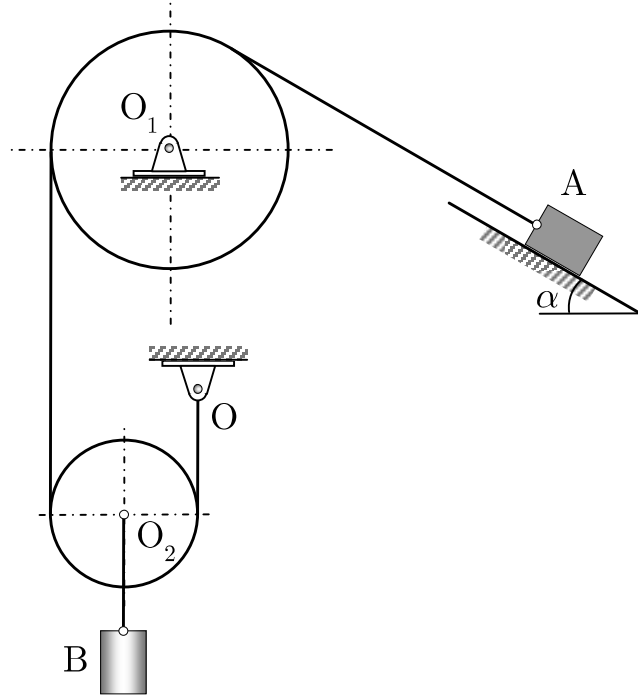


OLYMPIC CƠ HỌC TOÀN QUỐC -2015

ĐỀ THI

1. CƠ HỌC KỸ THUẬT

Bài 1. Cho hệ thống tời như hình vẽ. Các ròng rọc tâm O_1 và O_2 là những đĩa đồng chất có bán kính tương ứng r_1, r_2 , khối lượng m_1, m_2 . Vật B, có khối lượng m được kéo lên nhờ vật A, có khối lượng m_0 di chuyển theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc α , có ma sát với hệ số ma sát trượt không bằng f . Xem dây nhẹ, không co dãn và hai nhánh dây thẳng đứng luôn song song, còn ròng rọc tâm O_2

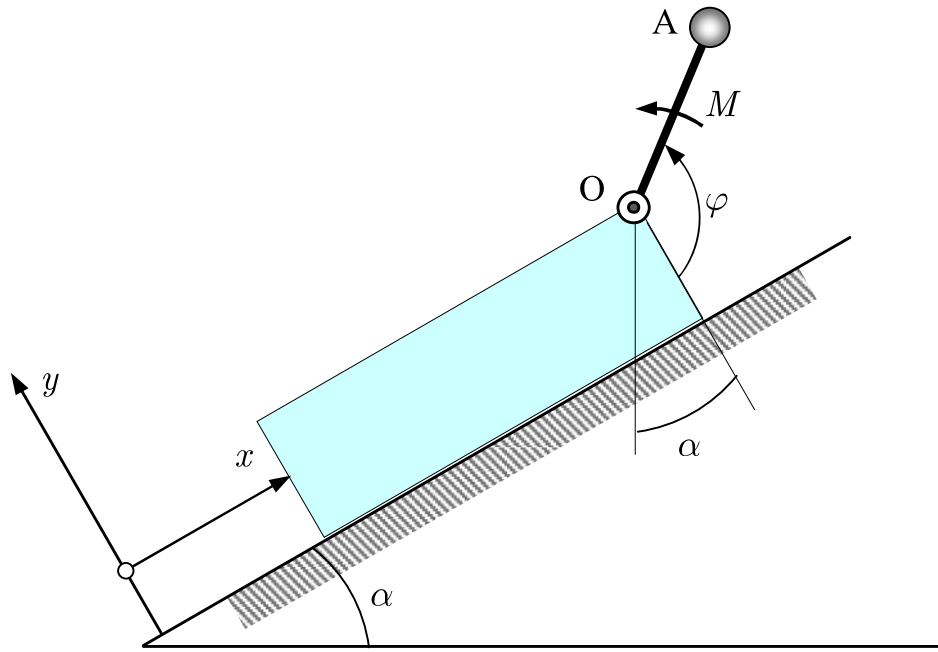


được cuốn lên theo nhánh dây bên phải. Bỏ qua ma sát tại ổ trục O_1 . Hệ ban đầu đứng yên.

- 1) Tìm gia tốc của vật B được kéo lên và viết phương trình chuyển động của vật B khi vật A di chuyển xuống dọc mặt phẳng nghiêng.
- 2) Tính sức căng trong các nhánh dây
- 3) Xét trường hợp khi vật B được kéo lên chịu sức cản theo phương đứng tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của vật với hệ số β . Tìm chuyển động của vật B trong chế độ bình ổn

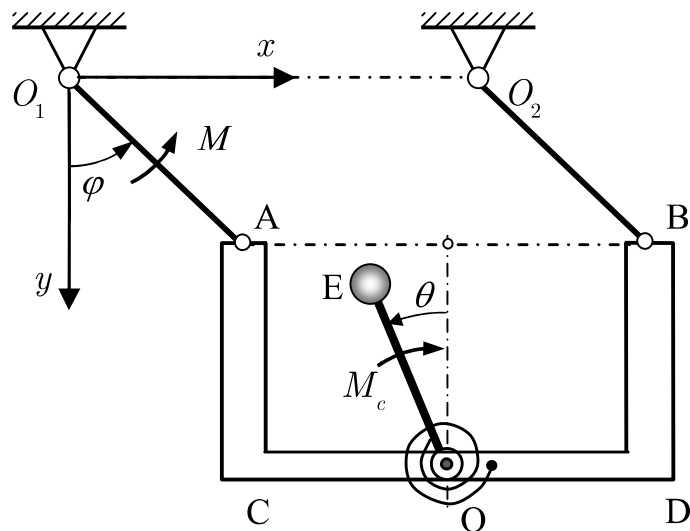
Bài 2. Mô hình máy đầm được cho trên hình. Bàn đầm là tấm đồng chất, có chiều dài $2l$, chiều cao $2h$ khối lượng m_1 di chuyển không ma sát theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang góc $\alpha = \text{const}$. Tay quay OA, khối lượng m_2 , trọng tâm tại O (do cân bằng), có mô men quán tính (khối) đối với trục quay O bằng J, quả nặng có khối lượng m được xem như chất điểm gắn vào điểm mút tay quay OA, có chiều dài OA = e.

Tay quay OA chịu tác dụng ngẫu lực có mô men M . Chọn các tọa độ là x và φ , trong đó x là di chuyển của bàn đầm theo mặt phẳng nghiêng, φ - góc giữa OA và phương song song với trục



- 1) Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ
- 2)Viết phương trình chuyển động của bàn dầm khi góc quay $\varphi = \omega t$ trong đó $\omega = const$, còn điều kiện đầu ứng với trọng tâm C của bàn rung, nằm yên cách gốc tọa độ một đoạn bằng l (tức $x(0)=0$), còn tay quay OA vuông góc với mặt nghiêng ở phía dưới ,tức $\varphi(0) = 0$.
- 3) Tính lực dầm khi tay quay quay đều với ω và tìm điều kiện đối với vận tốc góc ω để bàn dầm luôn luôn tiếp xúc với nền đất

Bài 3. Cho cơ hệ như hình vẽ. Các thanh $O_1A = O_2B = l_1$ là các thanh cứng và khối lượng được bỏ qua. Thùng ABCD dạng chữ nhật ($AB=CD=2a$; $AC=BD=2h$) có trọng tâm tại O, khối lượng m_1 . Thanh OE đồng chất, có khối lượng m_2 và chiều dài l_2 , liên kết với thùng



ABCD nhờ bản lề O ($CO=DO$) và lò xo xoắn tuyến tính có độ cứng c và chịu tác dụng mô men cản $\bar{M}_c = -\beta\theta$. Tại đầu mút của thanh OE gắn vật được xem là chất điểm có khối lượng m

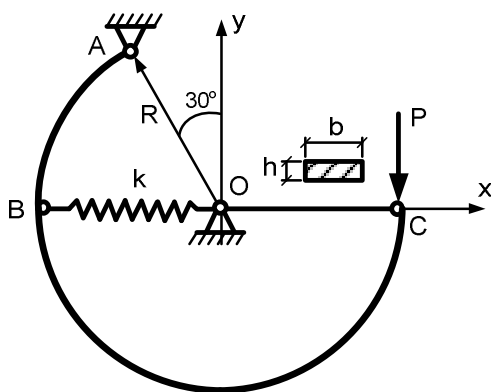
Thanh O_1A chịu tác dụng ngẫu lực có mô men $M = M_0 - \alpha\dot{\varphi}$, M_0, α là những hằng số đã cho. Bỏ qua ma sát tại các trục quay. Chọn các tọa độ suy rộng đủ là φ, θ

Ban đầu hệ đứng yên ($\varphi(0) = 0; \theta(0) = 0$). Khi $\theta = 0$ lò xo không biến dạng

- 1) Viết phương trình chuyển động cơ hệ theo các tọa độ suy rộng φ, θ
- 2) Khảo sát trường hợp khi thanh O_1A có chuyển động theo luật: $\varphi = H \sin \Omega t$; H, Ω là những hằng số đã cho: $H \ll 1$, với giả thiết $\theta \ll 1$; $\cos(\theta - \varphi) \approx 1$ và bỏ qua các vô cùng bé từ bậc hai
- 3) Tính lực liên kết tại O.

2. SỨC BỀN VẬT LIỆU

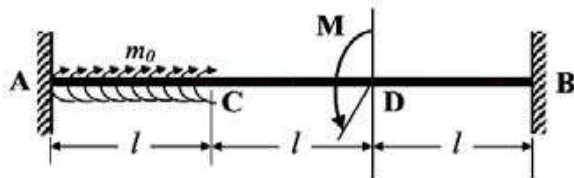
Bài 1. Cho hệ liên kết và chịu lực như hình 1. Cung tròn ABC xem như cứng tuyệt đối, có bán kính $R = 60\text{cm}$, liên kết khớp quay tại A, được giữ bởi thanh OC và lò xo OB. Thanh OC có mặt cắt ngang hình chữ nhật, kích thước $b \times h = 6\text{cm} \times 3\text{cm}$, được liên kết khớp quay tại O và tại C, vật liệu thanh OC với mô đun đàn hồi $E = 2 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$. Lò xo OB có độ cứng chống kéo, nén k bằng 0,2 lần độ cứng chống kéo, nén của thanh đàn hồi OC. Ở trạng thái ban đầu (hệ chưa chịu lực), O là tâm của cung tròn ABC, thanh OC và lò xo OB nằm ngang. Cho biết OA hợp với phương thẳng đứng một góc 30° , $P = 300\text{kN}$, bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.



Hình 1

1. Xác định chuyển vị toàn phần của điểm C.
2. Xác định tọa độ tâm mới của cung tròn ABC.
3. Kiểm tra sự ổn định của thanh OC, biết hệ số an toàn ổn định là $n_{\text{od}} = 1,5$ và vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi.

Bài 2. Trục tròn AB có đường kính mặt cắt ngang là d , trục được liên kết ngàm tại A và tại B. Vật liệu làm trục có mô đun đàn hồi khi trượt là G , ứng suất tiếp cho phép là $[\tau]$. Trên đoạn AC của trục tác dụng mômen phân bố đều m_0 , tại mặt cắt D của trục tác dụng mômen tập trung M . Bỏ qua trọng lượng bản thân của trục, các kích thước khác cho như trên hình 2. Cho biết: $M = 10m_0l$.



Hình 2

OLYMPIC CƠ HỌC TOÀN QUỐC -2015

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

1. CƠ HỌC KỸ THUẬT

BÀI 1 (15đ)

Câu 1: 6 đ

a) Biểu thức động năng :2 đ

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(J_2\omega_2^2 + m_2v^2) + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_0v_A^2;$$

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2}; \omega_1 = \frac{2v}{r_1}; v_A = 2v$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{(m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0)}_{m_{tg}} v^2 = \frac{1}{2}m_{tg}v^2$$

b) Tổng công suất các lực tác dụng: 2đ

Lực ma sát:

$$F_{ms} = fN = fm_0g \cos \alpha$$

$$W = [2m_0 \sin \alpha - (m + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)]gv = F_{tg}v$$

c) Gia tốc của vật B được kéo lên: 2đ

$$a = \frac{F_{tg}}{m_{tg}} = \frac{[2m_0 \sin \alpha - (m + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)]g}{m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0}$$

Câu 2: Tính sức căng của nhánh dây : 4đ

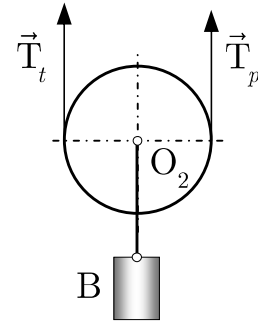
Viết phương trình vật quay (song phẳng) cho ròng rọc

O_2

$$J_2\bar{\varepsilon}_2 = (T^p - T^t)r_2$$

$$\rightarrow \frac{m_2r_2^2}{2} \frac{a}{r_2} = (T^p - T^t)r_2$$

$$\rightarrow T^p - T^t = 0.5m_2a;$$



Phương trình chuyển động khối tâm đối với hệ gồm vật B và ròng rọc O_2 :

$$(m + m_2)a = T^p + T^t - (m + m_2)g$$

$$\rightarrow T^p + T^t = (m + m_2)(a + g);$$

$$T^p = 0.5[(m + 1.5m_2)a - (m + m_2)g]$$

$$T^t = 0.5[(m - 0.5m_2)a - (m + m_2)g]$$

Câu 3: Xác định chuyển động vật M khi có cản: 5đ

$$\frac{d(F_{tg} - \beta v)}{F_{tg} - \beta v} = \frac{d[2m_0 g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g - \beta v]}{2m_0 g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g - \beta v} = -\beta_0 dt;$$

Trong đó:

$$\beta_0 = \frac{\beta}{m_{tg}} \rightarrow v = v_{gh}(1 - e^{-\beta_0 t});$$

$$m_{tg} = m + 1.5m_2 + 2m_1 + 4m_0$$

Từ đây:

$$v_{gh} = \frac{F_{tg}}{\beta} = \frac{2m_0 g \sin \alpha - (m_1 + m_2 + 2fm_0 \cos \alpha)g}{\beta}$$

Do đó: $y = v_{gh} \left(t + \frac{1}{\beta_0} e^{-\beta_0 t} \right) + const$

BÀI 2 (13 đ)

Câu 1: Viết PTVPCĐ: (6đ)

a) Biểu thức động năng

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} J \omega^2; \omega = \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} x_A &= x + 2\ell + e \cos(\varphi - \pi/2) \\ &= x + 2\ell + e \sin \varphi; \quad m_0 = m_1 + m_2 \end{aligned}$$

$$y_A = e \sin(\varphi - \pi/2) = -e \cos \varphi; \rightarrow$$

$$v_A^2 = \dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 = \dot{x}^2 + e^2 \dot{\varphi}^2 + 2e \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2} (m_0 + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (J + m e^2) \dot{\varphi}^2 + m e \cos \varphi \dot{x} \dot{\varphi}$$

b) Biểu thức lực suy rộng:

$$Q_x = -(m_0 + m)g \sin \alpha; Q_\varphi = M - m g e \sin(\varphi + \alpha)$$

c) Phương trình chuyển động:

$$(m_0 + m)\ddot{x} + me \cos \varphi \ddot{\varphi} - me \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = -(m_0 + m)g \sin \alpha;$$

$$me \cos \varphi \ddot{x} + (J + me^2)\ddot{\varphi} = M - mge \sin(\varphi + \alpha)$$

Câu 2: (5đ)

Chuyển động bình ổn của dầm rung: ($\dot{\varphi} = \omega = \text{const} : \ddot{\varphi} \equiv 0$)

Phương trình chuyển động của bàn rung:

$$\ddot{x} = \frac{me\omega^2}{(m_0 + m)} \sin \omega t - g \sin \alpha$$

$$\rightarrow v = \dot{x} = -\frac{me\omega}{(m_0 + m)} \cos \omega t - (g \sin \alpha)t + C_1; \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\rightarrow 0 = -\frac{me\omega}{(m_0 + m)} + C_1 \rightarrow C_1 = \frac{me\omega}{(m_0 + m)}$$

$$\rightarrow \dot{x} = \frac{me\omega}{(m_0 + m)} (1 - \cos \omega t) - (g \sin \alpha)t$$

$$\rightarrow x = -\frac{me}{(m_0 + m)} \sin \omega t + \frac{me\omega}{(m_0 + m)} t - \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2 + C_2;$$

$$x(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\rightarrow x = -\frac{me}{(m_0 + m)} \sin \omega t + \frac{me\omega}{(m_0 + m)} t - \frac{1}{2}(g \sin \alpha)t^2$$

Câu 3: Tính lực dầm: (2đ)

Phương trình chuyển động khối tâm:

$$m_0 \ddot{y} + m \ddot{y}_A = N - (m_0 + m)g \cos \alpha$$

$$\rightarrow N = m \ddot{y}_A + (m_0 + m)g \cos \alpha; \quad y_A = -e \cos \omega t$$

$$\rightarrow \ddot{y}_A = e\omega^2 \cos \omega t$$

$$\rightarrow N = me\omega^2 \cos \omega t + (m_0 + m)g \cos \alpha$$

Từ đây: $F_{dầm} = N = (m_0 + m)g \cos \alpha + me\omega^2 \cos \omega t$

Điều kiện dầm không bị rời:

$$N > 0 \rightarrow$$

$$-m e \omega^2 + (m_0 + m) g \cos \alpha > 0 \rightarrow \boxed{\omega^2 < \frac{(m_0 + m) g \cos \alpha}{m e}}$$

BÀI 3 (12 đ)

Câu 1: Viết PTVPCĐ: (6 đ)

a) Biểu thức động năng:

$$T = 0.5 m v_0^2 + 0.5 m v_C^2 + 0.5 J_2 \omega_2^2 + 0.5 m v_E^2$$

$$v_0 = v_A = l_1 \dot{\varphi}; v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2;$$

$$\begin{cases} x_C = l_1 \cos \varphi + 2h - 0.5 l_2 \cos \theta \\ y_C = l_1 \sin \varphi + a - 0.5 l_2 \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_C = -l_1 \sin \varphi \dot{\varphi} + 0.5 l_2 \sin \theta \dot{\theta}; \\ \dot{y}_C = l_1 \cos \varphi \dot{\varphi} - 0.5 l_2 \cos \theta \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\boxed{v_C^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 + 0.25 l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_1 l_2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}}$$

$$\boxed{v_E^2 = l_1^2 \dot{\varphi}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 - l_1 l_2 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi} \dot{\theta}}$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}; J_2 = m_2 l_2^2 / 12$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}; J_2 = m_2 l_2^2 / 12$$

$$T = 0.5 [(m_1 + m_2 + m) l_1^2] \dot{\varphi}^2 + 0.5 \left[\left(\frac{1}{3} m_2 + m \right) l_2^2 \right] \dot{\theta}^2 + [-(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi)] \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

b) Biểu thức lực suy rộng:

- Biểu thức thế năng:

$$\Pi = -m_1 g (l_1 \cos \varphi + 2h) - m_2 g (l_1 \cos \varphi + 2h - 0.5 l_2 \cos \theta) - m g (l_1 \cos \varphi + 2h - l_2 \cos \theta) + 0.5 c \theta^2$$

Lực suy rộng :

$$Q_\varphi = M_0 - \alpha \dot{\varphi} - (m_1 + m_2 + m) g l_1 \sin \varphi;$$

$$Q_\theta = (0.5 m_2 + m) g l_2 \sin \theta - c \theta - \beta \dot{\theta}$$

c) PTVPCĐ:

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2 + m)l_1^2\ddot{\varphi} - (m + 0.5m_2)l_1l_2\cos(\theta - \varphi)\ddot{\theta} \\
& - (m + 0.5m_2)l_1l_2\sin(\theta - \varphi)\dot{\theta}^2 \\
& = M_0 - \alpha\dot{\varphi} - (m_1 + m_2 + m)gl_1\sin\varphi
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
& - (m + 0.5m_2)l_1l_2\cos(\theta - \varphi)\ddot{\varphi} + (m + \frac{1}{3}m_2)l_2^2\ddot{\theta} \\
& + (m + 0.5m_2)l_1l_2\sin(\theta - \varphi)\dot{\varphi}^2 \\
& = (0.5m_2 + m)gl_2\sin\theta - c\theta - \beta\dot{\theta}
\end{aligned} \tag{2}$$

Câu 2: Trường hợp khâu OA dao động điều hòa: (4đ)

$$\varphi = H \sin \Omega t \rightarrow \ddot{\varphi} = -H\Omega^2 \sin \Omega t, \quad \cos(\theta - \varphi) \approx 1,$$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\ddot{\theta} + 2n\dot{\theta} + k^2\theta = H_0\Omega^2 \sin \Omega t$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
2n &= \frac{3\beta}{(3m + m_2)l_2^2}; k^2 = \frac{3[c - (0.5m_2 + m)gl_2]}{(3m + m_2)l_2^2}; \\
H_0 &= -\frac{3(m + 0.5m_2)l_1l_2H}{(3m + m_2)l_2^2}
\end{aligned}$$

Trong chế độ bình ổn:

$$\begin{aligned}
\theta &= H_1 \sin(\Omega t - \gamma) \quad ; \quad H_1 = \frac{H_0\Omega^2}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4n^2\Omega^2}} \quad \text{Câu} \\
\gamma &= \arctan\left(\frac{2nk}{k^2 - \Omega^2}\right)
\end{aligned}$$

3: Tính phản lực tại O; (2đ)

Viết phương trình chuyển động khối tâm cho hệ vật gồm thanh và vật nặng:

$$X_0 = m\ddot{x}_E + m_2\ddot{x}_2 - (m + m_2)g; \quad Y_0 = m\ddot{y}_E + m_2\ddot{y}_2$$

$$\ddot{x}_E = -l_1\sin\varphi\ddot{\varphi} + l_2\sin\theta\ddot{\theta} - l_1\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l_2\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y}_E = l_1\cos\varphi\ddot{\varphi} - l_2\cos\theta\ddot{\theta} - l_1\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + l_2\sin\theta\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{x}_2 = -l_1 \sin \varphi \ddot{\varphi} + 0.5l_2 \sin \theta \ddot{\theta} - l_1 \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + 0.5l_2 \cos \theta \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y}_2 = l_1 \cos \varphi \ddot{\varphi} - 0.5l_2 \cos \theta \ddot{\theta} - l_1 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + 0.5l_2 \sin \theta \dot{\theta}^2 \rightarrow$$

$$X_0 = -l_1(m + m_2) \sin \varphi \ddot{\varphi} + l_2(m + 0.5m_2) \sin \theta \ddot{\theta}$$

$$- l_1(m + m_2) \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2(m + 0.5m_2) \cos \theta \dot{\theta}^2 - (m + m_2)g$$

$$Y_0 = l_1(m + m_2) \cos \varphi \ddot{\varphi} - l_2(m + 0.5m_2) \cos \theta \ddot{\theta}$$

$$- l_1(m_1 + m_2) \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l_2(m + 0.5m_2) \sin \theta \dot{\theta}^2$$

Chú thích:

Các bài 2 và 3 là các cơ hệ có hai bậc tự do. Có thể sử dụng phương pháp ma trận truyền để viết phương trình vi phân chuyển động

Bài 2.

1) Biểu thức các ma trận truyền

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x + 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t_2 = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) & \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; r_1 = \begin{bmatrix} -a \\ -h \\ 0 \end{bmatrix}; r_2 = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$t_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; t_{21} = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) & -\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Các yếu tố của ma trận quán tính (2x2) **A**:

$$a_{11} = m_1 r_1^T t_{11}^T t_{11} r_1 + m_2 r_2^T t_{11}^T t_{11} r_2 + m_3 r_3^T t_{11}^T t_{11} r_3 = (m_1 + m_2 + m);$$

$$a_{22} = m r^T t_{21}^T t_{21} t_{11} r + J; a_{12} = m r_2^T t_{21}^T t_{11} t_2 r_2 = m e \cos \varphi$$

3) Ma trận quán tính

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m) & m e \cos \varphi \\ m e \cos \varphi & (J + m e^2) \end{bmatrix}$$

$$\partial_x \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \partial_\varphi \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -m e \sin \varphi \\ -m e \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

4)PTVPCĐ:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^*$$

Có thể viết PTVPCĐ dạng ma trận:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^*$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\varphi \end{bmatrix}; \quad \delta A = -(m_1 + m_2)g \sin \alpha \delta x + [M - mge \cos(\varphi + \alpha)]\delta\varphi \rightarrow \\ Q_x = -(m_1 + m_2 + m)g \sin \alpha; \quad Q_\varphi = M - mge \cos(\varphi + \alpha)$$

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{bmatrix} Q_x^0 \\ Q_\varphi^0 \end{bmatrix}; \quad Q_x^0 = 0.5 \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{\varphi} \end{bmatrix} \partial_x \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = 0; \partial_x \mathbf{A} = 0 \rightarrow Q_x^0 = 0;$$

$$Q_\varphi^0 = 0.5 \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{\varphi} \end{bmatrix} \partial_\varphi \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -me \sin \varphi \\ -me \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ = -me \sin \varphi \dot{x} \dot{\varphi};$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_x^* + \mathbf{Q}_\varphi^*$$

$$\mathbf{Q}_x^* = \partial_x \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x}^2 \\ \dot{\varphi} \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_\varphi^* = \partial_\varphi \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -me \sin \varphi \\ -me \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -me \sin \varphi \dot{\varphi}^2 \\ -me \sin \varphi \dot{x} \dot{\varphi} \end{bmatrix};$$

PTVPCĐ:

$$(m + m + m)\ddot{x} + me \cos \varphi \ddot{\varphi} = me \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - (m_1 + m_2 + m)g \sin \alpha; \\ me \cos \varphi \ddot{x} + (J + me^2)\ddot{\varphi} = M - mge \sin(\varphi + \alpha)$$

Bài 3

1)Biểu thức các ma trận truyền;

$$t_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & l_1 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -l_1 \sin \varphi \\ 1 & 0 & l_1 \sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$t_2 = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta & a \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; t_{21} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; r_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; r_2 = \begin{bmatrix} 0.5l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; r = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Các hệ số của ma trận quán tính

$$a_{11} = m_1 r_1^T t_{11}^T t_{11} r_1 + m_2 r_2^T t_{21}^T t_{11}^T t_{11} t_2 r_2 + m r^T t_2^T t_{11}^T t_{11} t_2 r = (m_1 + m_2 + m) l_1^2;$$

$$a_{22} = m_2 r_2^T t_{22}^T t_{11}^T t_{11} t_2 r_2 + m r^T t_{22}^T t_{11}^T t_{11} t_2 r + J_2 = (m + \frac{1}{3} m_2) l_2^2; J_2 = \frac{m_2 l_2^2}{12}$$

$$a_{12} = m_2 r_2^T t_{21}^T t_{11}^T t_{11} t_2 r_2 + m r^T t_{21}^T t_{11}^T t_{11} t_2 r = (0.5 m_2 + m) l_1 l_2 \cos(\varphi - \theta);$$

3) PTVPCĐ

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^0 - \mathbf{Q}^*$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m) l_1^2 & -(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \\ -(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) & \frac{1}{3} (m_2 + m) l_2^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_\varphi \\ Q_\theta \end{bmatrix}; \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_\varphi^* + \mathbf{Q}_\theta^* ; Q_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}}; Q_\theta = \frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}};$$

$$\delta A = M \delta \varphi - g l_1 \sin \varphi (m_1 + m_2 + m) g \delta \varphi - (m + 0.5 m_2) g l_2 \sin \theta \delta \theta; \rightarrow$$

$$Q_\varphi = M - g l_1 \sin \varphi (m_1 + m_2 + m); Q_\theta = -(m + 0.5 m_2) g l_2 \sin \theta$$

$$\mathbf{Q}^0 = \begin{bmatrix} Q_\varphi^0 \\ Q_\theta^0 \end{bmatrix}; \quad Q_\varphi^0 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \partial_\varphi \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}}; \quad Q_\theta^0 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \partial_\theta \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}};$$

$$\mathbf{Q}_\varphi^* = \partial_\varphi \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\theta} \dot{\varphi} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_\theta^* = \partial_\theta \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{bmatrix};$$

$$\partial_\varphi \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \\ -(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) & 0 \end{bmatrix};$$

$$\partial_\theta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & (m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \\ (m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q_\varphi^0 = 0.5 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \partial_\varphi \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = -(m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

$$Q_\theta^0 = 0.5 \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \partial_\theta \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = (m + 0.5 m_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

$$Q_\varphi^* = \partial_\varphi \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\theta}\dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\dot{\varphi}\dot{\theta} \\ (m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\dot{\varphi}^2 \end{bmatrix};$$

$$Q_\theta^* = \partial_\theta \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\dot{\theta}^2 \\ (m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\dot{\varphi}\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Phương trình vi phân chuyển động sẽ là

$$\begin{aligned} & (m_1 + m_2 + m)l_1^2\ddot{\varphi} - (m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\ddot{\theta} \\ & = M_0 - \alpha\dot{\varphi} - (m_1 + m_2 + m)gl_1 \sin \varphi - (m + 0.5m_2)l_1l_2 \sin(\theta - \varphi)\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ & (m + 0.5m_2)l_1l_2 \cos(\theta - \varphi)\ddot{\varphi} + (m + \frac{1}{3}m_2)l_2^2\ddot{\theta} = -(0.5m_2 + m)gl_2 \sin \theta \\ & + (m + 0.5m_2) \sin(\theta - \varphi)\dot{\theta}^2 - c\dot{\theta} - \beta\dot{\theta} \end{aligned}$$