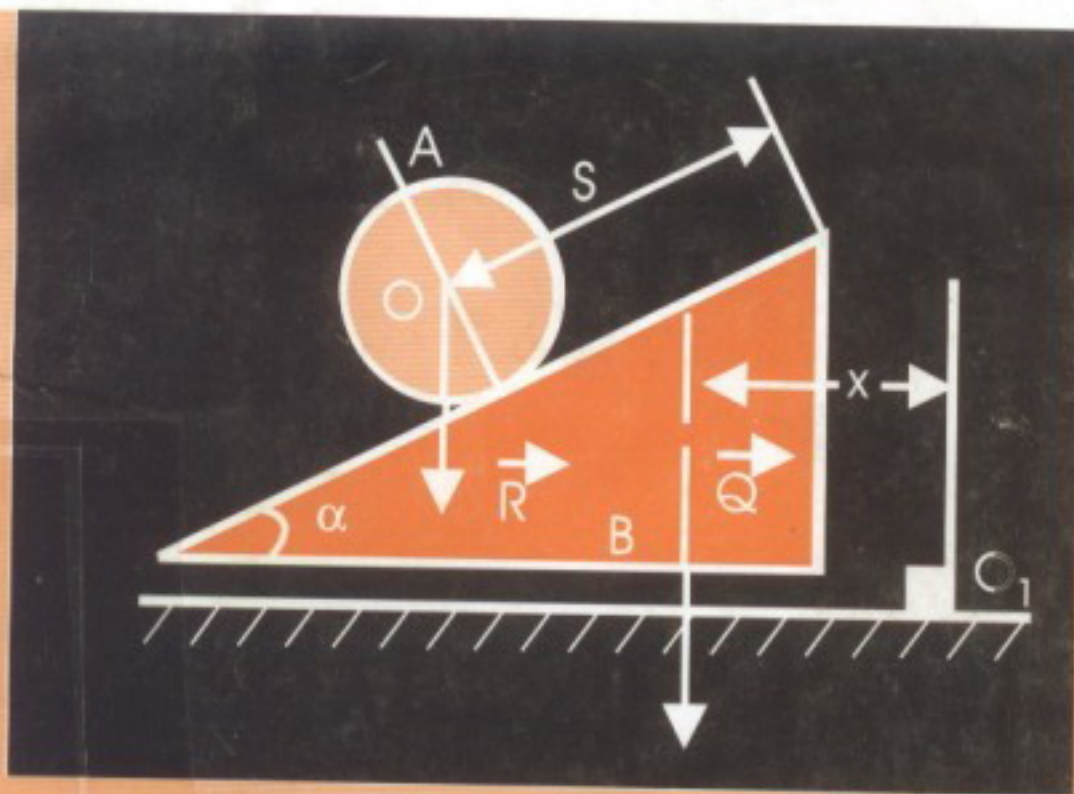


ĐỒ SANH

CƠ HỌC

TẬP HAI ĐỘNG LỰC HỌC



g CD
ghệ ĐN
T2
S



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

GS. TSKH. ĐỖ SANH

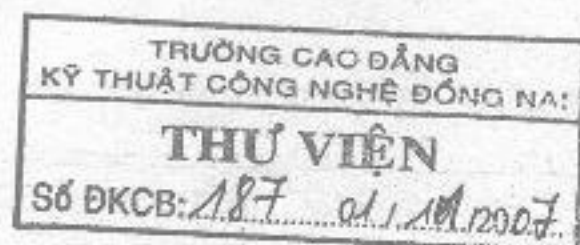
CƠ HỌC

TẬP HAI

ĐỘNG LỰC HỌC

(Đã được Hội đồng môn học của Bộ Giáo dục và Đào tạo
thông qua dùng làm tài liệu giảng dạy
trong các trường Đại học kỹ thuật)

• (Tái bản lần thứ chín)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chương 1

CÁC KHÁI NIỆM VÀ HỆ TIỀN ĐỀ CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học là một phần của cơ học lý thuyết nhằm nghiên cứu các quy luật của chuyển động cơ học của các vật thể dưới tác dụng của lực. Như đã biết, tĩnh học chỉ nghiên cứu các quy luật cân bằng của vật rắn dưới tác dụng của các lực, còn động học nghiên cứu chuyển động về mặt hình học. Động lực học nghiên cứu chuyển động của các vật thể một cách toàn diện nhằm thiết lập các mối quan hệ có tính chất quy luật giữa hai loại đại lượng: các đại lượng đặc trưng cho tác dụng của lực và các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của vật thể.

Động lực học được xây dựng trên hệ tiên đề do Galilê và Niuton đưa ra, thường được gọi là hệ tiên đề Niuton hay còn gọi là các định luật Niuton.

1.1. CÁC KHÁI NIỆM

1.1.1. Vật thể

Trong cơ học lý thuyết vật thể được mô hình dưới các dạng sau:

Chất điểm: còn được gọi là vật điểm, là một điểm hình học có mang khối lượng. Chất điểm là mô hình của các vật thể mà kích thước của nó có thể bỏ qua được do nhỏ so với các vật

thể khác hoặc không đóng vai trò gì trong quá trình khảo sát chuyển động, ví dụ khi xác định tâm xa của viên đạn hoặc khi khảo sát chuyển động của các vật tịnh tiến có thể xem chúng là chất điểm.

Cơ hệ: là tập hợp hữu hạn hoặc vô hạn các chất điểm trong đó chuyển động của một chất điểm bất kỳ phụ thuộc vào chuyển động của các chất điểm còn lại, nghĩa là chuyển động của các chất điểm phụ thuộc vào nhau. Nói khác đi, giữa các chất điểm của cơ hệ tồn tại các tương tác cơ học. Tùy thuộc vào bản chất của tương tác cơ học giữa các chất điểm, cơ hệ được phân thành cơ hệ tự do và cơ hệ không tự do.

Cơ hệ tự do là tập hợp các chất điểm mà mỗi tương tác cơ học giữa chúng được biểu hiện thuần túy qua lực tác dụng. Nói khác đi, cơ hệ tự do, là tập hợp các chất điểm tự do, tức là chất điểm mà di chuyển của nó (di chuyển vô cùng bé) từ vị trí đang xét theo bất kỳ phương nào cũng không bị cản trở. Thái dương hệ là một thí dụ về cơ hệ tự do.

Cơ hệ không tự do, còn được gọi là *cơ hệ chịu liên kết*, là tập hợp các chất điểm mà trong chuyển động của chúng, ngoài lực tác dụng, vị trí và vận tốc của các chất điểm bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước được gọi là *những liên kết*. Cơ cấu máy là một thí dụ về cơ hệ không tự do.

Vật rắn tuyệt đối: là một cơ hệ gồm vô số các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ của nó không đổi trong suốt thời gian chuyển động. Trong thực tế các vật mà biến dạng của nó có thể bỏ qua do bé hoặc do không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát chuyển động, được xem là vật rắn tuyệt đối, thường được gọi vắn tắt là vật rắn.

1.1.2. Lực

Khái niệm lực đã được định nghĩa trong tĩnh học. Đó là tác dụng tương hỗ cơ học giữa các vật thể. Như đã biết, các đặc

trung của lực là đường tác dụng, điểm đặt và cường độ của lực. Lực được biểu diễn nhờ vectơ lực. Trong tĩnh học chỉ liên quan với các lực hằng, trong động lực học, lực nói chung là đại lượng biến đổi (biến đổi cả về độ lớn và hướng). Lực biến đổi có thể phụ thuộc vào thời gian, vị trí và vận tốc của chất điểm và có thể phụ thuộc đồng thời vào các đại lượng vừa nêu. Trong trường hợp tổng quát, biểu thức của lực có dạng

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \quad (1 - 1)$$

Các lực tác dụng lên cơ hệ có thể phân thành ngoại lực và nội lực. Ngoại lực được ký hiệu bởi \vec{F}_e là lực do các vật thể bên ngoài cơ hệ tác dụng lên các chất điểm thuộc cơ hệ. Nội lực, được ký hiệu bởi \vec{F}_i , là lực do các chất điểm thuộc cơ hệ tác dụng lẫn lên nhau. Các lực tác dụng lên cơ hệ cũng có thể được phân thành lực hoạt động và lực liên kết. Lực liên kết được ký hiệu bởi \vec{R} , là lực do các liên kết tác dụng lên các chất điểm của cơ hệ. Các lực không phải là lực liên kết, được gọi là lực hoạt động.

Việc phân loại lực theo cách nào sẽ tùy thuộc vào phương pháp được dùng để khảo sát cơ hệ.

1.1.3. Hệ quy chiếu quán tính

Muốn khảo sát chuyển động của các vật thể trước hết phải chọn hệ quy chiếu. Trong động lực học hệ quy chiếu được chọn là hệ quy chiếu quán tính, đó là hệ quy chiếu mà trong đó định luật quán tính của Galilê được nghiệm đúng. Trong thực tế, tùy thuộc yêu cầu của độ chính xác của bài toán khảo sát, người ta chọn các hệ quy chiếu quán tính gần đúng. Trong thiên văn hệ quy chiếu quán tính được chọn là hệ trục tọa độ có gốc ở tâm mặt trời và ba trục hướng đến ba ngôi sao cố định. Trong kỹ thuật hệ quy chiếu quán tính được chọn thường là hệ trục tọa độ gắn liền với quả đất.

1.2. HỆ TIỀN ĐỀ CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Tiên đề thứ nhất (định luật quán tính)

Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là trạng thái quán tính của nó.

Như vậy theo tiên đề này, nếu không có lực tác dụng lên chất điểm (chất điểm như vậy được gọi là chất điểm cô lập) thì nó có trạng thái quán tính. Nói khác đi, chất điểm cô lập sẽ bảo toàn trạng thái quán tính của mình cho đến khi chưa có lực tác dụng buộc nó thay đổi trạng thái chuyển động. Bằng cách như vậy định luật quán tính không những cho một tiêu chuẩn về hệ quy chiếu quán tính mà còn phát hiện và khẳng định lực là nguyên nhân duy nhất làm biến đổi trạng thái chuyển động của chất điểm. Do đó, định luật quán tính là một trong những phát minh vĩ đại nhất của con người.

Tiên đề thứ hai (Định luật cơ bản của động lực học)

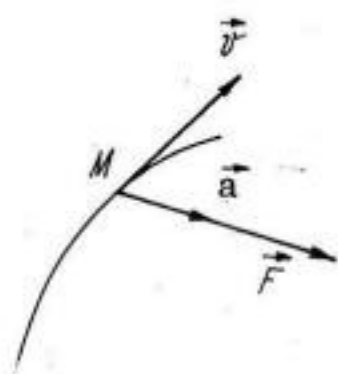
Trong hệ quy chiếu quán tính, dưới tác dụng của lực, chất điểm chuyển động với gia tốc có cùng hướng với lực và có giá trị tỷ lệ với cường độ của lực (H.1.1).

Như vậy tiên đề thứ hai được biểu thị bằng hệ thức:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1 - 2)$$

trong đó hệ số tỷ lệ m có giá trị không đổi, là số đo quán tính của chất điểm, được gọi là khối lượng của chất điểm. Tiên đề thứ hai thiết lập mối quan hệ về số lượng giữa lực tác dụng và gia tốc mà chất điểm thu được dưới tác dụng của lực đó.

Dạng thức (1 - 2) còn được gọi là phương trình cơ bản của động lực học.



Hình 1 - 1

Từ (1 - 2) khi $\vec{F} = 0$ ta có $\vec{a} = 0$ tức $\vec{v} =$ hằng vectơ (bao gồm cả trường hợp $\vec{v} = \vec{0}$), tức chất điểm cô lập sẽ có trạng thái quán tính. Tuy nhiên từ đó không thể nói rằng tiên đề thứ nhất là hệ quả của tiên đề thứ hai, bởi vì như trên đã nêu, tiên đề thứ nhất cho một tiêu chuẩn về hệ quy chiếu quán tính mà trong đó tiên đề thứ hai được thiết lập.

Khi viết (1 - 2) cho chất điểm rơi tự do trong trọng trường ta có:

$$P = mg \quad (1 - 3)$$

nó thiết lập mối quan hệ giữa trọng lượng và khối lượng của chất điểm.

Tiên đề thứ ba (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Các lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm có cùng đường tác dụng, ngược chiều và cùng cường độ.

Cần lưu ý rằng hai lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm không phải là cặp lực cân bằng vì chúng đặt vào hai chất điểm khác nhau. Tiên đề thứ ba không liên quan đến các yếu tố động học nên nó đúng đối với hệ quy chiếu bất kỳ.

Giá trị đặc biệt của tiên đề thứ ba còn ở chỗ nó mô tả tương tác giữa hai chất điểm và do đó cho khả năng khảo sát động lực học cơ hệ.

Theo tiên đề thứ ba, hệ nội lực sẽ gồm các lực từng đôi một trực đối nhau. Do đó suy ra tính chất của hệ nội lực: Vectơ chính và momen chính của hệ nội lực đối với một điểm bất kỳ luôn luôn triệt tiêu, tức là :

$$\vec{R}^i = \sum \vec{F}_k^i = \vec{0} \text{ và } \vec{m}_o^i = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k^i) = \vec{0} \quad (1 - 4)$$

Tuy nhiên như đã lưu ý ở trên, hệ nội lực không phải là hệ lực cân bằng.

Tiên đề thứ tư (Định luật về tính độc lập giữa tác dụng của các lực)

Dưới tác dụng đồng thời của một số lực, chất điểm có gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm có được khi mỗi lực tác dụng riêng biệt.

Giả sử chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Theo tiên đề thứ tư và áp dụng tiên đề thứ hai, chất điểm chuyển động với gia tốc \vec{a} được tính theo công thức :

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^n \frac{\vec{F}_k}{m}$$

Do đó:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \quad (1 - 5)$$

Điều đó có nghĩa là dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc thỏa mãn tiên đề thứ hai, trong đó lực tác dụng lên chất điểm là hợp lực của hệ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Nói khác đi, trong động lực học chất điểm cho phép sử dụng quy tắc hình bình hành lực đã nêu trong phần tĩnh học.

Tiên đề thứ năm (Tiên đề giải phóng liên kết)

Chất điểm không tự do (tức chất điểm chịu liên kết) có thể được xem như chất điểm tự do bằng cách giải phóng nó khỏi liên kết và thay thế liên kết đó bằng phản lực liên kết.

Tiên đề thứ năm cho phép áp dụng bốn tiên đề nêu trên, chúng được phát biểu đối với chất điểm tự do, cho động lực học chất điểm không tự do.

1.3. HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học nhằm giải quyết hai bài toán cơ bản sau:

Bài toán thứ nhất – bài toán thuận

Cho biết chuyển động của vật thể, hãy xác định lực đã gây ra chuyển động đó.

Bài toán thứ hai – bài toán ngược

Cho biết các lực tác dụng lên vật thể và những điều kiện đầu của chuyển động, hãy xác định chuyển động của vật thể ấy.

1.4. HỆ ĐƠN VỊ CƠ HỌC

Ở nước ta Nhà nước đã ban hành bảng đơn vị đo lường hợp pháp, xây dựng trên cơ sở của hệ đơn vị quốc tế SI.

Theo bảng đơn vị này các đại lượng cơ bản trong cơ học là: độ dài, khối lượng và thời gian. Lực là đại lượng dẫn xuất. Các đơn vị cơ bản tương ứng là: mét, kí hiệu là m; kilôgam, ký hiệu là kg và giây ký hiệu là s.

Để tìm đơn vị tương ứng của đại lượng dẫn xuất lực, ta sử dụng phương trình cơ bản của động lực học

$$F = ma$$

Với $m = 1\text{kg}$; $a = 1\text{m/s}^2$ thì $F = 1\text{kg} \cdot 1\text{m/s}^2 = 1\text{kgm/s}^2$, nó được gọi là Niuton, kí hiệu N. Vậy:

$$1\text{N} = 1\text{kgm/s}^2$$

Niuton là lực gây cho vật có khối lượng một kilôgam gia tốc một mét trên giây bình phương.

Đơn vị của các đại lượng khác sẽ được xác định nhờ vào mối quan hệ của chúng với các đại lượng cơ bản.

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA CHUYỂN ĐỘNG

2.1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

2.1.1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng vectơ

Khảo sát chuyển động của chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của lực \vec{F} (trong trường hợp chất điểm tự do, chịu tác dụng của nhiều lực thì \vec{F} là hợp lực của những lực đó, còn trong trường hợp chất điểm không tự do thì \vec{F} là hợp lực của lực hoạt động và lực liên kết).

Chọn một hệ quy chiếu quán tính. Trong hệ quy chiếu này chất điểm sẽ chuyển động với gia tốc \vec{a} , được xác định dựa vào tiên đề thứ hai (phương trình cơ bản của động lực học)

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Gọi \vec{r} là vectơ định vị của chất điểm trong hệ quy chiếu đã chọn. Như đã biết từ phần động học:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$$

Do đó phương trình cơ bản của động lực học chất điểm có thể viết dưới dạng

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \dot{\vec{r}}, \vec{r}) \quad (2 - 1)$$

Phương trình (2 - 1) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng vectơ.

2.1.2. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ Đề các

Chọn hệ trục tọa độ Đề các Oxyz gắn vào hệ quy chiếu quán tính. Khi chiếu hai vế của đẳng thức vectơ (2-1) lên các trục tọa độ ta được:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m \ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \quad (2-2)$$

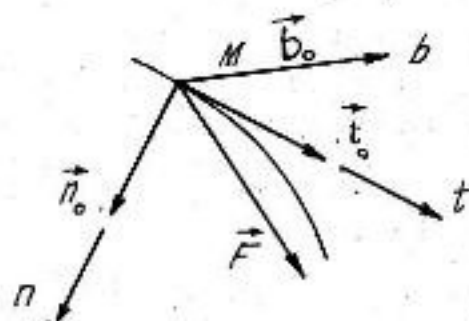
Hệ phương trình (2-2) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ Đề các.

Khi chất điểm chuyển động trong mặt phẳng hoặc dọc theo đường thẳng thì số phương trình giảm xuống còn tương ứng hai hoặc một.

2.1.3. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ tự nhiên

Khi chiếu hai vế của đẳng thức vectơ (2-1) lên các trục tọa độ tự nhiên (H. 2-1) và dựa vào kết quả trong phần động học, ta nhận được:

$$\begin{aligned} m \ddot{s} &= \overline{F}_r \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \\ 0 &= F_b \end{aligned} \quad (2-3)$$



Hình 2 - 1

trong đó \ddot{s} và v tương ứng là tọa độ cong và giá trị của vận tốc \vec{v} của chất điểm; ρ là bán kính cong của quỹ đạo, còn F_r , F_n , F_b lần lượt là các hình chiếu của lực \vec{F} lên các trục tiếp tuyến, pháp tuyến chính và trùng pháp tuyến.

Hệ phương trình (2-3) được gọi là các phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ tự nhiên.

Các phương trình trên áp dụng thuận lợi khi biết quỹ đạo tuyệt đối của chất điểm, đặc biệt đối với các bài toán của động lực học chất điểm không tự do.

2.1.4. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ cực

Khảo sát chất điểm chuyển động trong mặt phẳng.

Khi chiếu hai vế của đẳng thức vectơ (2 - 1) lên trục hướng theo bán kính vectơ \vec{r} và lên trục hướng vuông góc với vectơ \vec{r} về hướng tăng của góc φ và sử dụng các công thức tính gia tốc của chất điểm trong phân động học, ta có:

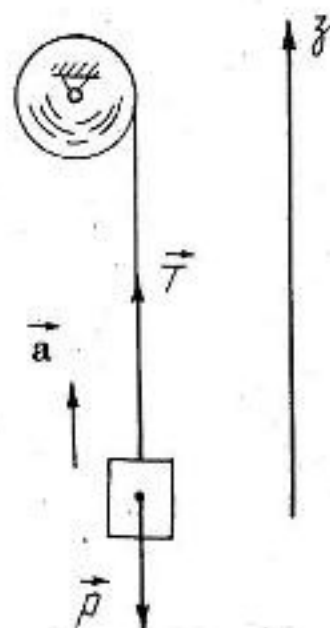
$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= F_{\rho} \\ m(\rho\ddot{\varphi} - 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) &= F_{\varphi} \end{aligned} \quad (2 - 4)$$

Đó là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ cực, nó thường được dùng để khảo sát chuyển động của chất điểm trong mặt phẳng.

2.1.5. Bài toán thứ nhất của động lực học chất điểm

Bài toán thuận. Cho biết chuyển động của chất điểm, hãy xác định lực tác dụng lên chất điểm. Trong trường hợp gia tốc của chất điểm đã cho, để giải bài toán ta áp dụng trực tiếp phương trình cơ bản của động lực học. Nếu chuyển động được cho, không phải trực tiếp qua gia tốc mà qua quy luật chuyển động của chất điểm thì đầu tiên phải tìm gia tốc của chất điểm nhờ các công thức đã thiết lập ở phần động học, sau đó áp dụng phương trình cơ bản của động lực học.

Thí dụ 2 - 1. Kéo một vật nặng có trọng lượng P đi lên nhanh dần với gia tốc \vec{a} (H.2-2). Hãy xác định sức căng của dây cáp.



Hình 2 - 2

Bài giải

Khảo sát vật nặng, vật được xem như chất điểm. Lực tác dụng vào vật nặng gồm lực \vec{P} hướng xuống và lực kéo của dây cáp hướng lên. Viết phương trình cơ bản của động lực học chất điểm:

$$\frac{P}{g} \vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

Khi chiếu hai vế của phương trình này lên trục thẳng đứng hướng lên ta có:

$$\frac{P}{g} a = T - P$$

Từ đó:

$$T = P \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Khi vật đi lên chậm dần hoặc đi xuống nhanh dần thì gia tốc \vec{a} sẽ hướng xuống và sức căng trong dây cáp sẽ bằng:

$$T = P \left(1 - \frac{a}{g} \right)$$

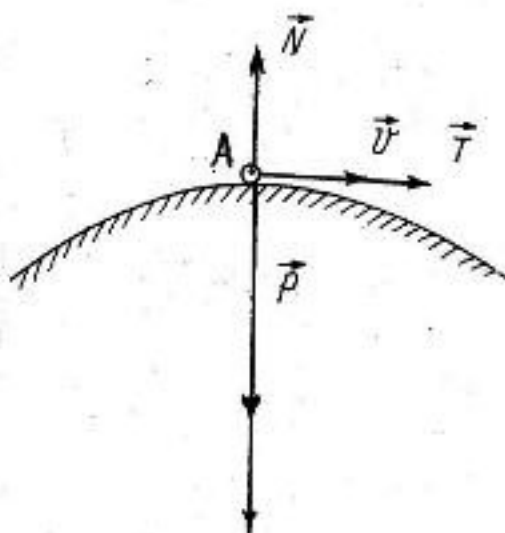
Khi vật đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều thì $a = 0$ và sức căng của dây cáp bằng: $T = P$.

Thí dụ 2 - 2. Tìm áp lực của ô tô lên cầu tại đỉnh A, cho biết ô tô có trọng lượng P và tại đỉnh A có vận tốc \vec{v} . Bán kính cong của cầu tại A là ρ . (H.2 - 3).

Bài giải

Khảo sát chuyển động của ô tô, nó được xem như chất điểm.

Các lực tác dụng lên ô tô gồm trọng lực \vec{P} , các phản lực pháp



Hình 2 - 3

tuyến \vec{N} và tiếp tuyến \vec{T} . (Áp lực của ô tô lên cầu có cùng độ lớn nhưng hướng ngược chiều với phản lực pháp tuyến \vec{N}).

Viết phương trình cơ bản của động lực học chất điểm (ô tô) ta được:

$$\frac{P}{g} \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T}$$

Khi chiếu hai vế của đẳng thức vectơ này lên trục pháp tuyến chính, ta có:

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{\rho} = P - N$$

Từ đó: $N = P \left(1 - \frac{v^2}{\rho g} \right)$.

Áp lực của ô tô lên cầu phụ thuộc vào vận tốc của ô tô.

Thí dụ 2 - 3. Một sàng vật liệu hạt dao động điều hòa thẳng đứng với biên độ $A = 5\text{cm}$. Hãy xác định tần số dao động của sàng để cho hạt được bật lên khỏi mặt sàng.

Bài giải

Khảo sát hạt nằm trên mặt sàng và do đó hạt chuyển động cùng mặt sàng, tức là dao động điều hòa thẳng đứng với biên độ A . (H. 2 - 4).

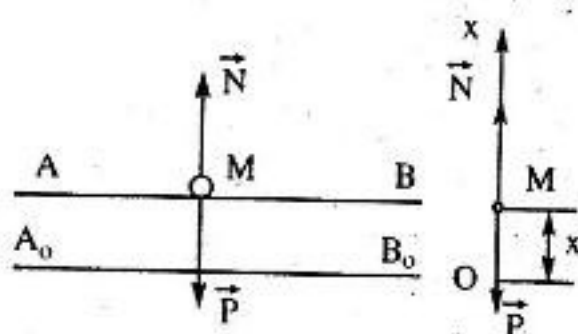
Lực tác dụng lên hạt gồm trọng lực và phản lực của sàng lên hạt.

Viết phương trình cơ bản của động lực học cho hạt ta được:

$$\frac{P}{g} \bar{a} = N - P$$

Từ đó: $N = P \left(1 + \frac{\bar{a}}{g} \right)$

Vì hạt nằm trên sàng nên hạt có gia tốc bằng gia tốc của



Hình 2 - 4

sàng. Phương trình chuyển động của sàng có dạng:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha)$$

trong đó A là biên độ, α là góc pha ban đầu, ω là tần số dao động.

$$\text{Do đó: } \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

Vậy phân lực của sàng tác dụng lên hạt bằng:

$$N = P \left[1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t + \alpha) \right]$$

Khi hạt còn nằm trên mặt sàng (tức hạt chưa rời khỏi mặt sàng) thì:

$$N > 0$$

Vậy điều kiện để hạt rời được khỏi mặt sàng sẽ là:

$$N \leq 0$$

$$\text{tức: } 1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t + \alpha) \leq 0$$

Điều kiện này được thỏa mãn khi:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{A}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,05}} = 14 \text{ Hz.}$$

Vậy để hạt rời được khỏi mặt sàng thì sàng phải dao động với tần số bé nhất ω_{\min} bằng

$$\omega_{\min} = 14 \text{ Hz}$$

2.1.6. Bài toán thứ hai của động lực học chất điểm

Bài toán ngược: Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu), hãy xác định chuyển động của chất điểm ấy.

Trong trường hợp này như đã biết, phương trình cơ bản của động lực học cho phương trình vi phân chuyển động của chất điểm. Để xác định chuyển động của chất điểm cần phải tích phân phương trình vi phân chuyển động. Nếu tìm được các tích

phân, chúng sẽ chứa các hằng tích phân, chỉ cho biết lớp chuyển động chứ chưa cho biết dạng chuyển động cụ thể của chất điểm. Muốn tìm dạng chuyển động cụ thể cần phải xác định các hằng tích phân nhờ các điều kiện đầu:

Thí dụ 2 - 4. Một vật nặng có khối lượng m được treo vào đầu lò xo có độ cứng c nằm cân bằng tại vị trí O . Kéo vật nặng lệch khỏi vị trí cân bằng O với độ lệch x_0 và cho vật vận tốc đầu v_0 hướng về vị trí cân bằng O . Tìm chuyển động của vật (H. 2 - 5).

Bài giải

Khảo sát vật nặng được xem như chất điểm. Lực tác dụng lên chất điểm gồm trọng lực \vec{P} và lực đàn hồi lò xo \vec{F}_{lx} .

Giả thiết rằng lực đàn hồi lò xo tỉ lệ bậc nhất với độ giãn lò xo kể từ vị trí không biến dạng, tức:

$$F_{lx} = c\delta$$

trong đó δ là độ giãn của lò xo, so với trạng thái không biến dạng của nó.

Chọn trục Ox hướng thẳng xuống. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm sẽ là:

$$m\ddot{x} = P - c\delta$$

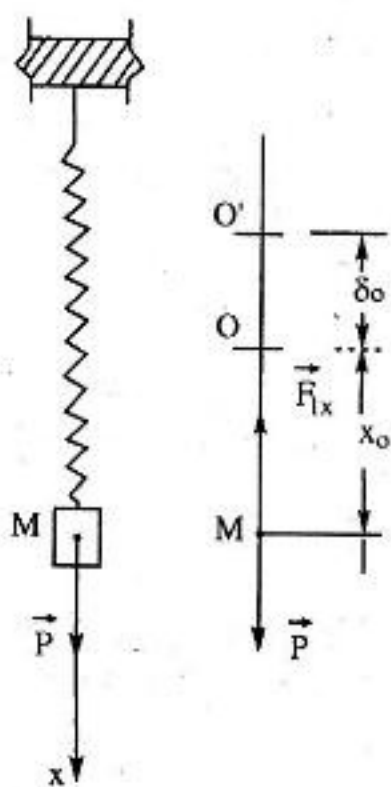
$$\text{ở đó: } \delta = x + \delta_0$$

δ_0 là độ giãn của lò xo ứng với vị trí cân bằng (so với trạng thái không biến dạng của lò xo), x là tọa độ của chất điểm kể từ vị trí cân bằng tĩnh O .

Như vậy chúng ta có :

$$m\ddot{x} = P - c(x + \delta_0) = -cx + P - c\delta_0$$

Tại vị trí cân bằng ta có : $P - c\delta_0 = 0$



Hình 2 - 5

Do đó:

$$m\ddot{x} = -cx$$

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm có thể viết dưới dạng :

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

Trong đó:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

được gọi là tần số dao động riêng.

Như đã biết phương trình vi phân trên có nghiệm tổng quát dạng:

$$x = A \sin(kt + \alpha)$$

trong đó A và α là hai hằng tích phân, chúng sẽ được xác định từ điều kiện đầu.

$$x(t_0) = x_0; \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

Chọn gốc thời gian ứng với thời điểm đầu, tức $t_0 = 0$

Vậy:

$$x_0 = A \sin \alpha$$

$$v_0 = Ak \cos \alpha$$

Từ đó dễ dàng tìm được:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}$$

$$\alpha = \arctg \frac{kx_0}{v_0}$$

A là biên độ của dao động, α là pha ban đầu.

Vậy vật nặng dao động điều hòa với biên độ A và tần số k .

Chú ý rằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trên cũng có thể được viết dưới dạng:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

trong đó C_1, C_2 là hai hằng tích phân được xác định từ điều kiện đầu. Để tìm chúng, ta dựa vào biểu thức vận tốc của chất điểm :

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$$

Ứng với thời điểm đầu $t = 0$, ta có:

$$x_0 = C_1$$

$$v_0 = C_2 k$$

$$\text{Vậy : } x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Thí dụ 2 - 5. Một quả cầu khối lượng m rơi tự do từ một điểm 0 không vận tốc đầu, dưới tác dụng của trọng lực. Sức cản của không khí đối với quả cầu tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, hệ số tỉ lệ $\beta = \text{const.}$

Hãy xác định chuyển động của quả cầu (H. 2 - 6)

Bài giải

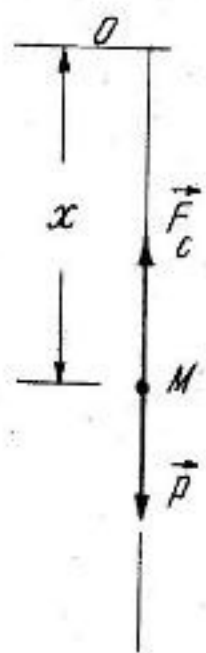
Khảo sát chuyển động quả cầu được xem như chất điểm. Lực tác dụng lên chất điểm gồm trọng lực và lực cản của không khí $\vec{F}_c = -\beta \vec{v}$.

Chọn trục Ox hướng thẳng xuống. Phương trình vi phân chuyển động của quả cầu sẽ là:

$$m\ddot{x} = P - \beta \dot{x} = mg - \beta \dot{x}$$

Từ đó:

$$\ddot{x} = g - n\dot{x}; \text{ với } n = \frac{\beta}{m}$$



Hình 2 - 6

Phương trình vi phân này có thể viết dưới dạng:

$$\frac{dx}{g-nx} = dt$$

Khi tích phân phương trình vi phân vừa nhận được với chú ý rằng lực cản không thể lớn hơn trọng lực, tức:

$$F_c \leq P \text{ hay } g - nx \geq 0.$$

ta tìm được: $\dot{x} = \frac{g}{n} - C_1 e^{-nt}$

$$x = \frac{g}{n} t + \frac{C_1}{n} e^{-nt} + C_2$$

trong đó C_1, C_2 là các hằng tích phân được xác định từ điều kiện đầu.

Nếu chọn gốc thời gian tương ứng với gốc tọa độ 0, thì $x(0) = x_0 = 0; \dot{x}(0) = v_0 = 0$.

Dễ dàng tìm được các hằng C_1 và C_2 từ hệ phương trình:

$$0 = \frac{g}{n} - C_1$$

$$0 = \frac{C_1}{n} + C_2$$

Vậy:

$$C_1 = \frac{g}{n}; C_2 = -\frac{g}{n^2}$$

Phương trình chuyển động của chất điểm sẽ là:

$$x = \frac{g}{n} t + \frac{g}{n^2} (e^{-nt} - 1)$$

Từ biểu thức vận tốc của chất điểm ta có: $v = \frac{g}{n} (1 - e^{-nt})$,
 khi $t \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \frac{g}{n} = \text{hằng}$, tức chuyển động chất điểm dần
 đến trạng thái chuyển động đều khi thời gian tiến đến ∞ .

Vận tốc ứng với trạng thái đó được gọi là vận tốc giới hạn,
 có kí hiệu v_∞ hoặc v_{gh}

$$v_\infty = \frac{g}{n}$$

Nhận xét rằng hàm e^{-nt} giảm nhanh khi t tăng, nên trong
 thực tế sau một khoảng thời gian không lớn có thể coi vận tốc
 của chất điểm đạt được vận tốc giới hạn. Lúc đó lực cản cân
 bằng với trọng lực.

Tiến đến trạng thái vận tốc giới hạn là một tính chất quan
 trọng nhất của chuyển động của chất điểm (và của cả hệ) chuyển
 động trong môi trường cản với lực cản tỷ lệ với vận tốc.

Lưu ý rằng giá trị của vận tốc giới hạn có thể tìm được trực
 tiếp mà không phải qua biểu thức của vận tốc nhờ con đường
 tích phân phương trình vi phân chuyển động.

Thực vậy, vận tốc giới hạn có thể tìm được từ biểu thức:

$$F_{\text{cản}} = P, \text{ tức } \beta \dot{x} = mg$$

Do đó:

$$v_\infty = \frac{g}{n}$$

Thí dụ 2 - 6. Một viên đạn được bắn lên với vận tốc ban
 đầu \vec{v}_0 làm với phương ngang một góc α . Bỏ qua sức cản của
 không khí. Tìm chuyển động của viên đạn.

Bài giải

Khảo sát chuyển động của viên đạn, nó được xem như chất
 điểm. Lực tác dụng lên viên đạn chỉ có trọng lực.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz, có gốc O ứng với vị trí ban đầu
 của viên đạn, trục Oz hướng thẳng đứng lên, còn trục Qy hướng