac{r_2}{r_1} \frac{r_4}{r_3} \Rightarrow \bar{\omega}_4 = -\left(\frac{r_1}{r_2} \frac{r_3}{r_4} - 1\right) \bar{\omega}_{tq} \Rightarrow \delta\varphi_{II} = -\left(\frac{r_1}{r_2} \frac{r_3}{r_4} - 1\right) \delta\varphi_I.$$

$$\text{Tổng công ảo: } \delta A = M_1 \delta\varphi_I - M \left(\frac{r_1}{r_2} \frac{r_3}{r_4} - 1 \right) \delta\varphi_I.$$

$$\text{Lực suy rộng: } Q_\varphi = M_1 - M \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - 1 \right).$$

$$\text{Từ điều kiện cân bằng của hệ: } Q_\varphi = 0 \Rightarrow M = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3 - r_2 r_4} M_1$$

Cuối cùng thay $r_4 = r_1 + r_2 - r_3$ vào ta nhận được:

$$M = M_1 \frac{r_2(r_1 + r_2 - r_3)}{r_1 r_3 - r_2(r_1 + r_2 - r_3)} = M_1 \frac{r_2(r_1 + r_2 - r_3)}{(r_1 + r_2)(r_3 - r_2)}.$$

14-15.

a) Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$.

$$\delta A = -QR\delta\varphi + P\delta y_C; \quad y_B = L \tan \varphi, \quad \delta y_C = \delta y_B = L \frac{\delta\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\delta A = -QR\delta\varphi + PL \frac{\delta\varphi}{\cos^2 \varphi} = \left(-QR + PL \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) \delta\varphi$$

$$Q_\varphi = \left(-QR + PL \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) = 0 \Rightarrow Q = P \frac{L}{R \cos^2 \varphi}.$$

b) Hệ 2 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là s, θ .

Tính Q_s , cho $\delta s \neq 0, \delta\theta = 0$

$$\delta A(\delta s) = P \sin \varphi \delta s + X_K \cos \varphi \delta s = (P \sin \varphi + X_K \cos \varphi) \delta s$$

$$Q_s = (P \sin \varphi + X_K \cos \varphi), \quad Q_s = 0 \Rightarrow X_K = -P \tan \varphi.$$

Tính Q_θ , cho $\delta s = 0, \delta\theta \neq 0$

$$\delta A(\delta\theta) = M_K \delta\theta + X_K BK \delta\theta = (M_K + X_K L \tan \varphi) \delta\theta, \quad BK = L \tan \varphi$$

$$Q_\theta = M_K + X_K L \tan \varphi, \quad Q_\theta = 0 \Rightarrow M_K = -X_K L \tan \varphi = PL \tan^2 \varphi$$

14-16. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$. Tổng công ảo ứng với di chuyển ảo $\delta\varphi$ có dạng:

$$\delta A = m_o(P)\delta\varphi + F\delta y_D = -PL\delta\varphi + F\delta y_D$$

có $\delta y_D = \delta y_C$; $y_C = -2a \cos \varphi \Rightarrow \delta y_C = 2a \sin \varphi \delta\varphi$

$$\delta A = (-PL + 2Fa \sin \varphi) \delta\varphi = Q_\varphi \delta\varphi; \quad Q_\varphi = (-PL + 2Fa \sin \varphi) = 0$$

Ta suy ra: $F = P \frac{L}{2a \sin \varphi}$.

14-17. Hệ 1 bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$, góc quay của cần CBA quanh bản lề B. Tổng công ảo khi AB thực hiện di chuyển ảo $\delta\varphi$ có dạng:

$$\delta A = mgs \delta\varphi - P\delta y_P$$

Do kết cấu của cần, BCDF là hình bình hành nên bàn cân CED chuyển động tịnh tiến, nên ta có $\delta y_P = \delta y_C = a\delta\varphi$. Vậy nên:

$$\delta A = mgs \delta\varphi - Pa \delta\varphi = (mgs - Pa)\delta\varphi$$

$$Q_\varphi = mgs - Pa = 0 \Rightarrow P = mgs/a.$$

14-18. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là góc quay của cần OA, $q = \varphi$. Tổng công trong di chuyển ảo $\delta\varphi$ của OA có dạng:

$$\delta A = m_o(P)\delta\varphi + N\delta y_D = -Pd\delta\varphi + N\delta y_D$$

Tính δy_D theo $\delta\varphi$, dựa vào tỷ số truyền trực vít-bánh vít và bước vít h .

Có liên hệ $\delta\theta = n^{-1}\delta\varphi$, $\delta y_D = (h/2\pi)\delta\theta$, với $\delta\theta$ là góc xoay của bánh vít B. Do đó ta nhận được:

$$\delta A = -Pd\delta\varphi + N \frac{h}{2\pi n} \delta\varphi = \left(-Pd + N \frac{h}{2\pi n} \right) \delta\varphi$$

$$Q_\varphi = -Pd + N \frac{h}{2\pi n} = 0 \Rightarrow N = \frac{2\pi n d}{h} P.$$

14-19. Hệ một bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là góc quay của cần OA, $q = \varphi$.

$$\delta A = PL \sin \varphi \delta\varphi - F_k \delta s_B, \quad \delta s_B = r\delta\varphi, \quad F_k = k r\varphi.$$

Vậy: $\delta A = [PL \sin \varphi - k r^2 \varphi] \delta\varphi$. Từ đó ta suy ra:

$$PL \sin \varphi - k r^2 \varphi = 0, \quad \sin \varphi = \frac{k r^2}{PL} \varphi \Rightarrow \varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = 1,402 \text{ rad.}$$

CHƯƠNG 15: NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT

15-1. Các lực thật tác dụng lên vật: trọng lượng P , lực căng dây T . Lực quán tính F^{qt} hướng xuống (ngược chiều gia tốc).

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}) = 0$$

Phương trình cân bằng: $-P + T - F^{qt} = 0$

Giải được: $T = P + F^{qt} = mg + ma = mg(1 + a/g)$.

15-2. Các lực quán tính của các chất điểm C và D:

$$\vec{F}_C^{qt} = -m_1 \vec{a}_C; \quad \vec{F}_D^{qt} = -m_2 \vec{a}_D$$

trị số $F_C^{qt} = m_1 e_1 \omega^2$; $F_D^{qt} = m_2 e_2 \omega^2$.

Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{F}_C^{qt}, \vec{F}_D^{qt}) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng:

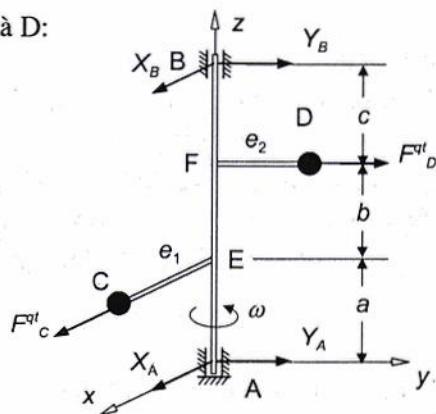
$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + F_C^{qt} = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_A + Y_B + F_D^{qt} = 0,$$

$$\sum F_{kz} = Z_A = 0$$

$$\sum m_x(\vec{F}_k) = -(a + b + c)Y_B - (a + b)F_D^{qt} = 0$$

$$\sum m_z(\vec{F}_k) = (a + b + c)X_B + aF_C^{qt} = 0$$



Ta giải được:

$$X_B = -\frac{a}{a+b+c} F_C^{qt}, \quad Y_B = -\frac{a+b}{a+b+c} F_D^{qt}$$

$$X_A = -\frac{b+c}{a+b+c} F_C^{qt}, \quad Y_A = -\frac{c}{a+b+c} F_D^{qt}, \quad Z_A = 0.$$

Lưu ý: Để tìm phản lực toàn phần ta cần bổ sung thêm trọng lượng của hai quả cầu vào hệ lực cân bằng trên.

15-3. Khi θ là hằng số, quỹ đạo của quả cầu là đường tròn tâm B, bán kính $r = L \sin \theta$. Vận tốc quả cầu không đổi thì gia tốc của nó hướng vào tâm B, và có trị số là $a = v^2/r = v^2/(L \sin \theta)$.

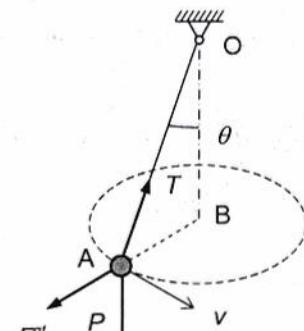
Lực quán tính của quả cầu :

$$F^{qt} = ma = mv^2/(L \sin \theta)$$

Ta có hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}) = 0$

Phương trình cân bằng:

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = PL \sin \theta - F^{qt}L \cos \theta = 0, \quad \sum F_{kz} = T \cos \theta - P = 0.$$



Hay: $mgL \sin \theta - mv^2 \cos \theta / \sin \theta = 0$, $T \cos \theta - P = 0$

Thay số vào ta giải được: $\theta = 24^\circ 2'$ và $T = 32,3$ N.

15-4. Xét hệ lực cân bằng

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}^{qt}) = 0$$

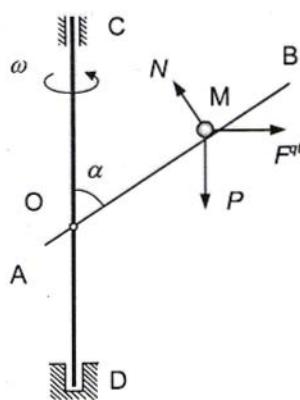
với lực quán tính: $F^{qt} = ma_M = m\omega^2 a \sin \alpha$.

Chiếu lên phương AB nhận được:

$$F^{qt} \sin \alpha - P \cos \alpha = 0$$

$$m\omega^2 a \sin \alpha \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Ta suy ra: } \omega^2 = \frac{g \cos \alpha}{a \sin^2 \alpha}.$$



15-5. Xét hệ cân bằng tương đối trong mặt phẳng khung Oxy. Coi các lực quán tính như là các lực hoạt động. Sử dụng nguyên lý công ảo để giải bài toán.

Hệ một bậc tự do. Chọn tọa độ suy rộng $q = \alpha$.

Các lực hoạt động: Các trọng lực, lực lò xo và các lực quán tính của hai quả văng.

Công ảo trong di chuyển ảo $\delta\alpha$ có dạng:

$$\begin{aligned} \delta A &= P\delta y_C + P\delta y_D + Q\delta y_Q \\ &\quad + F_{tx}\delta y_Q + F^{qt}\delta x_C - F^{qt}\delta x_D. \end{aligned}$$

Với:

$$y_C = y_D = L \cos \alpha, \quad \delta y_C = \delta y_D = -L \sin \alpha \delta\alpha$$

$$y_Q = 2L \cos \alpha, \quad \delta y_Q = -2L \sin \alpha \delta\alpha$$

$$x_C = e + L \sin \alpha = -x_D \Rightarrow \delta x_C = L \cos \alpha \delta\alpha = -\delta x_D$$

$$F_{tx} = c\Delta = c(2L - 2L \cos \alpha), \quad F^{qt} = ma_C^n = m\omega^2(e + L \sin \alpha)$$

Ta suy ra tổng công ảo:

$$\delta A = -2PL \sin \alpha \delta\alpha - 2QL \sin \alpha \delta\alpha - 2F_{tx}L \sin \alpha \delta\alpha + 2F^{qt}L \cos \alpha \delta\alpha = Q_a \delta\alpha$$

Lực suy rộng:

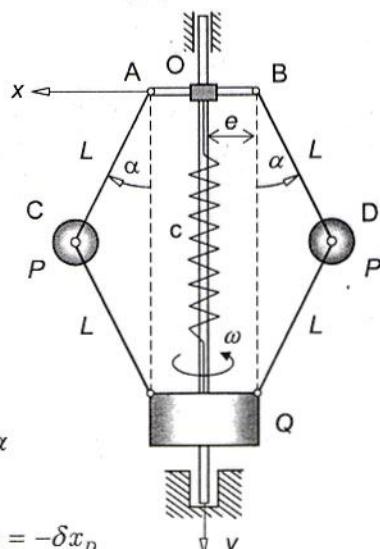
$$Q_a = 2L(F^{qt} \cos \alpha - P \sin \alpha - Q \sin \alpha - F_{tx} \sin \alpha)$$

Do hệ cân bằng tương đối nên:

$$Q_a = 0 \Rightarrow F^{qt} \cos \alpha = (P + Q + F_{tx}) \sin \alpha$$

$$m\omega^2(e + L \sin \alpha) \cos \alpha = [P + Q + 2cL(1 - \cos \alpha)] \sin \alpha$$

$$\text{Vậy: } \omega^2 = g \tan \alpha \frac{P + Q + 2cL(1 - \cos \alpha)}{P(e + L \sin \alpha)}.$$



15-6. Áp lực phụ tại hai gối đỡ là do lực quán tính của vật nặng gây nên.

Gia tốc của vật nặng hướng lên, nên lực quán tính hướng xuống và có trị số:

$$F^{qt} = ma$$

Ta có hệ lực cân bằng:

$$(\vec{F}^{qt}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{N}_D) = 0$$

Các phương trình cân bằng

$$X_C = 0, \quad Y_C - F^{qt} + N_D = 0, \quad \Sigma m_C(\vec{F}_k) = N_D L - F^{qt} L_1 = 0$$

Từ đó giải được:

$$X_C = 0, \quad N_D = F^{qt} L_1 / L, \quad Y_C = F^{qt} - N_D = F^{qt} (L - L_1) / L.$$

15-7. Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}, \vec{F}^{qt}) = 0,$$

$$P = mg, F^{qt} = ma$$

Chú ý rằng \vec{F} là tổng lực bám của các bánh xe.

Các phương trình cân bằng:

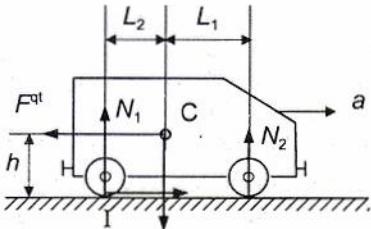
$$F - F^{qt} = 0, \quad N_1 + N_2 - P = 0,$$

$$\Sigma m_I(\vec{F}_k) = (L_1 + L_2)N_2 + hF^{qt} - L_2 P = 0$$

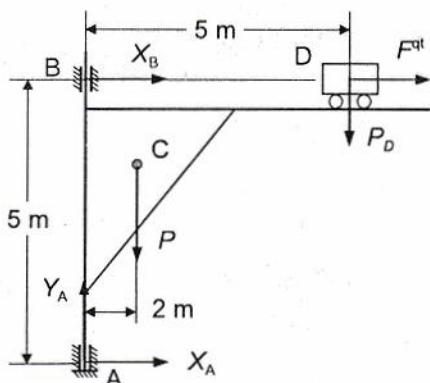
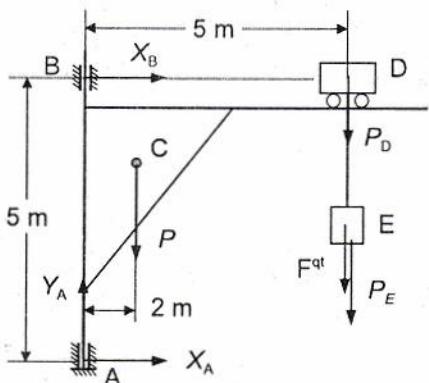
Giải được:

$$N_2 = \frac{L_2 P - hF^{qt}}{(L_1 + L_2)} = m \frac{gL_2 - ah}{L_1 + L_2}, \quad N_1 = P - N_2 = m \frac{gL_1 + ah}{L_1 + L_2}.$$

$$\text{Cho } N_2 = N_1 \text{ suy ra } m \frac{gL_2 - ah}{L_1 + L_2} = m \frac{gL_1 + ah}{L_1 + L_2} \Rightarrow a = g \frac{L_2 - L_1}{2h}.$$



15-8. Trường hợp a.



Ta có hệ lực cân bằng: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{P}, \vec{P}_D, \vec{P}_E, \vec{F}^{qt}) = 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_B = 0, \quad \Sigma F_{ky} = Y_A - P - P_D - P_E - F_E^{qt} = 0,$$

$$\Sigma m_B(\vec{F}_k) = 5X_A - 2P - 5(P_D + P_E + F_E^{qt}) = 0.$$

Trường hợp b.

Ta có hệ lực cân bằng: $(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{P}, \vec{P}_D, \vec{F}_D^{qt}) = 0$

Các phương trình cân bằng:

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_B + F_D^{qt} = 0, \quad \Sigma F_{ky} = Y_A - P - P_D = 0,$$

$$\Sigma m_B(\vec{F}_k) = 5X_A - 2P - 5P_D = 0.$$

15-9. Để tính lực quán tính của thanh AB, ta xét một phân tố khối lượng, có chiều dài ds , ở vị trí cách O một khoảng s . Khối lượng của phân tố $dm = (m / AB)ds$.

Gia tốc của phân tố: $a = \omega^2 s \sin \varphi$, do đó lực quán tính của phân tố

$$dF^{qt} = adm = \omega^2 s \sin \varphi dm.$$

Lực quán tính của thanh là một hệ lực phân bố song song theo phương ngang. Thu gọn hệ lực phân bố này về điểm O ta được một lực và một ngẫu lực:

$$F_O^{qt} = \int dF^{qt} = \frac{m}{a+b} \omega^2 \sin \varphi \int_a^b s ds$$

$$= \frac{1}{2} m(b-a) \omega^2 \sin \varphi$$

$$M_O^{qt} = \int s \cos \varphi dF^{qt} = \frac{m}{a+b} \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int_a^b s^2 ds$$

$$M_O^{qt} = \frac{1}{3} \frac{m}{a+b} (b^3 + a^3) \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{3} m(b^2 - ab + a^2) \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi.$$

Vị trí cân bằng tương đối của thanh AB tìm được bằng cách khảo sát sự cân bằng của hệ lực:

$$(\vec{P}, \vec{R}_O, \vec{F}_O^{qt}, M_O^{qt}) \equiv 0$$

Trọng lượng \vec{P} đặt ở giữa thanh, và \vec{R}_O là lực liên kết tại bản lề O. Phương trình cân bằng có dạng:

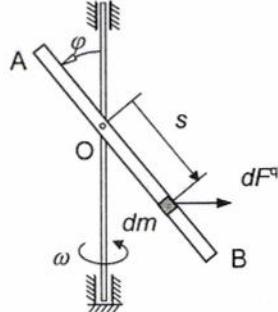
$$\Sigma m_O(\vec{F}_k) = M_O^{qt} - \frac{1}{2}(b-a)P \sin \varphi = 0$$

$$\frac{1}{3} m(b^2 - ab + a^2) \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{2}(b-a)P \sin \varphi = 0$$

$$\omega^2 = \frac{3g(b-a) \sin \varphi}{(b^2 - ab + a^2) \sin 2\varphi} \text{ hay } \cos \varphi = \frac{3g}{2\omega^2} \frac{b-a}{b^2 - ab + a^2}.$$

Lưu ý: có thể thu gọn hệ lực quán tính của từng phần OA và OB riêng rẽ về khối tâm của chúng.

15-10. Để tính lực quán tính của thanh OA, ta xét một phân tố khối lượng, có chiều dài ds , ở vị trí cách O một khoảng s . Khối lượng của phân tố $dm = \mu ds$, với μ là khối lượng riêng trên một đơn vị chiều dài.

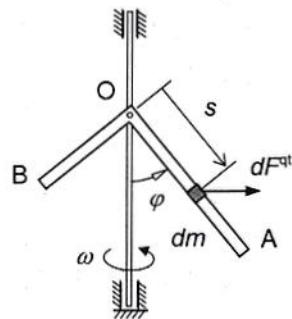


Gia tốc của phân tố: $a = \omega^2 s \sin \varphi$, lực quán tính của phân tố $dF^{qt} = adm = \omega^2 s \sin \varphi dm$.

Lực quán tính của thanh OA là một hệ lực phân bố song song theo phương ngang. Thu gọn hệ lực phân bố này về điểm O ta được một lực và một ngẫu lực:

$$F_O^{qt(OA)} = \int dF^{qt} = \mu \omega^2 \sin \varphi \int_0^a s ds = \frac{1}{2} \mu a^2 \omega^2 \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} M_O^{qt(OA)} &= \int s \cos \varphi dF^{qt} \\ &= \mu \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int_0^a s^2 ds = \frac{1}{3} \mu a^3 \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{aligned}$$



Tương tự như vậy hệ lực quán tính của phần OB khi thu về O được:

$$F_O^{qt(OB)} = \int dF^{qt} = \mu \omega^2 \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \int_0^b s ds = \frac{1}{2} \mu b^2 \omega^2 \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$$

$$\begin{aligned} M_O^{qt(OB)} &= \int s \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi) dF^{qt} \\ &= \mu \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi \int_0^b s^2 ds = \frac{1}{3} \mu b^3 \omega^2 \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \end{aligned}$$

Vị trí cân bằng tương đối của thanh AOB tìm được bằng cách khảo sát sự cân bằng của hệ lực:

$$(\vec{P}^{(OA)}, \vec{P}^{(OB)}, \vec{R}_O, \vec{F}_O^{qt(OA)}, M_O^{qt(OA)} \vec{F}_O^{qt(OA)}, M_O^{qt(OB)}) \equiv 0$$

với \vec{R}_O là lực liên kết tại bản lề O.

Phương trình cân bằng :

$$\Sigma m_O(\vec{F}_k) = M_O^{qt(OA)} - M_O^{qt(OB)} + \frac{1}{2} b P^{(OB)} \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) - \frac{1}{2} a P^{(OA)} \sin \varphi = 0$$

Lưu ý rằng $P = \mu L g$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \mu a^3 \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi - \frac{1}{3} \mu b^3 \omega^2 \cos(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) \\ + \frac{1}{2} b \mu b g \sin(\frac{1}{2}\pi - \varphi) - \frac{1}{2} a \mu a g \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Hay: $\frac{1}{3} \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi (a^3 - b^3) + \frac{1}{2} g(b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi) = 0$

$$\omega^2 = -\frac{3g(b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi)}{2 \cos \varphi \sin \varphi (a^3 - b^3)} = \frac{3g(b^2 \cos \varphi - a^2 \sin \varphi)}{(b^3 - a^3) \sin 2\varphi}.$$

15-11. Lực xé vật liệu bằng lực quán tính của phần chi tiết bị cắt

$$S = F^{qt} = m_c a_c, \quad \text{với } m_c = \frac{m}{L} (L - x), \quad a_c = [x + \frac{1}{2} (L - x)] \omega^2$$

$$\text{Vậy: } S = \frac{m}{2L} (L - x)(L + x) \omega^2 = \frac{m}{2L} (L^2 - x^2) \omega^2.$$

Lực xé lớn nhất tại vị trí $x = 0$ và $S_{\max} = \frac{1}{2} mL\omega^2$.

15-12. Lực xé vật liệu bằng lực quán tính của phần chi tiết bị cắt

$$S = F^{qt} = m_c a_C, \text{ với } m_c = \frac{1}{2} m, \quad a_C = \frac{1}{2} a\omega^2$$

Vậy ta có: $S = \frac{1}{4} ma\omega^2$.

15-13. Lực xé vật liệu bằng lực quán tính của phần chi tiết bị cắt

$$S = F^{qt} = m_c a_C, \text{ với } m_c = \frac{1}{2} m, \quad a_C = \frac{4R}{3\pi} \omega^2, \text{ (khoảng cách từ}$$

đường kính đến khối tâm của nửa đĩa đồng chất là $x_C = 4R / 3\pi$).

Vậy: $S = \frac{2}{3\pi} mR\omega^2$.

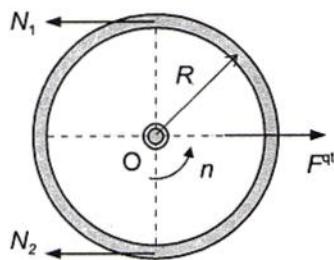
15-14. Tưởng tượng cắt ra và xét cân bằng của bánh đà (coi như vành) dưới tác dụng của các lực xé N_1, N_2 và lực quán tính:

$$F^{qt} = m_c a_C,$$

với $m_c = \frac{1}{2} m, a_C = \frac{2R}{\pi} \omega^2, \omega = \frac{1}{30} \pi n$ (khoảng cách từ đường kính đến khối tâm của nửa vành tròn đồng chất là $x_C = 2R / \pi$).

Vậy $F^{qt} = \frac{1}{\pi} mR\omega^2 = \frac{1}{900} mR\pi n^2$

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} F^{qt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{900} mR\pi n^2.$$



15-15. Thanh AD chuyển động tịnh tiến quỹ đạo tròn. Có thể coi BE là liên kết thanh, còn C là liên kết bản lề (do có ngẫu lực tác dụng lên CF làm cơ cấu chuyển động).

Hệ lực cân bằng

$$(\vec{P}, \vec{S}_{BE}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{F}^{qt}) \equiv 0,$$

với $F^{qt} = ma_C = mL\omega^2 = mL(\frac{1}{30} \pi n)^2$.

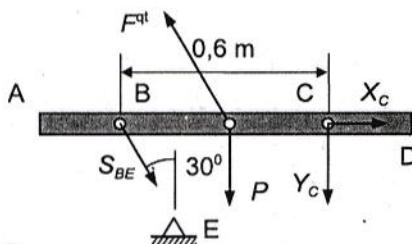
Các phương trình cân bằng:

$$\Sigma F_{kx} = S_{BE} \cos 60^\circ + X_C - F^{qt} \cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = F^{qt} \sin 60^\circ - S_{BE} \sin 60^\circ - P - Y_C = 0,$$

$$\Sigma m_B(\vec{F}_k) = 0,3F^{qt} \sin 60^\circ - 0,3P - 0,6Y_C = 0$$

Ta giải được:



$$Y_C = \frac{0,3F^{qt} \sin 60^\circ - 0,3P}{0,6} = \frac{F^{qt} \sin 60^\circ - P}{2}$$

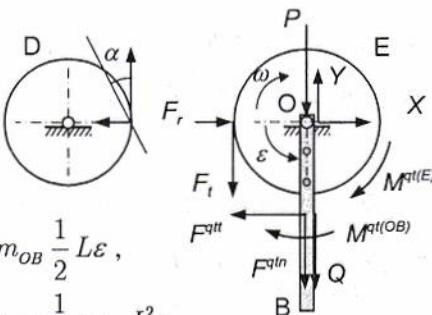
$$S_{BE} = F^{qt} - \frac{P + Y_C}{\sin 60^\circ}, \quad X_C = F^{qt} \cos 60^\circ - S_{BE} \cos 60^\circ.$$

15-16. Tách và xét cân bằng của bánh răng E:

- các trọng lượng: \vec{P}, \vec{Q} ;
- phản lực ở trục O: \vec{X}, \vec{Y} ;
- lực ăn khớp: \vec{F}_t, \vec{F}_r ;
- các lực và ngẫu lực quán tính:

$$F^{qtn} = m_{OB} a_C^n = m_{OB} \frac{1}{2} L \omega^2, \quad F^{qtt} = m_{OB} a_C^t = m_{OB} \frac{1}{2} L \varepsilon,$$

$$M^{qt(E)} = J_O^{(E)} \varepsilon = m_E \rho_E^2 \varepsilon, \quad M^{qt(OB)} = J_C^{(OB)} \varepsilon = \frac{1}{12} m_{OB} L^2 \varepsilon.$$



Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{F}_t, \vec{F}_r, \vec{F}^{qtn}, \vec{F}^{qtt}, M^{qt(E)}, M^{qt(OB)}) \equiv 0$$

Các phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = F_r + X - F^{qtt} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y - F^{qtn} - P - Q - F_t = 0,$$

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = R_E F_t - \frac{1}{2} L F^{qtt} - M^{qt(E)} - M^{qt(OB)} = 0$$

Lưu ý rằng quan hệ giữa hai lực F_t và F_r của lực ăn khớp: $F_r = F_t \tan \alpha$.

Từ đó giải được:

$$F_t = (m_E \rho_E^2 + \frac{1}{3} m_{OB} L^2) \varepsilon / R_E, \quad X = F^{qtt} - F_r$$

$$Y = F^{qtn} + P + Q + F_t, \quad F^{qtn} = \frac{1}{2} m_{OB} L \omega^2, \quad F^{qtt} = \frac{1}{2} m_{OB} L \varepsilon.$$

15-17. Tách và xét cân bằng cho từng vật.

Vật 1: $(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}_1^{qt}) \equiv 0$

Vật 2: (quay quanh trục cố định)

$$(\vec{P}_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{T}_1, \vec{T}_2, M_2^{qt}) \equiv 0$$

Vật 3: (chuyển động song phẳng)

$$(\vec{P}_3, \vec{T}_2, \vec{N}_3, \vec{F}_3^{qt}, M_3^{qt}) \equiv 0$$

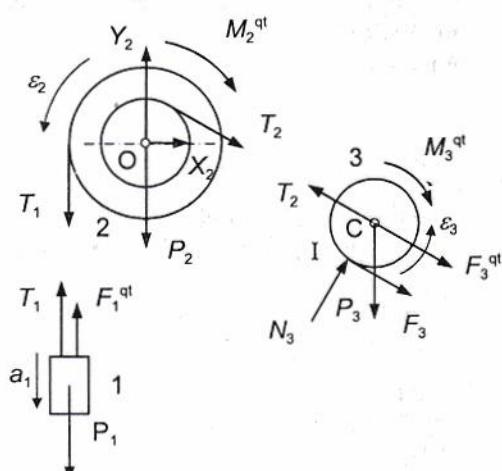
Các quan hệ động học:

$$\varepsilon_2 = a_1 / R, \text{ ngược chiều kim đồng hồ.}$$

$$\varepsilon_3 = r \varepsilon_2 / r = \varepsilon_2 = a_1 / R,$$

ngược chiều kim đồng hồ.

$$a_{C3} = r \varepsilon_2 = a_1 r / R, \text{ chiều hướng lên.}$$



Các lực và ngũ lực quán tính:

$$F_1^{qt} = m_1 a_1 = P_1 a_1 / g$$

$$F_3^{qt} = m_3 a_{C3} = P_3 r \varepsilon_2 / g = P_3 a_1 r / (gR)$$

$$M_2^{qt} = J \varepsilon_2 = J a_1 / R, \quad M_3^{qt} = J_C \varepsilon_3 = \frac{1}{2} P_3 r^2 a_1 / (gR).$$

Các phương trình cân bằng:

Vật 1: $-P_1 + T_1 + F_1^{qt} = 0 \Rightarrow T_1 = P_1 - F_1^{qt} = P_1(1 - a_1 / g)$

Vật 2: Vật 3:

$$\sum F_{kx} = X_2 + T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = P_3 \sin \alpha - T_2 + F_3^{qt} = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_2 - P_2 - T_1 - T_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = -P_3 \cos \alpha + N_3 = 0$$

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = RT_1 - rT_2 - M_2^{qt} = 0$$

$$\sum m_C(\vec{F}_k) = rF_3^{qt} - M_3^{qt} = 0$$

Từ đó ta giải được các ẩn: X_2, Y_2, T_2, N_3, F_3 .

15-18. Xét cần đẩy chuyển động tịnh tiến, đặt các lực hoạt động, các lực liên kết và lực quán tính. Biến dạng lò xo:

$$\Delta = R - e(1 - \sin \varphi)$$

Lực lò xo: $F_{lx} = c\Delta = c[R - e(1 - \sin \varphi)]$

Gia tốc cần đẩy: $a = \ddot{y}$

$$y = R + e \sin \varphi = R + e \sin \omega t$$

$$\ddot{y} = -e\omega^2 \sin \omega t, \quad \omega = \frac{1}{30} \pi n$$

Lực quán tính:

$$F^{qt} = m\ddot{y} = -me\omega^2 \sin \omega t$$

Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{lx}, \vec{F}^{qt}, \vec{N}_1, \vec{N}_2) \equiv 0$$

Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{ky} = P - N - F_{lx} - F^{qt} = 0$$

$$N = c[R - e(1 - \sin \omega t)] - me\omega^2 \sin \omega t - mg.$$

15-19. Xét tại thời điểm tác dụng lực F , vận tốc góc thanh $\omega = 0$ và gia tốc góc $\varepsilon \neq 0$ thuận chiều kim đồng hồ.

Đặt các lực hoạt động, các lực liên kết và lực quán tính.

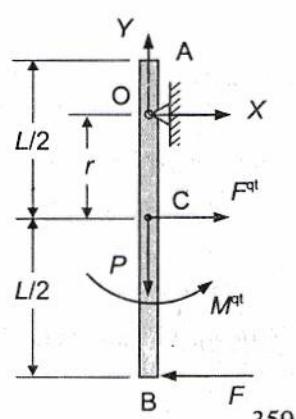
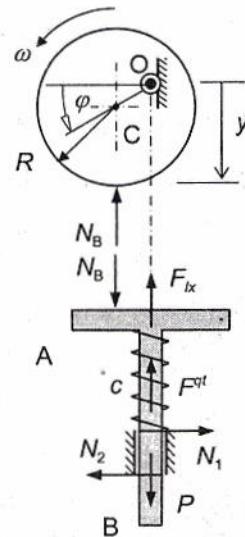
Lực quán tính đặt tại khối tâm C:

$$F^{qt} = F_t^{qt} = ma_C^t = mr\varepsilon$$

Ngũ lực quán tính: $M^{qt} = J_C \varepsilon = \frac{1}{12} mL^2 \varepsilon$

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{F}, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{F}^{qt}, M^{qt}) \equiv 0$

Phương trình cân bằng:



$$\sum F_{kx} = X + F^{qt} - F = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y - P = 0$$

$$\sum m_O(\vec{F}_k) = M^{qt} - (r + \frac{1}{2}L)F + rF^{qt} = 0$$

Thay các giá trị trên vào được:

$$(\frac{1}{12}mL^2 + mr^2)\varepsilon = (r + \frac{1}{2}L)F \Rightarrow \varepsilon = F \frac{(r + \frac{1}{2}L)}{m(\frac{1}{12}L^2 + r^2)} = \frac{36Fg}{7PL}$$

$$Y = P, X = F - mrv = 0$$

Để lực liên kết $X = 0$:

$$X = F - mrv = F - F \frac{mr(r + \frac{1}{2}L)}{m(\frac{1}{12}L^2 + r^2)} = F \frac{\frac{1}{12}L^2 - \frac{1}{2}rL}{\frac{1}{12}L^2 + r^2}$$

$$\frac{1}{12}L^2 - \frac{1}{2}rL = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{6}L$$

$$\text{Hay là: } OA = \frac{1}{3}L, OB = \frac{2}{3}L.$$

15-20. Ta có: $v^2 = v_0^2 - 2ax \Rightarrow 0 = (9,14)^2 - 2a \times 6,1 \Rightarrow a = 6,85 \text{ m/s}^2$.

Hệ lực gồm: lực hoạt động, lực liên kết và lực quán tính:

$$(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{F}_A, \vec{R}^{qt}, \vec{N}_B, \vec{F}_B) \equiv 0, \text{hệ lực phẳng tổng quát.}$$

Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = F^{qt} - F_A - F_B = 0$$

$$\sum F_{ky} = -P + N_A + N_B = 0$$

$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = -L_1P - hF^{qt} + L_2N_B = 0$$

với $F_A = fN_A; F_B = fN_B$.

Giải hệ trên với số liệu đã cho ta được :

$$f = 0,699; N_A = 0,350P; N_B = 0,650P;$$

$$F_A = 0,245P; F_B = 0,454P.$$

Suy ra lực liên kết tại mỗi bánh sau (N_s) và mỗi bánh trước (N_t)

$$N_s = N_A / 2 = 0,175P; N_t = N_B / 2 = 0,325P.$$

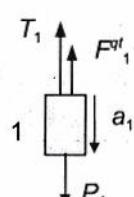
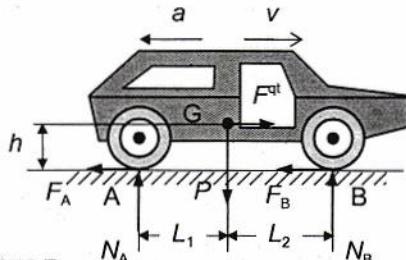
và lực ma sát là: $F_s = F_A / 2 = 0,122P; F_t = F_B / 2 = 0,227P$.

15-21. Ta tách hệ ra làm 3 vật và xét riêng chuyển động của từng vật.

Xét vật 1

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}_1, \vec{T}_1, \vec{F}_1^{qt}) \equiv 0$

Phương trình cân bằng: $\sum F_{ky} = -P_1 + T_1 + F_1^{qt} = 0$



Giải phương trình trên ta được lực căng của nhánh dây 1 là :

$$T_1 = P_1 - F_1^{qt} = P_1 - P_1 a_1 / g = P_1(1 - a_1 / g).$$

Xét đĩa 2

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}_2, \vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{X}_o, \vec{Y}_o, \vec{M}_o^{qt}) \equiv 0$

Phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = X_o - T_2 \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = Y_o - P_2 - T_1 - T_2 \cos \alpha = 0$$

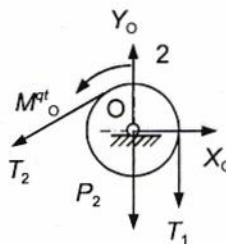
$$\sum m_O(\vec{F}_k) = T_2 r - T_1 r + M_o^{qt} = 0$$

Giải các phương trình trên với:

$$M_o^{qt} = I_O \varepsilon_2 = \frac{P_2 r^2}{2g} \cdot \frac{a_1}{r} = \frac{P_2 r}{2g} a_1$$

$$\text{Ta được: } T_2 = \frac{M_o^{qt}}{r} + T_1 = \frac{P_2 a_1}{2g} + P_1(1 - a_1 / g) = P_1 + \frac{2P_1 + P_2}{2g} a_1.$$

$$X_o = T_2 \cos \alpha, Y_o = P_2 + T_1 + T_2 \sin \alpha.$$



Xét đĩa 3

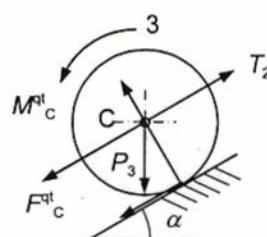
Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}_3, \vec{T}_2, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, \vec{F}_C^{qt}, \vec{M}_C^{qt}) \equiv 0$.

Phương trình cân bằng (x theo mặt phẳng nghiêng):

$$\sum F_{kx} = T_2 - F_C^{qt} - F_{ms} = 0$$

Giải phương trình trên ta được :

$$F_{ms} = T_2 - F_C^{qt} = T_2 - P_3 / 3.$$



15-22. Khảo sát cơ hệ gõm trục quay DC và quả cầu nhỏ B được coi như chất điểm.

Các lực tác dụng lên quả cầu B gồm: trọng lượng P , lực căng dây T . Lực quán tính của quả cầu nhỏ B được tính:

$$\vec{F}_B^{qt} = -m_B \vec{a}_B,$$

với trị số $F_B^{qt} = m(e + L \sin \theta) \omega^2$.

Theo nguyên lý d'Alembert, ta có một hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}_B^{qt}) = 0$$

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực trên ta được:

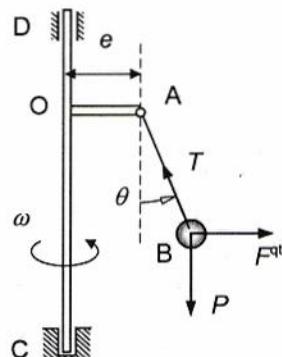
$$\sum \bar{m}_A(\vec{F}_k) = PL \sin \theta - F_B^{qt} L \cos \theta = 0$$

$$\text{hay: } mgL \sin \theta - m(e + L \sin \theta) \omega^2 L \cos \theta = 0$$

Từ đó ta tìm được quan hệ giữa tốc độ quay của trục CD và góc lệch của dây AB:

$$\omega^2 = \frac{g \sin \theta}{(e + L \sin \theta) \cos \theta}.$$

Nhận xét: Quan hệ trên cho phép ta tính được vận tốc góc của trục bằng cách đo góc lệch θ .



15-23. Chọn hệ trục xyz gắn chặt với vật quay, trục z nằm dọc DC.

Lực quán tính thu gọn của các đĩa:

$$\vec{F}_A^{qt} = -m_1 \vec{a}_A; \quad \vec{F}_B^{qt} = -m_2 \vec{a}_B,$$

có trị số $F_A^{qt} = m_1 e_1 \omega^2; \quad F_B^{qt} = m_2 e_2 \omega^2$.

Hệ lực cân bằng: $(\vec{X}_C^d, \vec{Y}_C^d, \vec{X}_D^d, \vec{Y}_D^d, \vec{Z}_D^d, \vec{F}_A^{qt}, \vec{F}_B^{qt}) \equiv 0$

Viết các phương trình cân bằng:

$$\Sigma F_{kx} = X_D^d + X_C^d + F_B^{qt} = 0,$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_D^d + Y_C^d + F_A^{qt} = 0,$$

$$\Sigma F_{kz} = Z_D^d = 0,$$

$$\Sigma \bar{m}_x (\vec{F}_k) = -(d+b+c) Y_C^d - (d+b) F_A^{qt} = 0$$

$$\Sigma \bar{m}_y (\vec{F}_k) = (d+b+c) X_C^d + d F_B^{qt} = 0$$

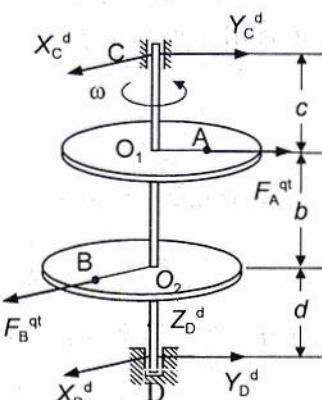
Giải hệ phương trình trên nhận được:

$$X_C^d = -\frac{b}{d+b+c} m_2 e_2 \omega^2; \quad Y_C^d = -\frac{d+b}{d+b+c} m_1 e_1 \omega^2$$

$$X_D^d = -\frac{d+b}{d+b+c} m_2 e_2 \omega^2; \quad Y_D^d = -\frac{c}{d+b+c} m_1 e_1 \omega^2;$$

$$Z_D^d = 0.$$

Nhận xét: Muốn triệt tiêu các lực liên kết động tại các ống trục, trục quay CD phải di qua khối tâm của các đĩa, tức là $e_1 = e_2 = 0$.



CHƯƠNG 16: NGUYÊN LÝ D'ALEMBERT-LAGRANGE PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI 2

16-1. Hệ hai bậc tự do, chọn tọa độ suy rộng là $q = [s_A, s_B]^T$ là các di chuyển của A và B trên mặt nghiêng về phía trên.

Động năng:

$$T = \frac{1}{2}m_A\dot{s}_A^2 + \frac{1}{2}m_B\dot{s}_B^2 + \frac{1}{2}m_C\dot{s}_C^2, \quad \dot{s}_C = \frac{1}{2}(\dot{s}_A + \dot{s}_B)$$

Tính tổng công ảo khi cho hệ thực hiện di chuyển ảo $\delta s_A, \delta s_B$:

$$\delta A = -m_A g \sin \alpha \delta s_A - m_B g \sin \beta \delta s_B + m_C g \delta s_C, \quad \delta s_C = \frac{1}{2}(\delta s_A + \delta s_B)$$

$$\delta A = \left(\frac{1}{2}m_C - m_A \sin \alpha \right) g \delta s_A + \left(\frac{1}{2}m_C - m_B \sin \beta \right) g \delta s_B$$

Các lực suy rộng:

$$Q_1 = \left(\frac{1}{2}m_C - m_A \sin \alpha \right) g, \quad Q_2 = \left(\frac{1}{2}m_C - m_B \sin \beta \right) g$$

Thay vào phương trình Lagrange loại 2, ta nhận được phương trình vi phân chuyển động. Từ đó ta giải được:

$$\ddot{s}_A, \ddot{s}_B \Rightarrow a = \ddot{s}_C = \frac{1}{2}(\ddot{s}_A + \ddot{s}_B).$$

16-2. Biểu thức động năng hệ và thế năng:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[\dot{z}^2 + (l+z)^2\dot{\phi}^2], \quad \Pi = \frac{1}{2}cz^2 - mg(l+z)\cos\varphi.$$

16-3. Tính biểu thức động năng

$$T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2v_B^2$$

$$X = l \cos \varphi \Rightarrow \dot{X} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi; \quad Y = x + l \sin \varphi \Rightarrow \dot{Y} = \dot{x} + l\dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$v_B^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2\dot{\varphi}^2$$

Thay vào và rút gọn ta nhận được biểu thức động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2$$

$$\text{Biểu thức thế năng: } \Pi = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}cz^2 - m_2gl \cos \varphi.$$

Lực suy rộng của các lực có thể:

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -2cx, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -m_2gl \sin \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động :

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \cos \varphi \ddot{\varphi} - m_2 l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + 2cx = 0$$

$$m_2 l \cos \varphi \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 g l \sin \varphi = 0.$$

Hệ bảo toàn, ta có tích phân năng lượng:

$$T + \Pi = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2}m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + cx^2 - m_2 g l \cos \varphi = C_1.$$

16-5. Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v^2, \quad J_z = PR^2 / g, \quad m = Q / g$$

$$\bar{v} = \bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r, \quad v_e = R\dot{\theta}, \quad v_r = \dot{s}$$

$$v^2 = (R\dot{\theta} - \dot{s} \cos \gamma)^2 + (\dot{s} \sin \gamma)^2 = R^2 \dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{s} \cos \gamma + \dot{s}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{Q}{g} R\dot{\theta}\dot{s} \cos \gamma + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \dot{s}^2$$

Biểu thức thế năng:

$$\Pi = Qs \tan \gamma, \quad \tan \gamma = h / 2\pi R$$

Phương trình vi phân chuyển động

$$\frac{P+Q}{g} R^2 \ddot{\theta} - \frac{Q}{g} R\ddot{s} \cos \gamma = 0, \quad -\frac{Q}{g} R\ddot{\theta} \cos \gamma + \frac{Q}{g} \ddot{s} = Q \tan \gamma$$

$$\text{hay: } (P+Q)R^2 \ddot{\theta} - QR\ddot{s} \cos \gamma = 0, \quad -QR\ddot{\theta} \cos \gamma + Q\ddot{s} = gQ \tan \gamma.$$

từ đó giải được $\ddot{\theta}$ và \ddot{s} .

16-6. Tính động năng của hệ:

$$T_1 = \frac{1}{2} MR^2 \dot{\theta}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} mv_c^2 + \frac{1}{2} J_c \psi^2,$$

$$v_c = (R-r)\dot{\phi}, \quad v_A = v_c + v_{AC}, \quad v_A = R\dot{\theta}, \quad v_{AC} = r\dot{\psi},$$

$$R\dot{\theta} = (R-r)\dot{\phi} + r\dot{\psi} \rightarrow \dot{\psi} = \frac{R\dot{\theta} + (R-r)\dot{\phi}}{r}$$

$$T_2 = \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} mR(r-R)\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{1}{4} mR^2 \dot{\theta}^2.$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3}{4} m(R-r)^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} mR(r-R)\dot{\phi}\dot{\theta} + \frac{1}{4} (2M+m)R^2 \dot{\theta}^2$$

Thế năng của hệ:

$$\Pi = -(R-r)m \cos \varphi$$

$$\text{Các lực suy rộng: } Q_\theta = 0, \quad Q_\varphi = -(R-r)mg \sin \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ như sau:

Hay:

$$(2M+m)R^2 \ddot{\theta} - mR(R-r)\ddot{\phi} = 0; \quad -R\ddot{\theta} + 3(R-r)\ddot{\phi} = -2g \sin \varphi.$$

Các tích phân đầu:

- Hệ bảo toàn nên ta có tích phân năng lượng $T + \Pi = \text{const} = C_1$.
- Tọa độ θ là tọa độ xyclic ($Q_\theta = 0, \partial T / \partial \theta = 0$) nên ta có tích phân xyclic

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \text{const} = C_2.$$

16-7. Cơ hệ có hai bậc tự do. Động năng của cơ hệ được tính theo công thức:

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} m v_B^2,$$

với: $\omega = \dot{\phi}; v_B^2 = (R^2 + l^2 + 2Rl \cos \theta) \dot{\phi}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l(l + R \cos \theta) \dot{\phi} \dot{\theta}$.

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} M + m \right) R^2 + ml(l + 2R \cos \theta) \right] \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + ml(l + R \cos \theta) \dot{\phi} \dot{\theta}.$$

Các lực suy rộng :

$$Q_\phi = -mg[R \sin \varphi + l \sin(\varphi + \theta)] + \mathcal{M}, \quad Q_\theta = -mgl \sin(\varphi + \theta).$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{2} M + m \right) R^2 + ml(l + 2R \cos \theta) \right] \ddot{\phi} + ml(l + R \cos \theta) \ddot{\theta} - 2mRl \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \\ & - mRl \dot{\theta}^2 \sin \theta + mg[R \sin \varphi + l \sin(\varphi + \theta)] = \mathcal{M} \\ & (l + R \cos \theta) \ddot{\phi} + l \ddot{\theta} + R \dot{\phi}^2 \sin \theta + lg \sin(\varphi + \theta) = 0. \end{aligned}$$

16-8. Biểu thức động năng và thế năng của cơ hệ :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} c(x_2 - x_1 - l)^2.$$

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ :

$$m_1 \ddot{x}_1 + c(x_2 - x_1 - l) = 0, \quad m_2 \ddot{x}_2 - c(x_2 - x_1 - l) = 0$$

Giải hệ phương trình vi phân với các điều kiện đầu $t = 0$:

$$x_1 = 0, \dot{x}_1 = u_0, x_2 = l, \dot{x}_2 = 0$$

Từ hai phương trình trên suy ra:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= (c/m_1)(x_2 - x_1 - l), \quad \ddot{x}_2 = -(c/m_2)(x_2 - x_1 - l) = 0 \\ \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 &= -(c/m_1 + c/m_2)(x_2 - x_1 - l) \end{aligned}$$

Đặt $y = x_2 - x_1$,

$$\ddot{y} + k^2 y = k^2 l, \quad y(0) = l, \dot{y}(0) = -u_0 \quad \text{giải được } y(t) = l - (u_0/k) \sin kt.$$

Thay vào phương trình của \ddot{x}_1 được :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{c}{m_1} (u_0 \sin kt), \quad x_1 = 0, \dot{x}_1 = u_0, \quad \text{ta giải được } x_1(t) \text{ và suy ra } x_2(t).$$

16-9. Biểu thức động năng của cơ hê

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_s^2;$$

$$\bar{\omega}_s = -\frac{R-r}{r} \dot{\varphi}, J_C = \frac{1}{2} m_2 r^2, v_C^2 = \dot{x}^2 + (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + 2(R-r)\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi;$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m_2 (R-r)^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 (R-r) \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi$$

Biểu thức của các lực suy rộng :

$$Q_x = F - cx - b\dot{x}; \quad Q_\varphi = -m_2 g (R-r) \sin \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hê :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x} + [m_2 (R-r) \cos \varphi] \ddot{\varphi} - m_2 (R-r) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = F(t) - b\dot{x} - cx$$

$$(m_2 \cos \varphi) \ddot{x} + 1,5 m_2 (R-r) \ddot{\varphi} + m_2 g \sin \varphi = 0.$$

16-11. Tính biểu thức động năng.

$$T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_B^2$$

$$v_B^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2.$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\varphi}^2$$

Biểu thức thế năng:

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2 + \frac{1}{2} cx^2 - m_2 gl \cos \varphi.$$

16-12. Tìm biểu thức động năng của thanh theo định nghĩa

$$T = \frac{1}{2} \int v^2 dm$$

Xét phân tố thanh nằm cách A một đoạn bằng s :

$$\text{Khối lượng phân tố : } dm = \frac{m}{l} ds$$

Vị trí của phân tố trong hệ cố định :

$$x = (l-s) \sin \varphi \cos \theta, \quad y = (l-s) \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = (l-s) \cos \varphi$$

Vận tốc :

$$\dot{x} = (l-s)\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \theta - (l-s)\dot{\theta} \sin \varphi \sin \theta$$

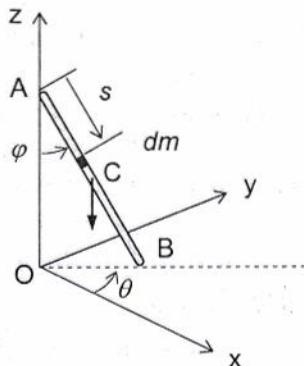
$$\dot{y} = (l-s)\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + (l-s)\dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta$$

$$\dot{z} = -\dot{\varphi}(l-s) \sin \varphi$$

$$v^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (l-s)^2 \dot{\varphi}^2 + (l-s)^2 (1 - \cos^2 \varphi) \dot{\theta}^2$$

Động năng của thanh :

$$T = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \int_0^l v^2 ds, \quad T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} ml^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\theta}^2$$



Thể năng: $\Pi = mgl \cos \varphi$

Hệ bảo toàn nên có tích phân năng lượng; Tọa độ θ là tọa độ xyclic nên có tích phân xyclic.

16-13. Động năng của thanh AB (xem bài 16-12).

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 (1 - \cos^2 \varphi) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} ml^2 \sin^2 \varphi\right) \dot{\theta}^2$$

$$\text{Động năng hệ: } T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + T_{AB} = \frac{1}{2} \left(J + \frac{1}{3} ml^2 \sin^2 \varphi\right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} ml^2 \dot{\varphi}^2.$$

$$\text{Thể năng hệ: } \Pi = mgl \cos \varphi + \frac{1}{2} c \Delta^2, \quad \Delta = l(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Lực suy rộng của các lực không thể:

$$Q_\theta^* = M, \quad Q_\varphi^* = 0.$$

16-14.

Biểu thức động năng của hệ:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} (J_1 + m_1 a^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2$$

$$x_2 = u \cos \varphi \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{u} \cos \varphi - u \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$y_2 = u \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{u} \sin \varphi + u \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{u}^2 + u^2 \dot{\varphi}^2$$

Ta nhận được:

$$T = \frac{1}{2} (J_1 + J_2 + m_1 a^2 + m_2 u^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}^2 = \frac{1}{2} (J + m_2 u^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}^2,$$

với: $J = J_1 + J_2 + m_1 a^2 = \text{const.}$

Biểu thức thể năng: $\Pi = (m_1 a + m_2 u) g \sin \varphi$.

Lực suy rộng của các lực không thể: (gồm ngẫu lực và lực điều khiển)

$$Q_u^* = F(t), \quad Q_\varphi^* = M(t).$$

Phương trình vi phân chuyển động cơ hệ có dạng:

$$m_2 \ddot{u} - m_2 u \dot{\varphi}^2 = F(t) - m_2 g \sin \varphi$$

$$(J + m_2 u^2) \ddot{\varphi} + 2m_2 u \dot{u} \dot{\varphi} = M(t) - (m_1 a + m_2 u) g \cos \varphi.$$

16-15. Hệ có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng: $q_1 = \theta$ là góc quay của trục máy, $q_2 = \varphi$ là góc lệch của các thanh O₁A, O₂B so với phương đứng.

Tính biểu thức động năng:

Động năng hai quả văng (coi chuyển động của quả văng là tổng hợp của hai chuyển động: chuyển động theo cùng khung với vận tốc góc là $\dot{\theta}$, $v_e = (e + L \sin \varphi) \dot{\theta}$; chuyển động tương đối trong mặt phẳng khung, $v_r = L \dot{\varphi}$. Hai véctơ vận tốc này vuông góc với nhau):

$$T_A = T_B = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_e^2 + v_r^2), \quad m_1 = P / g$$

$$T_A = T_B = \frac{1}{2} m_1 [(e + L \sin \varphi)^2 \dot{\theta}^2 + L^2 \dot{\varphi}^2]$$

Động năng của đối trọng Q (chuyển động của đối trọng là chuyển động định ốc)

$$T_Q = \frac{1}{2} m_2 v_z^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \quad m_2 = Q / g, \quad v_z = \frac{d}{dt} 2L \cos \varphi = -2L \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$T_Q = \frac{1}{2} m_2 (2L \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2.$$

Tính tổng và rút gọn ta nhận được biểu thức động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} [J + 2m_1(e + L \sin \varphi)^2] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} [2m_1 L^2 + 4m_2 L^2 \sin^2 \varphi] \dot{\varphi}^2$$

Biểu thức thể năng của hệ: Độ biến dạng của lò xo $\Delta = (2L - 2L \cos \varphi)$, ta suy ra:

$$\Pi = 2cL^2(1 - \cos \varphi)^2 - 2gL(m_1 + m_2) \cos \varphi.$$

Lực suy rộng có dạng:

$$Q_\theta = M, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -4cL^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi - 2gL(m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động có dạng:

$$[J + 2m_1(e + L \sin \varphi)^2] \ddot{\theta} + 4m_1 L \dot{\theta} \dot{\varphi} (e + L \sin \varphi) \cos \varphi = M$$

$$[2m_1 L^2 + 4m_2 L^2 \sin^2 \varphi] \ddot{\varphi} + 4m_2 L^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - 2m_1 L \dot{\theta}^2 (e + L \sin \varphi) \cos \varphi$$

$$= -4cL^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi - 2gL(m_1 + m_2) \sin \varphi.$$

Nhận xét: Phương trình vi phân chuyển động trên nhận một nghiệm riêng, đó là chế độ làm việc của máy điều tiết:

$$\dot{\theta} = \text{const}, \quad \varphi = \text{const} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Từ phương trình thứ hai ta suy ra:

$$2m_1 L \dot{\theta}^2 (e + L \sin \varphi) \cos \varphi = 4cL^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi + 2gL(m_1 + m_2) \sin \varphi$$

$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{[2cL(1 - \cos \varphi) + g(m_1 + m_2)] \tan \varphi}{m_1(e + L \sin \varphi)}.$$

16-16. Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 v_C^2 + J_C \omega^2), \quad v_C = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \quad \omega = \dot{x}_2 / r, \quad J_C = \frac{1}{2} m_2 r^2$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{3}{4} m_2 \dot{x}_2^2$$

Thể năng của hệ:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - l)^2$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_1x_1 = 0, \quad m_2\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}m_2\ddot{x}_2 + c(x_2 - l) = 0..$$

16-17. Biểu thức động năng và thế năng của hệ

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)x^2 + m_2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + \frac{1}{2}(J_C + m_2l^2)\dot{\phi}^2$$

$$\pi = \frac{1}{2}cx^2 - m_2gl \cos \varphi$$

Lực suy rộng: $Q_x = -cx + F(t), \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = -m_2gl \sin \varphi.$

Phương trình vi phân chuyển động

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l \cos \varphi \ddot{\phi} - m_2l\dot{\phi}^2 \sin \varphi + cx = F(t)$$

$$m_2l \cos \varphi \ddot{x} + (J_C + m_2l^2)\ddot{\phi} + m_2gl \sin \varphi = 0.$$

16-18. Biểu thức động năng của hệ:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}J_A\omega_1^2, \quad J_A = \frac{1}{2}m_1R^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}J_C\omega_2^2$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + l^2\dot{\phi}^2.$$

Ta suy ra:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\dot{x}^2 + m_2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + \frac{1}{2}(J_C + m_2l^2)\dot{\phi}^2.$$

Biểu thức thế năng của hệ:

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2 - m_2gl \cos \varphi.$$

Lực suy rộng:

$$Q_x = -cx + F(t) + M/R, \quad Q_\varphi = -\frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = -m_2gl \sin \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động :

$$\left(\frac{3}{2}m_1 + m_2\right)\ddot{x} + m_2l \cos \varphi \ddot{\phi} - m_2l\dot{\phi}^2 \sin \varphi + cx = F(t) + M/R$$

$$m_2l \cos \varphi \ddot{x} + (J_C + m_2l^2)\ddot{\phi} + m_2gl \sin \varphi = 0.$$

16-19. Biểu thức động năng của cơ hệ

$$T = T_{OA} + T_1 + T_2$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2}J_O\omega_0^2, \quad T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2v_A^2 + \frac{1}{2}J_{A2}\omega_2^2$$

$$J_O = \frac{1}{3}m_0(r_1 + r_2)^2, \quad J_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2, \quad J_{A2} = \frac{1}{2}m_2r_2^2$$

Từ quan hệ động học:

$$\omega_0 = \dot{\phi}_0, \quad \omega_1 = \dot{\phi}_1, \quad v_A = (r_1 + r_2)\omega_0 = (r_1 + r_2)\dot{\phi}_0$$

$$\frac{\bar{\omega}_{2r}}{\bar{\omega}_{1r}} = \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0}{\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0} = -\frac{r_1}{r_2} \text{ (chọn OA làm hệ động),}$$

ta suy ra:

$$\bar{\omega}_2 = -\frac{r_1}{r_2}(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0) + \bar{\omega}_0, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \bar{\omega}_0 - \frac{r_1}{r_2} \bar{\omega}_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \dot{\phi}_0 - \frac{r_1}{r_2} \dot{\phi}_1$$

Tổng công ảo trong di chuyển ảo $\delta\phi_0, \delta\phi_1$

$$\delta A = M_0 \delta\phi_0 + M_1 \delta\phi_1, \text{ suy ra lực suy rộng } Q_{\phi_0} = M_0, \quad Q_{\phi_1} = M_1.$$

Khi trên bánh răng 2 có mômen M_2 tác dụng thì tổng công ảo sẽ là:

$$\delta A = M_0 \delta\phi_0 + M_1 \delta\phi_1 + M_2 \delta\phi_2,$$

với di chuyển ảo $\delta\phi_2$ được suy ra từ quan hệ vận tốc góc:

$$\delta\phi_2 = (r_1 + r_2) / r_2 \delta\phi_0 - r_1 / r_2 \delta\phi_1.$$

$$\delta A = [M_0 + M_2(r_1 + r_2) / r_2] \delta\phi_0 + [M_1 - M_2 r_1 / r_2] \delta\phi_1$$

Các lực suy rộng:

$$Q_{\phi_0} = M_0 + M_2(r_1 + r_2) / r_2, \quad Q_{\phi_1} = M_1 - M_2 r_1 / r_2.$$

16-20. Tính biểu thức động năng

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_2^2, \quad J_A = \frac{1}{2} m_2 r^2,$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2, \quad T = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$v_1 = v_2 = \dot{x}, \quad v_3 = \dot{y}, \quad \omega_2 = (\dot{y} - \dot{x}) / r$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + \frac{3}{2} m_2) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m_2 \dot{x} \dot{y} + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} m_2 + m_3) \dot{y}^2$$

Biểu thức thế năng: $\Pi = -m_3 g y \sin \alpha$.

$$\text{Lực suy rộng: } Q_x = 0, \quad Q_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = m_3 g \sin \alpha.$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$(m_1 + \frac{3}{2} m_2) \ddot{x} - \frac{1}{2} m_2 \ddot{y} = 0, \quad -\frac{1}{2} m_2 \ddot{x} + (\frac{1}{2} m_2 + m_3) \ddot{y} = m_3 g \sin \alpha.$$

16-21. Tính biểu thức động năng của hệ:

$$T = T_1 + T_2, \quad T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega_1^2, \quad \omega_1 = \dot{\phi}, \quad J_O = J_{C1} + m_1 a_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Đặt $q_1 = \phi, q_2 = \theta$, tính vận tốc quả cầu C:

$$x_C = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2, \quad y_C = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2;$$

$$\dot{x}_C = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 \dot{q}_2 \sin q_2, \quad \dot{y}_C = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2$$

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)$$

Động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2} (J_{c1} + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2) \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{q}_2^2$$

$$\Pi = -m_1 g a_1 \cos q_1 - m_2 g (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2)$$

Các lực suy rộng:

$$Q_1 = M_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = M_1 - g(m_1 a_1 + m_2 l_1) \sin q_1,$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -m_2 g l_2 \sin q_2.$$

Phương trình vi phân chuyển động của hệ như sau:

$$(J_{c1} + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{q}_1 + [m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2)] \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_1 - q_2).$$

$$+ g(m_1 a_1 + m_2 l_1) \sin q_1 = M_1$$

$$[m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2)] \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_1 - q_2) + m_2 g l_2 \sin q_2 = 0.$$

16-22.

a) Biểu thức động năng của hệ:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} J_O \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_C^2$$

$$J_O = \frac{1}{2} m_0 R^2, \quad J_C = m r^2.$$

$$v_C = \dot{x}, \quad \omega = \dot{\phi}, \quad \omega_C = (\dot{x} + R\dot{\phi}) / r.$$

Ta suy ra:

$$T = \frac{1}{2} (m_0 + m) R^2 \dot{\phi}^2 + m \dot{x}^2 + m R \dot{x} \dot{\phi}$$

Lực suy rộng:

$$Q_x = P \sin \alpha; \quad Q_\phi = M_0 - b \dot{\phi}.$$

Phương trình chuyển động của cơ hệ :

$$2m \ddot{x} + m R \ddot{\phi} = P \sin \alpha$$

$$m R \ddot{x} + (m_0 + m) R^2 \ddot{\phi} = M_0 - b \dot{\phi}$$

b) Giải hệ phương trình trên ta được

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha - R \ddot{\phi}}{2} \quad \text{và} \quad \ddot{\phi} = a_0 - b_0 \dot{\phi};$$

$$\text{với} \quad a_0 = \frac{2M_0 - mgR \sin \alpha}{(m_0 + m)R^2}; \quad b_0 = \frac{2b}{(2m_0 + m)R^2}.$$

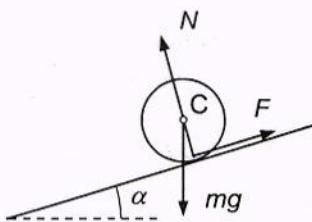
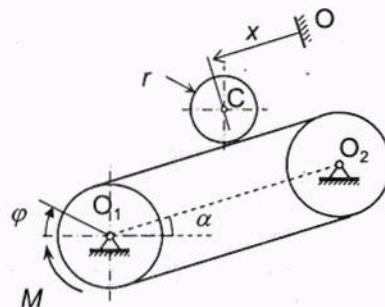
Tích phân phương trình trên ta nhận được:

$$a_0 - b_0 \dot{\phi} = C_1 e^{-b_0 t}$$

trong đó C_1 là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện đầu. Ta suy ra:

$$C_1 = a_0 - b_0 \omega_0$$

trong đó ω_0 là vận tốc góc tại thời điểm đầu. Vận tốc góc của trục quay băng tải là:



$$\dot{\phi} = \frac{1}{b_0} [a_0 - (a_0 - b_0 \omega_0) e^{-b_0 t}].$$

Vận tốc góc trục quay bằng tải trong quá trình bình ổn sẽ là: $\omega_{gh} = a_0 / b_0$.

16-24. Động năng của tay máy:

$$T = \frac{1}{2} J_{O_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_{C2}^2 + \frac{1}{2} J_{C2} \omega_2^2, \quad J_{O_1} = J_{C1} + m_1 a_1^2, \quad \omega_1^2 = \dot{q}_1^2, \quad \omega_2^2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

$$x_{C2} = l_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2) \quad \dot{x}_{C2} = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_1 + q_2)$$

$$y_{C2} = l_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2), \quad \dot{y}_{C2} = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + a_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_1 + q_2),$$

Từ đó ta có:

$$v_{C2}^2 = \dot{x}_{C2}^2 + \dot{y}_{C2}^2 = l_1^2 \dot{q}_1^2 + a_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2l_1 a_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2$$

Thay các kết quả trên vào công thức tính động năng ta nhận được:

$$T = \frac{1}{2} (J_{C1} + m_1 a_1^2 + J_{C2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1^2) \dot{q}_1^2 \\ + (J_{C2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (J_{C2} + m_2 a_2^2) \dot{q}_2^2.$$

Hàm thế năng:

$$\Pi = m_1 g a_1 \sin q_1 + m_2 g [l_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2)].$$

Lực suy rộng có dạng:

$$Q_1 = M_1 - m_1 g a_1 \cos q_1 - m_2 g [l_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2)],$$

$$Q_2 = M_2 - m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2).$$

Ta suy ra phương trình vi phân chuyển động của tay máy:

$$(J_{C1} + m_1 a_1^2 + J_{C2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_1 \\ + (J_{C2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_2 - m_2 l_1 a_2 \dot{q}_2 (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ + m_1 g a_1 \cos q_1 + m_2 g [l_1 \cos q_1 + a_2 \cos(q_1 + q_2)] = u_1,$$

$$(J_{C2} + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos q_2) \ddot{q}_1 + (J_{C2} + m_2 a_2^2) \ddot{q}_2$$

$$+ m_2 l_1 a_2 \dot{q}_1^2 \sin q_2 + m_2 g a_2 \cos(q_1 + q_2) = u_2.$$

CHƯƠNG 17: ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN KHÔNG GIAN

17-1. Dựng hai hệ trục tọa độ có gốc tại O: Hệ trục quán tính chính (Oxyz) với các véc-tơ đơn vị là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và hệ (Ox₁y₁z₁) với các véc-tơ đơn vị là $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$.

Các liên hệ:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{i}_1, & \vec{i}_1 &= \vec{i}, \\ \vec{j} &= \vec{j}_1 \cos \alpha - \vec{k}_1 \sin \alpha, & \vec{j}_1 &= \vec{j} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha, \\ \vec{k} &= \vec{j}_1 \sin \alpha + \vec{k}_1 \cos \alpha, & \vec{k}_1 &= -\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha.\end{aligned}$$

Véc-tơ vận tốc góc:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \Omega \vec{k}_1 = \Omega(-\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha) = \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \\ \vec{l}_c &= J_x \omega_z \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_x \vec{k} = -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}.\end{aligned}$$

hay:

$$\begin{aligned}\vec{l}_c &= -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha (\vec{j}_1 \cos \alpha - \vec{k}_1 \sin \alpha) + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha (\vec{j}_1 \sin \alpha + \vec{k}_1 \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{8} mr^2 \Omega \sin 2\alpha \vec{j}_1 + \frac{1}{4} mr^2 \Omega (1 + \cos^2 \alpha) \vec{k}_1.\end{aligned}$$

Góc với trục z₁:

$$\begin{aligned}l_c &= mr^2 \Omega \sqrt{\left[\frac{1}{8} \sin 2\alpha\right]^2 + \left[\frac{1}{4} (1 + \cos^2 \alpha)\right]^2} \\ l_c \cos \gamma &= \vec{k}_1 \cdot \vec{l}_c = \frac{1}{4} mr^2 \Omega (1 + \cos^2 \alpha).\end{aligned}$$

suy ra :

$$\cos \gamma = \frac{(1 + \cos^2 \alpha)}{\sqrt{\left[\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right]^2 + (1 + \cos^2 \alpha)^2}}.$$

Động năng :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_c = \frac{1}{8} mr^2 (1 + \cos^2 \alpha) \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{z1} \Omega^2.$$

17-2. Dựng hai hệ trục tọa độ có gốc tại C: Hệ trục quán tính chính (Cx₁y₁z₁) với các véc-tơ đơn vị là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và hệ (Cx₁y₁z₁) với các véc-tơ đơn vị là $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$.

Các liên hệ:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \vec{i}_1, & \vec{i}_1 &= \vec{i}, \\ \vec{j} &= \vec{j}_1 \cos \alpha - \vec{k}_1 \sin \alpha, & \vec{j}_1 &= \vec{j} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha, \\ \vec{k} &= \vec{j}_1 \sin \alpha + \vec{k}_1 \cos \alpha, & \vec{k}_1 &= -\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha,\end{aligned}$$

Véc-tơ vận tốc góc:

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{k}_1 = \Omega(-\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha) = \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} mh^2, \quad J_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$\vec{l}_C = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} = -\frac{1}{4} m(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}.$$

Ta suy ra:

$$\begin{aligned}\vec{l}_C &= -\frac{1}{4} m(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k} \\ &= -\frac{1}{4} m(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \Omega \sin \alpha (\vec{j}_1 \cos \alpha - \vec{k}_1 \sin \alpha) + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha (\vec{j}_1 \sin \alpha + \vec{k}_1 \cos \alpha) \\ &= \frac{1}{8} m(r^2 - \frac{1}{3} h^2) \Omega \sin 2\alpha \vec{j}_1 + \frac{1}{4} m[(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \sin^2 \alpha + 2r^2 \cos^2 \alpha] \Omega \vec{k}_1.\end{aligned}$$

Động năng :

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} m[(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \sin^2 \alpha + 2r^2 \cos^2 \alpha] \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{z1} \Omega^2$$

Mômen quán tính đối với trục quay :

$$J_{z1} = \frac{1}{4} m[(r^2 + \frac{1}{3} h^2) \sin^2 \alpha + 2r^2 \cos^2 \alpha].$$

17-3. Véc-tơ vận tốc góc của đĩa : $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{j} + \omega_2 \vec{k}$

Vận tốc điểm A (trung khôi tâm đĩa):

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= b\vec{i} - a\vec{k} \\ \vec{v}_A &= \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_A = \omega_1 \vec{j} \times (b\vec{i} - a\vec{k}) = b\omega_1 \vec{j} \times \vec{i} - \omega_1 \vec{j} \times a\vec{k} = -b\omega_1 \vec{k} - a\omega_1 \vec{i}\end{aligned}$$

Mômen quán tính đối với các trục khi tịnh tiến về khôi tâm A:

$$J_{x'} = J_{y'} = \frac{1}{4} mr^2, \quad J_{z'} = \frac{1}{2} mr^2$$

Mômen động lượng đối với khôi tâm:

$$\vec{l}_C = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} = J_y \omega_1 \vec{j} + J_z \omega_2 \vec{k}$$

Mômen động lượng đối với gốc O:

$$\begin{aligned}\vec{l}_O &= \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = J_y \omega_1 \vec{j} + J_z \omega_2 \vec{k} + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C \\ \vec{r}_C \times m\vec{v}_C &\equiv \vec{r}_A \times m\vec{v}_A = -m(b\vec{i} - a\vec{k}) \times (b\omega_1 \vec{k} + a\omega_1 \vec{i}) \\ &= -m(b\vec{i} \times b\omega_1 \vec{k} - a\vec{k} \times a\omega_1 \vec{i}) = m\omega_1(a^2 + b^2)\vec{j} \\ \vec{l}_O &= \frac{1}{4} mr^2 \omega_1 \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \omega_2 \vec{k} + m\omega_1(a^2 + b^2)\vec{j} \\ &= \frac{1}{4} m[r^2 + 4(a^2 + b^2)] \omega_1 \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \omega_2 \vec{k}.\end{aligned}$$

17-4. Hệ trục quán tính chính (C_{xyz}) với các vectơ đơn vị là $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và hệ (O_{x₁y₁z₁}) với các vectơ đơn vị là $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$.

Các liên hệ:

$$\vec{i} = \vec{i}_1, \quad \vec{i}_1 = \vec{i},$$

$$\vec{j} = \vec{j}_1 \cos \alpha - \vec{k}_1 \sin \alpha, \quad \vec{j}_1 = \vec{j} \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha,$$

$$\vec{k} = \vec{j}_1 \sin \alpha + \vec{k}_1 \cos \alpha, \quad \vec{k}_1 = -\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha,$$

Vectơ vận tốc góc:

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{k}_1 = \Omega(-\vec{j} \sin \alpha + \vec{k} \cos \alpha) = \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{r}_C = 0\vec{i} - e\vec{j} + 0\vec{k} = -e \cos \alpha \vec{j}_1 + e \sin \alpha \vec{k}_1$$

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_C = (-\Omega \sin \alpha \vec{j} + \Omega \cos \alpha \vec{k}) \times (-e\vec{j}) = e\Omega \cos \alpha \vec{i}$$

Các mômen quán tính khối đối với hệ trục qua khối tâm C:

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} mr^2, \quad J_z = \frac{1}{2} mr^2$$

$$\vec{l}_C = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} = -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{l}_o = \vec{l}_C + \vec{l}_C \times m\vec{v}_C$$

$$\vec{r}_C \times m\vec{v}_C = -e\vec{j} \times me\Omega \cos \alpha \vec{i} = me^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}$$

$$\vec{l}_o = -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k} + me^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}$$

$$= -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} m(r^2 + 2e^2) \Omega \cos \alpha \vec{k}$$

Động năng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{v}_C \cdot m\vec{v}_C + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_o = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_o \\ &= \frac{1}{2} [\frac{1}{2} mr^2 \sin^2 \alpha + m(r^2 + 2e^2) \cos^2 \alpha] \Omega^2 = \frac{1}{2} J_{z_1} \Omega^2. \end{aligned}$$

Nếu $e = 0$ ta có:

$$\vec{l}_o = -\frac{1}{4} mr^2 \Omega \sin \alpha \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \Omega \cos \alpha \vec{k}.$$

17-5. Trong hệ Oxyz với các vectơ đơn vị ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) có vận tốc góc của đĩa

$$\vec{\omega} = \Omega \vec{i} + \omega_p \vec{j}, \quad \vec{r}_C = d\vec{k}, \quad \vec{v}_C = \vec{\omega} \times d\vec{k} = -\Omega d\vec{j}$$

Các mômen quán tính khối đối với hệ trục qua khối tâm C

$$J_{x'} = J_{z'} = \frac{1}{4} mr^2, \quad J_{y'} = \frac{1}{2} mr^2$$

Mômen động lượng đối với khối tâm C: $\vec{l}_C = J_{x'} \omega_{x'} \vec{i} + J_{y'} \omega_{y'} \vec{j} + J_{z'} \omega_{z'} \vec{k}$

$$\vec{l}_o = \vec{l}_c + \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$$

Động năng: $T = \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot m\vec{v}_c + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{l}_c$.

17-7. Chuyển động của các thớt là chuyển động quay quanh hai trục giao nhau (chuyển động quay quanh điểm cố định).

Động năng của một thớt:

$$T_1 = \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2), \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = \Omega R / r, \quad \omega_z = \Omega$$

$$J_x = \frac{1}{4} mr^2 + mR^2, \quad J_y = \frac{1}{2} mr^2, \quad J_z = \frac{1}{4} mr^2 + mR^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} mr^2 \Omega^2 R^2 / r^2 + \left(\frac{1}{4} mr^2 + mR^2 \right) \Omega^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2} R^2 + \frac{1}{4} r^2 \right] \Omega^2$$

Động năng hệ (2 thớt): $T = 2T_1 = \frac{1}{2} m [3R^2 + \frac{1}{2} r^2] \Omega^2$ với $\Omega = \frac{2}{3} \omega$.

Công suất của ngẫu lực: $W = M\omega$

Áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$\frac{d}{dt} T = W \Rightarrow m [3R^2 + \frac{1}{2} r^2] \frac{4}{9} \omega \frac{d\omega}{dt} = M\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{9M}{4m [3R^2 + \frac{1}{2} r^2]} = \varepsilon$$

Tích phân lên ta được :

$$\omega = \varepsilon t = \frac{9M}{2m [6R^2 + r^2]} t \Rightarrow n = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{9M}{2m [6R^2 + r^2]} t; \quad M = \frac{m [6R^2 + r^2] \pi n}{15 \cdot 9t}.$$

17-8. Chia thanh thành 2 phần có chiều dài và khối lượng tương ứng là $2a$, $\frac{2}{3} m$ và

a , $\frac{1}{3} m$. Vị trí khối tâm C được xác định bởi:

$$x_C = 0, \quad my_C = \frac{2}{3} ma + \frac{1}{3} m2a = \frac{4}{3} ma, \quad mz_C = \frac{2}{3} m0 + \frac{1}{3} m \frac{1}{2} a = \frac{1}{6} ma$$

$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{4}{3} a, \quad z_C = \frac{1}{6} a.$$

Tính các thành phần mômen quán tính khối:

$$J_x = \frac{1}{3} \frac{2}{3} m(2a)^2 + \frac{1}{12} \frac{1}{3} ma^2 + \frac{1}{3} m(4a^2 + \frac{1}{4} a^2), \quad J_y = \frac{1}{3} \frac{1}{3} ma^2$$

$$J_z = \frac{1}{3} \frac{2}{3} m(2a)^2 + \frac{1}{3} m(2a)^2, \quad J_{xz} = \int xz dm = 0, \quad J_{xy} = \int xy dm = 0$$

$$J_{yz} = \int yz dm = \int_{(z=0)} yz dm + \int_{(y=2a)} yz dm, \quad dm = (m / 3a) dz$$

$$= \int_0^a 2az(m / 3a) dz = \frac{1}{3} ma^2$$

Phương trình vi phân vật rắn quay quanh trục cố định:

$$J_{z_0}\varepsilon = M_0 \Rightarrow \varepsilon = M_0 / J_{z_0}, \quad \omega(t) = \varepsilon t$$

Áp dụng công thức nhận được lực quán tính khi thu gọn về gốc O:

$$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C = m(x_C\omega^2 + y_C\varepsilon)\vec{i} + m(y_C\omega^2 - x_C\varepsilon)\vec{j}$$

$$\vec{M}_O^{qt} = (-J_{yx}\omega^2 + J_{zx}\varepsilon)\vec{i} + (J_{zx}\omega^2 + J_{yx}\varepsilon)\vec{j} - J_z\varepsilon\vec{k}$$

Đặt các thành phần áp lực phụ tại 2 trục A và B: $A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, $B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$.

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học, từ đó ta giải được ẩn cần tìm.

17-9. a) Tìm vị trí khối tâm C

$$x_C = 0, y_C = 0, z_C = 0. \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tính các thành phần mômen quán tính khối

$$J_{x'} = \frac{1}{12}ma^2, \quad J_{y'} = J_y = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2), \quad J_{z'} = \frac{1}{12}mb^2$$

$$J_{yx} = J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = \frac{1}{2}(J_{z'} - J_{x'}) \sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức nhận được lực quán tính khi thu gọn về gốc O:

$$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C = 0$$

$$\vec{M}_O^{qt} = (-J_{yx}\omega^2 + J_{zx}\varepsilon)\vec{i} + (J_{zx}\omega^2 + J_{yx}\varepsilon)\vec{j} - J_z\varepsilon\vec{k} = J_{zx}\omega^2\vec{j}$$

Đặt các thành phần áp lực phụ tại 2 trục A và B: $A_x\vec{i} + A_y\vec{j}$, $B_x\vec{i} + B_y\vec{j}$.

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học từ đó giải được ẩn cần tìm.

b) Để làm triệt tiêu các thành phần phản lực động bằng hai khối lượng gắn vào D và E thì lực quán tính của hai chất điểm này phải tạo thành ngẫu lực có trị số bằng nhưng ngược chiều với \vec{M}_O^{qt} vừa tính ở trên.

$$F_D^{qt}b \sin \alpha = M_O^{qt} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\omega^2b \cos \alpha b \sin \alpha = J_{zx}\omega^2.$$

$$\text{Ta suy ra } m_1 = \frac{(J_{z'} - J_{x'}) \sin 2\alpha}{b^2 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2(J_{z'} - J_{x'})}{b^2}.$$

17-10. Tìm vị trí khối tâm C: $x_C = 0, y_C = 0, z_C = 0$.

Tính các thành phần mômen quán tính khối:

$$J_x = J_{x0} \approx 0, \quad J_{y0} = J_{z0} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}ml^2 = 4,9$$

$$J_{yx} = J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = \frac{1}{2}(J_{z0} - J_{x0}) \sin 2\alpha \approx (J_{z0} - J_{x0})\alpha \text{ (do } \alpha \text{ nhỏ)}.$$

Áp dụng công thức nhận được lực quán tính khi thu gọn về gốc O:

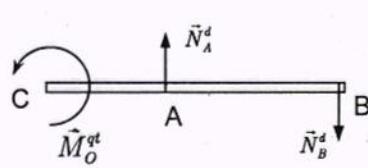
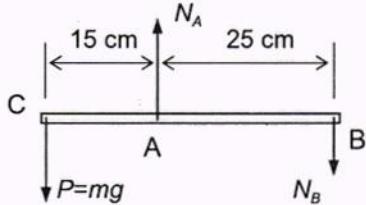
$$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C = 0$$

$$\vec{M}_O^{qt} = (-J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon)\vec{i} + (J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon)\vec{j} - J_z\varepsilon\vec{k} = J_{xz}\omega^2\vec{j} \approx J_{z0}\alpha\omega^2\vec{j}.$$

Xác định áp lực tĩnh: $(\vec{P}, \vec{N}_A, \vec{N}_B) \equiv 0$

$$25N_B = 15P \Rightarrow N_B = \frac{3}{5}P; \quad N_A = N_B + P = \frac{8}{5}P$$

Xác định áp lực động: $(\vec{M}_O^{qt}, \vec{N}_A^d, \vec{N}_B^d) \equiv 0, N_A^d = N_B^d = \frac{M_O^{qt}}{AB} \approx \frac{J_{z0}\alpha\omega^2}{AB}$.



17-11. Tìm vị trí khối tâm C: $x_C = 0, y_C = 0, z_C = 0$.

Tính các thành phần mômen quán tính khối:

$$J_{z0} = J_z = J_y = \frac{1}{4}mr^2, J_x = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0, \quad J_{y0z0} = \frac{1}{2}(J_z - J_y)\sin(-2\alpha) = -\frac{1}{8}mr^2\sin 2\alpha$$

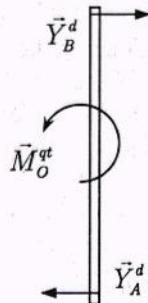
Áp dụng công thức lực quán tính thu gọn về gốc O:

$$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{qt} &= (-J_{y0z0}\omega^2 + J_{x0z0}\varepsilon)\vec{i} + (J_{x0z0}\omega^2 + J_{y0z0}\varepsilon)\vec{j} - J_{z0}\varepsilon\vec{k} \\ &= -J_{y0z0}\omega^2\vec{i} \end{aligned}$$

Xác định áp lực động: $(\vec{M}_O^{qt}, \vec{Y}_A^d, \vec{Y}_B^d) \equiv 0$

$$Y_A^d = Y_B^d = \frac{M_O^{qt}}{AB} = \frac{mr^2\omega^2\sin 2\alpha}{16h}$$



Cách khác: Coi chuyển động của đĩa là chuyển động quay quanh điểm O cố định.

Áp dụng định lý mômen động lượng, ta có các hệ thức sau:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}_0 = \omega(-\sin \alpha\vec{j} + \cos \alpha\vec{k}), \quad J_z = \frac{1}{2}mr^2, \quad J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2$$

$$\vec{L}_O = J_x\omega_x\vec{i} + J_y\omega_y\vec{j} + J_z\omega_z\vec{k} = -\frac{1}{4}mr^2\omega\sin \alpha\vec{j} + \frac{1}{2}mr^2\omega\cos \alpha\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_O = \frac{B}{dt}\vec{L}_O + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = 0 - \frac{1}{8}mr^2\omega^2\sin 2\alpha\vec{i}$$

$$\Sigma \vec{m}_O(\vec{F}_k) = (Y_A^d + Y_B^d)h\vec{i}.$$

Ta suy ra:

$$Y_A^d = Y_B^d = \frac{1}{16h} mr^2\omega^2 \sin 2\alpha.$$

17-12. Tọa độ khối tâm: $x_C = 0, y_C = \frac{1}{3}b, z_C = \frac{1}{3}a.$

Các mômen quán tính khối và mômen tích quán tính:

$$J_z = \frac{1}{6}mb^2$$

$$J_y = \frac{1}{6}ma^2$$

$$J_{xy} = J_{xz} = 0 \text{ (do bề dày tâm không đáng kể)}$$

$$J_{yz} = \frac{1}{12}mab.$$

Kết quả thu gọn lực quán tính về gốc O:

$$\vec{R}_O^{qt} = -m\vec{a}_C = m(x_C\omega^2 + y_C\varepsilon)\vec{i} + m(y_C\omega^2 - x_C\varepsilon)\vec{j},$$

$$\vec{M}_O^{qt} = (-J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\varepsilon)\vec{i} + (J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon)\vec{j} - J_z\varepsilon\vec{k}.$$

Đặt các áp lực phụ tại các ống trục A và B: $\vec{X}_A^d, \vec{Y}_A^d, \vec{X}_B^d, \vec{Y}_B^d.$

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học và xác định các áp lực động.

17-15. Từ phương trình cơ bản của con quay có

$$\vec{l}_o \approx J_z\vec{\omega}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{l}_o = \vec{\omega}_2 \times J_z\vec{\omega}_1 = \overrightarrow{OC} \times \vec{P}.$$

$$m\rho^2\omega_2\omega_1 \sin \theta = dm g \sin \theta \Rightarrow \omega_2 = \frac{dg}{\rho^2\omega_1}, \text{ chiều hướng xuống.}$$

17-17. Gắn vào đĩa một hệ trục quán tính chính có gốc tại O, tại thời điểm khảo sát hệ này có vị trí như trên hình vẽ (trùng với $Ox_1y_1z_1$). Ta có các hệ thức:

$$\vec{l}_o = J_x\vec{\omega}_x + J_y\vec{\omega}_y + J_z\vec{\omega}_z, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y + \vec{\omega}_z = -\omega_2\vec{j} - \omega_1\vec{k}$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2, \quad J_z = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\vec{l}_o = -\frac{1}{4}mr^2\omega_2\vec{j} - \frac{1}{2}mr^2\omega_1\vec{k}.$$

Động năng của đĩa có dạng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{l}_o = \frac{1}{2}(-\omega_2\vec{j} - \omega_1\vec{k}) \cdot \left(-\frac{1}{4}mr^2\omega_2\vec{j} - \frac{1}{2}mr^2\omega_1\vec{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{1}{4}\omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right). \end{aligned}$$

Phản lực tĩnh do trọng lực: $N_A = N_B = \frac{1}{2}mg$, hướng lên.

Mômen Gyroscope:

$$\begin{aligned}\vec{M}^{eq} &= -\frac{d}{dt} \vec{l}_o = -\vec{\omega} \times \vec{l}_o = \vec{\omega} \times \left(\frac{1}{4} mr^2 \omega_2 \vec{j} + \frac{1}{2} mr^2 \omega_1 \vec{k} \right) \\ &= -\frac{1}{4} mr^2 (\omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}) \times (\omega_2 \vec{j} + 2\omega_1 \vec{k}) = -\frac{1}{4} mr^2 \omega_1 \omega_2 \vec{i}.\end{aligned}$$

Áp lực do mômen Gyroscope:

$$\vec{N}_A = -\vec{N}_B, \quad N_A = N_B = M^{eq} / 2h = \frac{mr^2}{8h} \omega_1 \omega_2$$

(\vec{N}_A hướng xuống, \vec{N}_B hướng lên).

Áp lực toàn phần:

$$N_A = \frac{mr^2}{8h} \omega_1 \omega_2 - \frac{1}{2} mg, \quad N_B = \frac{mr^2}{8h} \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{2} mg.$$

17-18. Vécтор mômen động lượng của đĩa đối với điểm O có dạng:

$$\vec{l}_o = \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C,$$

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vécтор đơn vị của hệ Oxyz gắn liền vật, lưu ý rằng:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{k} - \omega_2 \vec{j}, \quad \omega_2 = \omega_1 b / r, \quad \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = -mb^2 \omega_1 \vec{j} \times \vec{i} = mb^2 \omega_1 \vec{k}$$

Ta có các hệ thức:

$$\begin{aligned}\vec{l}_o &= J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k} \\ \vec{l}_o &= \vec{l}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = -J_y \omega_2 \vec{j} + (J_z + mb^2) \omega_1 \vec{k} \\ \frac{d}{dt} \vec{l}_o &= J_y \omega_2 \omega_1 \vec{i}, \text{ do } \frac{d}{dt} \vec{j} = \omega_1 \vec{k} \times \vec{j}, \quad \frac{d}{dt} \vec{k} = 0 \\ \frac{d}{dt} \vec{l}_o &= \vec{r}_C \times \vec{P} + \vec{r}_A \times \vec{N} = b\vec{j} \times (N - P)\vec{k} = b(N - P)\vec{j} \times \vec{k} = b(N - P)\vec{i}\end{aligned}$$

Suy ra: $J_y \omega_2 \omega_1 \vec{i} = b(N - P)\vec{i} \Rightarrow N = P + \frac{1}{b} J_y \omega_1 \omega_2$

$$N = P + \frac{1}{r} J_y \omega_1 \omega_2, \quad J_y = \frac{1}{2} mr^2.$$

17-19. Khi tàu rẽ phải sẽ làm cho trục rôto đổi hướng với vận tốc góc $\Omega = v / R$, $\vec{\Omega}$ hướng theo chiều dương trục z (hướng xuống).

Mômen Gyroscope $\vec{M}^{eq} = J \vec{\omega} \times \vec{\Omega}$, $J = \frac{1}{2} mr^2$, $\vec{\omega}$ hướng theo chiều dương trục x.

Mômen Gyroscope \vec{M}^{eq} hướng ngược chiều trục y làm tàu chói xuống. Áp lực động của hai ổ trục A và B có dạng:

$$N_A = N_B = M^{eq} / L = \frac{mr^2}{2L} \cdot \frac{\pi n}{30} \cdot \frac{v}{R}.$$

CHƯƠNG 18: VA CHẠM GIỮA CÁC VẬT RẮN

18-1/2. Sử dụng các công thức:

$$v'_1 = v_1 - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2), \quad v'_2 = v_2 + (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

Với các số liệu đã cho xác định được hệ số khôi phục k .

18-3. Vận tốc của vật A và B trước va chạm: $v_A = \sqrt{2gh} = 9,8 \text{ m/s}$; $v_B = 0$

Vận tốc chung ngay sau va chạm:

$$u = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{10 \cdot 9,8 + 90 \cdot 0}{10 + 90} = 0,98 \text{ m/s.}$$

18-4. Vận tốc chung và xung lực va chạm

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad S = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \quad \Delta T = T_0 - T$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 6^2 = 14,4 \text{ J}; \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$$

a) $m_2 = 4 \text{ kg}$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,8 \cdot 6 + 4 \cdot 0}{0,8 + 4} = 1 \text{ m/s}$$

$$S = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{0,8 \cdot 4(6 - 0)}{4,8} = 4 \text{ Ns.}$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 1^2 = 2,4 \text{ J}; \quad \Delta T = T_0 - T = 12 \text{ J.}$$

b) $m_2 = \infty$

$$u = 0, \quad S = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{1 + m_1 / m_2} = m_1 v_1 = 4,8 \text{ Ns}; \quad T = 0$$

$$\Delta T = T_0 = 14,4 \text{ Ns}$$

18-5. $T_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 12,5^2 \cdot 10^3 = 15 \cdot 10^4 \text{ J}; \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{12,5 \cdot 10^3 + 250,0}{263 \cdot 10^3} = 0,229 \text{ m/s}$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = 0,687 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Delta T = T_0 - T = 143,13 \text{ kJ}, \quad \eta = \frac{\Delta T}{T_0} = 0,954.$$

18-6. Vận tốc ban đầu của búa và cọc: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = m_1 gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}; \quad v_2 = 0$

Sau va chạm, vận tốc chung là: $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

Sau mỗi lần va chạm cọc di chuyển một đoạn: $d = \frac{\delta}{10} = \frac{5}{10} 10^{-2} \text{ m}$.

Áp dụng định lý biến thiên động năng ta có:

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 = F_c d \Rightarrow F_c = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \frac{gh}{d}.$$

18-7. Gọi S là xung lực va chạm tại tay gạt. Áp dụng định lý biến thiên động lượng ta có:

$$mu - 0 = S$$

Vô lăng quay áp dụng định lý mômen động lượng có:

$$J(\omega - \omega_0) = -rS \Rightarrow \omega = \omega_0 - rS/J.$$

Va chạm mềm: $u = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{J\omega_0}{J + mr^2} = 6,15 \text{ rad/s} \Rightarrow u = 1,23 \text{ m/s}$

Lực va chạm trung bình $F_{tb} = mu/\tau = 6,15 \text{ N}$.

(Hiệu suất $\eta = 1 - \Delta T/T_0$).

18-8. Áp dụng định lý mômen động lượng đối với trực qua A:

$$\bar{m}_A(M\bar{v}) - J_A\bar{\omega} = \Sigma \bar{m}_A(\bar{S}_k^e) = 0 \text{ hay } hMv = J_A\omega \Rightarrow \omega = hMv/J_A$$

Khi xe dừng tức thời, áp dụng định lý biến thiên động năng cho hộp ở vị trí hộp nằm ngang và hộp có khối tâm C ở vị trí cao nhất, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_A \omega^2 &= Mg(AC - h), J_A = \frac{1}{3} M(4a^2 + 4h^2); \quad AC = \sqrt{a^2 + h^2} \\ \omega^2 &= \frac{6g(\sqrt{a^2 + h^2} - h)}{4(a^2 + h^2)}. \end{aligned}$$

18-9. Trước khi va chạm: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_o^2 = m_1 gh \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_o^2 + 2gh}; \quad v_2 = 0$

với $m_1 = m_B = P/g$, $m_2 = m_A = Q/g$.

Sau va chạm, vận tốc chung là: $u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

Cơ năng hệ ngay sau va chạm:

$$T_1 + \Pi_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \frac{1}{2} c(\delta_o)^2 - (m_1 + m_2)g\delta_o, \quad \delta_o = P/c$$

Cơ năng hệ ở vị trí thấp nhất:

$$T_2 + \Pi_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot 0^2 + \frac{1}{2} c(\delta_o + \Delta)^2 - (m_1 + m_2)g(\delta_o + \Delta)$$

Độ nén lớn nhất của lò xo: $s = \delta_o + \Delta$, Δ là độ lớn lò xo sau va chạm.

Bảo toàn cơ năng: $T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2$ ta suy ra Δ .

18-10. Hệ số hồi phục: $k = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = -\frac{0 - u_1}{0 - v_1}$.

Giai đoạn trước va chạm:

$$\frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{2} mgl \Rightarrow \omega_I = \sqrt{mgl / J_o}, \quad v_1 = l\omega_I$$

Giai đoạn sau va chạm:

$$\frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{2} mgl(1 - \cos \varphi) \Rightarrow \omega_{II} = -\sqrt{mgl(1 - \cos \varphi) / J_o}, u_1 = l\omega_{II}$$

$$k = \sqrt{1 - \cos \varphi} = \sqrt{2} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Tâm va chạm: $x = d = J_o / (ma)$; $J_o = \frac{1}{3} ml^2$; $a = \frac{1}{2} l \Rightarrow x = \frac{2}{3} l$.

18-11. Trong thời gian va chạm $\sum m_o(\vec{F}_k^e) = 0$ nên $L_o(t_1) = L_o(t_2)$

Với: $L_o(t_1) = mva$; $L_o(t_2) = (M\rho^2 + ma^2)\omega$, $\Rightarrow mva = (M\rho^2 + ma^2)\omega$.

Áp dụng định lý biến thiên động năng trong quá trình sau va chạm:

$$\frac{1}{2}(M\rho^2 + ma^2)\omega^2 = g(Mh + ma)(1 - \cos \alpha)$$

$$v = \frac{(M\rho^2 + ma^2)\omega}{ma} = \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) \sqrt{g(Mh + ma)(M\rho^2 + ma^2)}}{ma}.$$

Do $ah = \rho^2$ nên $v = \frac{2(Mh + ma)}{m} \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}$.

18-12. Trước va chạm, áp dụng định lý biến thiên động năng cho thanh:

$$\frac{1}{2} J_o \omega_0^2 = \frac{1}{2} Mgl; \quad J_o = \frac{1}{3} Ml^2$$

Trong khi va chạm, áp dụng định lý biến thiên động lượng và mômen động lượng cho hệ thanh và vật :

$$mu - 0 = S, \quad J_0(\omega - \omega_0) = -lS, \quad u = l\omega \Rightarrow u = \frac{M\sqrt{3gl}}{M + 3m}.$$

Sau va chạm, áp dụng định lý biến thiên động năng cho vật B

$$0 - \frac{1}{2} mu^2 = -F_{ms}s = -fmgs \Rightarrow s = \frac{u^2}{2fg} = \frac{3lM^2}{2f(M + 3m)^2}.$$

18-13. Vận tốc các vật trước va chạm: $v_1 = \sqrt{2gh}$; $v_2 = 0$.

Khi va chạm: $u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1 + k)(v_2 - v_1)$

Sau va chạm, áp dụng định lý biến thiên động năng:

$$0 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = -F_{ms} s = -f m g s \Rightarrow s = \frac{u_2^2}{2 f g} = 2,9 \text{ m.}$$

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) = 0,243.$$

18-14. Trước va chạm: $v_1 = v_{10}$, $v_2 = 0$

Ngay sau va chạm:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + k)(v_1 - v_2), \quad v_B = u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + k)(v_2 - v_1),$$

$$u_1 = v_{10} - \frac{m_1 - m_2 k}{m_1 + m_2}, \quad v_A = u_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1 + k)v_{10}.$$

Chuyển động của vật 1 sau va chạm (lấy gốc tọa độ tại O).

$$x_1(t) = u_1 t$$

Chuyển động của vật 2 sau va chạm, từ phương trình vi phân chuyển động :

$$m_2 \ddot{x}_2(t) = -c x_2, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = u_2$$

$$x_2(t) = \frac{u_2}{\omega} \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{c/m_2}$$

Va chạm lần tiếp theo xảy ra tại thời điểm t_1 là nghiệm của phương trình :

$$x_1(t_1) = x_2(t_1), \quad u_1 t_1 = \frac{u_2}{\omega} \sin(\omega t_1) \Rightarrow t_1.$$

18-15. Áp dụng định lý bảo toàn cơ năng ta có:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh_0 \text{ nên } v_1 = \sqrt{2gh_0}$$

Vận tốc mặt nền không đổi trước va chạm và sau va chạm $v_2 = u_2 = 0$

Hệ số khôi phục:

$$k = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = -\frac{u_1}{v_1} \Rightarrow u_1 = -kv_1 = -k\sqrt{2gh_0}$$

Theo định lí biến thiên động năng ta có:

$$-\frac{1}{2} m u_1^2 = -mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{g} = k^2 h_0$$

$$\text{a)} k = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{32}{36}} = 0,942. \quad \text{b)} k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \Rightarrow h_2 = k^2 h_1 = \frac{32}{36} \cdot 32 = 28,44 \text{ cm.}$$

18-16. Trước va chạm:

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gr}, \quad v_2 = 0$$

Ngay sau va chạm:

$$u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + k)(v_1 - v_2), \quad u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2 k}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = v_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+k)(v_2 - v_1),$$

18-17. Bảo toàn động lượng trên đường va chạm :

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n} \quad (1)$$

Theo phương vuông góc đường va chạm vận tốc không đổi:

$$u_{1t} = v_{1t}, \quad u_{2t} = v_{2t} \quad (2)$$

Hệ số khôi phục:

$$k = -\frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{2n} - v_{1n}} \quad (3)$$

Với $v_{1n} = v_1 \cos \alpha, v_{1t} = -v_1 \sin \alpha, v_{2n} = v_{2t} = v_2 = 0$, từ hệ trên ta giải được:

$$u_{1t} = v_{1t}, \quad u_{2t} = 0, \quad u_{1n} = \dots, \quad u_{2n} = \dots \Rightarrow u_1, u_2.$$

18-18. Vận tốc quả cầu trước va chạm $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$

Trong quá trình va chạm (bảo toàn mômen động lượng đối với trục quay O):

$$L_O(t_{tvc}) = \frac{1}{2} am_2 v_2, \quad L_O(t_{svc}) = \frac{1}{2} am_2 u_2 + J_O \omega, \text{ và chạm mềm } u_2 = a\omega.$$

Ta tìm được vận tốc góc của tấm ω , vận tốc tâm tấm sau va chạm $u_C = \frac{1}{2} a\omega$.

18-19. Nếu ký hiệu vận tốc của A và B trước va chạm là $v_A = v_1, v_B = v_2$ và sau va chạm là $u_A = u_1, u_B = u_2$, áp dụng định luật bảo toàn động lượng trên đường va chạm ta có:

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 u_{1n} + m_2 u_{2n}$$

Theo phương vuông góc đường va chạm (phương tiếp tuyến) vận tốc không đổi :

$$u_{1t} = v_{1t}, \quad u_{2t} = v_{2t}$$

Hệ số khôi phục:

$$k = -\frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{2n} - v_{1n}}$$

Với $v_{1n} = v_1 \cos \alpha, v_{1t} = -v_1 \sin \alpha, v_{2n} = v_{2t} = v_2 = 0$, từ hệ trên ta giải được:

$$u_{1t} = v_{1t}, \quad u_{2t} = 0, \quad u_{1n} = \dots, \quad u_{2n} = \dots \Rightarrow u_1, u_2$$

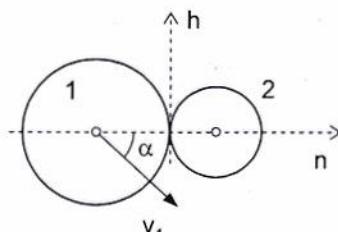
18-20. Trước va chạm $v_1 = v_0, v_2 = 0$

Bảo toàn mômen động lượng đối với trục qua A (xét cả hệ) :

$$l_A(t_{tvc}) = m_1 v_0 h + 0, \quad l_A(t_{svc}) = m_1 u_1 h + J_A \omega, \quad J_A = \frac{1}{3} mL^2$$

Hệ số khôi phục :

$$k = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} = \frac{u_2 - u_1}{v_0}, \quad u_2 = h\omega$$



Từ hệ trên giải được: $u_1, \omega, u_C(t_{sv}) = \frac{1}{2}l\omega$.

Xung lực va chạm tại A (xét thanh):

$$m_2 u_{Cx} - m_2 v_{Cx} = S_{Ax} + S, \quad m_2 u_{Cy} - m_2 v_{Cy} = S_{Ay}$$

$$u_{Cx} = \frac{1}{2}l\omega, u_{Cy} = 0, \quad v_{Cx} = v_{Cy} = 0$$

Xét viên đạn: $m_1 u_1 - m_1 v_1 = -S$

D là tâm va chạm khi: $h = \frac{J_A}{\frac{1}{2}m_2 L} = \frac{2}{3}L$

18-21. Do xung lực va chạm tại B nên mômen động lượng đối với trục qua B được bảo toàn: $J_B(0) = J_B$

hay: $\frac{1}{2}amv_1 = J_B\omega$, trong đó $J_B = J_G + m(BG)^2 = \frac{2}{3}ma^2$.

Do đó: $v_1 = \frac{4}{3}a\omega$.

Sau quá trình va chạm, xét tại vị trí BG thẳng đứng, giá trị nhỏ nhất của vận tốc v_1 tương ứng với $v_G = 0$. Tại vị trí này, áp dụng định lí bảo toàn cơ năng:

$$\frac{1}{2}J_B\omega^2 + mgh_1 = 0 + mgh_2$$

trong đó $h_1 = BG \sin(45^\circ + 15^\circ) = 0,612a, h_2 = BG = 0,707a$.

Cuối cùng ta có: $\Rightarrow \omega = \sqrt{0,285/a}; v_1 = \frac{4}{3}a\omega = 0,712\sqrt{ga}$.

CHƯƠNG 19: ĐỘNG LỰC HỌC CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

19-1. Chọn thanh OAB là hệ quy chiếu động. Xét điểm M ở vị trí bất kì trên thanh AB với $s = AM$. Lực quán tính theo của chất điểm M là: $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e$

$$\text{Mặt khác có: } a = (a + s \sin \alpha) \omega^2, \quad F_e^{qt} = m(a + s \sin \alpha) \omega^2$$

Có điều kiện cân bằng tương đối của M :

$$\Sigma \vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_e^{qt} = 0$$

Chiếu lên phương x và y ta có:

$$\begin{cases} N \sin \alpha - P = 0 \\ -N \cos \alpha + F_e^{qt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = P / \sin \alpha \\ -P \cos \alpha / \sin \alpha + m(a + s \sin \alpha) \omega^2 = 0 \end{cases}$$

Ta suy ra:

$$\omega^2 = \frac{g \cot \alpha}{a + s \sin \alpha}.$$

Vậy vận tốc góc để M có thể cân bằng tại vị trí thấp nhất A (hay $s = 0$) là:

$$\omega_{\max}^2 = (g/a) \cot \alpha \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{(g/a) \cot \alpha}.$$

19-2. Đặt lực quán tính ngược chiều gia tốc, $F^{qt} = ma$, sử dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với điểm treo O:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi + mal \cos \varphi$$

Vị trí cân bằng tương đối, $\ddot{\varphi} = 0$

$$\tan \varphi_o = a/g \Rightarrow \varphi_o = \arctan(a/g)$$

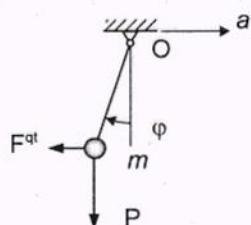
Xét dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng tương đối:

Đặt $\varphi = \varphi_o + q$, khai triển Taylor quanh vị trí $\varphi = \varphi_o$ và bỏ qua số hạng bậc cao hơn 2 ta được:

$$g \sin(\varphi_o + q) - a \cos(\varphi_o + q) \approx g \sin \varphi_o - a \cos \varphi_o + (g \cos \varphi_o + a \sin \varphi_o)q + O(q^2)$$

$$ml^2 \ddot{q} + ml(g \cos \varphi_o + a \sin \varphi_o)q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$\omega^2 = (g \cos \varphi_o + a \sin \varphi_o)/l, \quad T = 2\pi/\omega.$$



19-3. Đặt các lực thật và lực quán tính lên chất điểm B:

$$\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}_e^{qt}, \vec{F}_C^{qt}.$$

Sử dụng định lý mômen động lượng đối với điểm treo A:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi + F_e^{qt} l \cos \varphi$$

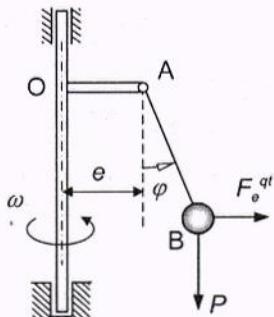
với $F_e^{qt} = mr\omega^2 = m(e + l \sin \varphi) \omega^2$, nhận được:

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi + m\omega^2(e + l \sin \varphi)l \cos \varphi$$

Ta suy ra:

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi - \omega^2(e + l \sin \varphi) \cos \varphi = 0.$$

Vị trí cân bằng tương đối, $\ddot{\varphi} = 0, \dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_o$:



$$g \sin \varphi_o - \omega^2(e + l \sin \varphi_o) \cos \varphi_o = 0.$$

Xét dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng tương đối: Đặt $\varphi = \varphi_o + q$, khai triển Taylor quanh vị trí $\varphi = \varphi_o$ và bỏ qua số hạng bậc cao hơn 2 ta được:

$$l\ddot{q} + [g \cos \varphi_o + \omega^2(e \sin \varphi_o - 2l \cos^2 \varphi_o + l)]q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$\omega^2 = [g \cos \varphi_o + \omega^2(e \sin \varphi_o - 2l \cos^2 \varphi_o + l)]/l, \quad T = 2\pi/\omega.$$

19-4. Mômen của các lực quán tính theo dõi với bản lề A:

$$dF_e^{qt} = a_e^n dm = (e + s \sin \varphi) \omega^2 dm$$

$$dm = (m/l)ds$$

$$m_A(d\vec{F}_e^{qt}) = dF_e^{qt}s \cos \varphi = (e + s \sin \varphi) \omega^2 s \cos \varphi dm$$

$$\begin{aligned} m_A(\vec{F}_e^{qt}) &= \int_0^l (m/l)(e + s \sin \varphi) \omega^2 s \cos \varphi ds \\ &= \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} mle \omega^2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -mg \frac{1}{2} l \sin \varphi + m_A(F_e^{qt})$$

$$\frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2} mgl \sin \varphi + \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} mle \omega^2 \cos \varphi$$

Vị trí cân bằng tương đối, $\ddot{\varphi} = 0, \dot{\varphi} = 0, \varphi = \varphi_o$:

$$0 = -\frac{1}{2} mgl \sin \varphi_o + \frac{1}{3} ml^2 \omega^2 \sin \varphi_o \cos \varphi_o + \frac{1}{2} mle \omega^2 \cos \varphi_o.$$

Từ đó ta suy ra góc φ_o .

19-5. Chọn khung là hệ quy chiếu động, tọa độ suy rộng là φ . Chọn hệ tọa độ và đặt lực và các lực quán tính theo. Điều kiện cân bằng: $\sum Q_k + Q_e^{qt} = 0$. Lực quán tính theo ở mỗi chất điểm là:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = m(e + l \sin \varphi) \omega^2 = (e + l \sin \varphi) \omega^2 P / g$$

Lực đàn hồi ở mỗi chất điểm là: $F_{dh} = c\Delta l = cl(\sin \varphi - \sin \varphi_o)$

Theo nguyên lý công ảo ta có: $\sum \delta A = 0$

$$Q\delta y_C + F_{dhA}\delta x_A - F_{dhB}\delta x_B - F_{eA}^{qt}\delta x_A + F_{eB}^{qt}\delta x_B = 0$$

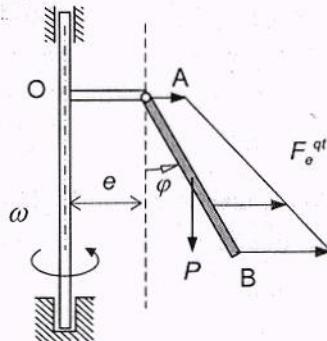
$$y_C = l \cos \varphi \Rightarrow \delta y_C = -l \sin \varphi \delta \varphi$$

$$x_B = -x_A = e + l \sin \varphi \Rightarrow \delta x_B = -\delta x_A = l \cos \varphi \delta \varphi$$

Thay vào công thức trên ta có:

$$-Ql \sin \varphi - cl^2 \cos \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_o) + 2Pl \omega^2 \cos \varphi (e + l \sin \varphi) / g = 0$$

$$\omega^2 = g \frac{Q \tan \varphi + 2cl^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_o)}{2P(e + l \sin \varphi)}$$



19-6. Chọn khối A là hệ quy chiếu động, tọa độ suy rộng là φ . Lực quán tính theo:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = -m\ddot{x} = mhp^2 \sin(pt).$$

Áp dụng phương trình vi phân của vật quay ta có:

$$\begin{aligned} J_z\ddot{\varphi} &= J_z\bar{\varepsilon} = \sum_k \bar{m}_z(\vec{F}_k^{hd}) + \sum_k \bar{m}_z(\vec{F}_k^{qt}) \\ \Rightarrow J\ddot{\varphi} &= \bar{m}_A(m\vec{g}) + \bar{m}_A(\vec{F}_e^{qt}) = -mga \sin \varphi - F_e^{qt}a \cos \varphi \\ \Rightarrow J\ddot{\varphi} &= -mga \sin \varphi + mhp^2 a \cos \varphi \sin(pt) \end{aligned}$$

Do góc φ nhỏ nên lấy xấp xỉ $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$.

Vậy phương trình vi phân chuyển động của con lắc đối với khối A là :

$$J\ddot{\varphi} + mga\varphi = mahp^2 \sin(pt).$$

19-7. Chọn hệ quy chiếu động là giá thẳng đứng.

Lực quán tính theo: $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = m\ddot{y} = m\ddot{\xi}(t)$.

Áp dụng phương trình vi phân chuyển động của vật quay ta có:

$$\begin{aligned} J_z\ddot{\varphi} &= J_z\bar{\varepsilon} = \sum_k \bar{m}_z(\vec{F}_k^{hd}) \\ \Rightarrow J\ddot{\varphi} &= \bar{m}_A(m\vec{g}) + \bar{m}_A(\vec{F}_e^{qt}) - M = (mg + F_e^{qt})a \cos \varphi - M \end{aligned}$$

Do góc φ nhỏ $\Rightarrow \cos \varphi \approx 1 \Rightarrow J\ddot{\varphi} = (mg + m\ddot{\xi}(t))a - c(\varphi - \varphi_0)$.

Mặt khác: $c\varphi_0 = mga \Rightarrow J\ddot{\varphi} + c\varphi = ma\ddot{\xi}(t)$.

Vậy phương trình vi phân chuyển động của con lắc đối với A là :

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = ma\ddot{\xi}(t).$$

19-8. Chọn hệ quy chiếu động là vành tròn. Lực quán tính của vật quay là:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = mR\omega^2 \sin \varphi$$

Lực quán tính Coriolis của điểm M là: $\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}$,

vậy \vec{F}_c^{qt} có phương vuông góc với mặt phẳng của vành.

Lực đàn hồi của lò xo: $F_{dh} = cR(\varphi - \varphi_0)$.

Phương trình vi phân chuyển động của khuyên là:

$$m\ddot{a} = \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_c^{qt} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_{dh}$$

Chiếu lên phương tiếp tuyến của vành tròn tại điểm M ta có: $a = \ddot{s} = R\ddot{\varphi}$

$$mR\ddot{\varphi} = P \sin \varphi - F_{dh} + F_e^{qt} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow mR\ddot{\varphi} = mg \sin \varphi - cR(\varphi - \varphi_0) + mR\omega^2 \cos \varphi \sin \varphi$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động tương đối của khuyên là:

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{c}{m}(\varphi - \varphi_0) - \frac{g}{R} \sin \varphi = 0.$$

19-9. Chọn hệ quy chiếu động là mặt phẳng quay. Thanh chuyển động song phẳng.
Lực quán tính thu về khối tâm:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_e^n$$

Ngẫu lực quán tính khi thu về khối tâm:

$$d\vec{F}_e^{qt} = -\vec{a}_e dm, \quad dm = (m/2l)ds$$

$$a_e = \omega^2(x_C + s \cos \varphi)$$

với s là khoảng cách từ phân tố dm (M) đến C.

Ta suy ra các hệ thức:

$$m_C(\vec{F}^{qt}) = \int_l m_C(d\vec{F}^{qt})$$

$$m_C(\vec{F}^{qt}) = - \int_l (m/2l)[\omega^2(x_C + s \cos \varphi)] s \sin \varphi ds = -\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \sin 2\varphi$$

PTVP vật chuyển động song phẳng:

$$m\vec{a}_C^r = \sum \vec{F}_k + \sum \vec{F}^{qt}, \quad J_C \ddot{\varphi} = \sum m_C(\vec{F}_k) + \sum m_C(\vec{F}^{qt}), \quad \vec{F}^{qt} = -m\vec{a}_C^e$$

$$F_{ex}^{qt} = m\omega^2 x_C \Rightarrow m\ddot{x}_C = m\omega^2 x_C \Rightarrow \ddot{x}_C - \omega^2 x_C = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_C = -mg \Rightarrow \ddot{y}_C + g = 0$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động của thanh A là :

$$\ddot{x}_C - \omega^2 x_C = 0, \quad \ddot{y}_C + g = 0, \quad J_C \ddot{\varphi} = \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi} = -\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 \sin 2\varphi.$$

Trong trường hợp mặt phẳng quay với vận tốc góc biến đổi $\omega = \omega(t)$ phương trình chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng quay cũng có dạng như trên.

19-10. Chọn hệ quy chiếu động là khung OAB. Lực quán tính của vật quay là :

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = m\omega^2(l+x) \sin \varphi$$

Lực quán tính Coriolis của điểm M là:

$$\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_e = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}, \text{ vuông góc với mặt phẳng khung.}$$

Lực đàn hồi của lò xo : $F_{dh} = cx$

Phương trình vi phân chuyển động của khuyên là :

$$m\ddot{a} = \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt} = \vec{N} + \vec{P} + \vec{F}_c^{qt} + \vec{F}_e^{qt} + 2\vec{F}_{dh}$$

Chiếu phương trình lên phương Ax ta có :

$$m\ddot{x} = P \cos \varphi + m(l+x)\omega^2 \sin \varphi \sin \varphi - 2cx$$

Ta suy ra:

$$\ddot{x} + x(2c/m - \omega^2 \sin^2 \varphi) = g \cos \varphi + l\omega^2 \sin^2 \varphi.$$

19-11. Chọn hệ động là khung ODC.

Lực quán tính Coriolis: $\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_e = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r$, vuông góc với mặt phẳng khung

nên lực suy rộng của nó $Q_c^{qt}(\vec{F}_c^{qt}) = 0$.

Tổng công ảo của các lực hoạt động trong di chuyển ảo $\delta\varphi$:



$$\Sigma \delta A^{hd} = \vec{P} \delta \vec{y}_C + \vec{F}_{dh} \delta \vec{y}_A, \quad \Sigma \delta A^{qdt} = -P \delta y_C + F_{dh} \delta y_A$$

với $y_C = \frac{1}{2}l \cos \varphi \Rightarrow \delta y_C = -\frac{1}{2}l \sin \varphi \delta \varphi$, $y_A = l \cos \varphi \Rightarrow \delta y_A = -l \sin \varphi \delta \varphi$,

$$P = mg, \quad F_{dh} = cl(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Thay vào công thức trên ta có :

$$\Sigma \delta A^{hd} = [mg \sin \varphi - cl^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \sin \varphi] \delta \varphi$$

$$\Rightarrow Q^{hd} = mg \sin \varphi - cl^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \sin \varphi.$$

Tổng công ảo của các lực quán tính:

$$\Sigma \delta A^{qdt} = R^{qdt} \delta x_G$$

$$\text{Có } x_G = \frac{2}{3}l \sin \varphi \Rightarrow \delta x_G = \frac{2}{3}l \cos \varphi \delta \varphi$$

$$\Sigma \delta A^{qdt} = \frac{1}{2}ml\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \frac{2}{3}l \delta \varphi \Rightarrow Q_e^{qdt} = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 \sin 2\varphi$$

Động năng của hệ chuyển động tương đối:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2, \quad J_C = \frac{1}{12}ml^2$$

$$x_C = \frac{1}{2}l \sin \varphi \Rightarrow \dot{x}_C = \frac{1}{2}l\dot{\varphi} \cos \varphi; \quad y_C = \frac{1}{2}l \cos \varphi \Rightarrow \dot{y}_C = -\frac{1}{2}l\dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow v_C^2 = \frac{1}{4}l^2\dot{\varphi}^2,$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{12}ml^2\dot{\varphi}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2$$

Áp dụng phương trình lagrange loại 2 ta có:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q^{hd} + Q_e^{qdt} + Q_c^{qdt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}mgl \sin \varphi - cl^2 \sin \varphi (\cos \varphi + \cos \varphi_0) + \frac{1}{6}ml^2\omega^2 \sin 2\varphi$$

Phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng DOC:

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2 \sin 2\varphi - \frac{3c}{m} \sin \varphi (\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \frac{3g}{2l} \sin \varphi = 0.$$

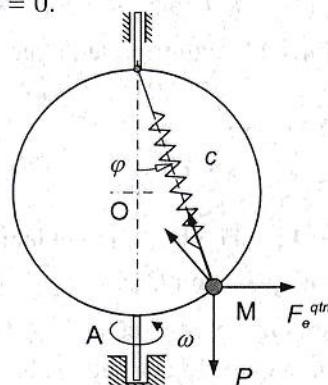
19-12. Lưu ý góc AOM = 2\varphi . Động năng tương đối

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2R\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} \cdot 4mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$\text{Thể năng: } \Pi = -mgR \cos 2\varphi + \frac{1}{2}c(2R \cos \varphi - l_0)^2$$

Lực suy rộng của lực quán tính theo:

$$F_e^{qdt} = m\omega^2 R \sin 2\varphi$$



$$\begin{aligned}\delta A(F_e^{qtn}) &= m\omega^2 R \sin 2\varphi \delta(R \sin 2\varphi) \\ &= [2m\omega^2 R^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi] \delta\varphi\end{aligned}$$

Lực quán tính Coriolis:

$$\vec{F}_c^{qt} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r,$$

vuông góc với mặt phẳng khung nên lực suy rộng của nó $Q_c^{qt}(\vec{F}_c^{qt}) = 0$.

Áp dụng phương trình lagrange loại 2 ta có :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q^{hd} + Q_e^{qt} + Q_c^{qt} \Rightarrow \\ 4mR\ddot{\varphi} - m\omega^2 R \sin 4\varphi + 2mg \sin 2\varphi - 2c \sin \varphi (2R \cos \varphi - l_0) &= 0.\end{aligned}$$

19-13. Chọn hệ động là khung AOB. Đặt các lực quán tính lên từng chất điểm của thanh, ta nhận được 2 hệ lực quán tính phân bố tam giác như hình vẽ. Thu gọn 2 hệ lực quán tính trên ta được R_1^{qt} , R_2^{qt} qua trọng tâm của các tam giác của các lực phân bố :

$$R_1^{qt} = m_1 a_{C1} = \frac{1}{2} a m_1 \omega^2 \sin \varphi, \quad R_2^{qt} = m_2 a_{C2} = \frac{1}{2} b m_2 \omega^2 \cos \varphi,$$

trong đó $m_1 = \gamma a$ và $m_2 = \gamma b$, với γ là khối lượng riêng của thanh.

Phương trình vi phân chuyển động của vật quay trong chuyển động tương đối là:

$$\begin{aligned}J_O \ddot{\varphi} &= \Sigma \bar{m}_O (\vec{F}_k) + \Sigma \bar{m}_O (\vec{F}_k^{qt}) \\ \Rightarrow J_O \ddot{\varphi} &= -\frac{1}{2} m_1 g a \sin \varphi + \frac{2}{3} a R_1^{qt} \cos \varphi - \frac{1}{2} b m_2 g \cos \varphi + \frac{2}{3} b R_2^{qt} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}J_0 &= \frac{1}{3} m_1 a^2 + \frac{1}{2} m_2 b^2 = \frac{1}{3} \gamma (a^3 + b^3) \\ \Rightarrow \frac{1}{3} \gamma (a^3 + b^3) \ddot{\varphi} &= -\gamma a g \frac{1}{2} a \sin \varphi + \gamma a \frac{1}{2} a \omega^2 \sin \varphi \frac{2}{3} a \cos \varphi + \\ &\quad + \gamma b g \frac{1}{2} b \cos \varphi - \gamma b \frac{1}{2} b \omega^2 \cos \varphi \frac{2}{3} b \sin \varphi \\ \Rightarrow (a^2 + b^2) \ddot{\varphi} - \frac{3}{2} (a^2 \sin \varphi - b^2 \cos \varphi) - \frac{1}{2} \omega^2 (b^3 - a^3) \sin 2\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng AOB:

$$(a^2 + b^2) \ddot{\varphi} - \frac{3}{2} (a^2 \sin \varphi - b^2 \cos \varphi) - \frac{1}{2} \omega^2 (b^3 - a^3) \sin 2\varphi = 0.$$

19-14.

Chọn chiều dương trục Oz, đặt các lực thật và lực quán tính: $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_e^{qt}, \vec{F}_c^{qt}$.

Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt}.$$

Chiều lên trục Oz ta được :

$m\ddot{z} = -P \cos \alpha + F_e^{qt} \sin \alpha$,
với $F_e^{qt} = mr\omega^2 = mz \sin \alpha \omega^2$, ta nhận được:

$$m\ddot{z} = -mg \cos \alpha + mz\omega^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{z} - \omega^2 \sin^2 \alpha z = -g \cos \alpha.$$

Nghiệm tổng quát:

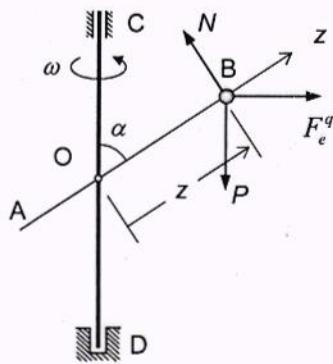
$$z(t) = \frac{mg \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + C_1 e^{(\omega \sin \alpha)t} + C_2 e^{-(\omega \sin \alpha)t}.$$

Từ điều kiện đầu $z(0) = a, \dot{z}(0) = 0$, ta nhận được:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \frac{a - g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}.$$

Điều kiện để chất diem đứng cân bằng trên ống:

$$\ddot{z} = 0, \dot{z} = 0, z = a \Rightarrow -mg \cos \alpha + m a \omega^2 \sin^2 \alpha = 0 \Rightarrow \omega^2 = g \cos \alpha / (a \sin^2 \alpha).$$



19-15. Đặt các lực thật và lực quán tính:

$$\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_e^{qt}, \vec{F}_C^{qt}.$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_C^{qt}$$

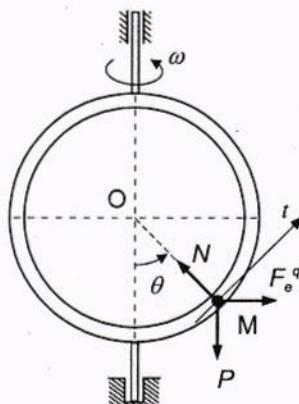
Chiếu lên phương tiếp tuyến với vành:

$$ma_r^t = -P \sin \theta + F_e^{qt} \cos \theta,$$

với $F_e^{qt} = mr\omega^2 = (mR \sin \theta)\omega^2$, ta nhận được:

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + (mR \sin \theta)\omega^2 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow R\ddot{\theta} + (g - R\omega^2 \cos \theta) \sin \theta = 0.$$



Lưu ý: Có thể sử dụng định lý biến thiên động năng, định lý biến thiên mômen động lượng, phương trình lagrange loại 2 trong chuyển động tương đối để giải bài toán này.

19-16. Đặt các lực thật và lực quán tính và sử dụng phương pháp tách vật:

$$m_2\ddot{y} = T - m_2g, \quad m_1\ddot{r} = m_1r\omega^2 - T, \quad \ddot{y} = \ddot{r}.$$

$$(m_2 + m_1)\ddot{r} = m_1r\omega^2 - m_2g, \quad \dot{r}(0) = 0, \quad r(0) = r_0$$

$$\ddot{r} - \frac{m_1\omega^2}{(m_2 + m_1)}r = -\frac{m_2g}{(m_2 + m_1)} \Rightarrow \ddot{r} - \lambda^2 r = -\frac{m_2g}{(m_2 + m_1)}, \quad \lambda^2 = \frac{m_1\omega^2}{(m_2 + m_1)}$$

Giải được:

$$r(t) = A e^{\lambda t} + B e^{-\lambda t} - \frac{m_2g}{m_1 + m_2}.$$

Từ điều kiện đầu giải được các hằng số tích phân A, B . Lưu ý rằng lực quán tính Coriolis không tham gia vào phương trình vi phân chuyển động.

$$r(0) = A + B - \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = r_0, \quad \dot{r}(0) = (A - B)\lambda = 0$$

Vậy: $A = B = \frac{1}{2} \left(r_0 + \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \right)$,

$$r(t) = [r_0 + \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}] \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}) - \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

19-17. Phương trình vi phân chuyển động tương đối:

$$m\ddot{r} = -c(r + \delta_o) - mg \sin \alpha + m\Omega^2(r \cos \alpha) \cos \alpha$$

Tại vị trí cân bằng tĩnh:

$$\ddot{r} = 0, \dot{r} = 0, r = 0$$

$$-c(0 + \delta_o) - mg \sin \alpha = 0 \Rightarrow \delta_o = -\frac{mg}{c} \sin \alpha$$

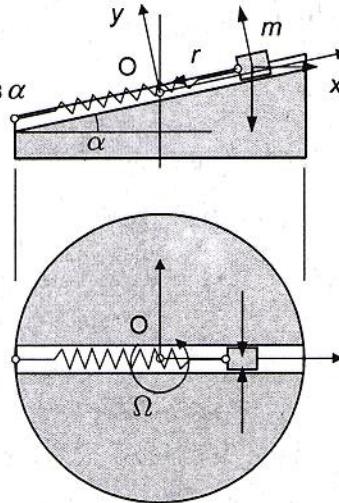
Nghĩa là lò xo đã bị nén một đoạn: $\delta_o = \frac{mg}{c} \sin \alpha$,

do đó ta có:

$$m\ddot{r} + [c - m\Omega^2 \cos^2 \alpha]r = 0.$$

Chất điểm thực hiện dao động điều hòa khi:

$$c > m\Omega^2 \cos^2 \alpha.$$



19-18. Chọn hệ quy chiếu động là Oxy gắn vào trực quay. Xét chuyển động tương đối của hệ, một bậc tự do, với tọa độ suy rộng α . Các lực hoạt động gồm các trọng lực và lực đàn hồi tuyến tính.

– Lực quán tính theo ở mỗi chất điểm:

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \Rightarrow F_e^{qt} = m_1(e + L \sin \alpha)\omega^2.$$

– Biểu thức thế năng của hệ: Với lượng biến dạng $\Delta = (2L - 2L \cos \alpha)$ của lò xo ta suy ra:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} c\Delta^2 - m_1gL \cos \alpha - m_1gL \cos \alpha - m_2g2L \cos \alpha \\ &= 2cL^2(1 - \cos \alpha)^2 - 2gL(m_1 + m_2) \cos \alpha. \end{aligned}$$

– Lực suy rộng của lực hoạt động:

$$Q_\alpha^p = -\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = -4cL^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha - 2gL(m_1 + m_2) \sin \alpha.$$

Lực suy rộng của lực quán tính: $Q_\alpha^{qt} = 2F_e^{qt}L \cos \alpha = 2m_1L(e + L \sin \alpha)\omega^2 \cos \alpha$.

Ta suy ra:

$$Q_\alpha = -4cL^2(1 - \cos \alpha) \sin \alpha - 2gL(m_1 + m_2) \sin \alpha + 2m_1L(e + L \sin \alpha)\omega^2 \cos \alpha.$$

Từ điều kiện cân bằng tương đối, ta suy ra:

$$Q_\alpha = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{[2cL(1 - \cos \alpha) + (m_1 + m_2)g]\tan \alpha}{m_1(e + L \sin \alpha)}.$$

CHƯƠNG 20: DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH

20-1. Độ cứng các lò xo: $c_1 = 3EI / l_1^3$, $c_2 = AE / l_2$, $c_3 = c$.

a) c_1 song song (c_2 nối tiếp c_3)

$$c_{23} = \frac{c_2 c_3}{c_2 + c_3}, \quad c^* = c_1 + c_{23}, \quad \omega_o = \sqrt{c^* / m}$$

b) (c_1 song song c_2) nối tiếp c_3 :

$$c_{12} = c_1 + c_2, \quad c^* = \frac{c_{12} c_3}{c_{12} + c_3}, \quad \omega_o = \sqrt{c^* / m}.$$

20-2. Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(2a\dot{\varphi})^2.$$

Thể năng của hệ:

$$\pi = \frac{1}{2} c(2a\varphi)^2 + \frac{1}{2} c(a\varphi)^2 + mg2a \cos \varphi = \frac{1}{2} \cdot 5ca^2\varphi^2 + mg2a \cos \varphi.$$

Phương trình vi phân chuyển động:

$$m(2a)^2\ddot{\varphi} + 5ca^2\varphi - 2mga \sin \varphi = 0.$$

Vị trí cân bằng: $\varphi_o = 0$, tuyền tính hóa quanh vị trí cân bằng $\varphi_o = 0$, $\sin \varphi \approx \varphi$.

$$4ma^2\ddot{\varphi} + (5ca^2 - 2mga)\varphi = 0, \quad \ddot{\varphi} + \omega_o^2\varphi = 0, \quad \omega_o^2 = (5ca^2 - 2mga)/(4ma^2).$$

Điều kiện để có dao động quanh vị trí cân bằng ($\varphi = 0$) là $5ca - 2mg > 0$.

20-3. Phương trình dao động nhỏ khi treo đầu A lên mấu O:

$$J_A\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_A^2\varphi = 0, \quad \omega_A^2 = mga / J_A$$

Chu kỳ dao động quanh A: $T_A = 2\pi / \omega_A = 2\pi\sqrt{J_A / (mga)}$.

$$J_A = mga(T_A / 2\pi)^2. \quad (1)$$

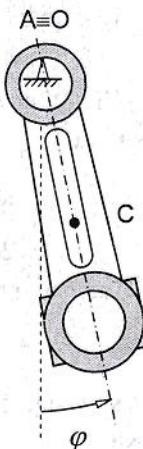
Khi treo đầu B lên mấu O, làm tương tự trên ta có :

$$J_B = mgb(T_B / 2\pi)^2 = mg(l-a)(T_B / 2\pi)^2. \quad (2)$$

Kết hợp với :

$$J_A = J_C + ma^2, \quad J_B = J_C + mb^2 = J_C + m(l-a)^2. \quad (3)$$

Từ đó ta giải được a, J_C .



20-4. Mô hình cơ học khi vỏ máy chưa bật khỏi nền như hình bên.

Phương trình vi phân dao động có dạng:

$$M\ddot{x} + bx + cx = m_0\Omega^2 \sin \Omega t, \quad \Omega = \pi n / 30$$

hay: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = x_0\Omega^2 \sin \Omega t$, với $x_0 = m_0e / M, \omega_0^2 = c / M, \delta = b / 2M$.

Tìm nghiệm cưỡng bức dưới dạng:

$$x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t = C \sin(\Omega t - \varphi).$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Văn Khang: *Cơ học kỹ thuật*. NXB Giáo dục, 2009.
- [2] Trần Hữu Duẩn, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Thế Tiến: *Bài tập Cơ học lý thuyết*. NXB Đại học và THCN, 1970.
- [3] Đỗ Sanh, Nguyễn Văn Đình, Nguyễn Nhật Lệ: *Bài tập Cơ học, Tập 1*. NXB Giáo dục, 2008.
- [4] Đỗ Sanh, Lê Doãn Hồng: *Bài tập Cơ học, Tập 2*. NXB Giáo dục, 2008.
- [5] Nguyễn Nhật Lệ: *Bài Tập Cơ học kỹ thuật*. NXB Bách khoa, 2009.
- [6] Nguyễn Văn Đạo: *Bài tập Cơ học giải tích*. NXB Đại học quốc gia, 2002.
- [7] V. Meserkii: *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết* (in lần thứ 34 – Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva, 1975.
- [8] V. A. Svetlitxii, I. V. Stasenko: *Tuyển tập bài tập Lý thuyết dao động* (Tiếng Nga). NXB Cao đẳng, Moskva, 1973.
- [9] K. S. Kolesnikov: *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết* (Tiếng Nga). NXB Khoa học, Moskva, 1989.
- [10] F. P. Beer and E. R. Johnston: *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*. McGraw Hill, Boston, 1997.
- [11] F. P. Beer, E. R. Johnston, G. W. Rown and G. Will: *Complete Solutions Manual to accompany Vector Mechanics for Engineers, Statics*. McGraw Hill, New York, 1990.
- [12] F. P. Beer, E. R. Johnston: *Solution Manual to Dynamics*. McGraw-Hill, 1976.
- [13] R. C. Hibbeler: *Engineering Mechanics – Statics* (11. Edition). Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2007.
- [14] R. C. Hibbeler: *Engineering Mechanics –Dynamics* (11. Edition). Prentice Hall, Upper Saddle River , New Jersey, 2007.
- [15] J. L. Meriam and L. G. Kraige: *Engineering Mechanics, Volum I-Statics* (5. Edition), John Wiley and Sons, New York, 2003.
- [16] J. L. Meriam and L.G. Kraige: *Engineering Mechanics, Volum 2-Dynamics* (5. Edition). John Wiley and Sons, New York, 2003.
- [17] Bedford, W. Fowler: *Engineering Mechanics - Dynamics* (4. Edition). Prentice Hall, Upper Saddle River , New Jersey, 2005.
- [18] S. G. Kelly: *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill, New York, 1996.

- [19] W. W. Seto: *Theory and Problems of Mechanical Vibrations*. McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1964.
- [20] J. Ginsberg: *Engineering dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2008.
- [21] H. Neuber: *Lösungen zur Aufgabensammlung Mestscherski*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.
- [22] H. H. Müller, K. Magnus: *Übungen zur Technischen Mechanik*. B.G. Teubner Stuttgart 1988.
- [23] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 1: Statik*. (8. Auflage). Springer - Verlag, Berlin, 2004.
- [24] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik* (8. Auflage). Springer -Verlag, Berlin, 2005.
- [25] D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers: *Formeln und Aufgaben zur Technische Mechanik 3* (7. Auflage). Springer -Verlag, Berlin, 2005.
- [26] H. Göldner, D.Witt: *Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik, Band 1 Statik und Festigkeitslehre*. Fachbuchverlag, Leipzig - Köln, 1993.
- [27] H. J. Hardtke, B.Heimann, H. Sollmann: *Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik Band 2, Kinematik/ Kinetik - Systemdynamik- Mechatronik*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 1997.
- [28] H. H. Müller, K. Magnus: *Übungen zur Technischen Mechanik* (3. Auflage). B.G. Teubner Stuttgart, 1988.
- [29] P. Lugner, K. Desoyer, A. Novak: *Technische Mechanik, Aufgaben und Lösungen* (2 .Auflage). Springer-Verlag, Wien 1982.
- [30] A. Böge, W. Schlemmer: *Aufgabensammlung Technische Mechanik* (18. Auflage). Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden, 2006.
- [31] W. Hauger, V. Mannl, W. Wall, E. Werner: *Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3* (5. Auflage). Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [32] H. Ulbrich, H. J. Weidemann, F. Pfeiffer: *Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen*. B.G. Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006.