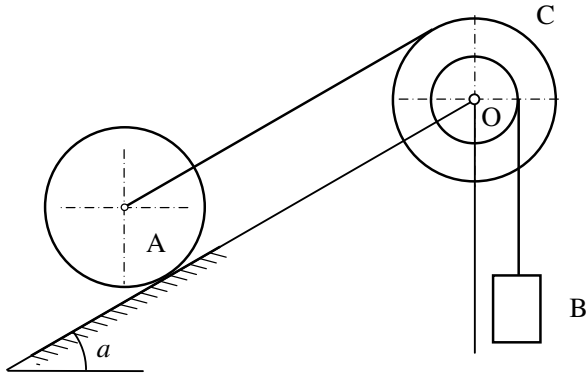


CÁC ĐỀ THI ÔLYMPIC CƠ HỌC
1989-2014

Đề thi năm 1989

Bài 1. Một ròng rọc kép C có bán kính nhỏ r và bán kính lớn R có thể quay quanh trục cố định O cuốn dây không giãn, không trọng lượng. Một đầu dây treo vật nặng B có trọng lượng P_1 chuyển động theo phương thẳng đứng còn đầu kia buộc vào tâm A của bánh xe đồng chất có trọng lượng P_2 bán kính R có thể lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng cố định hợp với phương ngang một góc α . Cho biết ròng rọc kép có bán kính quán tính đối với trục quay O bằng ρ ($J_O = Q\rho^2/g$). Bỏ qua ma sát lăn và ma sát trục quay O.



- 1) Tính gia tốc của vật B. Trong điều kiện nào vật B chuyển động hướng xuống.
- 2) Xác định phản lực tại trục quay O và sức căng trong đoạn dây treo vật B.
- 3) Trong trường hợp nào vật B chuyển động thẳng đều (khi nào hướng xuống, khi nào hướng lên).

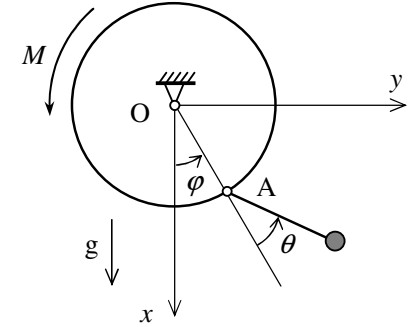
Bài 2. Một xe ô-tô tải trở một tấm bê tông nặng đang chuyển động với vận tốc v thì được hãm lại. Giả thiết rằng trong quá trình hãm xe lực hãm được xem là không đổi và xe chuyển động tịnh tiến thẳng. Tính đoạn đường hãm (đoạn đường xe đi được kể từ lúc hãm xe đến khi xe dừng hẳn lại) tối thiểu để tấm bê tông không bị dịch chuyển so với sàn xe. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa tấm bê tông và sàn xe bằng f .

Bài 3. Một búa nghiền được mô hình dưới dạng một tang quay có treo một con lắc toán học treo tại điểm A trên vành của tang có chiều dài bằng l và khối lượng bằng m . Tang được xem là một đĩa đồng chất tâm O có bán kính R khối lượng M chịu tác dụng ngẫu lực M . Bỏ qua ma sát tại trục quay.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ (chọn các tọa độ suy rộng là φ và θ , trong đó φ là góc quay của tang, và θ là góc lệch của AB đối với bán kính OA của tang).

2) Chứng minh rằng nếu $M = 0$ và bỏ qua tác dụng của trọng lực (do nhỏ) thì tang có chế độ quay đều (tức $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{const}$) còn con lắc toán học có vị trí cân bằng đối với tang quay ứng với $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$.

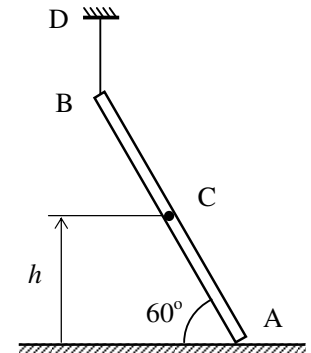
3) Khi con lắc có vị trí cân bằng ($\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$) nhận được độ lệch ban đầu và vận tốc ban đầu bé (tức θ_0 và $\dot{\theta}_0$ bé) thì con lắc sẽ dao động quanh vị trí cân bằng. Tìm quy luật của dao động bé đó (trong dao động bé lấy $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$). Giả thiết trong quá trình chuyển động dây luôn luôn ở trạng thái căng.



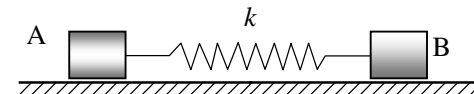
Đề thi năm 1990

Bài 1. Thanh đồng chất AB dài $2l$, trọng lượng P đầu A tựa trên sàn ngang nhẵn và lập với sàn một góc 60° , đầu B được treo bằng dây DB thẳng đứng không giãn, không trọng lượng. Tại một thời điểm nào đó dây bị đứt đứt và thanh bắt đầu chuyển động.

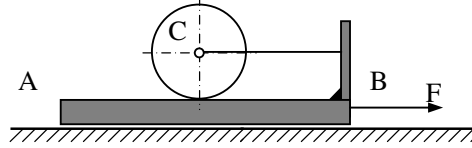
- 1) Xác định áp lực của thanh lên sàn ở thời điểm thanh bắt đầu chuyển động.
- 2) Tìm vận tốc khối tâm C của thanh phụ thuộc độ cao h so với sàn.
- 3) Xác định quỹ đạo đầu B của thanh.



Bài 2. Hai vật nặng A và B có khối lượng lần lượt là m và $2m$, nối với nhau bằng lò xo có độ cứng k và nằm trên mặt ngang nhẵn. Tại thời điểm đầu người ta kéo hai vật về hai phía sao cho lò xo bị giãn ra một đoạn bằng ρ , rồi thả các vật ra không có vận tốc ban đầu. Hãy tìm vận tốc của vật A ở thời điểm khi độ biến dạng của lò xo bằng không.



Bài 3. Một tấm AB có khối lượng m chịu tác dụng của lực F theo phương ngang, chuyển động không ma sát dọc theo sàn ngang. Một con lăn có khối tâm C, bán kính R , khối lượng m_0 mômen quán tính J đối với trục đi qua C và thẳng góc với mặt phẳng đáy của con lăn. Con lăn được giữ đứng yên trên tấm AB bằng một sợi dây căng không giãn, không trọng lượng, một đầu dây buộc vào tâm con lăn, một đầu buộc vào thành đứng của tấm AB.

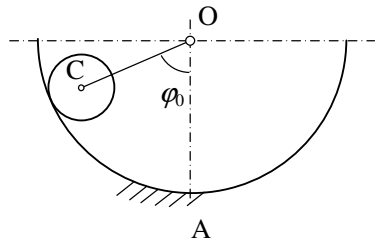


- 1) Tìm gia tốc của tấm AB.
- 2) Xác định sức căng của dây (giả thiết dây luôn luôn căng).
- 3) Giả sử con lăn được đặt tự do trên tấm (không có dây buộc). Tìm chuyển động của tấm khi con lăn lăn không trượt trên tấm, bỏ qua ngẫu lực ma sát lăn giữa con lăn và tấm. Ban đầu cơ hệ đứng yên.
- 4) Xác định hệ số ma sát trượt giữa con lăn và tấm để con lăn lăn không trượt đối với tấm AB.

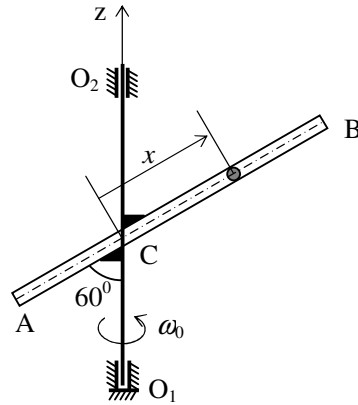
Đề thi năm 1991

Bài 1. Ống AB dài L có khối lượng $6m$ quay xung quanh trục thẳng đứng O_1O_2 lập với nó một góc 60° . Trong ống có quả cầu khối lượng m , lúc đầu nó đứng yên trong ống tại điểm giữa của đoạn CB. Vận tốc góc ban đầu của ống là ω_0 , $CB = 2L/3$. Bỏ qua khối lượng trục quay, ma sát trong ống và ở các ổ trục quay.

Tìm gia tốc góc của ống tại thời điểm quả cầu đến đầu B của ống.

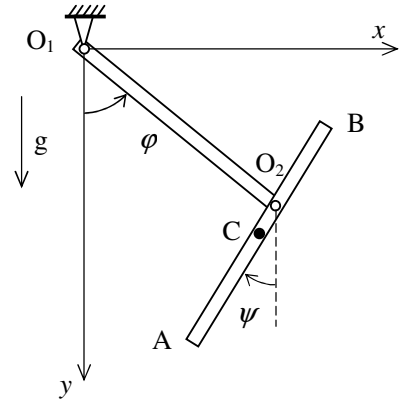


Bài 2. Trụ đặc đồng chất có bán kính r , lăn không trượt bên trong ống trụ bán kính R . Trụ lăn xuống từ trạng thái đứng yên và tại vị trí góc $\angle OAB = \varphi_0$ như hình vẽ, hệ số ma sát lăn là k . Xác định vận tốc của tâm C trụ đặc tại thời điểm nó ở vị trí thấp nhất.



Bài 3. Hai thanh đồng chất O_1O_2 và AB có cùng độ dài là $2L$, khối lượng là m chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh O_1O_2 quay xung quanh trục nằm ngang cố định đi qua O_1 . Thanh AB gắn bản lề trụ với thanh O_1O_2 tại O_2 . Cho $O_2A = a > L$. Bỏ qua ma sát ở các bản lề tại O_1 và O_2 .

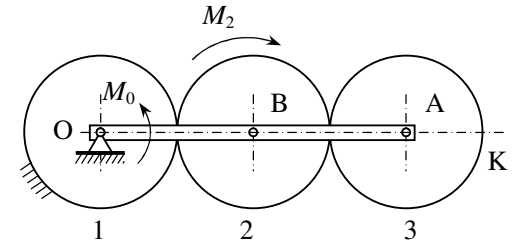
- 1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
- 2) Khảo sát chuyển động của cơ hệ ở trường hợp O_2 là điểm giữa của AB, nếu thời điểm ban đầu $\varphi = \varphi_0$ và $\dot{\varphi} = 0$, thanh O_1O_2 đứng yên còn thanh AB có vận tốc góc là ω_0 .



Đề thi năm 1992

Bài 1. Một cơ cấu hành tinh nằm trong mặt phẳng ngang như hình vẽ. Cơ cấu chuyển động từ trạng thái tĩnh do tác dụng của một ngẫu lực phát động có mômen M_0 không đổi đặt vào tay quay OA. Tay quay OA xem là một thanh đồng chất, thiết diện không đổi và có khối lượng là m_0 . Các bánh răng 1, 2, 3 xem là ba đĩa tròn đồng chất, giống nhau về kích thước, bán kính mỗi đĩa là r , khối lượng mỗi đĩa là m . Trên bánh răng 2 chịu tác dụng ngẫu lực cân có mômen M_2 tỷ lệ bậc nhất với vận tốc góc ω_2 , hệ số tỷ lệ là b .

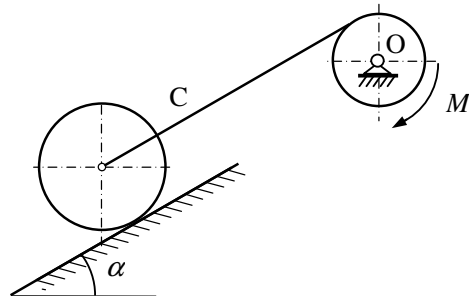
- 1) Xác định vận tốc góc tay quay OA dưới dạng hàm của thời gian.
- 2) Xác định vận tốc, gia tốc của điểm K (giao điểm của phần kéo dài tay quay OA và vành bánh xe 3 ở thời điểm tùy ý.
- 3) Vẽ quỹ đạo điểm K khi tay quay OA quay được một góc 45° .



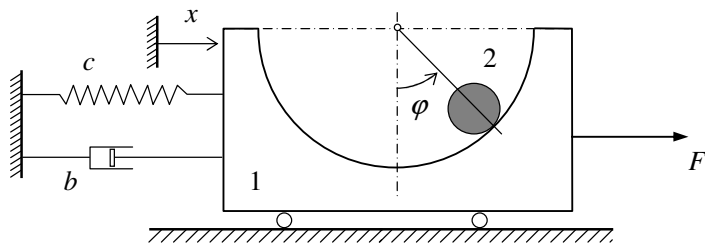
Bài 2. Cho một cơ hệ như hình vẽ. Tang quay O bán kính r_1 , trọng lượng P_1 . Một đầu dây quấn vào tang quay, đầu kia buộc vào trục C của con lăn có trọng lượng P_2 , bán kính r_2 . Trên tang quay tác dụng một ngẫu lực có mômen $M(t)$. Con lăn C lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng một góc α với phương nằm ngang. Bỏ qua ma sát ở trục O. Bỏ qua ma sát lăn, còn hệ số ma sát trượt giữa trục C và mặt đường là f . Coi dây là không giãn, không trọng lượng. Dây kéo song song với mặt phẳng nghiêng. Tang quay O và con lăn C xem là những trụ tròn đồng chất.

1) Cho $M(t) = M_0 - b\omega_1$, trong đó M_0 và b là các hằng số dương, ω_1 là trị số vận tốc góc của tang quay. Tìm biểu thức vận tốc góc của tang quay là hàm của thời gian. Biết rằng ban đầu hệ đứng yên.

2) Giả sử khi tang đang quay với vận tốc góc $\omega_1 = \omega_1^*$ thì dây bị đứt. Xác định quy luật chuyển động của khối tâm C của con lăn. Biết rằng sau khi dây đứt con lăn vẫn chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Tìm điều kiện để con lăn không trượt?



Bài 3. Trong xà 1 khối lượng m_1 có khoét theo chiều dọc một rãnh trụ có bán kính R , một hình trụ tròn đồng chất 2 bán kính r , khối lượng m_2 lăn không trượt trong rãnh. Trụ rãnh và trụ hình trụ 2 song song với nhau. Xà 1 chuyển động trên mặt phẳng ngang nhờ dưới tác dụng của lực ngang $F = F_0 \sin \Omega t$, lực đàn hồi tuyến tính của lò xo có độ cứng c và lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc có hệ số cản b .



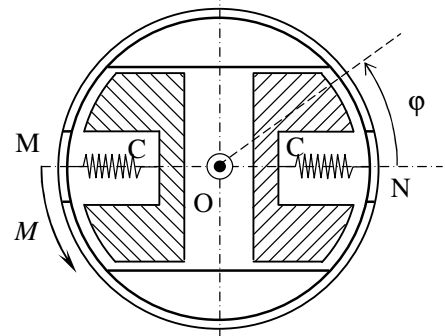
1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Tìm gia tốc của xà 1 và gia tốc góc của trụ 2 ở thời điểm đầu. Biết rằng khi $t = 0$ hệ nằm yên, lò xo chưa biến dạng, còn đường nối tâm của trụ với tâm của rãnh lệch với phương thẳng đứng một góc 30° .

2) Giả thiết khối lượng của hình trụ 2 rất bé so với khối lượng của xà 1 ($m_2 \ll m_1$), do đó khi tính toán thiết kế sơ bộ xem $m_2 = 0$. Với giả thiết trên hãy xác định hệ số cứng c cần thiết để cho độ dài di chuyển của khối tâm xà 1 ở trạng thái chuyển động bình ổn không vượt quá 10 cm.

Cho biết: $m_1 = 20 \text{ kg}$, $F_0 = 200 \text{ N}$, $g = 1000 \text{ cm/s}^2$, $b = 0.5 \text{ Ns/cm}$.

Đề thi năm 1993

Bài 1. Một thiết bị điều tiết ly tâm được gắn vào trục máy quay quanh trục thẳng đứng. Trục máy cùng các chi tiết gắn trên nó (không kể các quả nặng) có mômen quán tính đối với trục quay bằng J , chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_0 - b\omega$, trong đó M_0 và b là các hằng số dương, ω là trị số vận tốc góc của trục máy. Hai quả nặng mỗi quả có khối lượng m , bán kính quán tính đối với trục qua khối tâm C của nó và song song với trục quay bằng ρ . Các quả nặng có thể trượt trong rãnh MN, nối vào một đầu của lò xo tại khối tâm C của chúng. Đầu kia của lò xo nối với trục máy. Lò xo có độ cứng bằng c , khi không biến dạng thì đầu mút C của nó cách trục quay một khoảng bằng a . Bỏ qua ma sát.



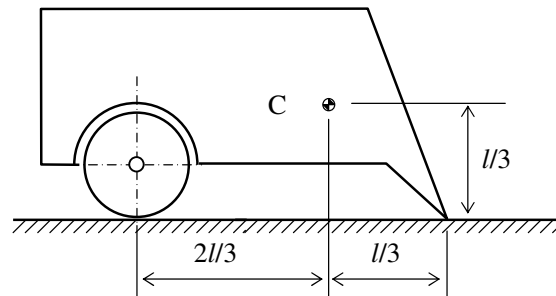
1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

2) Chứng minh rằng tồn tại một chế độ quay đều (chế độ quay bình ổn) của trục máy. Tìm trị số vận tốc góc của chế độ quay đều đó (ứng với giá trị của M_0).

3) Giả sử do nguyên nhân của sự cố M_0 tăng lên một lượng ΔM_0 ($\Delta M_0/M_0 = k$). Tính độ co của lò xo khi trục máy xác lập chế độ quay bình ổn mới.

Chú thích: Giải bài toán trên khi các quả nặng chưa có tác dụng hãm trực tiếp.

Bài 2. Một xe ủi đất có sơ đồ và kích thước cho như trên hình, trọng tâm tại C, khối lượng m . Bánh xe có bán kính r , còn khối lượng bỏ qua được, lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát lăn động giữa mặt đường và bánh xe bằng k , hệ số ma sát trượt động giữa mũi ủi và mặt đường bằng f .



1) Tính công suất động cơ truyền cho trục bánh xe khi xe chạy đều với vận tốc v . Tính thành phần tiếp tuyến của phản lực giữa bánh xe và mặt đường.

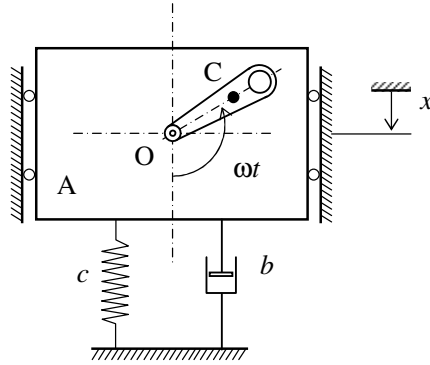
2) Khi xe đạt vận tốc v , người ta tắt động cơ. Tìm quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tắt máy đến lúc xe dừng lại.

Bài 3. Bàn rung có sơ đồ như hình vẽ. Bàn A có khối lượng m_1 đặt trên lò xo có độ cứng c và bộ giảm chấn tạo lực tỉ lệ bậc nhất với vận tốc của bàn rung với hệ số cản không đổi bằng b . Quả văng quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω , có khối lượng m_2 và có bán kính quán tính với trục quay O là ρ . Trọng tâm của quả văng tại C với $OC = a$.

1) Xác định chuyển động của bàn rung trong chế độ bình ổn của nó.

2) Xác định phản lực tại trục quay O của quả văng (thành phần dọc phương OC và thành phần vuông góc với OC) ứng với chế độ bình ổn của bàn rung.

3) Trong chế độ bình ổn của bàn rung hãy tính công suất cần thiết mô tơ truyền cho trục quay của quả văng để duy trì chế độ quay đều của nó. Tính giá trị lớn nhất của lực truyền vào nền nằm ngang (phương thẳng đứng). Bỏ qua ma sát trong ổ trục O.



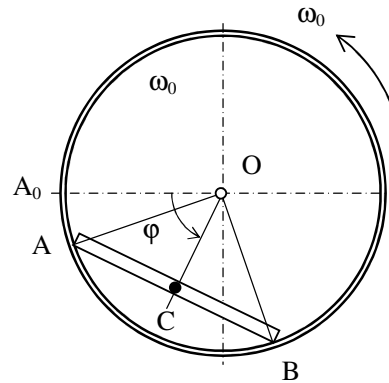
Đề thi năm 1994

Bài 1. Thanh AB đồng chất tiết diện ngang không đổi, dài $2a$, khối lượng m được đặt trong đường tròn nhẵn, có trục nằm ngang qua O cố định. Góc AOB vuông tại O. Trường hợp đường tròn đứng yên.

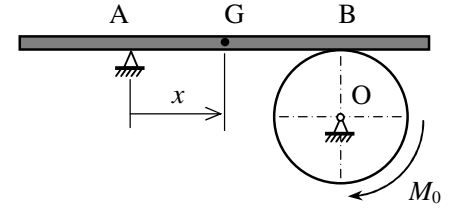
1) Tính vận tốc góc $\dot{\varphi}$ và gia tốc góc $\ddot{\varphi}$ của thanh, biết rằng tại thời điểm đầu $t_0 = 0$, $\varphi(0) = \pi/4$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

2) Xác định phản lực tại A, tính giá trị của nó khi $\varphi = \pi/2$.

3) Giả sử vành tròn quay đều quanh trục nằm ngang của nó với vận tốc góc ω_0 . Tính vận tốc góc tuyệt đối, gia tốc góc tuyệt đối của thanh. Khảo sát vị trí cân bằng tương đối của nó, xác định phản lực tại A.



Bài 2. Thanh AB đồng chất chiều dài không đáng kể, dài $4L$, trọng lượng P có chuyển động trượt theo phương ngang trên giá A từ trạng thái tĩnh với hệ số ma sát động giữa chúng là f . Tời là đĩa đồng chất bán kính R , trọng lượng Q , chịu tác dụng mômen $M_0 = \text{const}$, quay tròn quanh trục nằm ngang qua O cố định. Không có sự trượt tương đối giữa thanh và tời. Lúc đầu trọng tâm G của thanh trùng với A và $AB = L$.



1) Tìm lực ma sát trượt của giá A tác dụng lên thanh là hàm của x , $x = AG$.

2) Xác định quy luật chuyển động $x = x(t)$ của thanh. Gọi τ là thời gian kể từ đầu đến lúc lực ma sát trượt tại A bằng không. Lập phương trình xác định τ , không cần giải phương trình này.

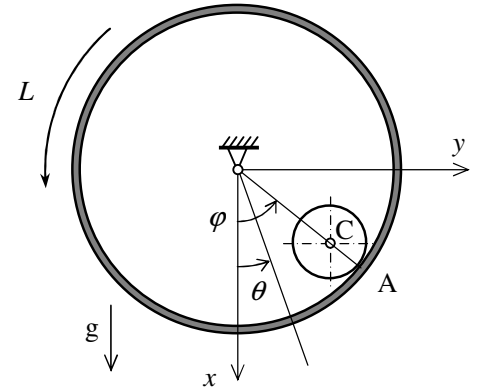
3) Tính lực ma sát trượt của thanh tác dụng lên tời tại B.

Bài 3. Vành tròn đồng chất bán kính R , bề dày rất nhỏ có thể bỏ qua được, khối lượng M , mômen quán tính khối đối với trục nằm ngang $J_0 = MR^2$. Vành này chịu tác dụng mômen L quay tròn quanh trục của nó. Đĩa tròn đồng chất bán kính r , khối lượng m , lăn không trượt trong vành tròn.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo θ và φ .

2) Giả sử rằng vành tròn quay đều với vận tốc góc Ω_0 , xác định mômen L để duy trì chế độ chuyển động đó. Tính vận tốc v_C khi $\varphi = -\pi/3$ với điều kiện đầu $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 2\sqrt{g/[3(R-r)]}$, $R = 120 \text{ cm}$, $r = 20 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

3) Với chế độ quay đều, bỏ qua ma sát lăn, tính phản lực vành tròn tác dụng lên đĩa. Xác định Ω_0 .

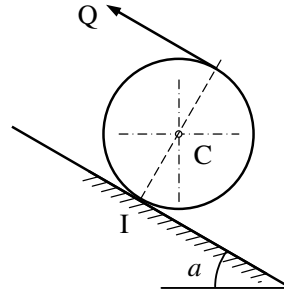


Đề thi năm 1995

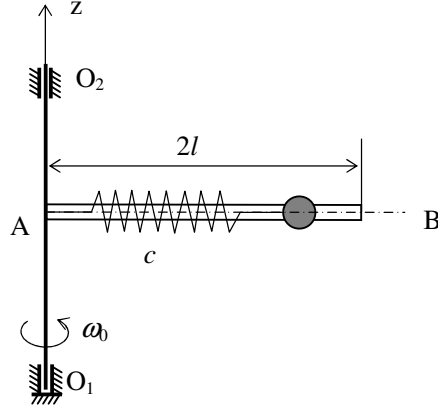
Bài 1. Trụ tròn đồng chất tâm C bán kính R , khối lượng m được kéo lên phía trên từ trạng thái tĩnh, theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α bởi lực Q song song với đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng, chiều chỉ ra trên hình và độ lớn $Q = mg$ (g gia tốc trọng trường). Giả thiết rằng hệ số ma sát trượt f và lăn k giữa trụ tròn và mặt phẳng nghiêng có giá trị không phụ thuộc vào vận tốc.

1) Cho $\alpha = \pi/6$, $f = 1/(5\sqrt{3})$, $k = R/(100\sqrt{3})$, tìm vận tốc điểm I thuộc trụ tròn, tiếp xúc với mặt phẳng nghiêng sau 1 giây tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Tìm tâm vận tốc tức thời của trụ tròn.

2) Tìm góc α^* tới hạn theo f, k, R để chuyển động của trụ tròn trên mặt phẳng nghiêng là lăn không trượt.



Bài 2. Một thanh mảnh đồng chất AB dài $2l$ khối lượng $9m$ quay quanh trục thẳng đứng vuông góc đi qua đầu A của thanh như hình vẽ. Một quả cầu nhỏ khối lượng m lủng qua thanh và có thể trượt dọc theo thanh. Quả cầu được gắn vào đầu lò xo độ cứng c , đầu kia của lò xo được gắn vào trục quay. Lò xo có độ dài khi chưa co giãn là $l_0 = l$. Kéo giãn lò xo cho quả cầu tới đầu B rồi thả không vận tốc đầu lúc này vận tốc góc của thanh là ω_0 . Bỏ qua ma sát tại các ổ trục, khối lượng trục quay O_1O_2 , khối lượng lò xo và sức cản của không khí.

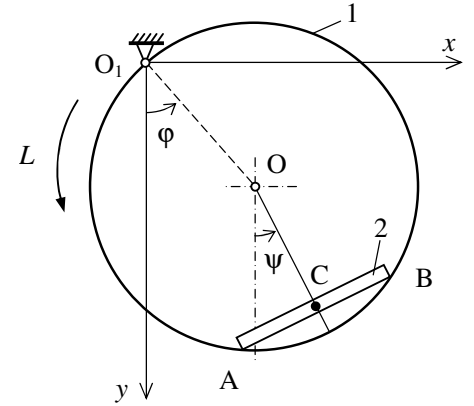


- 1) Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của thanh khi quả cầu trở về vị trí trung điểm của thanh AB.
- 2) Với giá trị nào của ω_0 thì quả cầu có thể về tới vị trí trung điểm của thanh. Xác định ω_0 để quả cầu cân bằng tương đối ngay ở đầu B của thanh.
- 3) Xác định áp lực của quả cầu lên thanh trong quá trình chuyển động.

Bài 3. Vành tròn đồng chất 1 bán kính R , khối lượng M quay quanh trục nằm ngang O_1 vuông góc với mặt phẳng của nó, dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen $L = L_0 \sin \omega t$. Bên trong vành có thanh đồng chất 2, khối lượng m chiều dài R . Tại

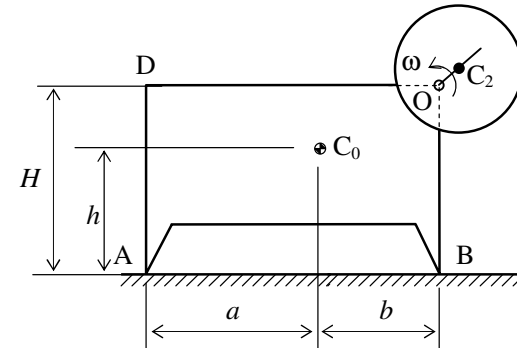
thời điểm đầu $t = 0$, tâm O của vành ở vị trí thấp nhất còn OC tạo với O_1O góc $\pi/6$. Bỏ qua ma sát và sức cản của không khí.

- 1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.
- 2) Tìm gia tốc góc của vành tại thời điểm $t = 0$.



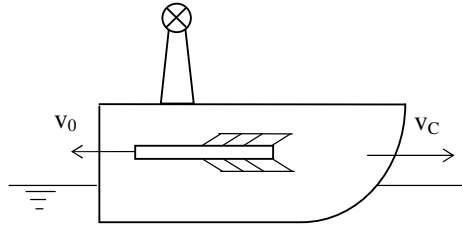
Đề thi năm 1996

Bài 1. Một bàn rung khối lượng m_0 có hai chân A và B, chuyển động tịnh tiến không ma sát theo phương nằm ngang. Quả văng có khối lượng m_1 độ lệch tâm e quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω ($e = OC_2$).



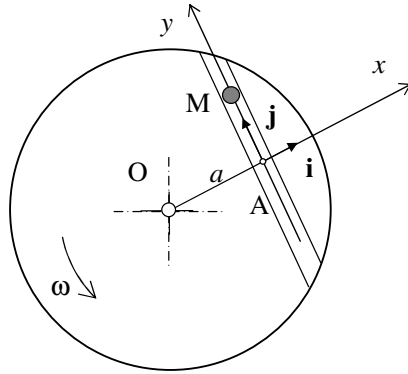
- 1) Tìm lực F tác dụng theo phương nằm ngang tại D để bàn rung đứng yên.
 - 2) Giả sử khi OC_2 ở vị trí nằm ngang bên phải thì lực F không còn tác dụng. Hãy xác định quy luật chuyển động của bàn rung sau thời điểm lực F mất tác dụng?. Nếu tại thời điểm lực F mất tác dụng điểm C_2 ở vị trí thấp nhất trên đường thẳng đứng qua O, hãy xác định quy luật chuyển động của bàn rung trong trường hợp này?.
 - 3) Trong trường hợp không có tác dụng của lực F hãy xác định vận tốc góc của quả văng để chân A không bị rời khỏi mặt phẳng nằm ngang?
- Cho biết các kích thước của bàn rung: H, h, a, b . Do $m_1 \ll m_0$, $e \ll 1$ nên có thể bỏ qua số hạng $m_1 g e$ ($m_1 g e \approx 0$).

Bài 2. Một tàu chiến có khối lượng m_0 (kể cả khối lượng vũ khí trên tàu) đang đậu ở một địa điểm bí mật trên mặt biển. Từ tàu này hai quả ngư lôi có khối lượng m_1 và m_2 được phóng theo phương nằm ngang cùng một hướng về phía đuôi tàu với vận tốc v_0 . Bỏ qua sức cản của nước đối với tàu và sức cản của không khí đối với ngư lôi.



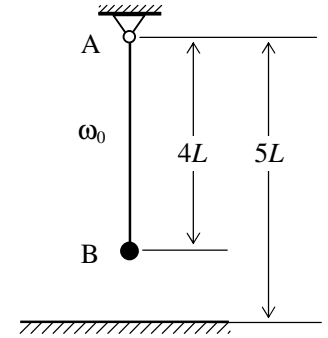
- 1) Xác định vận tốc của tàu khi hai quả ngư lôi được phóng ra cùng một lúc.
- 2) Xác định vận tốc của tàu khi quả ngư lôi m_1 được phóng ra trước, quả ngư lôi m_2 được phóng ra sau.
- 3) So sánh vận tốc của tàu trong hai trường hợp trên. Trường hợp nào có vận tốc lớn hơn?

Bài 3. Một đĩa tròn nằm ngang quay xung quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc góc không đổi ω . Một khối lượng m chuyển động không ma sát dọc theo rãnh tạo bởi hai thanh thẳng Ay gắn trên đĩa. Liên kết được xem là lý tưởng và hai phía. Khoảng cách từ trục O đến rãnh là $OA = a$, khối lượng m chuyển động về phía A bởi lực phục hồi $F = -ky\mathbf{j}$ gây ra bởi một lò xo một đầu cố định, một đầu gắn lên khối lượng.



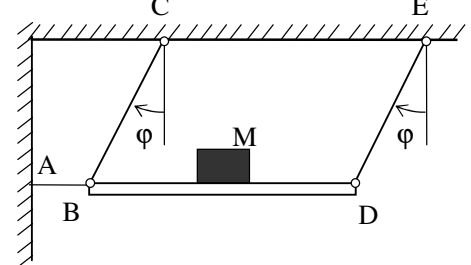
- 1) Xác định vị trí cân bằng đối với hệ tọa độ gắn trên đĩa. Tìm điều kiện để cân bằng này ổn định.
 - 2) Tại thời điểm $t = 0$ khối lượng m nằm cách A một khoảng cách $y = a$ và được thả tự do không vận tốc ban đầu. Xác định quy luật chuyển động của m .
 - 3) Giả sử cắt bỏ lò xo và khối lượng m trượt không ma sát trên đĩa nhưng có ma sát với hệ số $f < 1$ đối với hai thanh kẹp. Tại thời điểm $t = 0$, m nằm cách A một khoảng cách $y = a$ và đứng yên. Xác định quy luật chuyển động của m .
- Áp dụng bằng số: Tính y/a với $t = 0,25s$, $\omega = 4 s^{-1}$, $f = 0,4$.

Bài 1. Thanh đồng chất AB có khối lượng m và chiều dài $4L$ được quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh bản lề A cố định, bỏ qua ma sát, xem hình vẽ. Bản lề A cách sàn nằm ngang một khoảng $5L$. Đầu B của thanh có gắn một khối lượng m , có kích thước không đáng kể. Tại thời điểm đầu, giả sử thanh ở vị trí thẳng đứng đầu B ở dưới và có vận tốc góc ω_0 .



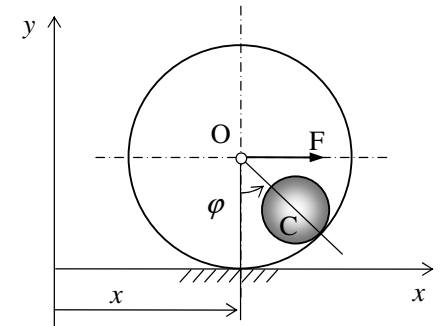
- 1) Tìm vận tốc góc, gia tốc góc của thanh và phản lực liên kết tại A khi thanh nằm ngang đầu B bên phải.
- 2) Khi thanh đến vị trí nằm ngang thì đầu A của thanh được giải phóng khỏi liên kết và chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng dưới tác dụng của trọng lượng của thanh. Giả sử vận tốc góc của thanh trước và sau khi giải phóng liên kết là như nhau. Tìm vận tốc góc ω_0 sao cho khi thanh rơi xuống sàn đầu A chạm sàn và thanh thẳng đứng.

Bài 2. Vật M có trọng lượng $Q = 100 N$ được đặt trên một tấm phẳng BD có trọng lượng $P = 25 N$. Hệ được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng ứng với góc $\varphi = 30^\circ$ nhờ ba sợi dây AB , BC và DE . Tính gia tốc của vật M và tấm phẳng BD ngay sau khi dây AB bị cắt đứt trong các trường hợp sau:



- 1) Vật M được ghép cứng với tấm BD .
- 2) Vật M có thể trượt có ma sát trên tấm BD với hệ số ma sát giữa chúng là $f = \sqrt{3}/4$.

Bài 3. Bánh xe được coi là một vành tròn đồng chất khối lượng M , bán kính R , tâm O và chịu tác dụng của lực F nằm ngang đặt vào tâm O . Bánh xe lăn không trượt trên đường thẳng nằm ngang. Bên trong vành tròn có một đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính r có thể lăn không trượt.



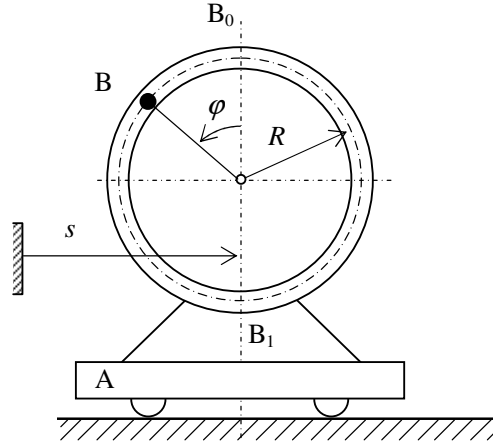
1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo tọa độ x và φ .
2. Giả sử tâm O vành tròn chuyển động đều. Tính lực F để có thể duy trì chế độ chuyển động đó, nếu biết khi $t_0 = 0$: $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 2\sqrt{g/[3(R-r)]}$.

Đề thi năm 1998

Bài 1. Xe A có khối lượng M chuyển động thẳng theo phương ngang. Một chất điểm B có khối lượng m chuyển động trong ống có bán kính R . Bỏ qua ma sát trong ống, khối lượng các bánh xe và ma sát lăn.

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng s và φ , tìm các tích phân đầu. Cho biết ban đầu hệ đứng yên và chất điểm ở vị trí B_0 .

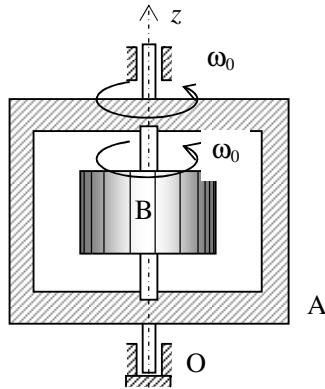
2) Tính biểu thức phản lực do chất điểm B tác dụng lên thành ống của xe A theo các tọa độ của hệ. Xét chất điểm chuyển động từ vị trí B_0 đến vị trí B_1 .



Bài 2. Một vật A cùng với mô tơ lắp bên trong nó (vỏ của mô tơ – stato – được lắp cứng với vật A) có thể quay không ma sát quanh trục thẳng đứng Oz . Vật A (kể cả phần vỏ của mô tơ) và rôto B có mômen quán tính khối đối với trục quay Oz lần lượt là J_1, J_2 .

1. Vật A và rôto B quay cùng chiều với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$. Để hãm vật A tại thời điểm tại thời điểm t_0 người ta điều chỉnh mômen tương tác giữa stato và rôto để tăng tốc độ quay của rôto. Tính vận tốc góc ω_1 của rôto B tại thời điểm t_1 khi vật A dừng lại. Tính công cần thiết cung cho rôto B trong khoảng thời gian $T = t_1 - t_0$.

2. Do tương tác giữa rôto B và phần vỏ của nó, rôto chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_0 - b_0 \omega_r$, ở đây M_0 và b_0 là các hằng số đã cho, ω_r là vận tốc góc tương đối của rôto B đối với vật A. Tính khoảng thời gian hãm T và số vòng quay được của vật A trong khoảng thời gian này.

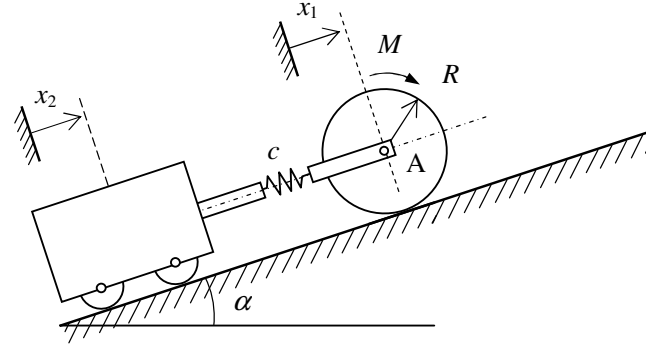


Bài 3. Một xe leo dốc theo mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng ngang một góc α (theo đường dốc chính). Bánh xe chủ động A là đĩa tròn đồng chất có bán kính R

và khối lượng m_0 , còn phần rơ-moóc có khối lượng m . Thanh nối giữa bánh xe A và rơ-moóc được xem là một lò xo không có khối lượng và có độ cứng c . Bỏ qua khối lượng các bánh xe của rơ-moóc. Xem bánh chủ động A lăn không trượt. Bỏ qua ma sát lăn và ma sát tại các ổ trục.

1. Tính giá trị M_0 của ngẫu lực M tác dụng lên bánh A để giữ hệ cân bằng trên mặt phẳng nghiêng. Tính độ biến dạng tĩnh của lò xo.

2. Giả sử ngẫu lực $M = M_0 + M_1$, trong đó M_0 được tính từ câu 1) còn M_1 là hằng số dương. Xác định chuyển động của xe (các tọa độ suy rộng được tính từ vị trí cân bằng tĩnh).



Đề thi năm 1999

Bài 1. Một hành tinh có đường kính gấp 3, khối lượng gấp 108 lần quả đất. (Cho biết đường kính quả đất $D = 12\,740$ km, gia tốc rơi tự do ở quả đất $g = 10 \text{ m/s}^2$).

1) Nếu từ độ cao h trên mặt phẳng xích đạo (của quả đất và hành tinh) thả rơi tự do một vật nặng thì khi rơi xuống bề mặt sẽ lệch so với phương thẳng đứng bao nhiêu (biết quả đất tự quay 1 vòng hết 23 giờ 56 phút 4 giây, còn hành tinh: 78 giờ 36 phút 6 giây, có thể bỏ qua thành phần ngang của vận tốc khi rơi). Tính cụ thể với $h = 200$ m.

2) Bỏ qua chuyển động quay của hành tinh, cần vận tốc ban đầu v_0 bằng bao nhiêu để phóng một vệ tinh từ độ cao H so với bề mặt hành tinh để cho:

a) Vệ tinh bay quanh hành tinh,

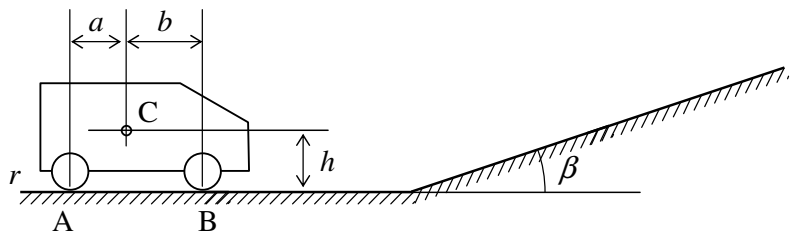
b) Vệ tinh thoát khỏi lực hút của hành tinh.

Hãy tính kết quả bằng số trong hai trường hợp a) và b) khi $H \ll D$.

Bài 2. Bốn bánh xe cùng thân xe có trọng lượng bằng Q , các bánh xe xem như trụ tròn đồng chất bán kính r , mỗi bánh trọng lượng P . Mômen chủ động đặt vào trục

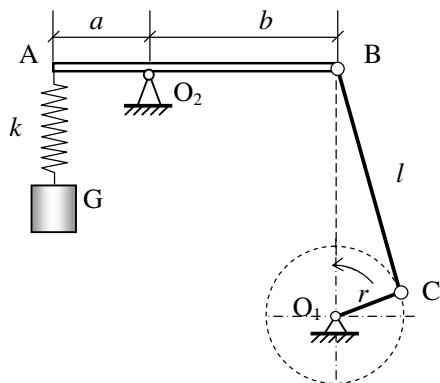
sau có trị số $M = \text{const}$. Tổng hợp lực cản ngoài $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ có đường tác dụng qua trọng tâm C còn hệ số tỉ lệ α là hằng số được cho từ thực nghiệm, \vec{v} - vận tốc khối tâm thùng xe. Xe đang chạy với vận tốc không đổi trên đường thẳng nằm ngang và sau đó leo lên dốc có góc nghiêng β theo đường dốc chính.

- Tính vận tốc khi xe chạy có vận tốc *không đổi* trên đường thẳng ngang.
 - Tìm biểu thức của vận tốc, gia tốc tại mọi thời điểm bất kỳ khi xe chạy trên mặt dốc.
 - Tìm điều kiện đối với mômen M để xe vượt được dốc có độ dài tùy ý.
 - Tính áp lực của hai bánh xe sau lên mặt đường dốc khi xe đã đi trên đoạn đường này với thời gian đủ lớn.
 - Tính lực ma sát trượt giữa đường dốc và các bánh xe sau khi thời gian đủ lớn, tìm điều kiện để các bánh xe sau không bị trượt.
- (Bỏ qua ma sát lăn và ma sát ô trục, các kích thước cho trên hình)



Bài 3. Trên hình vẽ là một cơ cấu tạo rung. Tải trọng G treo dưới lò xo có độ cứng k , đầu trên lò xo gắn cứng tại đầu mút A. Tay quay O_1C dài r quay với số vòng quay không đổi n vòng/phút. Thông qua thanh truyền CB có chiều dài l làm cho thanh AB lắc quanh O_2 . Giả thiết $r \ll l$ và xem như đầu mút B và A dịch chuyển trên đường thẳng đứng.

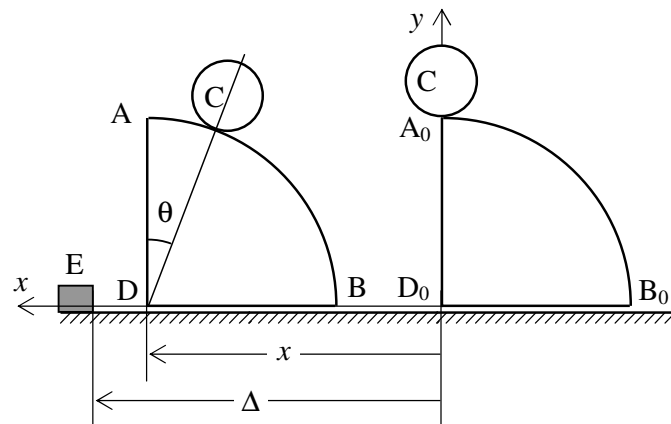
- Thành lập phương trình vi phân chuyển động của vật G theo phương thẳng đứng.
- Trong phương trình vi phân chuyển động của G bỏ qua các số hạng có chứa đại lượng $\lambda = r/l$ (do bé và xem r cũng khá bé) hãy tìm nghiệm của phương trình đó, với $\Omega = \pi n / 30$. Tìm số vòng quay của tay quay OC để lực lò xo không vượt quá q lần ($q > 1$) trọng lượng vật G .



Đề thi năm 2000

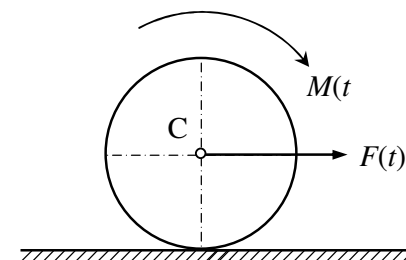
Bài 1. Vật 1 có khối lượng m_0 , có biên dạng là cung phần tư đường tròn, bán kính R , có thể trượt không ma sát theo phương ngang. Đĩa tròn đồng chất 2, có khối lượng m , bán kính r , lăn không trượt theo cung tròn AB. Ban đầu hệ đứng yên, tâm con lăn nằm trên đường thẳng đứng AD. Bỏ qua ma sát lăn.

- Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng đủ x và θ . Tìm các tích phân đầu của hệ.
- Tính đoạn di chuyển Δ của vật 1 khi con lăn lăn đến vị trí ứng với góc $\theta = 30^\circ$. Cách gốc O một đoạn Δ trên trục Ox, người ta đặt mấu cố định E để chặn vật 1 (ứng với $\theta_1 = 30^\circ$), còn vật 2 tiếp tục lăn không trượt theo cung AB (bỏ qua va chạm). Xác định góc θ_2 mà ứng với nó con lăn 2 rời khỏi vật 1. Xác định áp lực ngang của mấu E lên vật 1. Cho: $m_0 = 4m$, $R = 4r$, $r = 0,3\sqrt{3}$ (mét).



Bài 2. Một trụ tròn đồng chất, bán kính R , khối lượng m , ban đầu đứng yên trên mặt ngang cố định. Dưới tác dụng của lực $F(t) = 0,12mg(1 + t)$ ngang đặt tại tâm con lăn và ngẫu lực $M(t) = 0,24mgR(t + t^2)$, con lăn bắt đầu chuyển động. Bỏ qua ma sát lăn.

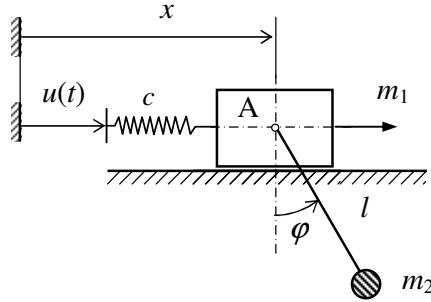
- Viết phương trình chuyển động của con lăn. Vẽ và xác định lực ma sát của mặt đường tác dụng lên con lăn trong khoảng thời gian con lăn không trượt? Xác định thời điểm t_1 khi con lăn chuyển sang chế độ chuyển động có trượt? Cho biết hệ số ma sát trượt tĩnh $f = 0,14$?
- Tính quãng đường đi được của tâm con lăn và số quay được của trụ trong khoảng thời gian t_1 ?



Bài 3. Cho mô hình cầu trục như hình vẽ. Cho biết các khối lượng m_1 và m_2 , chiều dài thanh $AB = l$, hệ số cứng của lò xo là c và cho biết dịch chuyển $u(t)$. Hệ số ma sát trượt động giữa vật A và mặt sàn là μ . Bỏ qua khối lượng thanh AB. Lúc đầu $u(0) = 0$ và chiều dài lò xo khi chưa biến dạng là a .

1) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo tọa độ suy rộng (x, φ) ?

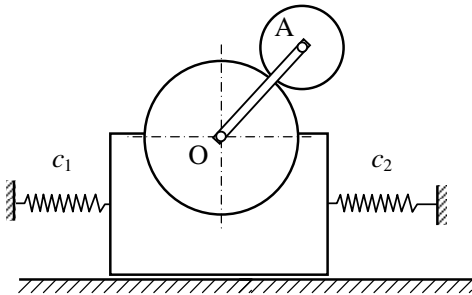
2) Trong trường hợp $c = 0$, $u(t) = 0$, $\mu = 0$, hãy tìm các tích phân đầu của hệ. Tại thời điểm đầu $x(0) = 0$, $\varphi(0) = 90^\circ$, hệ đứng yên. Tìm đoạn dịch chuyển của vật A khi thanh AB ở vị trí $\varphi = 30^\circ$.



Đề thi năm 2001

Bài 1. Một cơ cấu hành tinh chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Tay quay OA có khối lượng được bỏ qua, quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω . Bánh 2 có khối lượng m , là một đĩa tròn đồng chất, có bán kính r lăn không trượt trên vành bánh 1, có bán kính R và được gắn cứng với bộ máy được đặt tự do trên nền ngang.

1) Tính khối lượng m_0 của bộ máy và bánh 1 để bộ máy không bị bật lên khỏi nền?
2) Tại thời điểm đầu tay quay nằm ở vị trí ngang bên phải và lúc đó bộ máy đứng yên, các lò xo có độ cứng c_1 và c_2 không bị biến dạng. Khảo sát hai trường hợp sau:



a) Bỏ qua ma sát giữa máy và nền. Khảo sát chuyển động của bộ máy?
b) Giữa bộ máy và nền có ma sát khô với hệ số ma sát trượt động bằng f . Viết phương trình vi phân chuyển động của bộ máy?
Bỏ qua ma sát tại các khớp và trục quay.

Bài 2. Tay máy chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Khâu 1 có khối lượng m_1 và mômen quán tính khối đối với khối tâm C của nó là J_1 quay quanh trục ngang qua O cố định. Khâu 2 có khối lượng m_2 và mômen quán tính khối đối với khối tâm C_2 của nó là J_2 và chuyển động tịnh tiến đối với khâu 1. Tác dụng một ngẫu lực điều khiển có mômen $M(t)$ lên khâu quay 1 và một lực điều khiển $F(t)$ lên khâu 2. Bỏ qua ma sát và lực cản.

1) Viết phương trình chuyển động của tay máy theo các tọa độ suy rộng φ và u ?

2) Tìm biểu thức của ngẫu lực điều khiển $M(t)$ và lực điều khiển $F(t)$ để điểm nút P của khâu 2 có phương trình chuyển động:

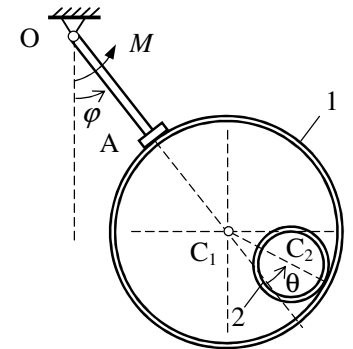
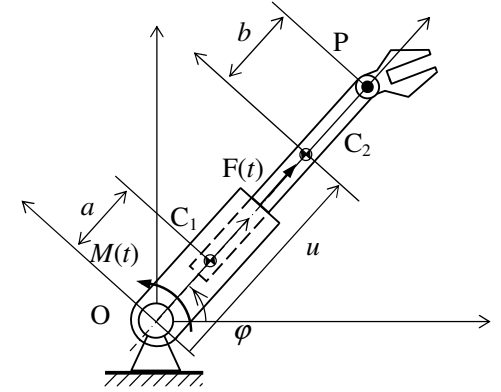
$$x_P = (L \sin \omega t + b) \cos \Omega t ; y_P = (L \sin \omega t + b) \sin \Omega t ,$$

trong đó L, a, b, Ω, ω là các hằng số đã cho, t là biến thời gian và $0 \leq \Omega t \leq \pi/2$.

Bài 3. Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Vành tròn đồng chất 2, có bán kính r , khối lượng m lăn không trượt bên trong vành tròn 1 có bán kính $R = 3r$. Vành 1 được gắn cứng với thanh OA ($OA = 3r$) có thể quay không ma sát quanh trục ngang qua O và chịu tác dụng của ngẫu lực M . Bỏ qua khối lượng của tay quay OA và vành 1.

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng φ, θ , trong đó φ là góc giữa thanh OA với phương đứng, còn θ là góc giữa thanh OA với đường thẳng đứng qua hai tâm C_1, C_2 của hai vành tròn.

2) Giả sử OA quay đều quanh O với vận tốc góc ω . Hãy tính thành phần tiếp tuyến của phân lực tại điểm tiếp xúc giữa 2 vành tròn theo các tọa độ và vận tốc suy rộng?



Đề thi năm 2002

Bài 1. Xe 4 bánh, trọng lượng thân Q . Các bánh xe xem như trụ tròn đồng chất, bán kính r , trọng lượng mỗi bánh p . Xe leo dốc so với phương nằm ngang một góc α . Lực cản khi xe chạy tỉ lệ với vận tốc, hệ số tỉ lệ b . Mômen chủ động M không đổi tác dụng vào trục bánh sau. Giả thiết các bánh xe lăn không trượt trên đường, bỏ qua ma sát lăn.

1) Tính vận tốc v và gia tốc a của xe trên đường dốc, biết rằng tại thời điểm leo dốc xe đã đạt được vận tốc tới hạn khi chạy trên đường thẳng nằm ngang.

2) Tìm điều kiện để xe đi hết dốc có độ dài tùy ý. Xác định độ lớn tối thiểu của mômen chủ động, nếu $Q = 18 \text{ kN}$, $r = 0,4 \text{ m}$, và $\alpha = 30^\circ$.

3) Tính lực ma sát mặt đường tác dụng vào cặp bánh sau.

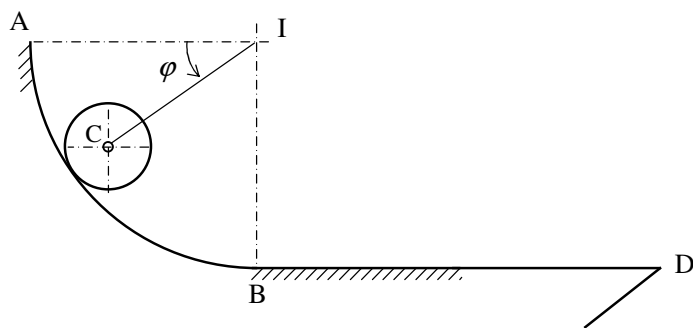
Bài 2. Trụ tròn đồng chất bán kính R trọng lượng P , có mômen quán tính đối với trục qua khối tâm C vuông góc với mặt phẳng đứng là J . Khối tâm cách tâm O của trụ tròn bằng $OC = a$. Lúc đầu khối tâm ở vị trí thấp nhất. Trụ lăn không trượt, bỏ qua ma sát lăn.

1) Lập phương trình vi phân chuyển động của trụ tròn theo góc φ (hình vẽ).

2) Trụ chuyển động như thế nào với điều kiện ban đầu $\varphi(0) = \varphi_0$ nhỏ, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

3) Phải cho vận tốc góc ban đầu $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ có độ lớn bằng bao nhiêu để trụ lăn được ít nhất một vòng, biết $\varphi(0) = 0$.

Bài 3. Trụ tròn đồng chất bán kính r lăn không trượt trong rãnh nằm trong mặt phẳng thẳng đứng ABD. Rãnh này có đoạn AB là 1/4 cung tròn bán kính R , đoạn BD nằm ngang. Thời điểm đầu tâm trụ C nằm ngang với A và chuyển động không vận tốc đầu, hệ số ma sát lăn giữa trụ và mặt đường là k .



1) Tìm biểu thức vận tốc khối tâm C của trụ phụ thuộc vị trí trên đường lăn.

2) Giả sử đi hết đường trụ dừng lại tại D, D là một điểm nhọn. Cho trọng tâm trụ lệch một góc nhỏ nào đó về phía phải (không vận tốc ban đầu) so với đường thẳng đứng qua D. Hãy chỉ ra rằng khi trụ chuyển động tiếp theo để rời khỏi D bao giờ cũng có trượt nếu hệ số ma sát trượt tại D và trụ là một đại lượng hữu hạn (bỏ qua ma sát lăn khi trụ lăn qua điểm nhọn).

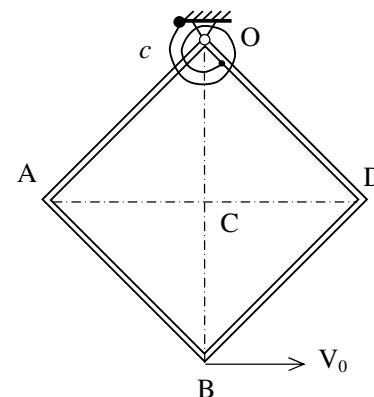
Đề thi năm 2003

Bài 1. Khung hình vuông OABD tạo thành từ bốn thanh đồng chất cùng độ dài L , khối lượng mỗi thanh là m , gắn chặt với nhau và có thể quay trơn quanh trục cố định nằm ngang qua O vuông góc với mặt phẳng khung. Tại O gắn một lò xo xoắn với độ cứng $c = \text{const}$ tạo ra mômen xoắn $M = -c\varphi$. Lò xo không bị biến dạng khi đỉnh B ở vị trí thấp nhất. Ban đầu B ở vị trí thấp nhất, sau đó truyền cho B một vận tốc V_0 nằm ngang.

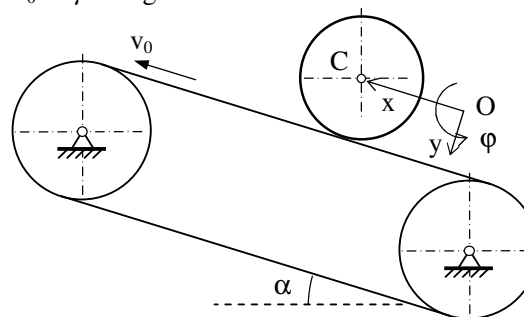
1. Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của khung là hàm của góc φ lập giữa OB và phương thẳng đứng.

2. Tìm giá trị V_0 để OB có thể đạt đến vị trí nằm ngang bên phải.

3. Xác định áp lực của trục quay lên khung theo góc φ và tính giá trị đó khi $\varphi = \pi/2$.



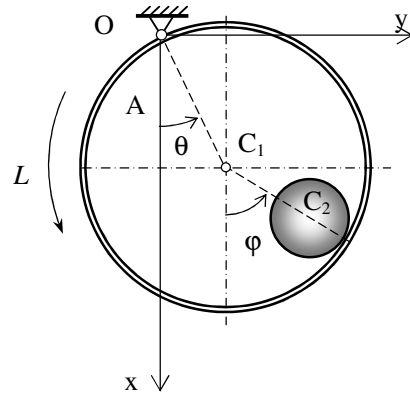
Bài 2. Một trụ tròn đồng chất tâm C khối lượng m , bán kính r , tại thời điểm $t_0 = 0$ đứng yên tại vị trí $x_C(0) = 0$ trên mặt băng tải nhám. Băng tải chuyển động với vận tốc $V_0 = \text{const}$. Hệ số ma sát trượt động giữa trụ tròn và băng tải là μ . Cho biết các đại lượng α , r , m , V_0 và $\mu = 2 \tan \alpha$.



1. Tính vận tốc khối tâm C và vận tốc góc của trụ tròn trong khoảng thời gian nó vừa lăn vừa trượt trên băng tải.
2. Tìm thời điểm t_1 kể từ đó trụ tròn lăn không trượt trên băng tải.
3. Xác định quãng đường cực đại mà khối tâm C dịch chuyển lên được với điều kiện đầu $x_C(0) = 0$.

Bài 3. Vành tròn đồng chất có bề dày rất mỏng được xem như đường tròn đồng chất bán kính R , khối lượng M . Nó chịu tác dụng một mômen $L = L(t)$ quay tròn quanh trục nằm ngang qua O. Đĩa tròn đồng chất bán kính r , khối lượng m lăn không trượt trong vành tròn đó.

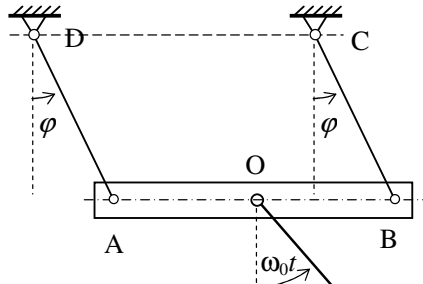
1. Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các góc θ và φ .
2. Giả sử tại thời điểm đầu $t_0 = 0$, cho các điều kiện đầu $\theta(0) = 0$, $\varphi(0) = \pi/3$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, $L(0) = L_0$. Tính các thành phần gia tốc góc $\ddot{\theta}(0)$, $\ddot{\varphi}(0)$.
3. Với điều kiện đầu trên, bỏ qua ma sát lăn, tính các phân lực thành phần tiếp tuyến và pháp tuyến của vành tròn tác dụng lên đĩa.



Đề thi năm 2004

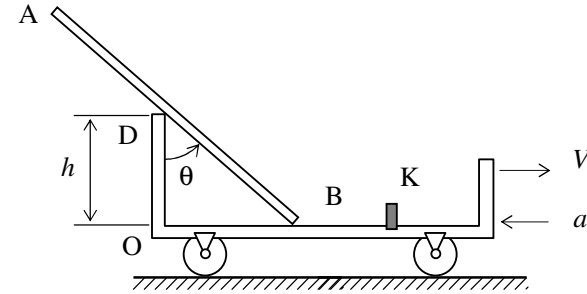
Bài 1. Cho một cái máy sàng, được mô hình là một thanh cứng AB, đồng chất, khối lượng m_0 , được treo nhờ hai thanh mảnh cứng, cùng chiều dài L , bỏ qua khối lượng. Thanh OM, chiều dài e , bỏ qua khối lượng, đầu mút của nó gắn chặt điểm M, có khối lượng m , quay đều quanh O với vận tốc góc ω_0 , ($OA = OB$). Bỏ qua ma sát tại các ổ trục quay. Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.

1. Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo φ là góc nghiêng của thanh treo so với phương thẳng đứng, ($DC = AB$).



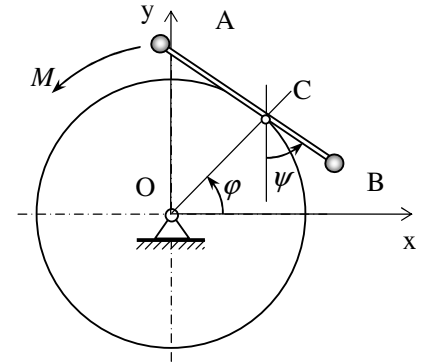
2. Khảo sát dao động bé của sàng AB, trong trường hợp không cộng hưởng với điều kiện đầu $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$, khi lấy $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, $e \sin \varphi \approx 0$.

Bài 2. Có một xe tải, được mô hình như hình vẽ, chở một thanh gỗ đồng chất khối lượng m , dài $AB = L$, $2h < L < 2h / \cos \theta_0$, h là chiều cao của thành đứng phía sau thùng xe. Xe đang chạy trên đường ngang thẳng phẳng, thì hãm lại với gia tốc có giá trị không đổi a . Khi xe trong chế độ hãm, bỏ qua ma sát giữa thanh gỗ AB với thành xe và sàn xe.



1. Tính vận tốc góc tương đối $\dot{\theta}$ của thanh AB theo góc θ trong chế độ hãm, biết rằng trước khi hãm thanh AB cân bằng so với thùng xe, $\theta(0) = \theta_0$ đã biết.
2. Khi đầu mút B của thanh AB chạm vào mẫu K, gắn cứng vào sàn xe, $OK = h\sqrt{3}$, thì thanh AB dừng lại và xe vẫn chuyển động.
 - a. Tìm giá trị gia tốc hãm a_1 để thanh AB có thể rời khỏi thành xe và bắt đầu quay quanh mẫu K.
 - b. Tìm giá trị gia tốc hãm a_2 , để thanh có thể đổ sang bên phải. Quá trình chuyển động của cơ hệ là liên tục.

Bài 3. Tay đòn mang hai khối lượng tập trung m_1, m_2 tại hai đầu A và B tương ứng và gắn khớp bản lề C vào vành của một đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng m , chịu tác dụng mômen $M = M_0 - b\dot{\varphi}$; M_0 và b là các hằng số dương, $\dot{\varphi}$ là vận tốc góc của đĩa. Khoảng cách từ khối lượng tập trung đến khớp C tương ứng là $AC = l_1$, $BC = l_2$. Tay đòn khối lượng không đáng kể, có thể quay tròn quanh trục thẳng đứng qua khớp. Đĩa quay quanh trục thẳng đứng vuông góc với mặt phẳng của nó qua O.

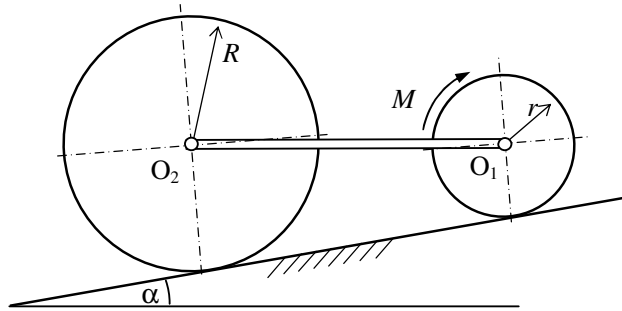


1. Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo góc φ và ψ .
2. Giả sử $m_1 l_1 = m_2 l_2$, tìm quy luật chuyển động của cơ hệ với điều kiện đầu $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 0, \psi(0) = 0, \dot{\psi}(0) = \omega_0$.

Xác định vận tốc góc $\Omega_0 = \text{const}$ của đĩa, khi giả sử nó quay đều, để có sự cân bằng tương đối của tay đòn, khảo sát sự ổn định của vị trí cân bằng tương đối đó.

Đề thi năm 2005

Bài 1. Một xe, được mô hình như hình vẽ, chuyển động lên trên mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = \text{const}$. Bánh trước là đĩa tròn đồng chất bán kính r , khối lượng m_1 , lăn không trượt dưới tác dụng của mômen $M = \text{const}$ (do động cơ có khối lượng không đáng kể đặt trên thanh nối $O_1 O_2$ tạo ra). Bánh sau cũng là đĩa tròn đồng chất khối lượng m_2 , bán kính R lăn không trượt. Hai bánh xe liên kết với nhau nhờ thanh cứng dài L , bỏ qua khối lượng, bằng các bản lề trụ không ma sát O_1 và O_2 .



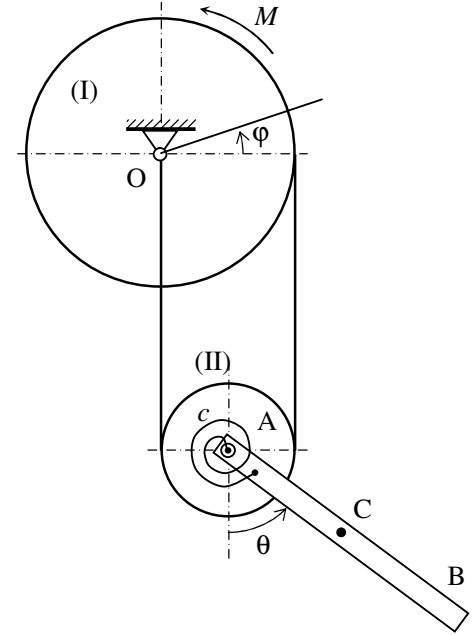
1. Tính công suất của động cơ tạo ra ngẫu lực có mômen M để xe có vận tốc V_0 và gia tốc a_0 đã cho. Bỏ qua ma sát lăn cả hai bánh.
2. Bỏ qua ma sát lăn của bánh sau và bánh trước, xác định lực ma sát trượt của mặt đường tác dụng vào bánh xe sau, theo công suất của động cơ và vận tốc của xe.
3. Khi kể đến ma sát lăn của bánh sau (mômen ma sát lăn $m_l = k N_2$, k là hệ số ma sát lăn, N_2 là phản lực pháp tuyến của mặt đường tác dụng lên bánh sau), tính công suất của động cơ để xe có vận tốc V^* và gia tốc a^* , xét trường hợp, $V^* = V_0^* = \text{const}$.

Bài 2. Chất điểm M có khối lượng m_1 chuyển động tương đối với vận tốc $v = \text{const}$ dọc theo thanh AB đồng chất khối lượng m_2 , dài $2a$. Hai đầu mút của thanh AB trượt trong vành tròn nhẵn bán kính R , cố định trong mặt phẳng nằm ngang. Tại thời điểm đầu cho $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \omega_0$ và chất điểm nằm tại trọng tâm H của thanh AB .

1. Tìm quy luật chuyển động của thanh AB , $\varphi = \varphi(t)$.
2. Tính thời gian t^* khi góc $\varphi = \pi/2$. Giả sử rằng $2a = R\sqrt{2}$, xác định phản lực nằm ngang của vành tròn tác dụng lên thanh AB tại vị trí $\varphi = \pi/2$, biết rằng $vt^* < a$.

Bài 3. Cho hệ thống tời gồm trục I là đĩa tròn đồng chất khối lượng m_1 , bán kính R chịu tác dụng mômen M quay tròn quanh O để kéo ròng rọc II , cũng là đĩa tròn đồng chất, khối lượng m_2 , bán kính $r = R/2$, chuyển động lên trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh AB có chiều dài $2L$, đồng chất khối lượng m_3 có thể quay tròn quanh tâm A của ròng rọc II . Một lò xo xoắn tuyến tính, độ cứng $c = \text{const}$, một đầu gắn vào đĩa (II) , còn đầu kia gắn vào thanh AB . Ban đầu $\varphi = 0$ và thanh AB ở vị trí thẳng đứng ($\theta = 0$) lò xo không bị biến dạng. Xem dây cáp luôn căng, bỏ qua khối lượng, không giãn và có phương luôn luôn song song với phương thẳng đứng.

- 1) Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo góc φ và θ .
- 2) Giả sử trục I quay đều với vận tốc góc ω_0 , khảo sát chuyển động của thanh AB quanh A với giả thiết θ bé ($\sin \theta \approx \theta$) và cho các điều kiện đầu $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \Omega$.
- 3) Khi trục I quay đều, xác định phản lực động lực theo phương thẳng đứng của bản lề A tác dụng lên thanh AB .



Đề thi năm 2006

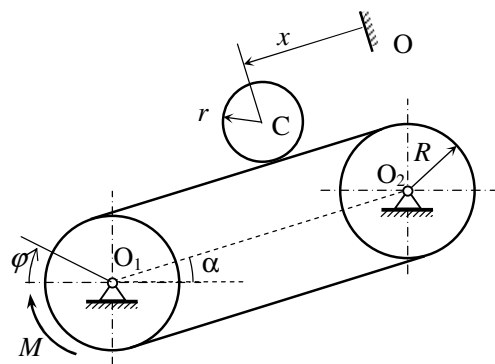
Bài 1. Hệ thống truyền động băng truyền được cho như trên hình vẽ. Các trục quay là những đĩa đồng chất, có khối lượng m_0 , bán kính R . Băng truyền nghiêng (theo đường dọc chính) với phương ngang một góc $\alpha = \text{const}$, khối lượng bỏ qua và luôn

ở trạng thái căng. Trục quay chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_0 - b\omega$, trong đó M_0 và b là các hằng số dương đã cho, ω là vận tốc góc của các trục quay. Con lăn là vành tròn đồng chất, có khối lượng m và bán kính r , lăn không trượt trên băng truyền hướng xuống.

1) Chọn các tọa độ suy rộng là φ và x , trong đó φ là góc quay của trục, x là tọa độ của khối tâm con lăn kể từ một điểm cố định (theo phương nghiêng của băng truyền). Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của hệ?

2) Tìm vận tốc góc của con lăn trong chế độ bình ổn (tức khi $t \rightarrow \infty$), cho biết hệ chuyển động từ trạng thái ban đầu đứng yên?

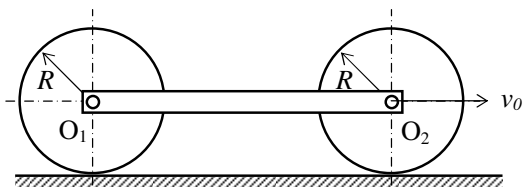
3) Xác định áp lực do con lăn tác dụng lên băng tải?



Bài 2. Khảo sát mô hình xe hai bánh chạy trên đường ngang như hình vẽ. Các bánh xe có cùng bán kính R , đồng chất, có khối lượng tương ứng là m_1 và m_2 , lăn không trượt trên đường ngang. Xem thanh nối hai tâm bánh xe là tuyệt đối rắn có chiều dài L và khối lượng được bỏ qua. Để dừng xe, tắt động cơ và phanh chết bánh xe sau (1), nên bánh này chỉ trượt và không lăn, trong khi bánh xe trước (2) lăn không trượt. Hệ số ma sát trượt động giữa bánh sau và mặt đường là $f =$ hằng số, bỏ qua ma sát tại các ổ trục các bánh xe.

1) Hãy xác định gia tốc của thân xe và khoảng thời gian hãm dừng xe? Cho biết khi bắt đầu hãm xe có vận tốc v_0 .

2) Xác định phản lực tại trục bánh xe sau và phản lực giữa bánh xe trước và mặt đường?



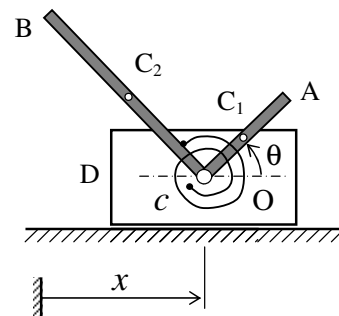
Bài 3. Cho một thanh gậy khúc OAB có góc vuông tại O, các đoạn OA, OB được xem là các thanh mảnh đồng chất, tương ứng có chiều dài $2a$, $2b$ và khối lượng m_1 , m_2 liên kết với đế D nhờ bản lề (không ma sát) O và lò xo xoắn có độ cứng xoắn bằng $c =$ hằng. Thanh chịu tác dụng mômen cản tỉ lệ tuyến tính với vận tốc góc của thanh, với hệ số tỉ lệ α . Đế D có khối lượng m_0 chuyển động theo phương ngang và vị trí của nó được xác định nhờ tọa độ x , còn vị trí của thanh gậy khúc được xác định nhờ góc θ , là góc giữa đoạn OA và phương ngang, ở đó vị trí nằm ngang của OA ứng với vị trí cân bằng tĩnh.

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ?

2) Khảo sát trường hợp đế D chuyển động với vận tốc $v = v_0 + H_0 \sin \Omega t$, trong đó

v_0 , H_0 và Ω là những hằng số đã biết, còn t là biến thời gian, xem θ bé, lấy $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai trở lên, giả thiết hệ số cản bé. Xác định dao động bé của thanh gậy khúc OAB quanh trục O trong chế độ bình ổn (ứng với thời gian $t \rightarrow \infty$).

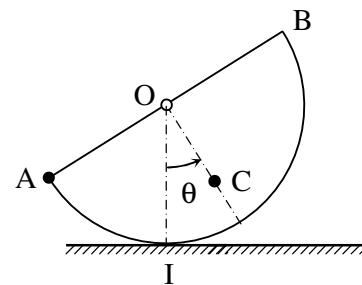
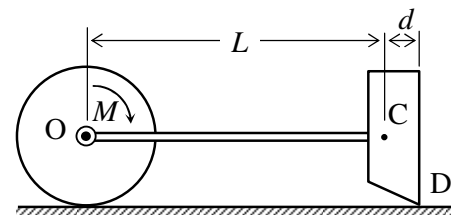
3) Để đơn giản cho tính toán, lấy $\alpha = 0$ trong công thức tính biên độ của góc quay của thanh gậy khúc. Hãy tính giá trị của hệ số cứng xoắn c để góc quay của thanh gậy khúc không vượt giá trị cho trước θ_0 , tức $\theta \leq \theta_0$ trong đó θ_0 là hằng số đã cho.



Đề thi năm 2007

Bài 1. Máy ủi đất có sơ đồ như hình vẽ. Bánh xe là một đĩa tròn đồng chất, có bán kính R , có khối lượng m_1 , chịu tác dụng ngẫu lực có mômen không đổi M , lăn không trượt theo đường ngang cố định. Đầu ủi có khối lượng m_2 , khối tâm C chuyển động theo phương ngang, có hệ số ma sát trượt động f và tiếp xúc với đường tại điểm D cách C theo phương ngang một khoảng cách $d < fR$. Thanh nối tâm bánh xe và đầu ủi được xem là cứng tuyệt đối và khối lượng được bỏ qua. Cho $OC = L$ và bỏ qua ma sát ổ trục O.

1) Bỏ qua ma sát lăn giữa bánh xe và đường. Hãy xác định chuyển động của đầu ủi? 2) Xác định phản lực ổ trục O? 3) Xác định ngẫu lực M để bánh sau lăn không trượt (cho hệ số ma sát tĩnh là f_0)?



Bài 2. Một nửa đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 , có bán kính R và khối tâm C lăn không trượt theo đường ngang cố định trong mặt phẳng đứng. Tại A một chất điểm có khối lượng m_2 ($m_2 \ll m_1$), gắn cứng với đĩa. Tại thời điểm ban đầu bán kính OA có vị trí nằm ngang ($\theta = 0$) và nhận được vận tốc góc ban đầu ω_0 .

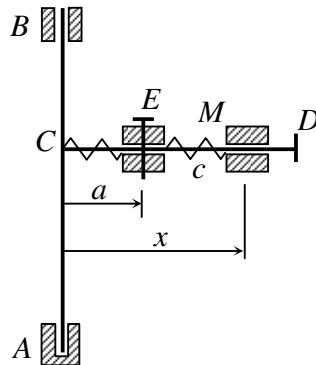
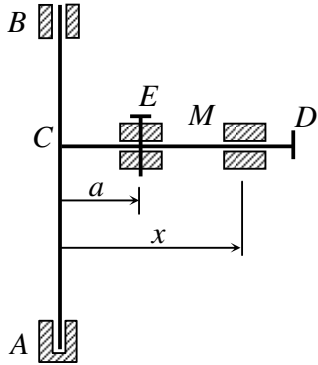
1) Viết phương trình vi phân chuyển động của vật?

2) Giả sử góc giữa đường kính AB và phương ngang là bé (lấy $m_2 = 0$ và chỉ giữ lại vô cùng bé bậc 1), hãy xác định chuyển động của vật và phản lực mặt đường tác dụng lên đĩa khi OC ở vị trí thẳng đứng (vị trí thấp nhất). Cho : $OC = 4R/3\pi$.

Bài 3. Một khung ABCD có mômen quán tính đối với trục AB là J . Trên rãnh trượt CD con trượt khối lượng m bị chốt tại E cách AB khoảng cách a và cả hệ quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0 . Tại một thời điểm xác định người ta điều khiển làm chốt bật lên để con trượt tự do.

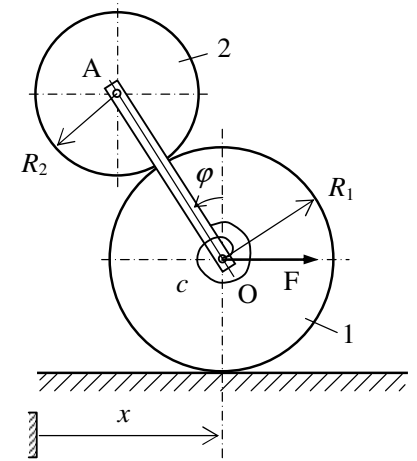
1) Xác định vận tốc góc của khung khi con trượt nằm cách trục quay AB khoảng cách x trong trường hợp có kể và không kể đến ma sát trượt của rãnh trượt CD?

2) Giả sử con trượt liên kết với thanh AB bởi một lò xo tuyến tính có độ cứng c và có chiều dài khi chưa bị biến dạng bằng L . Bỏ qua ma sát trượt giữa vật và rãnh trượt. Hãy xác định vận tốc của con trượt dọc rãnh C (vận tốc tương đối). Tính hệ số cứng c để vật đến được vị trí cách trục quay khoảng cách b cho trước ($b > a$). Có nhận xét gì đối với trường hợp khi tại vị trí đầu lò xo bị nén ($a < L$)? và bị kéo ($a > L$)?



Đề thi năm 2008

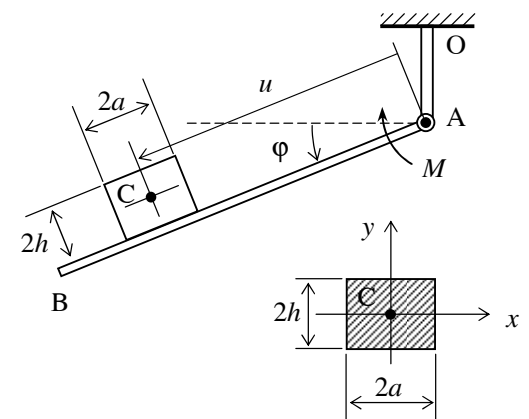
Bài 1. Một cơ cấu gồm bánh xe 1 và 2, là những đĩa tròn đồng chất, tương ứng có bán kính R_1, R_2 , khối lượng m_1, m_2 , đặt trong mặt phẳng đứng. Tay quay, bỏ qua khối lượng, gắn với lò xo xoắn tuyến tính có hệ số cứng xoắn c (ngẫu lực lò xo $M_{lx} = -c\varphi$), đầu kia của lò xo gắn vào tâm của bánh 1. Bánh xe 1 lăn không trượt trên nền thẳng ngang cố định. Bánh xe 2 lăn không trượt đối với bánh xe 1 và tại O có lực F tác dụng theo phương ngang, hướng sang phải. Chọn các tọa độ suy rộng là x và φ , trong đó x là tọa độ (theo phương ngang) tâm bánh 1, còn φ là góc nghiêng của tay quay đối với đường thẳng đứng.



1) Bỏ qua ma sát tại các khớp quay, hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ?

2) Kể ma sát tại khớp O giữa tay quay OA và bánh 1 (ngẫu lực cản tỉ lệ với vận tốc góc tương đối với hệ số là $b = \text{const}$), hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ?

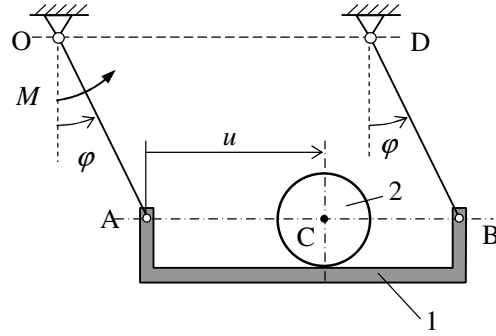
Bài 2. Một hệ thống chuyển tải gồm máng AB là thanh đồng chất, có chiều dài $2L$, khối lượng m_0 , quay không ma sát quanh bản lề A dưới tác dụng của ngẫu lực M . Một tấm chữ nhật đồng chất, có khối lượng m , chiều dài $2a$ và chiều cao $2h$ trượt dọc máng. Chọn các tọa độ suy rộng đủ là φ và u , trong đó φ là góc nghiêng của máng AB với phương ngang, còn u là tọa độ của khối tâm của tấm dọc máng AB. Tại thời điểm đầu khối tâm nằm trên đường OA còn máng nằm ngang. Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng.



1) Bỏ qua ma sát giữa máng và tấm, hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ? Cho công thức tính mômen quán tính tấm chữ nhật: $J_x = mh^2/3$; $J_y = ma^2/3$.

2) Đề đơn giản, xem tấm là chất điểm trượt dọc máng với hệ số ma sát trượt động là f . Hãy viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ?

Bài 3. Sàng rung 1 có khối lượng m_0 được treo nhờ hai thanh cứng ($OA = BD = b$) và có khối lượng không đáng kể, ($AB = OD = a$). Đĩa tròn đồng chất 2 có khối lượng m , bán kính r , lăn không trượt dọc theo mặt sàng. Ngẫu lực có mômen M tác dụng lên thanh OA. Chọn các tọa độ suy rộng là góc nghiêng φ của thanh OA với phương thẳng đứng và đoạn di chuyển u của khối tâm đĩa trên mặt sàng. Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng.



- 1) Lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ?
- 2) Xác định phản lực do mặt sàng tác dụng lên đĩa (tính theo $\varphi, \dot{\varphi}, u, \dot{u}$)?

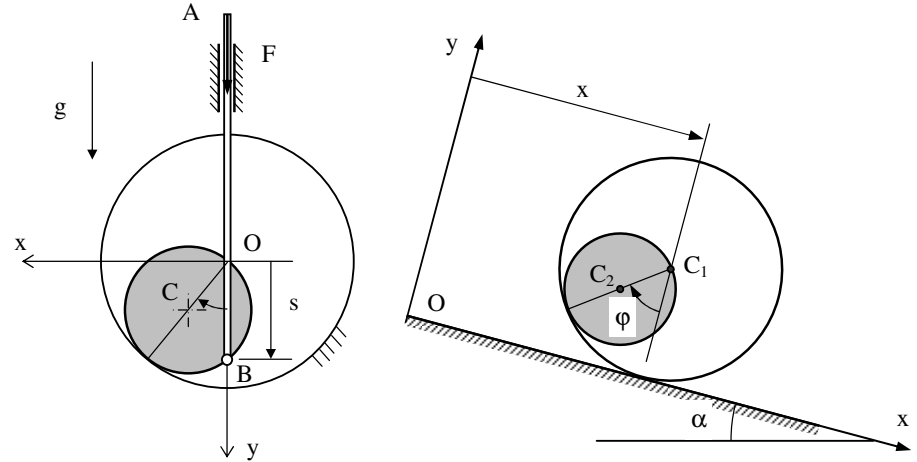
Đề thi năm 2009

Bài 1. Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Thanh AB có khối lượng M chuyển động không ma sát trong rãnh thẳng đứng. Đĩa tròn đồng chất, khối tâm C, bán kính r , khối lượng m chuyển động trong vành tròn cố định tâm O, bán kính $R = 2r$. Thanh AB đi qua tâm O của vành tròn và nối bản lề trơn với đĩa tại B. Lực thẳng đứng $F(t)$ tác dụng lên đầu A của thanh AB làm hệ chuyển động. Bỏ qua ma sát lăn do vành tác dụng lên đĩa. Vị trí của thanh AB được xác định qua tọa độ $s = OB$. Trong quá trình chuyển động đĩa luôn tiếp xúc vành.

- 1) Chứng minh rằng đĩa sẽ lăn không trượt trong vành.
- 2) Viết phương trình vi phân chuyển động cơ hệ theo tọa độ s .
- 3) Giả sử biểu thức của lực $F(t)$ có dạng:

$$F = 0,5mF_0 \sin \Omega t - nm\dot{s} - 0,5k^2ms - (M + 0,5m)g$$

trong đó F_0, Ω, k, n là những hằng số đã cho, $k > \Omega$; $M = 0,125m$; g – gia tốc trọng trường. Ngoài ra giả thiết thêm rằng $s \ll 2r$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai trở lên đối với các đại lượng s, \dot{s} . Hãy xác định chuyển động thanh AB, $s = s(t)$ trong chế độ bình ổn (ứng với thời gian $t \rightarrow \infty$, và để đơn giản trong kết quả cuối cùng lấy $n = 0$).



Bài 2. Một vành tròn đồng chất, khối tâm C_1 bán kính R khối lượng m_1 lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng với mặt ngang góc $\alpha = \text{const}$. Một đĩa tròn đồng chất, khối tâm C_2 khối lượng $m_2 = 0,5 m_1$, bán kính $r = 0,5 R$ có thể lăn không trượt bên trong vành tròn. Bỏ qua ma sát lăn. Chọn các tọa độ suy rộng là x, φ (hình 2).

- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x, φ .

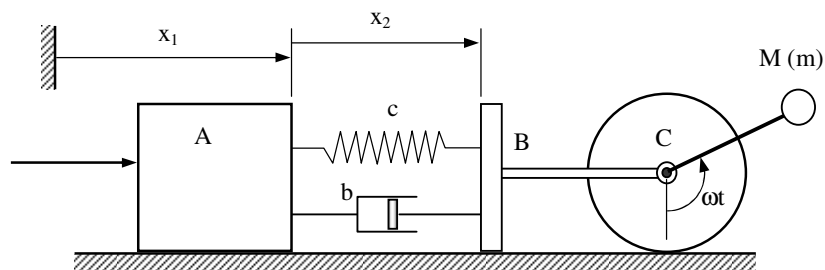
2) Giả sử tính được $x = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, hãy xác định các thành phần phản lực tiếp tuyến do con lăn tác dụng lên vành và mặt đường tác dụng lên vành.

Bài 3. Cho cơ hệ có sơ đồ cho như trên hình 3. Vật A khối lượng m_1 có thể chuyển động tịnh tiến không ma sát theo phương ngang, chịu tác dụng của lực nằm ngang F . Vật A, nối với cần đẩy BC, có khối lượng được bỏ qua, tịnh tiến theo phương ngang nhờ lò xo tuyến tính có độ dài khi không bị biến dạng bằng L , hệ số cứng $c = \text{const}$ và bộ cản nhớt tuyến tính tạo lực cản tỉ lệ với vận tốc tương đối giữa vật A và cần đẩy CB với hệ số cản $b = \text{const}$, cần BC nối bản lề không ma sát tại C với đĩa tròn đồng chất, bán kính r , khối lượng m_2 có thể lăn không trượt theo đường nằm ngang.

Tay quay CM, khối lượng được bỏ qua, có chiều dài bằng e , tại đầu cuối M gắn khối lượng m , được xem là chất điểm, quay đều với vận tốc góc $\omega = \text{const}$. Bỏ qua ma sát lăn (hình 3). Chọn các tọa độ suy rộng là x_1, x_2 .

- Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x_1, x_2 .
- Xác định chuyển động của hệ trong chế độ bình ổn (ứng với thời gian $t \rightarrow \infty$)

(Cần lưu ý là lực nào làm tay quay CM quay đều, động cơ đặt trên BC hay đặt trên con lăn? trong trường hợp ở đây là trên BC)

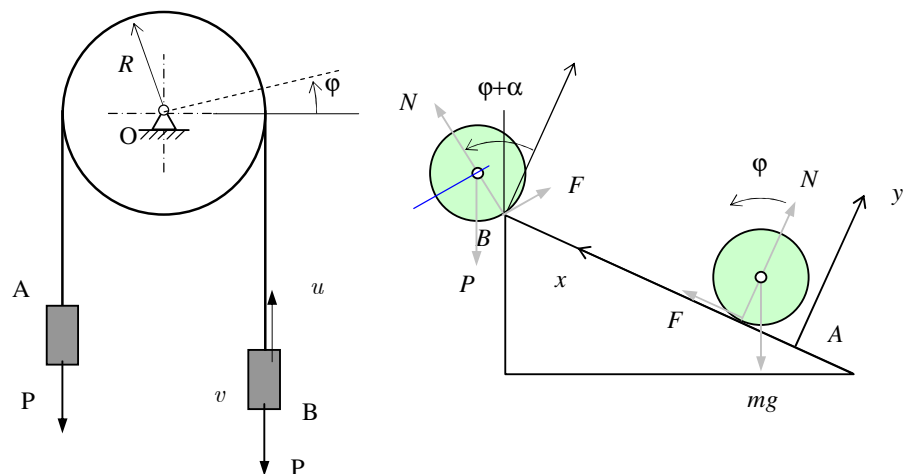


Đề thi năm 2010

Bài 1. Một ròng rọc O là vành tròn đồng chất, khối lượng M , bán kính R có thể quay không ma sát quanh trục qua O vuông góc mặt phẳng thẳng đứng. Một dây mềm nhẹ không giãn, vắt qua ròng rọc, một đầu buộc vật có khối lượng m và đầu kia người có cùng khối lượng m bám vào dây.

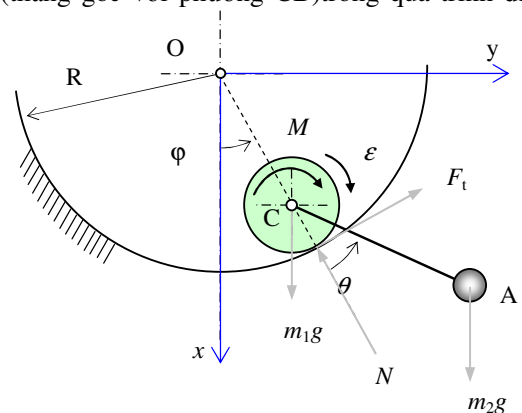
1) Ban đầu hệ đứng yên. Sau đó người leo với vận tốc u đối với dây. Xem giữa dây và ròng rọc không có trượt và các nhánh dây luôn thẳng đứng. Tìm vận tốc góc w và gia tốc góc của ròng rọc O?

2) Giả sử người leo lên với gia tốc a đối với dây. Tính lực bám của người tác dụng lên dây? Giả thiết do được gia tốc góc của ròng rọc, Tính gia tốc a ? Áp dụng cho trường hợp $m=4M$.



Bài 2. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m , bán kính R lăn không trượt theo mặt phẳng cố định AB, nghiêng với phương ngang một góc là α . Tại thời điểm ban đầu (ứng với A) khối tâm C nhận được vận tốc V_0 và khi khối tâm C đến vị trí của đường thẳng vuông góc với AB thì đĩa bắt đầu quay quanh mép B. Độ dài $AB = L$. Ký hiệu φ là góc nghiêng của đường kính đĩa qua B làm với phương thẳng đứng. Bỏ qua ma sát lăn.

- Tính giá trị của góc φ^* khi đĩa rời mép B? Tìm biểu thức tính thời gian T ứng với đĩa quay được góc φ^* ?
- Tính thành phần phản lực tiếp (thẳng góc với phương CB) trong quá trình đĩa quay quanh mép B.
- Tính vận tốc ban đầu V_0 khối tâm C của đĩa (ứng với vị trí A) để đĩa rời khỏi mép B khi CB ở vị trí thẳng đứng ($\varphi=0$).



Bài 3. Một đĩa tròn đồng chất, tâm C, bán kính r , khối lượng m_1 , chịu tác dụng ngẫu lực M , lăn không trượt bên trong vành tròn cố định B, bán kính R , tâm O. Bỏ qua ma sát lăn. Thanh cứng CA có độ dài L , khối lượng được bỏ

qua, quay không ma sát quanh trục qua tâm C của đĩa. Tại đầu mút A của thanh có gắn chất điểm có khối lượng m_2 .

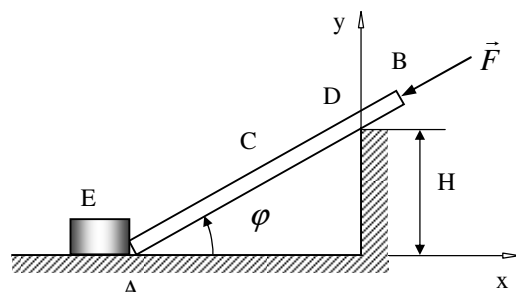
Chọn các tọa độ suy rộng φ và θ như hình bên.

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

2) Tính thành phần tiếp tuyến của phản lực giữa đĩa C và vành B

Đề thi năm 2011

Bài 1. Một thanh cứng, mảnh, đồng chất AB có chiều dài $2L$, khối lượng m_1 tựa không ma sát tại mấu D còn đầu mút A trượt theo sàn ngang và đẩy vật E, có khối lượng m_2 tịnh tiến theo phương ngang nhờ lực \vec{F} tác dụng tại điểm B của thanh, hướng dọc thanh AB và có giá trị không đổi bằng F_0 . Giả thiết bỏ qua ma



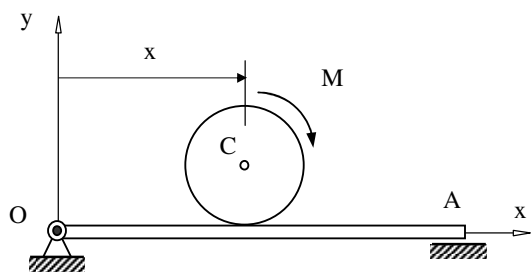
Hình 1

sát trượt giữa thanh và sàn, giữa thanh và vật E, chỉ kể đến ma sát trượt giữa vật E và sàn với hệ số ma sát trượt động bằng f ($F_{ms} = fN$, trong đó N là phản lực pháp tuyến). Cho chiều cao của thành $H = L$.

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ ?

2) Tính lực thanh AB đẩy vật E theo phương ngang sang trái theo các đại lượng $\varphi, \dot{\varphi}$ (được xem là cho). Xem thanh AB luôn luôn tiếp xúc với vật E. Tính $\dot{\varphi}(t_1)$ khi cho góc $\varphi(t_1) = 30^\circ$, và ban đầu hệ đứng yên với $\varphi(0) = 60^\circ$.

Bài 2. Một thanh đồng chất OA, khối lượng m_1 chiều dài $2L$ có thể quay quanh trục O nằm ngang. Một đĩa tròn đồng chất khối lượng m_2 bán kính R lăn không trượt dọc thanh dưới tác dụng của ngẫu lực $M = M_0 - \alpha\omega$; ω là vận tốc góc của đĩa đối với thanh OA, M_0 và α là các hằng số đã cho biết.

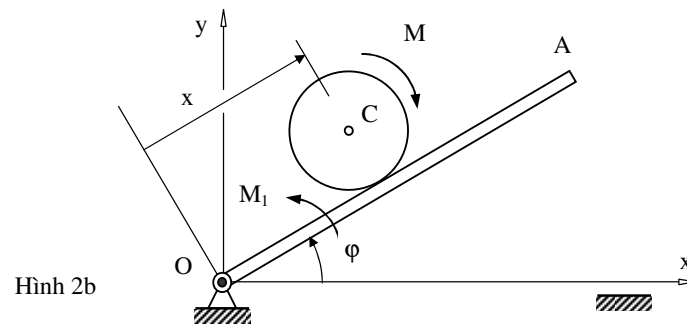


Hình 2a

Xét các trường hợp:

1) Ban đầu thanh OA được giữ cố định theo phương ngang, (Hình 2a). Xác định chuyển động của tâm C của đĩa và phản lực giữa đĩa và thanh OA.

2) Thanh OA quay quanh O theo chiều ngược kim đồng hồ dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M_1 . Chọn các tọa độ suy rộng là x, φ (Hình 2b). Viết phương trình vi phân chuyển động cơ hệ? ($\varphi < \pi/2$)



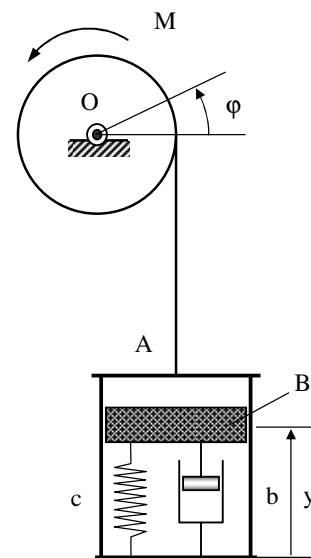
Hình 2b

Bài 3. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_0 , bán kính R , chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M , quay không ma sát quanh trục O, còn buồng A có khối lượng m_1 được kéo lên (tịnh tiến) theo phương đứng nhờ dây cáp không bị dãn và khối lượng được bỏ qua. Ghế B có khối lượng m_2 được liên kết với A nhờ thiết bị giảm xóc lò xo có độ cứng $c = \text{hằng}$ và thiết bị cản với hệ số cản nhớt (tương đối) là $b = \text{hằng}$. Ghế B chuyển động tịnh tiến đối với buồng A. Chọn các tọa độ suy rộng là góc quay φ của trục quay O và tọa độ y của ghế B đối với buồng A (hình 3)

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ?

2) Giả sử đĩa quay với vận tốc góc $\dot{\varphi} = \omega_0(1 + \sin \Omega t)$, trong đó ω_0 và Ω là những hằng số đã cho, còn t là biến thời gian.

a) Hãy xác định chuyển động của ghế B (đối với buồng A) trong chuyển động bình ổn (ứng với thời gian $t \rightarrow \infty$) và tính độ cứng c của lò xo để biên độ của ghế không vượt quá giá trị định trước A_0 (hệ số cản b bé, trong biểu thức tính biên độ dao động bình ổn của ghế bỏ qua số hạng chứa bình phương đối với b).

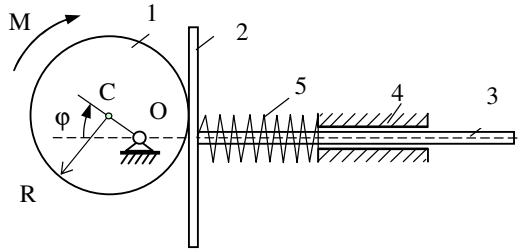


b) Tính sức căng trong dây cáp và tính phản lực do ghế B tác dụng lên đáy của buồng A theo phương đứng trong chế độ bình ổn.

Đề thi năm 2012

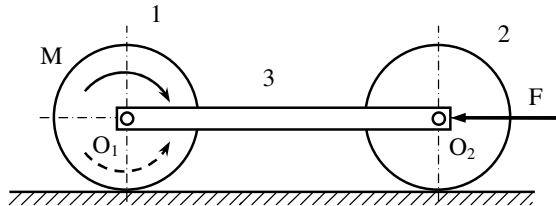
Bài 1. Cho một cơ hệ có sơ đồ như hình vẽ. Bánh cam 1 là một đĩa tròn đồng chất bán kính R , khối lượng m quay quanh trục ngang O cố định và thẳng góc với mặt phẳng của hình. Trục quay O cách tâm C của bánh cam một đoạn bằng e . Bánh cam quay quanh trục O dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen không đổi M và làm cho cần dây 2-3 chuyển động tịnh tiến theo rãnh nhẵn ngang. Bánh cam luôn tiếp xúc với cần nhờ một lò xo 5 độ cứng c . Cần có khối lượng $m = m_2 + m_3$. Cho biết ban đầu đĩa 2 của cần cách trục O một đoạn bằng e và lò xo chưa làm việc. Bỏ qua ma sát (H.1).

- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ
- 2) Xác định phản lực lò xo tác dụng lên khâu 4 và lực liên kết giữa khâu 1 và 2



Hình 1

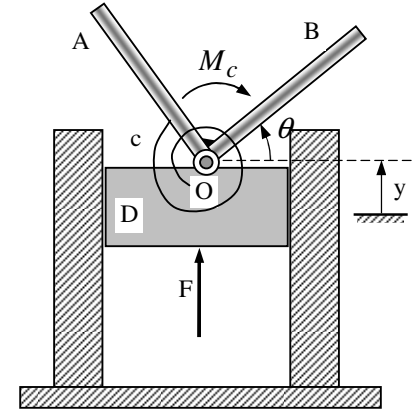
Bài 2. Chiếc xe hai bánh, các bánh xe là những đĩa tròn đồng chất, mỗi bánh có khối lượng m bán kính R , lăn không trượt trên mặt phẳng nằm ngang, khung 3 có khối lượng m_0 . Bánh xe 1 chịu tác dụng của mômen M từ động cơ gắn với khung O_1O_2 . Khung O_1O_2 chịu tác dụng của lực cản F theo phương ngang (H.2). Khoảng cách $O_1O_2 = L$.



Hình 2

- 1) Tìm vận tốc của xe với giả thiết ngẫu lực có biểu thức $M = M_0 - \alpha \omega_1$, trong đó M_0, α là các hằng số đã cho, ω_1 là vận tốc của bánh 1, $F = F_0 = \text{const}$, các bánh xe lăn không trượt. Bỏ qua ma sát ổ trục.
- 2) Xét trường hợp $M = M_0, (\alpha = 0)$, tìm điều kiện để bánh xe trước lăn không trượt. Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa các bánh xe với mặt đường là f . Bỏ qua ma sát lăn.

Bài 3. Cho một cơ hệ là thanh gãy khúc AOB có góc tại đỉnh O vuông, các đoạn OA và OB được xem là những thanh đồng chất có các chiều dài tương ứng là $2a$ và $2b$ và các khối lượng là m_1 và m_2 . Thanh gãy khúc liên kết với đế D , có khối lượng m_0 nhờ bản lề O (không ma sát) và một lò xo xoắn có độ cứng c và chịu tác dụng của ngẫu lực cân M_c có mômen tỉ lệ tuyến tính với vận tốc góc của thanh gãy khúc với hệ số tỉ lệ β , tức $M_c = -\beta \dot{\theta}$, trong đó $\dot{\theta}$ là vận tốc góc của thanh gãy khúc (H.3). Ban đầu thanh OA ở vị trí thẳng đứng, còn OB nằm ngang. Chọn các tọa độ suy rộng là y và θ , trong đó y là tọa độ của đế D theo phương đứng, còn θ là góc định vị của thanh OB kể từ vị trí cân bằng tĩnh nằm ngang.



Hình 3

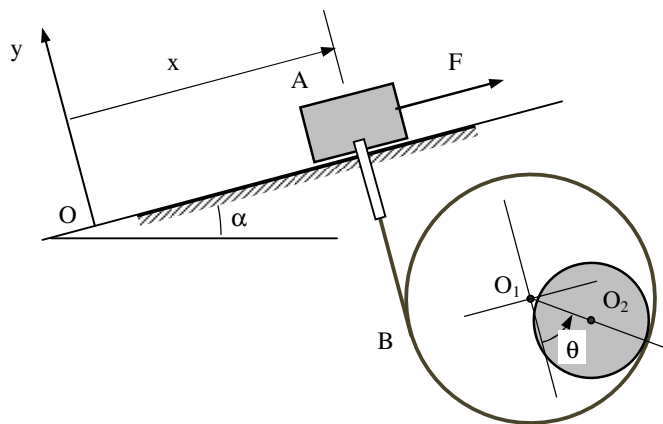
- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ khi đế D chịu tác dụng lực $F(t)$ hướng thẳng đứng lên?
- 2) Giả sử đế D chuyển động theo luật: $y = H \sin \Omega t$, trong đó H và Ω là những hằng số đã cho, còn t là biến thời gian, xem các đại lượng θ , H là bé, lấy $\sin \theta \approx \theta$ và $\cos \theta \approx 1$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai trở lên, ($H\theta \approx 0$). Hãy xác định chuyển động quay quanh trục O của thanh gãy khúc OAB trong chế độ bình ổn (ứng với thời gian $t \rightarrow \infty$).

Đề thi năm 2013

Bài 1. Cho cơ hệ như trên hình 1. Vật A gắn cứng với vành tròn tâm O_1 , có bán kính R , nhờ thanh AB ($AB = L$), có khối lượng m_1 chuyển động không ma sát dọc mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng ngang góc α chịu tác dụng lực F hướng dọc mặt phẳng nghiêng. Một đĩa tròn đồng chất, tâm O_2 , có bán kính r , khối lượng m_2 , lăn

không trượt bên trong vòng tròn tâm O_1 . Chọn các tọa độ suy rộng x, θ (θ là góc nghiêng của O_1O_2 đối với phương AB). Hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng.

- 1) Viết biểu thức động năng và **ma trận quán tính** của cơ hệ?
- 2) Tính thế năng và lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng?
- 3) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Hình 1

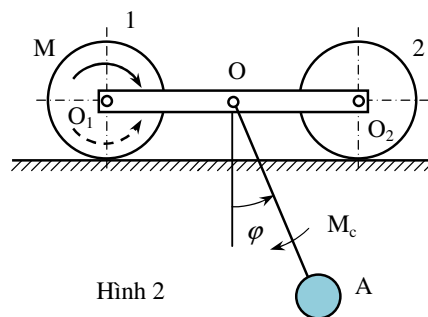
Bài 2. Một cầu trục được cho trên hình 2. Vật A được xem như chất điểm, có khối lượng m_1 , còn dây cáp có chiều dài l , được xem là thanh mảnh, cứng (bỏ qua khối lượng), hai bánh xe của cầu trục là những đĩa tròn đồng chất, có cùng bán kính r và mỗi bánh xe có khối lượng là m_2 . Bánh xe sau (khối tâm O_1) chịu tác dụng ngẫu lực $M_{dc} = M_0 - \alpha\omega_1$, trong đó M_0, α là những hằng số cho, ω_1 là vận tốc góc của bánh xe sau O_1 (mô tơ gắn vào thân xe O_1O_2). Thân xe O_1O_2 là thanh cứng đồng chất, có chiều dài $2L$, song song với phương ngang có khối lượng m_3 . Con lắc OA (O là khối tâm thân xe), chịu tác dụng ngẫu lực cân $M_c = -\beta\dot{\varphi}, \beta = const$ (cho biết β). Cầu trục chuyển động từ trái sang phải. Lúc xe bắt đầu chuyển động dây OA đứng yên ở vị trí thẳng đứng. Giả thiết các bánh xe lăn không trượt. Bỏ qua ma sát lăn và ma sát tại các ổ trục.

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của xe theo tọa độ x của xe và góc định vị φ của thanh treo?

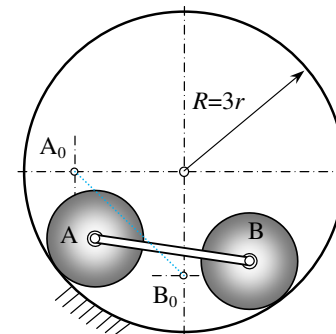
2) Khảo sát trường hợp xe chuyển động với qui luật: $v = \dot{x} = v_0 - H \cos \Omega t$, trong đó v_0, H, Ω là những hằng số cho biết ($H \ll v_0$).

a) Tìm chuyển động của con lắc $\varphi(t)$ (xem $\varphi, \dot{\varphi} \ll 1$, nên lấy $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi = 1$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai đối với $\varphi, \dot{\varphi}$).

b) Tính sức căng trong dây cáp và phản lực giữa bánh xe trước và mặt đường?



Hình 2



Hình 3

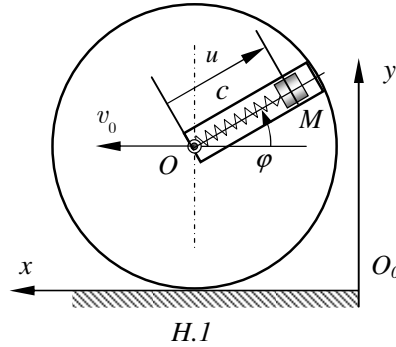
Bài 3. Hai con lăn dạng đĩa tròn đồng chất, khối lượng m , bán kính r liên kết với nhau nhờ nối bản lề với thanh cứng đồng chất có khối lượng m_1 . Thanh có chiều dài $l = 2\sqrt{2}r$. Các con lăn lăn không trượt trong vành bánh xe cố định, có bán kính $R = 3r$. Cơ cấu đặt trong mặt phẳng đứng. Bỏ qua ma sát tại các trục quay A và B.

1) Xác định vận tốc của trục các con lăn khi thanh AB ở vị trí nằm ngang. Cho biết ban đầu tâm A nằm yên ở trên đường nằm ngang bên phía trái tâm O, còn tâm B nằm trên đường thẳng đứng phía dưới tâm O.

2) Tính phản lực tác dụng lên các con lăn từ đường lăn khi thanh AB ở vị trí nằm ngang.

Đề thi năm 2014

Bài 1. Một đĩa tròn bán kính R , lăn không trượt theo phương ngang (trong mặt phẳng thẳng đứng), tâm O có vận tốc $v_0 = \text{const}$ (H.1). Con trượt M chuyển động dọc rãnh thẳng, được xem là chất điểm có khối lượng m , gắn vào đầu lò xo tuyến tính có độ cứng c , có độ dài khi chưa biến dạng là l_0 , ($l_0 \ll R$), còn một đầu nối với tâm O . Lực ma sát nhớt giữa con trượt và rãnh trượt $F_{ms} = -\beta \dot{u}$, β – hằng số cho ($\beta \ll m$).



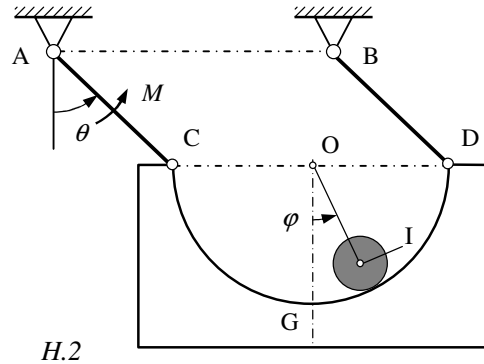
Ban đầu rãnh ở vị trí ngang bên phải của tâm O .

1) Xác định chuyển động của con trượt dọc theo rãnh.

2) Khảo sát chế độ bình ổn ($t \rightarrow \infty$), tính giá trị lớn nhất của v_0 để chất điểm M không chạm đến vành, tức $|u| < R$ (trong kết quả tính toán để đơn giản lấy $l_0 = 0$ và $\beta = 0$).

3) Xác định phản lực pháp tuyến do rãnh tác dụng lên con trượt trong chế độ bình ổn tại thời điểm rãnh trượt làm với phương ngang góc φ (lấy $\beta = 0$).

Bài 2. Cho sơ đồ máy nghiền như hình 2. Các thanh treo AC và BD có cùng chiều dài L , mảnh và cứng, khối lượng bé được bỏ qua. Bàn nghiền có khối lượng m_1 , được khoét dạng hình bán nguyệt có bán kính $OC=OD=OG=R$. Bánh nghiền có dạng đĩa tròn, đồng chất, khối lượng m_2 , bán kính $r = kR$ lăn không trượt dọc rãnh khoét, k – hằng số cho. Thanh AC chịu tác dụng ngẫu lực có mô men M . Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng đứng. Chọn các tọa độ suy rộng θ, φ .



1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

2) Tính phản lực tiếp giữa bánh nghiền và bàn nghiền trong trường hợp $\theta(t)$ là hàm đã biết của biến thời gian t .

3) Xác định chuyển động của bánh nghiền trong trường hợp: $\theta = \theta_0 \sin \Omega t$, trong đó θ_0, Ω là những hằng số đã cho, với giả thiết $\theta_0 \ll 1$; $\varphi \ll 1$; $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1$; $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$ và bỏ qua vô cùng bé từ bậc hai trở lên. Tính toán số với các số liệu sau :

$$l = 1,5R = 1 \text{ m}; \quad k = 0,6; \quad \Omega = 1 \text{ rad/s}; \quad \theta_0 = 0,05 \text{ rad}; \quad g \approx 10 \text{ m/s}^2.$$

Bài 3. Ô tô cần cầu có sơ đồ cho trên hình 3. Xe có khối lượng m_1 , bán kính bánh xe bằng r , khối lượng được bỏ qua. Trục bánh sau chịu tác dụng ngẫu lực có mô men $M = M_0 - \alpha \omega$, trong đó M_0, α là những hằng số đã cho, ω là vận tốc góc của bánh xe sau. Cần trục có chiều dài l , được xem là thanh thẳng đồng chất có khối lượng m_2 liên kết với thân xe bằng lò xo tuyến tính có hệ số cứng c và chịu mô men cản nhớt $M_c = -\beta \dot{\varphi}$, trong đó β là hằng số đã cho ($\beta < m_2 l^2$). Các bánh xe chuyển động lăn không trượt. Cho biết ban đầu cần trục ở vị trí thẳng đứng phía trên, $\varphi(t_0) = 0$, và lò xo không bị biến dạng. Bỏ qua ma sát lăn. Chọn các tọa độ suy rộng là x, φ .

1) Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ?

2) Xét trường hợp xe chạy với vận tốc $v = v_0 - H \cos \omega t$, trong đó v_0, H, ω là các hằng số đã cho. Giả thiết góc φ bé (lấy $\cos \varphi = 1, \sin \varphi = \varphi, H \ll v_0$).

a) Xác định chuyển động của cần trục OA .

b) Tính giá trị của H để góc lệch φ không vượt quá một trị số cho phép $[\varphi]$, tức : $\varphi \leq [\varphi]$ với giả thiết bỏ qua dao động tự do và trong tính toán lấy $\beta = 0$.

