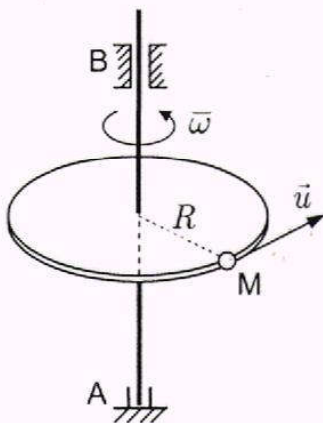


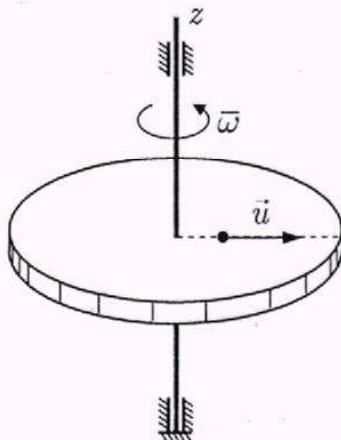
Định lý biến thiên mômen động lượng

12-16. Đĩa đồng chất bán kính R có khối lượng m , chất điểm M có khối lượng m_0 . Ban đầu đĩa quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω_0 và chất điểm đứng yên trên vành đĩa. Tìm vận tốc góc ω của đĩa khi chất điểm chuyển động theo vành đĩa với vận tốc tương đối u .

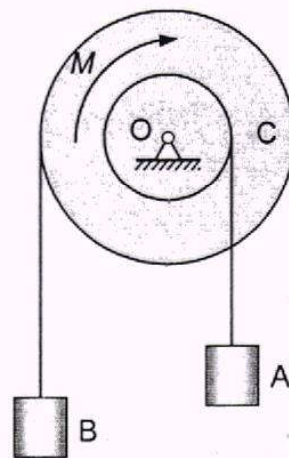
Đáp số: $\omega = \omega_0 - \frac{2m_0 u}{(m + 2m_0)R}$.



Hình bài 12-16



Hình bài 12-17



Hình bài 12-18

12-17. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và bán kính r . Đĩa quay quanh trục z cố định với vận tốc góc ω_0 . Vào một thời điểm nào đó, chất điểm M có khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài vành theo một đường bán kính với vận tốc không đổi u . Xác định vận tốc góc ω của đĩa là hàm theo thời gian kể từ lúc chất điểm M chuyển động. Bỏ qua lực ma sát tại ổ trục.

Đáp số: $\omega = \frac{m_1 r^2 \omega_0}{m_1 r^2 + 2m_2 u^2 t^2}$.

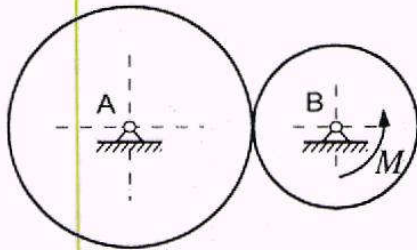
12-18. Hai vật nặng A và B có khối lượng tương ứng m_1 và m_2 được treo vào hai đầu của dây không trọng lượng, không giãn. Dây được quấn vào tang của tời C hai tầng có bán kính nhỏ r và bán kính lớn R . Để nâng vật B lên người ta tác dụng một ngẫu lực có mômen M lên tời như hình vẽ. Biết tời có khối lượng m , bán kính quán tính đối với trục quay là ρ , hãy tìm gia tốc góc của tời C .

Đáp số: $\varepsilon = \frac{M + m_1 g r - m_2 g R}{m \rho^2 + m_1 r^2 + m_2 R^2}$.

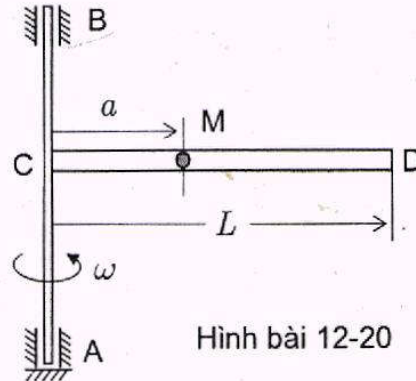
12-19. Bánh răng A được truyền động từ bánh răng B. Cho biết bánh răng A có khối lượng $m_A = 10 \text{ kg}$, bán kính $r_A = 250 \text{ mm}$, bán kính quán tính với trục quay $\rho_A = 200 \text{ mm}$. Bánh răng B có khối lượng $m_B = 3 \text{ kg}$, bán kính $r_B = 100 \text{ mm}$, bán kính quán tính $\rho_B = 80 \text{ mm}$. Bánh răng B chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = 6 \text{ Nm}$. Ban đầu hệ đứng yên. Xác định:

- Thời gian T cần thiết để đĩa B đạt được vận tốc góc $n_B = 600 \text{ vòng/phút}$,
- Thành phần lực tiếp tuyến do bánh răng B tác dụng vào bánh răng A.

Đáp số: a) $T = 0,871 \text{ s}$; b) $F = 46,2 \text{ N}$.



Hình bài 12-19



Hình bài 12-20

12-20. Một ống nằm ngang CD có thể quay tự do quanh trục thẳng đứng AB. Quả cầu M (xem như chất điểm) khối lượng m có thể chuyển động bên trong ống. Ban đầu quả cầu M đứng yên cách trục quay một khoảng $MC = a$. Tại một thời điểm, ống được truyền vận tốc góc ω_0 . Xác định vận tốc góc ω của ống ngay khi quả cầu vừa rời khỏi ống CD. Cho biết mômen quán tính của ống đối với trục quay bằng J , chiều dài $CD = L$. Bỏ qua ảnh hưởng của ma sát.

Đáp số: $\omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2} \omega_0$.

12-21. Một động cơ điện chịu tác dụng của một ngẫu lực tổng hợp (phát động và cản) có mômen quay là $M = a - b\omega$, trong đó a, b là các hằng số dương và ω là vận tốc góc của động cơ. Mômen quán tính của phần quay đối với trục quay hình học là J . Tìm biểu thức vận tốc góc ω trong quá trình mở máy từ trạng thái đứng yên.

Đáp số: $\omega = \frac{a}{b} (1 - e^{-bt/J})$.

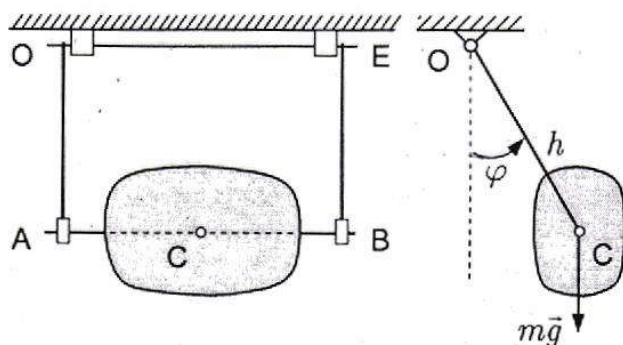
12-22. Một rôto có mômen quán tính khối J khởi động từ trạng thái đứng yên dưới tác dụng của một ngẫu lực phát động có mômen không đổi M_0 và của một ngẫu lực cản có mômen $M_1 = \alpha\omega^2$ với α là hằng số và ω là vận tốc góc của vật. Tìm

quy luật biến thiên của vận tốc góc theo thời gian và tìm giá trị vận tốc góc giới hạn của vật.

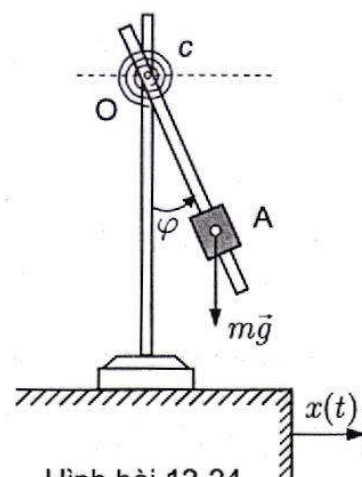
Đáp số: $\omega = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}} \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$, với $\beta = \frac{2}{J} \sqrt{\alpha M_0}$; $\omega_{gh} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \sqrt{\frac{M_0}{\alpha}}$.

12-23. Để xác định mômen quán tính khối của một vật có khối lượng m đối với trục AB đi qua khối tâm C của vật, ta treo vật bằng hai thanh AO và BE gắn cứng vào vật sao cho AB có phương nằm ngang như hình vẽ. Hai thanh AO và BE cùng chiều dài h có thể quay tự do quanh trục OE cố định. Khi vật dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng (góc φ bé), ta đo được chu kỳ dao động T . Nếu bỏ qua trọng lượng của hai thanh treo và bỏ qua ma sát ở các khớp quay, hãy thiết lập biểu thức tính mômen quán tính khối của vật đối với trục AB.

Đáp số: $J_{AB} = mh \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - h \right)$.



Hình bài 12-23



Hình bài 12-24

12-24. Bộ phận chính của dao động kế để ghi chấn động ngang của móng máy có cấu tạo như một con lắc được biểu diễn trên hình vẽ. Khi OA thẳng đứng, lò xo xoắn không bị biến dạng. Cho biết mômen tĩnh của con lắc đối với O khi OA nằm ngang $mgh = 4,5 \text{ Ncm}$, mômen quán tính khối của con lắc đối với trục quay là $J_O = 3 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$, độ cứng của lò xo xoắn là $c = 0,1 \text{ Ncm}$. Bỏ qua mọi lực cản.

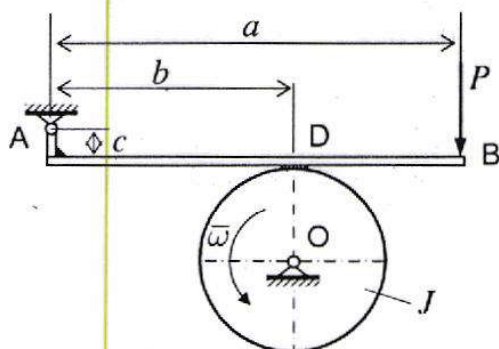
- Xác định chu kỳ của dao động nhỏ tự do của con lắc quanh vị trí cân bằng thẳng đứng (góc φ bé).
- Gắn dao động kế vào một móng máy, giả thiết rằng móng máy dao động điều hòa theo phương ngang theo quy luật $x = a \sin 60t \text{ cm}$. Nếu biên độ dao động của con lắc là 6° , hãy xác định biên độ dao động a của móng máy.

Đáp số: a) $T = 0,507 \text{ s}$; b) $a = 6,56 \text{ mm}$.

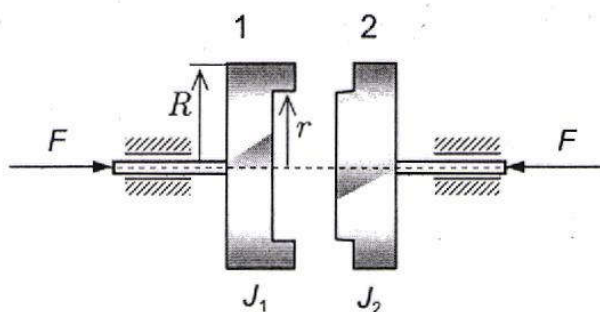
12-25. Tác dụng lực P để hãm một trục máy đang quay với vận tốc góc ω_0 . Trục máy có bán kính R , mômen quán tính khối đối với trục quay O là J . Hệ số ma sát động tại má phanh D là f . Bỏ qua ma sát tại ổ trục O . Cho biết các kích thước a, b, c như trên hình vẽ. Hãy xác định:

- Khoảng thời gian T kể từ lúc bắt đầu hãm cho đến khi trục máy dừng lại.
- Số vòng n mà trục máy quay được trong khoảng thời gian đó.

Đáp số: a) $T = \frac{b - fc}{PafR} J \omega_0$, b) $n = \frac{\omega_0 T}{4\pi}$.



Hình bài 12-25



Hình bài 12-26

12-26. Xét quá trình nối trục (đóng ly-hợp) bằng đĩa ma sát trên mô hình đơn giản như hình vẽ. Cho biết vận tốc góc trước khi nối trục của đĩa 1 là ω_1 và của đĩa 2 là ω_2 , mômen quán tính của hai đĩa đối với trục quay tương ứng là J_1, J_2 . Lực nối trục tác dụng vào hai đĩa dọc theo trục với độ lớn F . Mặt trong của đĩa 1 có bán kính ngoài là R , bán kính trong là r . Hệ số ma sát trượt động giữa hai mặt tiếp xúc là μ . Hãy xác định:

- Vận tốc góc chung ω của hai đĩa sau khi nối trục.
- Khoảng thời gian t_n cần thiết để nối trục.

Đáp số: a) $\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}$, b) $t_n = \frac{3(R^2 - r^2)}{2\mu F(R^3 - r^3)} \frac{J_1 J_2 (\omega_2 - \omega_1)}{J_1 + J_2}$.

Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn phẳng

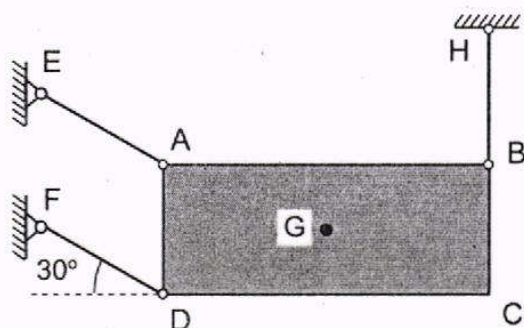
12-27. Tấm chữ nhật ABCD có khối lượng $m = 8\text{kg}$ được giữ ở vị trí như hình vẽ. Hai thanh trọng lượng không đáng kể, $AE = DF = 150\text{mm}$, $AB = DC = 500\text{mm}$, $AD = BC = 200\text{mm}$. Xác định ứng lực mỗi thanh khi dây BH vừa bị đứt.

Đáp số: $S_{AE} = 47,9\text{ N}$; $S_{DF} = 8,70\text{ N}$.

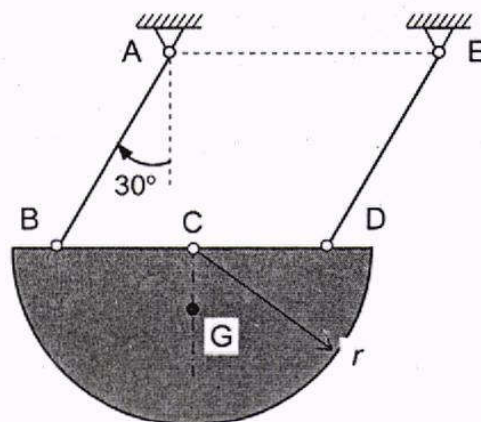
12-28. Tấm đồng chất dạng nửa hình tròn với bán kính $r = 200\text{mm}$ và có khối lượng $m = 5\text{kg}$. Tấm được treo bằng hai thanh khối lượng không đáng kể, các kích thước

$AB = DE = 250\text{mm}$, $AE = BD = 300\text{mm}$. Khi ở vị trí như hình vẽ tám có vận tốc $v = 1,8\text{m/s}$, hãy xác định ứng lực trong mỗi thanh. Cho biết khoảng cách tới khối tâm G là $CG = 4r/3\pi$.

Đáp số: $S_{AB} = 36,1\text{ N}$; $S_{DE} = 71,2\text{ N}$.

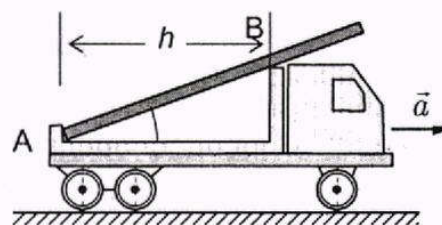


Hình bài 12-27



Hình bài 12-28

12-29. Một cái cột đồng chất chiều dài l , khối lượng m , được đỡ bằng xe tải như hình vẽ. Xe chuyển động trên đường thẳng ngang với gia tốc a . Tìm lực do xe tác dụng lên cột tại B. Tìm gia tốc lớn nhất a_{\max} của xe để việc chuyên chở được an toàn.

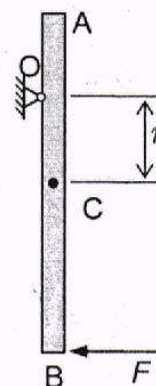


Hình bài 12-29

Đáp số: $N_B = \frac{1}{2h} Lm(g \cos \alpha - a \sin \alpha) \cos \alpha$,

$$a_{\max} = g \cot \alpha.$$

12-30. Thanh đồng chất AB có chiều dài L , trọng lượng P được treo bản lề tại O như hình vẽ. Khoảng cách từ điểm treo đến trọng tâm C là $r = L/4$. Khi thanh đang ở vị trí cân bằng tĩnh, ta tác dụng lực nằm ngang F tại điểm cuối B. Hãy xác định gia tốc góc của thanh và lực liên kết tại O.

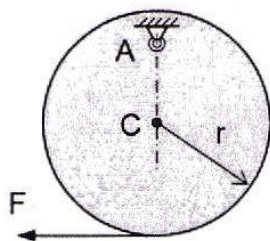


Hình bài 12-30

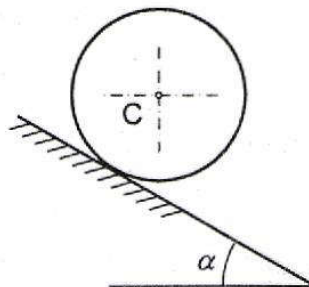
Đáp số: $X_O = \frac{FL(L - 6r)}{L^2 + 12r^2}$, $Y_O = P$, $\varepsilon = \frac{36Fg}{7PL}$.

12-31. Đĩa tròn đồng chất khối lượng $m = 6\text{kg}$, bán kính $r = 160\text{mm}$ quay được quanh trục A. Cho biết khoảng cách $AC = 3r/4$. Xác định gia tốc góc của đĩa và lực liên kết tại A tại thời điểm đĩa chịu tác dụng của lực nằm ngang $F = 20\text{N}$.

Đáp số: $\varepsilon = 34,3\text{ rad/s}^2$; $X_A \approx 4,7\text{ N}$; $Y_A \approx 58,9\text{ N}$.



Hình bài 12-31



Hình bài 12-32, 12-33

12-32. Dưới tác dụng của trọng lực, một khối trụ tròn đồng chất lăn xuống theo đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α . Hệ số ma sát trượt tĩnh giữa mặt trụ và mặt phẳng nghiêng là μ_0 . Tìm góc nghiêng α của mặt phẳng nghiêng để đảm bảo cho chuyển động lăn đó là không trượt, tìm gia tốc của tâm C khối trụ. Bỏ qua ma sát lăn.

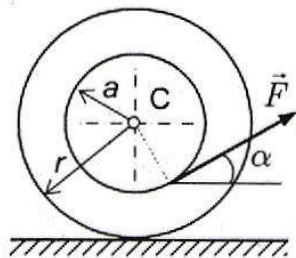
Đáp số: $\alpha \leq \arctan(3\mu_0)$; $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$.

12-33. Một bánh xe đồng chất bán kính r lăn xuống không trượt theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát lăn động giữa bánh xe và mặt nghiêng là k . Tìm điều kiện để bánh xe lăn xuống đều.

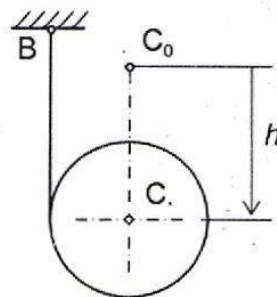
Đáp số: $k = r \tan \alpha$.

12-34. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn, có trọng lượng P bán kính r , được đặt trên mặt phẳng ngang không nhẵn. Một sợi dây quấn vào tầng trong của con lăn với bán kính a , tác dụng lên đầu tự do của dây một lực có trị số F , nghiêng với mặt phẳng ngang một góc không đổi α . Cho biết bán kính quán tính của con lăn đối với trục của nó là ρ , hãy tìm quy luật chuyển động của tâm C của con lăn.

Đáp số: $x(t) = \frac{F}{P} \frac{rg(r \cos \alpha - a)}{2(r^2 + \rho^2)} t^2$.



Hình bài 12-34



Hình bài 12-35

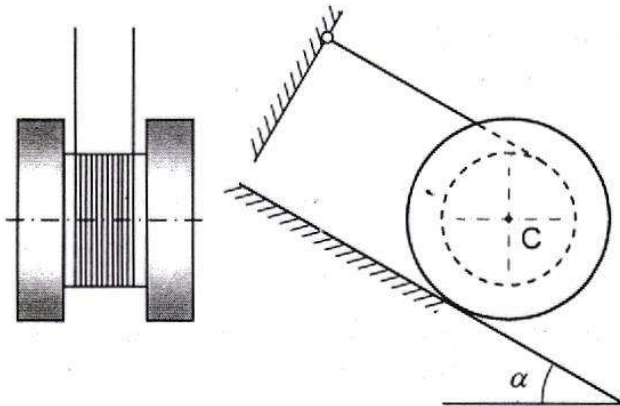
12-35. Một trụ tròn đồng chất tâm C, có khối lượng m , lăn xuống theo một dây treo thẳng đứng quấn vào nó. Đầu B của dây được buộc chặt và khi trụ rơi không

vận tốc ban đầu thì nhả dây quấn ra. Tìm vận tốc trục khối trụ khi nó đã rơi được một đoạn h và tìm lực căng của dây treo.

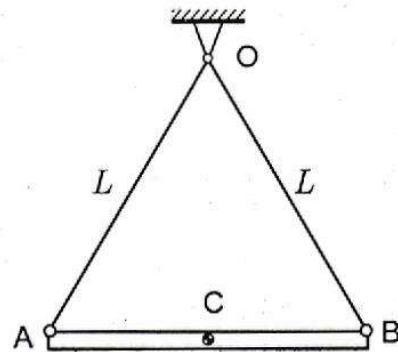
Đáp số: $v = \frac{2}{3} \sqrt{3gh}$, $T = \frac{1}{3} mg$.

12-36. Người ta quấn hai dây mềm vào một khối trụ tròn đồng chất hai tầng. Khối trụ trọng lượng P , bán kính lần R , bán kính quấn dây r , bán kính quán tính đối với trục tâm là ρ . Hệ số ma sát trượt động giữa mặt trụ và mặt nghiêng là f . Giả thiết rằng trọng lượng thắng lực cản do ma sát và khối trụ trượt xuống không vận tốc ban đầu. Trong quá trình chuyển động đường tâm của trụ luôn vuông góc với đường dốc chính của mặt nghiêng. Tìm quy luật chuyển động $x_C(t)$ của trục khối trụ và lực căng của mỗi dây. Cho rằng trong chuyển động đang xét dây quấn chưa nhả ra hết.

Đáp số: $x_C(t) = \frac{r \sin \alpha - f \cos \alpha (R + r)}{2(r^2 + \rho^2)} rgt^2$,
 $T = \frac{Rrf \cos \alpha + \rho^2 (\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2(r^2 + \rho^2)} P$.



Hình bài 12-36



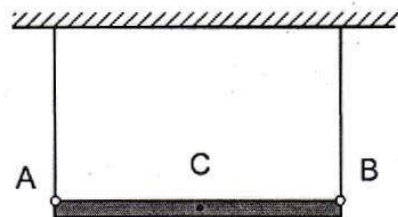
Hình bài 12-37

12-37. Một thanh đồng chất AB có trọng lượng P được treo vào điểm O nhờ hai dây có chiều dài bằng nhau và bằng độ dài L của thanh. Xác định sức căng của một trong hai nhánh dây tại thời điểm nhánh kia bị đứt.

Đáp số: $T = 0,266P$.

12-38. Thanh thẳng AB đồng chất có khối lượng là m được treo nằm ngang nhờ hai dây theo phương thẳng đứng buộc vào hai đầu thanh, còn hai đầu khác của dây buộc vào trần nhà. Tìm lực căng ở một nhánh dây khi nhánh dây kia bị đứt tức thời.

Đáp số: $T = 0,25P$.

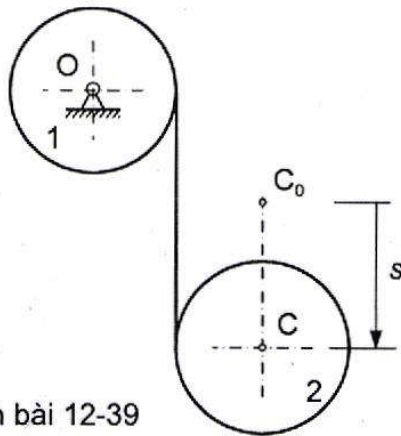


Hình bài 12-38

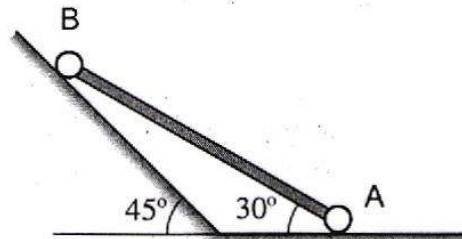
12-39. Hai trụ tròn xoay đồng chất 1 và 2 có khối lượng lần lượt là m_1 và m_2 và bán kính lần lượt là r_1 và r_2 . Quấn hai sợi dây mềm vào hai đầu của từng trụ một cách đối xứng với mặt phẳng trung bình song song với đáy của khối trụ đó. Khi khối trụ 2 rơi tự do không vận tốc đầu, dây quấn được nhả ra và làm cho trụ 1 quay quanh trục cố định qua tâm trụ. Bỏ qua ma sát và các lực cản. Hãy xác định:

- Vận tốc góc của hai khối trụ khi dây quấn chưa nhả ra hết;
- Phương trình chuyển động của tâm C của trụ 2;
- Sức căng của mỗi dây quấn.

Đáp số: a) $\omega_1 = \frac{2gm_2t}{r_1(3m_1 + 2m_2)}$, $\omega_2 = \frac{2gm_1t}{r_2(3m_1 + 2m_2)}$,
 b) $s = \frac{(m_1 + m_2)g}{3m_1 + 2m_2} t^2$, c) $T = \frac{m_1m_2g}{2(3m_1 + 2m_2)}$.



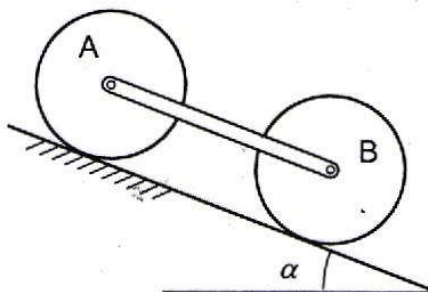
Hình bài 12-39



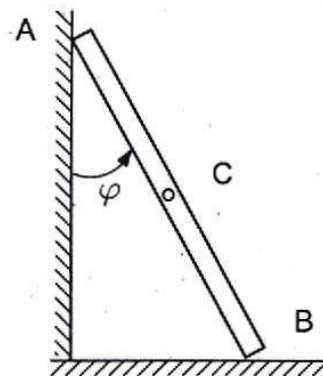
Hình bài 12-40

12-40. Thanh đồng chất AB có chiều dài 122cm, trọng lượng $P = 222,5\text{N}$, trượt xuống không vận tốc đầu từ vị trí như hình vẽ. Bỏ qua ma sát, xác định gia tốc góc của thanh và lực liên kết tại A và B (tại thời điểm bắt đầu chuyển động).

Đáp số: $\varepsilon = 2,3 \text{ rad/s}^2$; $N_A = 124,1\text{N}$; $N_B = 100,1\text{N}$.



Hình bài 12-41



Hình bài 12-42

12-41. Hai con lăn đồng chất cùng khối lượng m và cùng bán kính r nối với nhau bằng thanh AB cứng nhẹ (khối lượng không đáng kể). Con lăn A là trụ tròn rỗng còn con lăn B là trụ tròn đặc. Cả hai con lăn đều lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α . Tìm gia tốc tâm A và ứng lực trong thanh AB.

Đáp số: $a_A = \frac{4}{7} g \sin \alpha$, $S = \frac{1}{7} mg \sin \alpha$.

12-42. Thanh AB đồng chất chiều dài $2l$, khối lượng m đặt trong mặt phẳng thẳng đứng. Giữ thanh đứng yên ở vị trí φ_0 rồi thả cho nó chuyển động dưới tác dụng của trọng lực. Bỏ qua ma sát trượt giữa thanh và tường, giữa thanh và nền. Hãy xác định:

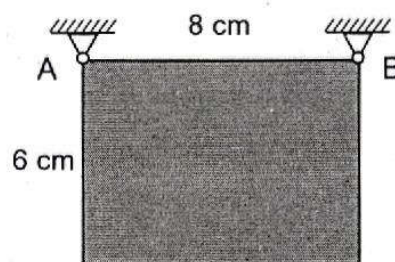
- Vận tốc góc và gia tốc góc theo góc nghiêng φ .
- Phản lực do nền và tường tác dụng lên thanh theo góc φ .

Đáp số: a) $\varepsilon = \frac{3}{4} (g/l) \sin \varphi$, $\omega = \sqrt{\frac{3}{2} g (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) / l}$,

b) $N_A = ml(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$, $N_B = mg - ml(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$.

12-43. Tấm chữ nhật có kích thước cho trên hình vẽ, trọng lượng 60N. Tấm được giữ bởi hai bản lề A và B. Xác định gia tốc góc của tấm và lực liên kết tại A ngay sau khi tấm bị mất liên kết tại B.

Đáp số: $\varepsilon = 11,76 \text{ rad/s}^2$; $X_A = 12 \text{ N}$; $Y_A = 36 \text{ N}$.



Hình bài 12-43