



ÔN TẬP CƠ LÝ THUYẾT (Kinetics-2D)

Trương Quang Tri, Ts.
tri.truongquang@hcmute.edu.vn

Faculty of Mechanical Engineering,
HCMC University of Technology and Education
Office: Room E1-301 – High-Tech Center Bld.

Spring 2017

1

ĐỘNG LỰC HỌC

Mục tiêu:

Nghiên cứu qui luật chuyển động của: chất điểm, hệ chất điểm, vật rắn tuyệt đối dưới tác dụng của lực.

Nội dung:

1. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm và hệ chất điểm
2. Nguyên lý D'Alambert
3. Các định lý tổng quát động lực học
4. Nguyên lý di chuyển khả dĩ
5. Phương trình tổng quát động lực học và phương trình Lagrange loại II

➤ Nguyên lý D'Alembert

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm (F) và lực quán tính của nó (F_{qt}) là một hệ lực cân bằng.

➤ Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dùng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: **Tổng công của tất cả lực hoạt động trên mọi di chuyển khả dĩ kể từ vị trí đó đều bằng không.**

→ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ, các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ.

➤ Phương trình tổng quát động lực học

➤ Phương trình Lagrange loại II

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Mục đích:

- Xác định điều kiện cân bằng của cơ hệ
- Xác định các thành phần phản lực đặt vào cơ hệ
- Làm cơ sở để thiết lập phương trình vi phân chuyển động tổng quát của cơ hệ không tự do

Yêu cầu:

- Nắm được khái niệm liên kết
- Nắm vững định nghĩa di chuyển khả dĩ (DCKD)
- Biết xác định tọa độ suy rộng, bậc tự do của cơ hệ
- Vận dụng được NLDCKD để giải bài toán cân bằng hay chuyển động của cơ hệ

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

1. Các khái niệm:

1.1. Phương trình liên kết:

Xét cơ hệ không tự do, vị trí và vận tốc của các chất điểm thuộc cơ hệ sẽ thỏa mãn các mối quan hệ nào đó độc lập với điều kiện đầu và các lực hoạt động được gọi là các liên kết.

Tổng quát, các liên kết được mô tả bởi hàm số:

$$f_i(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) \geq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

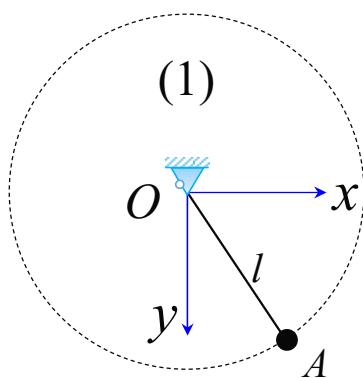
Trong đó:

- N : Số chất điểm của cơ hệ
- S : Số liên kết của chất điểm thứ k
- $\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k$ lần lượt là vị trí và vận tốc của chất điểm thứ k

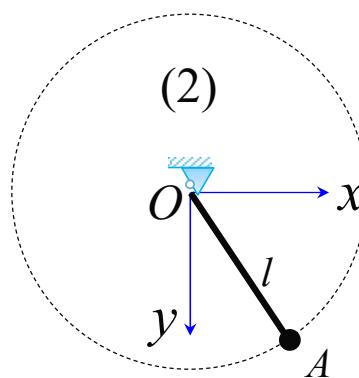
NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

1. Các khái niệm:

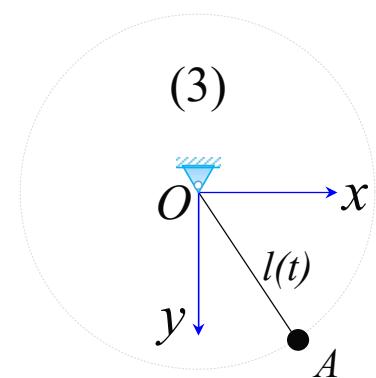
1.1. Phương trình liên kết: $f_i(\vec{r}_k, \dot{\vec{r}}_k, t) \geq 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$



$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 \leq 0$$



$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$



$$f(x, y, t) = x^2 + y^2 - l^2(t) = 0$$

1.2. Phân loại liên kết:

- Giữ/không giữ (LK 2 phía – PT / LK 1 phía – bất phương trình)
- Dừng/không dừng (PTLK không chứa rõ biến thời gian)
- Hô-lô-nôm và không hô-lô-nôm

LK Hô-lô-nôm: PTLK không chứa yếu tố vận tốc hoặc có chứa nhưng có thể loại bỏ được nhờ các phép tính tích phân.

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2. Di chuyển khả dĩ – Bậc tự do của cơ hệ:

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD)

Định nghĩa: *Di chuyển khả dĩ* của cơ hệ là tập di chuyển vô cùng bé của các chất điểm của cơ hệ từ vị trí **đang xét** sang vị trí lân cận mà vẫn thỏa các liên kết tại vị trí đang xét.

DCKD được ký hiệu: $\{\delta \vec{r}_k\}$ (phân biệt với di chuyển thật $d\vec{r}_k$)

» **Nếu cơ hệ chịu LK:** $f_i(\vec{r}_k) = 0, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, S}$

» Khi đó: $f_i(\vec{r}_k + \delta \vec{r}_k) = 0, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, S}, \delta \vec{r}_k = \{\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k\}$

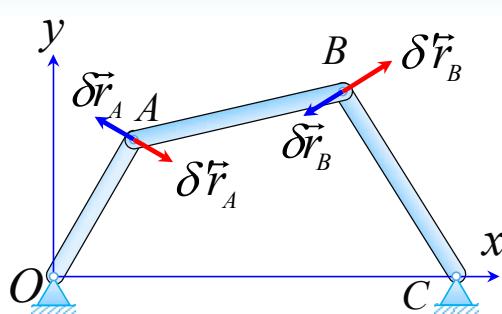
Nhận xét:

- DCKD chỉ có ý nghĩa về mặt hình học
- Không có quan hệ với các lực tác dụng lên cơ hệ (hệ lực không đổi)
- Thời gian t được xem như là 1 tham số khi cơ hệ thực hiện DCKD

7

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD):



- Phương trình liên kết:

$$f_i(\vec{r}_k) = 0, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển khả dĩ của cơ hệ

$$\Rightarrow f_i(\vec{r}_k + \delta \vec{r}_k) = 0, k = \overline{1, N}, i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển khả dĩ của cơ hệ (của điểm A, B): $\{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B, \delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\}$
- Di chuyển thật của cơ hệ:

$$\{d\vec{r}_A, d\vec{r}_B\} \equiv \{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\} \text{ hoặc } \{d\vec{r}_A, d\vec{r}_B\} \equiv \{\delta \vec{r}_A, \delta \vec{r}_B\}$$

» Cơ hệ chịu liên kết dừng $\rightarrow \{d\vec{r}_k\} \subset \{\delta \vec{r}_k\}$

2.2. Bậc tự do của cơ hệ:

Là số tối đa các DCKD độc lập tuyến tính của cơ hệ.

8

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. Di chuyển khả dĩ (DCKD):

- Phương trình liên kết (tại thời điểm t):

$$f_i(\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

- Di chuyển thật (từ thời điểm t đến $t+dt$): $d\vec{r}_k = \{dx_k, dy_k, dz_k\}$

$$f_i(\vec{r}_k + d\vec{r}_k) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, S}$$

$$\Rightarrow df_i = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} dz_k \right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0, \quad i = \overline{1, S}$$

- DCKD:

$$\delta f_i = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \delta z_k \right) = 0, \quad i = \overline{1, S}$$

2.2. Bậc tự do của cơ hệ:

Là số tối đa các DCKD độc lập tuyến tính của cơ hệ.

9

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

3. Tọa độ suy rộng:

Hệ tọa độ Descartes $Oxyz$:

- Vị trí của chất điểm M_k được xác định $(x_k, y_k, z_k) \rightarrow 3$ thông số
- Hệ (tự do) có N chất điểm: cần $3N$ thông số (x_k, y_k, z_k) , $k=1 \sim N$ để xác định vị trí của cơ hệ.
- Nếu không tự do (có s ptlk) \rightarrow Số tọa độ độc lập: $r = 3N-s \rightarrow$ Chọn r thông số thích hợp để xác định vị trí của cơ hệ.

Định nghĩa: *Tọa độ suy rộng* của cơ hệ là tập các thông số đủ để xác định vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được ký hiệu là $\{q_i\}$ ($i=1 \sim r$).

» Tọa độ suy rộng có thể tọa độ Descartes của các chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là tọa độ cong, có thể là góc quay, ...

10

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

3. Tọa độ suy rộng:

- Các tọa độ Descartes của các chất điểm đều phải được biểu diễn qua r tọa độ suy rộng $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$

$$\begin{cases} x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \\ z_k = z_k(q_1, q_2, \dots, q_r) \end{cases} \Rightarrow \delta \vec{r}_k = \{\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k\}$$

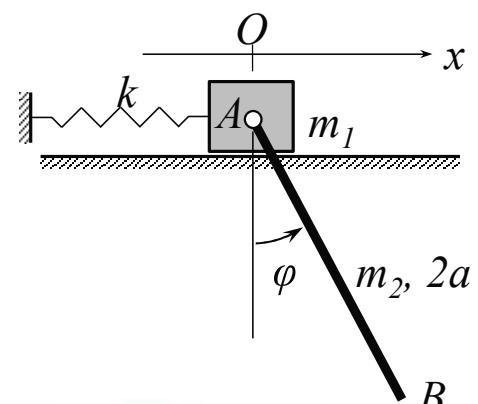
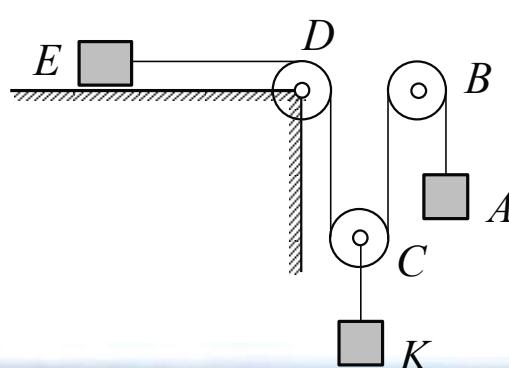
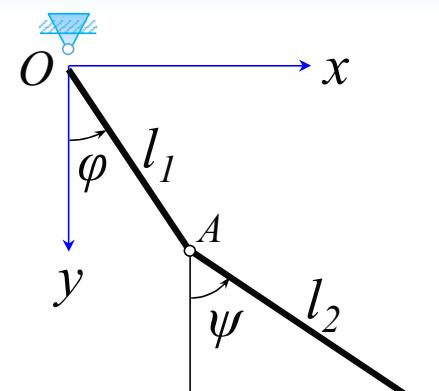
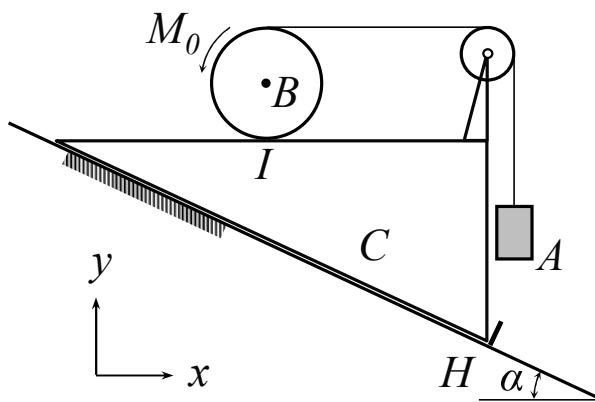
- Với:

$$\begin{cases} \delta x_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta y_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta z_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \delta q_j \end{cases}$$

11

VÍ DỤ

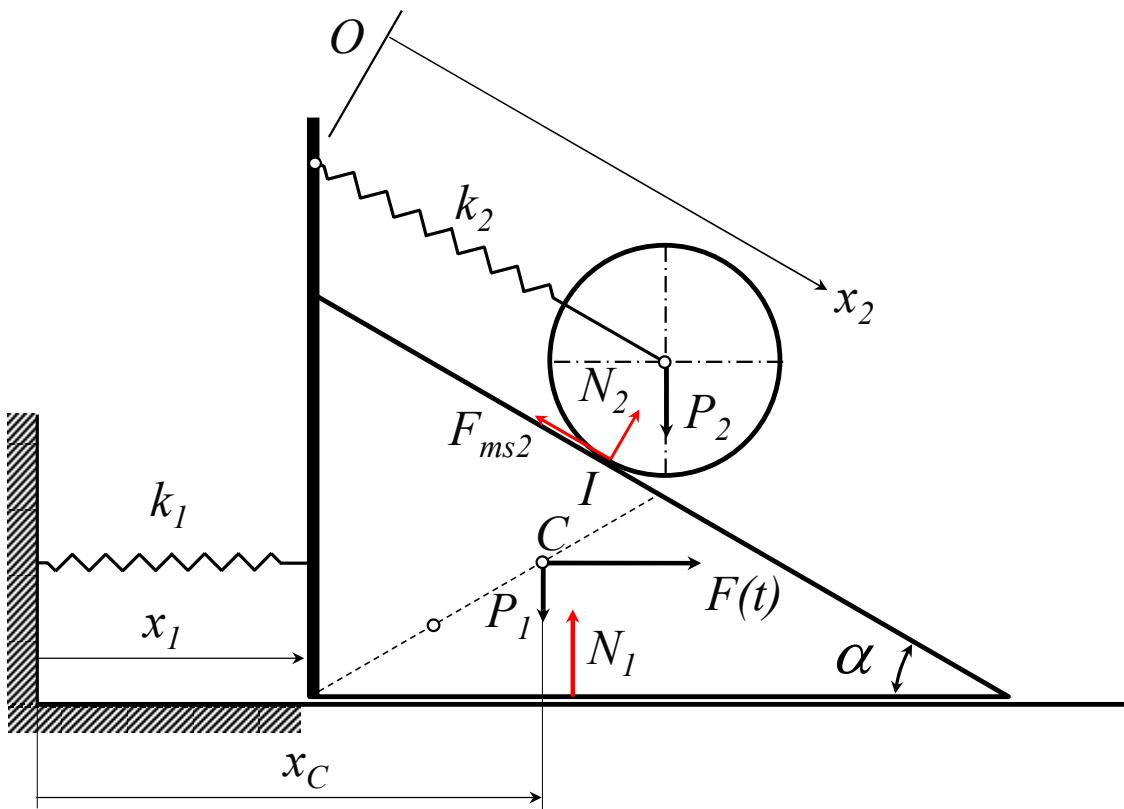
VD: Xác định tọa độ suy rộng (đủ)



12

VÍ DỤ

VD: Xác định tọa độ suy rộng (đủ)



13

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

4. Lực suy rộng:

Xét cơ hệ N chất điểm chịu tác dụng của các lực hoạt động (\vec{F}_k^a). Cho cơ hệ thực hiện một di chuyển khả dĩ $\{\delta\vec{r}_k\}$, các lực (\vec{F}_k^a) sẽ thực hiện công trên độ dời đó:

$$\sum \delta A_k = \sum_1^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k$$

được gọi là công khả dĩ.

» Chọn hệ tọa độ suy rộng $\{q_i\}$, $i = 1, r$

$$\delta \vec{r}_k = \delta \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_r) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

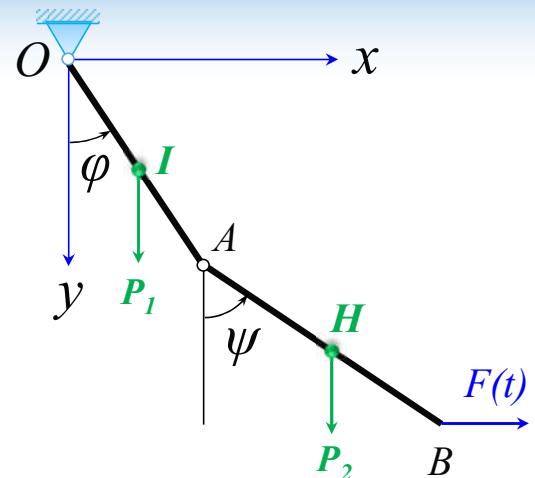
$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \sum_{i=1}^r \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i; \quad Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

15

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ, hai thanh mảnh đồng chất khói lượng phân bố đều. Thanh OA có khói lượng m_1 , chiều dài $2a$; thanh AB có khói lượng m_2 , chiều dài $2b$. Chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là φ, ψ như hình vẽ. Xác lực suy rộng tương ứng của hai TĐSR trên.



$$\delta\vec{r}_k = \delta\vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_r) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta\vec{r}_k = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$$\boxed{\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i;}$$

$$\boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}}$$

Trong đó: $r = \text{số bậc tự do} = \text{số TĐSR đủ}$

16

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 1)

$$\boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}}$$

- Lực hoạt động: $(P_1, P_2, F) \sim (F_1, F_2, F_3)$
- Vector vị trí của các điểm đặt lực tương ứng:

$$\vec{r}_1 = a \sin \varphi \vec{i} + a \cos \varphi \vec{j}$$

$$\vec{r}_2 = (2a \sin \varphi + b \sin \psi) \vec{i} + (2a \cos \varphi + b \cos \psi) \vec{j}$$

$$\vec{r}_3 = 2(a \sin \varphi + b \sin \psi) \vec{i} + 2(a \cos \varphi + b \cos \psi) \vec{j}$$

- Các đạo hàm riêng phần theo các TĐSR (φ, ψ) :

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial q_1} = \frac{\partial\vec{r}_1}{\partial \varphi} = a \cos \varphi \vec{i} - a \sin \varphi \vec{j} \quad \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial \varphi} = 2a \cos \varphi \vec{i} - 2a \sin \varphi \vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial q_2} = \frac{\partial\vec{r}_1}{\partial \psi} = 0 \quad \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial q_2} = \frac{\partial\vec{r}_2}{\partial \psi} = b \cos \psi \vec{i} - b \sin \psi \vec{j}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_3}{\partial q_1} = \frac{\partial\vec{r}_3}{\partial \varphi} = 2a \cos \varphi \vec{i} - 2a \sin \varphi \vec{j}; \quad \frac{\partial\vec{r}_3}{\partial q_2} = \frac{\partial\vec{r}_3}{\partial \psi} = 2b \cos \psi \vec{i} - 2b \sin \psi \vec{j}$$

17

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 1) $Q_i = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$

$$Q_1 = Q_\varphi = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \varphi} = -P_1 a \sin \varphi - 2P_2 a \sin \varphi + 2Fa \cos \varphi$$

$$Q_2 = Q_\psi = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial \psi} = -P_2 b \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

$$Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

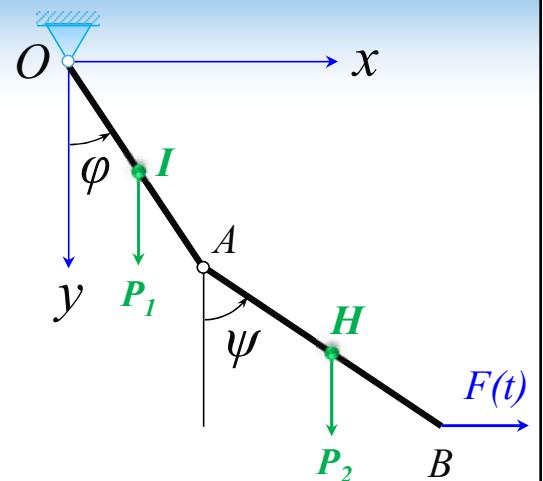
18

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 2)

$$\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i$$

$$\sum \delta A_k = P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2 + F \delta x_F$$



- $y_1 = a \cos \varphi \Rightarrow \delta y_1 = -a \sin \varphi \delta \varphi$
- $y_2 = 2a \cos \varphi + b \cos \psi \Rightarrow \delta y_2 = -2a \sin \varphi \delta \varphi - b \sin \psi \delta \psi$
- $x_F = 2a \sin \varphi + 2b \sin \psi \Rightarrow \delta x_F = 2a \cos \varphi \delta \varphi + 2b \cos \psi \delta \psi$

$$\sum \delta A_k = -P_1 a \sin \varphi \delta \varphi - P_2 (2a \sin \varphi \delta \varphi + b \sin \psi \delta \psi) + F(2a \cos \varphi \delta \varphi + 2b \cos \psi \delta \psi)$$

$$\sum \delta A_k = \underbrace{-(P_1 a \sin \varphi + P_2 2a \sin \varphi - F 2a \cos \varphi)}_{Q_\varphi} \delta \varphi - \underbrace{(P_2 b \sin \psi - F 2b \cos \psi)}_{Q_\psi} \delta \psi$$

$$Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

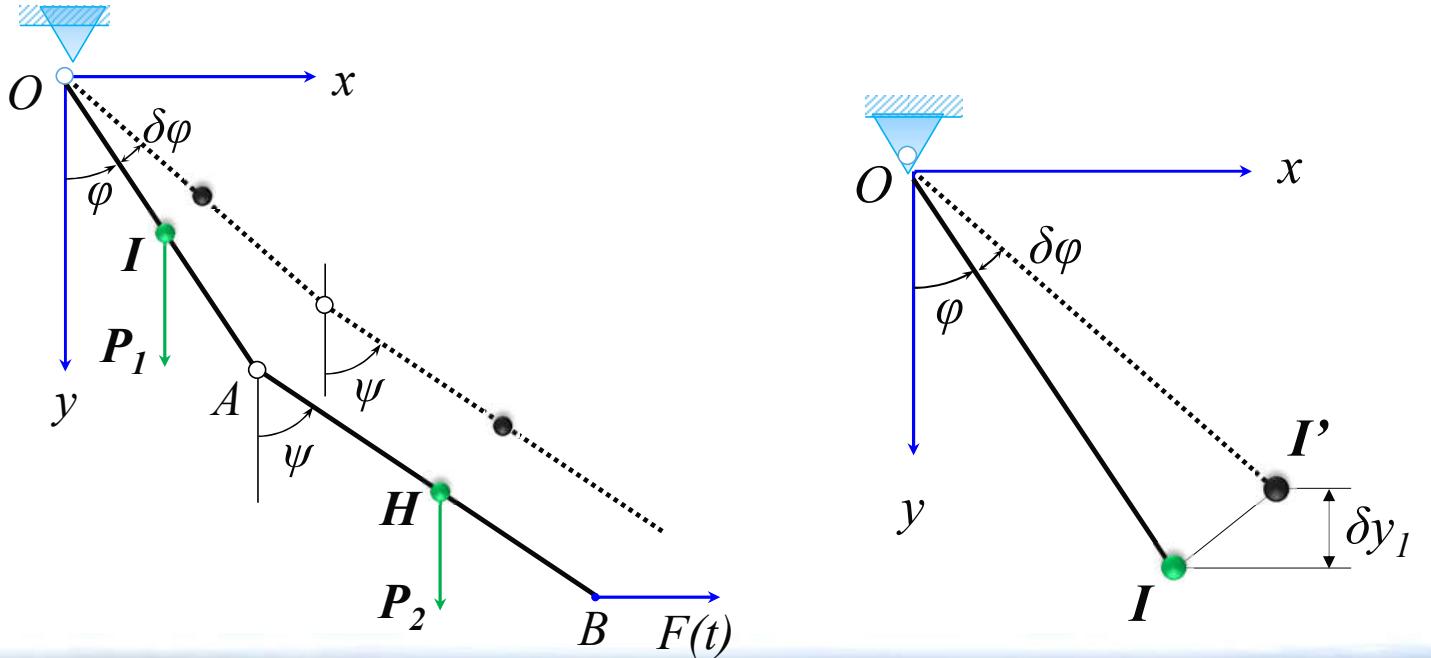
$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi$$

19

VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: (Cách 3) $\sum \delta A_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r} = \sum_{i=1}^r (Q_i) \delta q_i$

- Chọn $\delta q_i \neq 0$ và $\delta q_j = 0$ ($j \neq i$): $\delta q_1 = \delta\varphi \neq 0$ và $\delta q_2 = \delta\psi = 0$
- $$\Rightarrow \delta y_1 = -a \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta y_2 = -2a \sin \varphi \delta\varphi, \quad \delta x_F = 2a \cos \varphi \delta\varphi$$



20

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

5. Liên kết lý tưởng:

Cơ hệ được gọi là chịu liên kết lý tưởng nếu tổng công của tất cả các phản lực liên kết (R_k) đặt vào cơ hệ trên mọi DCKD đều bằng không:

$$\sum \delta A_r = \sum_{k=1}^N \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}$$

Một số trường hợp cơ hệ chịu LK lý tưởng:

- Các cơ hệ gồm vật rắn, dây mềm không dãn, bỏ qua ma sát ở trực quay và sự trượt tương đối của dây với ròng rọc (puli).
- Hai vật trượt không ma sát với nhau hoặc nối bản lề không ma sát với nhau.
- Nếu tồn tại thành phần phản lực sinh công trên DCKD, ta xem thành phần lực này thuộc các lực hoạt động, khi đó cơ hệ được khảo sát như chịu liên kết lý tưởng.

21

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

6. Nguyên lý di chuyển khả dĩ:

Phát biểu: Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dùng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: Tổng công của tất cả lực hoạt động trên mọi di chuyển khả dĩ kể từ vị trí đang xét đều bằng không:

$$\sum \delta A_k^a = \sum_1^N \vec{F}_k^a \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\} \quad \text{Hay: } \sum \delta A_k^a = \sum_{i=1}^r Q_i \delta q_i = 0 \quad \forall \{\delta q_i\}$$

Do các δq_i độc lập tuyến tính, nên $Q_i = 0$, $i=1 \sim r$.

Ứng dụng:

- Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ: VD 13.8~13.10 (Cơ lý thuyết - Vũ Duy Cường)
- Tìm các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ: VD 13.11~13.13

22

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

Hướng giải quyết chung:

1. Bậc tự do \rightarrow TĐSR
2. Cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng?
3. Xác định (liệt kê) các lực hoạt động
4. Cho cơ hệ 1 DCKD (dùng quan hệ động học nếu cần)
5. Tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD \rightarrow Các lực suy rộng
6. Áp dụng NLDCKD: Cho các lực suy rộng đồng thời bằng 0 (Điều kiện cơ hệ cân bằng tại vị trí đang xét) \rightarrow kết quả.

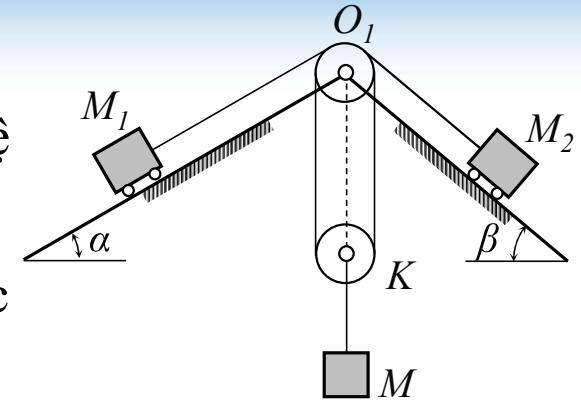
23

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

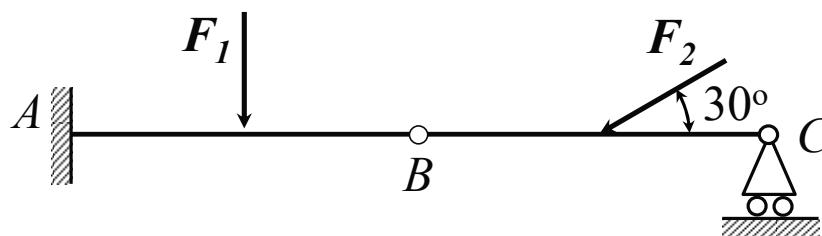
VD 1: Con lắc kép (Vị trí cân bằng)

VD 2: Hệ vật rắn, puli, dây (Quan hệ giữa các tải)

VD 3: Máy ép vít (Quan hệ giữa các lực)

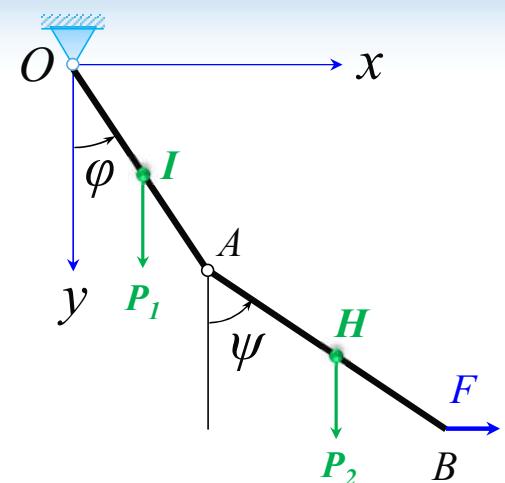


VD 4: Hệ dầm chịu lực (Phản lực liên kết)



VÍ DỤ XÁC ĐỊNH LỰC SUY RỘNG

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ, hai thanh mảnh đồng chất khói lượng phân bố đều. Thanh OA có khói lượng m_1 , chiều dài $2a$; thanh AB có khói lượng m_2 , chiều dài $2b$. Chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là φ, ψ như hình vẽ. Xác định các góc φ, ψ khi cơ hệ cân bằng dưới tác dụng của các lực trọng trường P_1, P_2 và lực kéo F như hình vẽ.



» Như đã xác định ở phần trước, ta có:

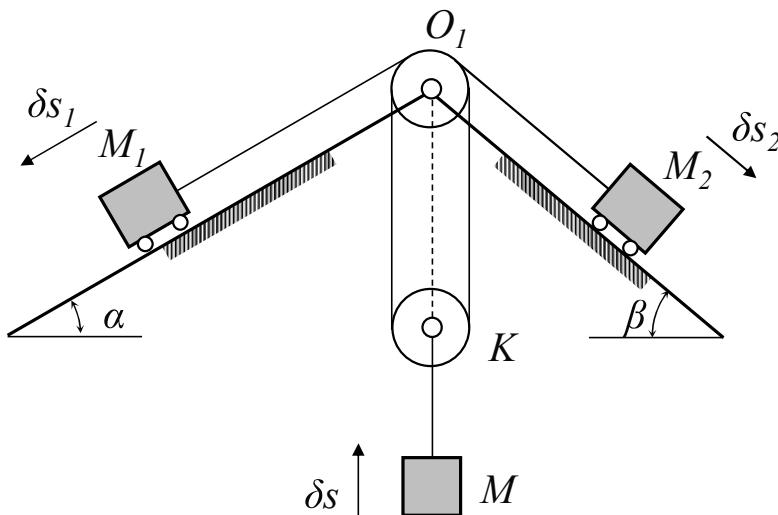
$$Q_\psi = -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi \quad \text{và} \quad Q_\varphi = -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi$$

» Do cơ hệ cân bằng \rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_\psi = 0 \\ Q_\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -bP_2 \sin \psi + 2bF \cos \psi = 0 \\ -aP_1 \sin \varphi - 2aP_2 \sin \varphi + 2aF \cos \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \psi = 2F / P_2 \\ \tan \varphi = 2F / (P_1 + 2P_2) \end{cases}$$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Hệ vật rắn, pulley, dây



- Bậc tự do 2 → TĐSR: s_1, s_2
 - Chịu LK: Giữ, dừng, lý tưởng?
 - Lực hoạt động: P_1, P_2, P
-
- Cho cơ hệ 1 DCKD: (Quan hệ động học nếu có)
 - Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD

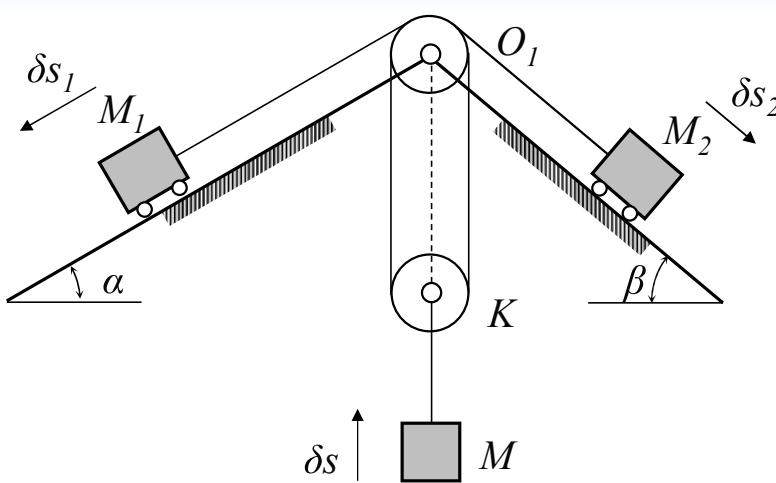
- Tính lực suy rộng
- Áp dụng NLDCKD: ĐK cân bằng → Các lực suy rộng đồng thời bằng 0.

[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doãn Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

27

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD2: Tính lực suy rộng:



- ❖ Tính lực suy rộng Q_{s1} :
- Cho cơ hệ 1 DCKD:
 $\delta s_1 \neq 0$ và $\delta s_2 = 0$.
- Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD:

Quan hệ động học: M_1 trượt xuống 1 đoạn δs_1 , vật M đi lên 1 đoạn $\delta s = \delta s_1 / 2$ (lưu ý rằng $\delta s_2 = 0$).

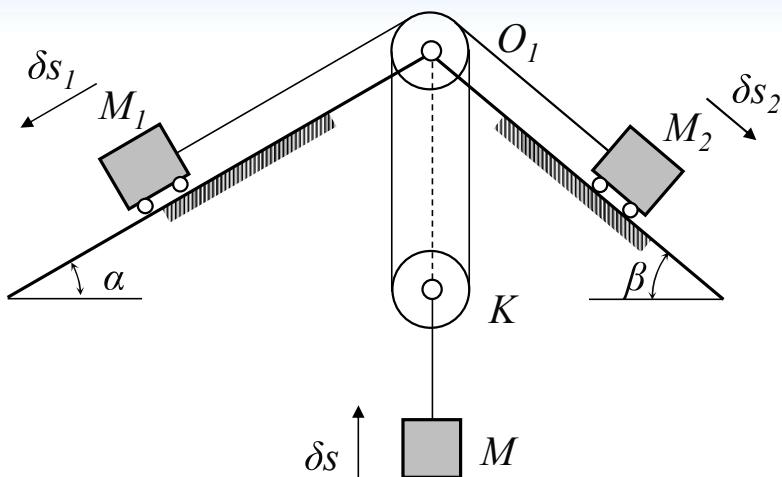
→ Tổng công khả dĩ:

$$\sum \delta A_k^a = P_1(\delta s_1 \sin \alpha) + P_2(0) - P\left(\frac{\delta s_1}{2}\right) = \left(P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2}\right) \delta s_1$$

$\Rightarrow Q_{s1} = P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2}$

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD2: Tính lực suy rộng:



- ❖ Tính lực suy rộng Q_{s2} :
 - Cho cơ hệ 1 DCKD: $\delta s_1 = 0$ và $\delta s_2 \neq 0$.
 - Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên DCKD:

Quan hệ động học: M_2 trượt xuống 1 đoạn δs_2 , vật M đi lên 1 đoạn $\delta s = \delta s_2 / 2$ (lưu ý rằng $\delta s_1 = 0$).

→ Tổng công khả dĩ:

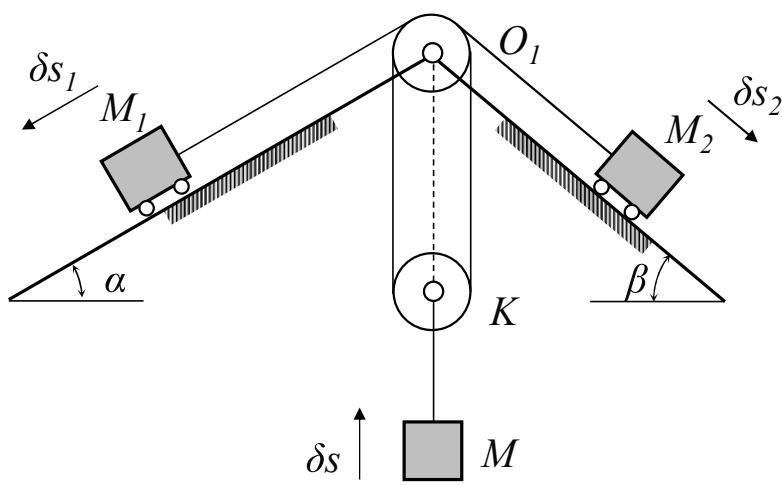
$$\sum \delta A_k^a = P_1(0) + P_2(\delta s_2 \sin \beta) - P\left(\frac{\delta s_2}{2}\right) = \left(P_2 \sin \beta - \frac{P}{2}\right) \delta s_2 \quad \Rightarrow Q_{s2} = P_2 \sin \beta - \frac{P}{2}$$

[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doãn Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

29

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD2: Xác định quan hệ giữa các tải để cơ hệ cân bằng?



- ❖ Cơ hệ cân bằng, theo NLDCKD, ta có:

$$\begin{cases} Q_{s1} = 0 \\ Q_{s2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \sin \alpha - \frac{P}{2} = 0 \\ P_2 \sin \beta - \frac{P}{2} = 0 \end{cases}$$

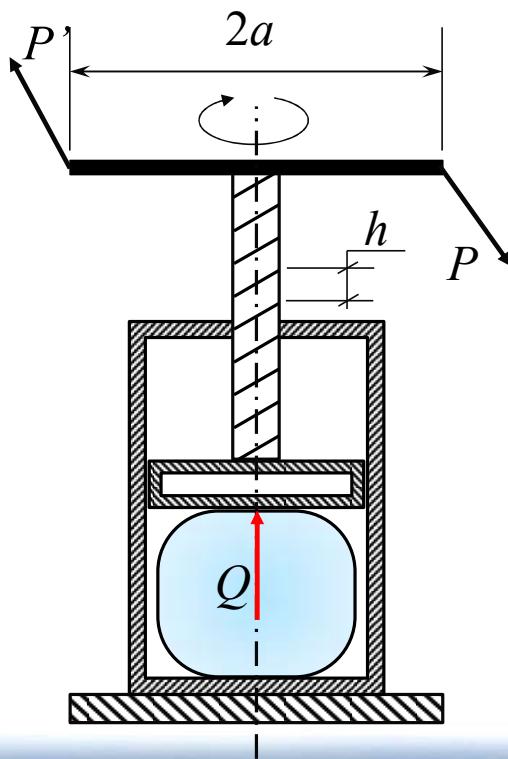
$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = \frac{P}{2 \sin \alpha} \\ P_2 = \frac{P}{2 \sin \beta} \end{cases}$$

[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doãn Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

30

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD3: Máy ép vít, biết tay đòn a , bước vít h , **bỏ qua ma sát**. Dưới tác dụng của ngẫu lực (P, P') và phản lực của mẫu ép, cơ hệ đang cân bằng. Tìm quan hệ giữa lực P và lực ép Q ..

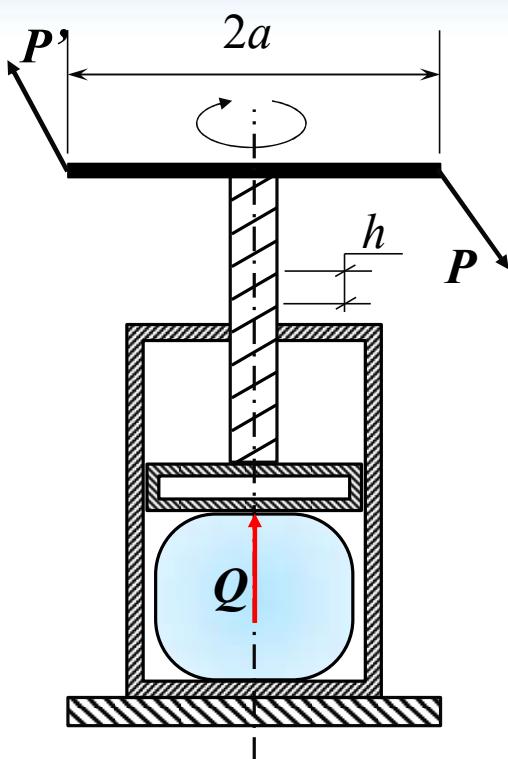


[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doãn Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

31

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD3:



- Cơ hệ một bậc tự do, chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng → chọn tọa độ suy rộng là góc quay φ .
- Lực hoạt động P, P', Q
- Cho vít 1 di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, bàn ép di chuyển 1 đoạn δh .

$$\delta h = \frac{h}{2\pi} \delta\varphi$$

- Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trên di chuyển khả dĩ

$$\sum \delta A_k^a = (2aP)\delta\varphi - Q\left(\frac{h}{2\pi}\delta\varphi\right) \Rightarrow Q_\varphi = \dots$$

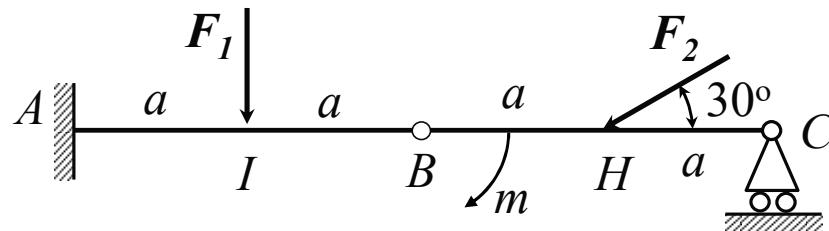
- Cơ hệ cân bằng: $Q_\varphi = 0 \Rightarrow P = Q \frac{h}{4\pi a}$

[2] Đỗ Sanh (chủ biên), Lê Doãn Hồng, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 15, NXBGD Việt Nam, 2013.

32

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Hệ dầm chịu lực. Xác định các phản lực liên kết.

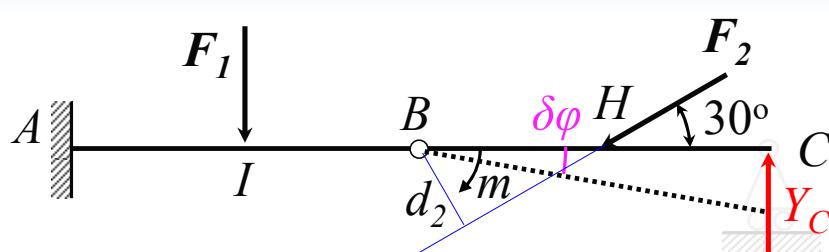


[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.
 [2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

33

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, Y_C



- DCKD:
 - $\delta\varphi \neq 0$,
 - tất cả các di chuyển khả dĩ còn lại bằng 0.
- Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}
 \sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\
 &= m \delta\varphi + (F_2 \cdot BH \cdot \sin 30^\circ) \delta\varphi - (Y_C \cdot BC) \delta\varphi \\
 &= (m + F_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} - Y_C \cdot 2a) \delta\varphi
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{\varphi(BC)} = m + \frac{a}{2} F_2 - 2a Y_C$$

- Cơ hệ đang cân bằng:

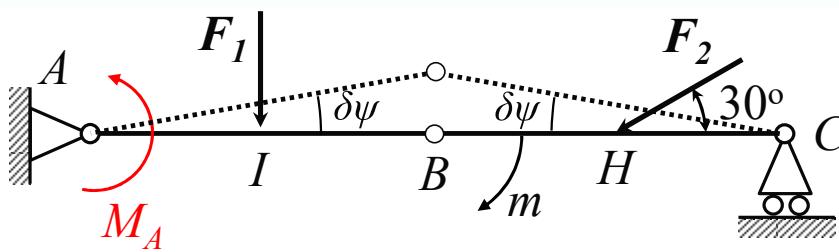
$$\Rightarrow Q_{\varphi(BC)} = 0 \Rightarrow m + \frac{a}{2} F_2 - 2a Y_C = 0 \Rightarrow Y_C = \frac{2m + aF_2}{4a}$$

[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.
 [2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

36

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, \mathbf{M}_A



- DCKD: $\delta\psi \neq 0, \delta\varphi = \delta\psi, \delta x_A = 0, \delta y_A = 0.$

- Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) + \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\ &= M_A \delta\psi - (F_1 \cdot AI) \delta\psi + m \delta\psi - (F_2 \cdot HC \cdot \sin 30^\circ) \delta\psi + 0 \\ &= (M_A - F_1 a + m - F_2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}) \delta\psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{\psi(AB)} = M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2}F_2$$

- Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{\psi(AB)} = 0 \Rightarrow M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2}F_2 = 0 \quad \Rightarrow M_A = aF_1 - m + \frac{a}{2}F_2$$

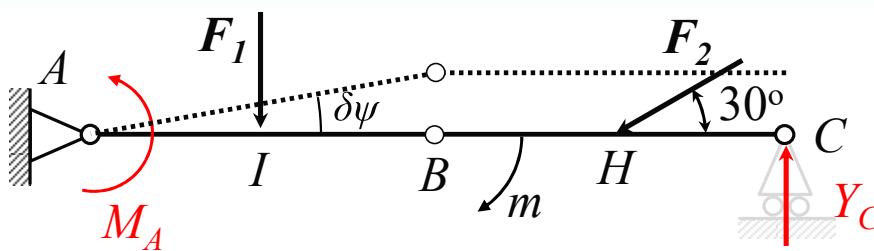
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

37

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, \mathbf{M}_A (cách 2)



- DCKD:
 - $\delta\psi \neq 0,$
 - $\delta\varphi = 0,$
 - $\delta x_A = 0,$
 - $\delta y_A = 0.$

- Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) + \delta A(\vec{m}) + \delta A(\vec{F}_2) + \delta A(\vec{Y}_C) \\ &= M_A \delta\psi - (F_1 \cdot AI) \delta\psi + m \cdot 0 - (F_2 \cdot \sin 30^\circ) (AB \cdot \delta\psi) + Y_C (AB \cdot \delta\psi) \end{aligned}$$

$$= (M_A - F_1 a - \frac{F_2}{2} \cdot 2a + \frac{2m + aF_2}{4a} \cdot 2a) \delta\psi \quad \Rightarrow Q_{\psi(AB)} = M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2}F_2$$

- Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{\psi(AB)} = 0 \Rightarrow M_A - aF_1 + m - \frac{a}{2}F_2 = 0 \quad \Rightarrow M_A = aF_1 - m + \frac{a}{2}F_2$$

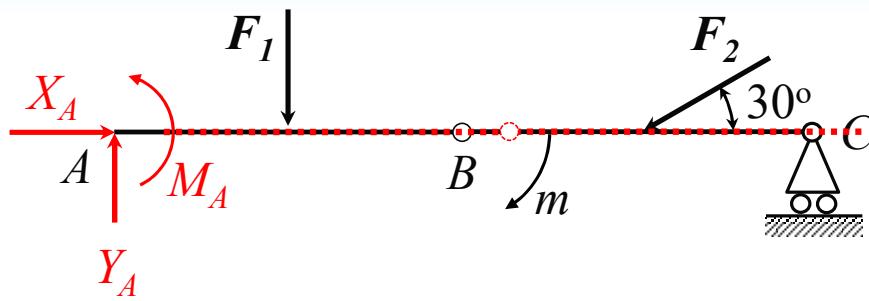
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

38

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, X_A



- DCKD:
- $\delta\psi = 0$,
- $\delta\varphi = 0$,
- $\delta x_A \neq 0$,
- $\delta y_A = 0$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{X}_A) + \delta A(\vec{F}_2) \\ &= X_A \delta x_A - (F_2 \cos 30^\circ) \delta x_A \\ &= (X_A - \frac{F_2 \sqrt{3}}{2}) \delta x_A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{x_A} = X_A - \frac{\sqrt{3}}{2} F_2$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{x_A} = 0 \Rightarrow X_A - \frac{\sqrt{3}}{2} F_2 = 0 \quad \Rightarrow X_A = \frac{\sqrt{3}}{2} F_2$$

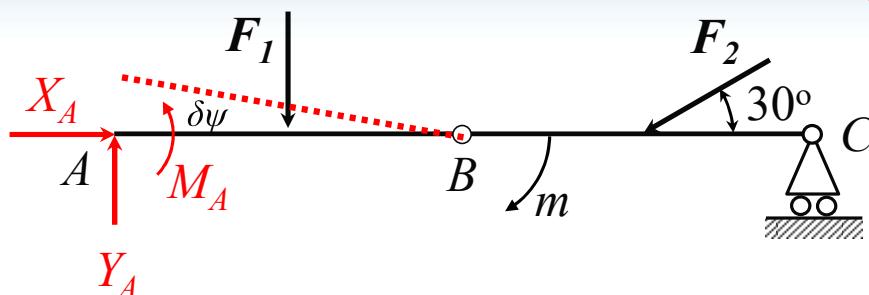
[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

39

NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẨ DĨ

VD 4: Xác định các phản lực liên kết, Y_A



- DCKD:
- $\delta\psi \neq 0$,
- $\delta\varphi = 0$,
- $\delta x_A = 0$,
- $\delta y_A = 2a \delta\psi$.

▪ Công khả dĩ của tất cả các lực hoạt động:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^a &= \delta A(\vec{Y}_A) + \delta A(\vec{M}_A) + \delta A(\vec{F}_1) \\ &= Y_A \delta y_A - M_A \frac{\delta y_A}{2a} - F_1 \frac{\delta y_A}{2} \\ &= (Y_A - \frac{aF_1 - m + \frac{a}{2}F_2}{2a} - \frac{F_1}{2}) \delta y_A\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q_{y_A} = Y_A - F_1 - \frac{F_2}{4} + \frac{m}{2a}$$

▪ Cơ hệ đang cân bằng:

$$\Rightarrow Q_{y_A} = 0 \Rightarrow Y_A - F_1 - \frac{F_2}{4} + \frac{m}{2a} = 0 \quad \Rightarrow Y_A = F_1 + \frac{F_2}{4} - \frac{m}{2a}$$

[1] Vũ Duy Cường, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

[2] Đỗ Sanh, Cơ học, Tập 2: Động lực học, tái bản lần thứ 16, NXBGD Việt Nam, 2013.

40

ĐỘNG LỰC HỌC (Cont'd)

➤ Nguyên lý D'Alembert

Trong chuyển động của chất điểm, lực thực tác dụng lên chất điểm (F) và lực quán tính của nó (F_{qt}) là một hệ lực cân bằng.

➤ Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Điều kiện cần và đủ để cơ hệ chịu liên kết giữ, dùng hình học và lý tưởng cân bằng ở vị trí đang xét là: **Tổng công** của tất cả **lực hoạt động** trên mọi **di chuyển khả dĩ** kể từ **vị trí đều** bằng không.

→ Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ, các thành phần phản lực tĩnh của cơ hệ.

➤ Phương trình tổng quát động lực học

➤ Phương trình Lagrange loại II

42

PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Xét chất điểm M_k của cơ hệ chịu liên kết giữ, dùng, hình học và lý tưởng, các tác dụng lên chất điểm gồm:

- Lực thực: \vec{F}_k
- Phản lực liên kết: \vec{R}_k

Lực quán tính của chất điểm: $\vec{F}_k^{qt} = -m_k \vec{W}_k$

Theo nguyên lý D'Alembert: $\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{F}_k^{qt} = \vec{0}$

Phương trình tổng quát của động lực học:

$$\sum_1^N (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}, \quad \text{điều kiện di chuyển khả dĩ tùy ý.}$$

Hay:

$$\sum_1^N [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0$$

→ Phương pháp tĩnh giải tích – động lực^(*).

VÍDU

Áp dụng:

- Biểu diễn các đại lượng gia tốc cần thiết trên hình vẽ của mô hình.
 - Đặt các lực quán tính lên cơ hệ, nếu là vật rắn thì đặt lực quán tính thu gọn.
 - Cho cơ hệ 1 di chuyển khả dĩ để thiết lập phương trình tổng quát động lực học của cơ hệ.
 - ✓ *Hệ 1 bậc tự do*: mọi di chuyển khả dĩ biểu diễn qua 1 tham số duy nhất \rightarrow Lập được 1 phương trình.
 - ✓ *Hệ r bậc tự do*: Cho hệ thực hiện r DCKD độc lập tuyến tính \rightarrow Thiết lập được r phương trình.

VŨ DUY CƯỜNG, Cơ lý thuyết, NXB ĐHQG Tp.HCM, 2011.

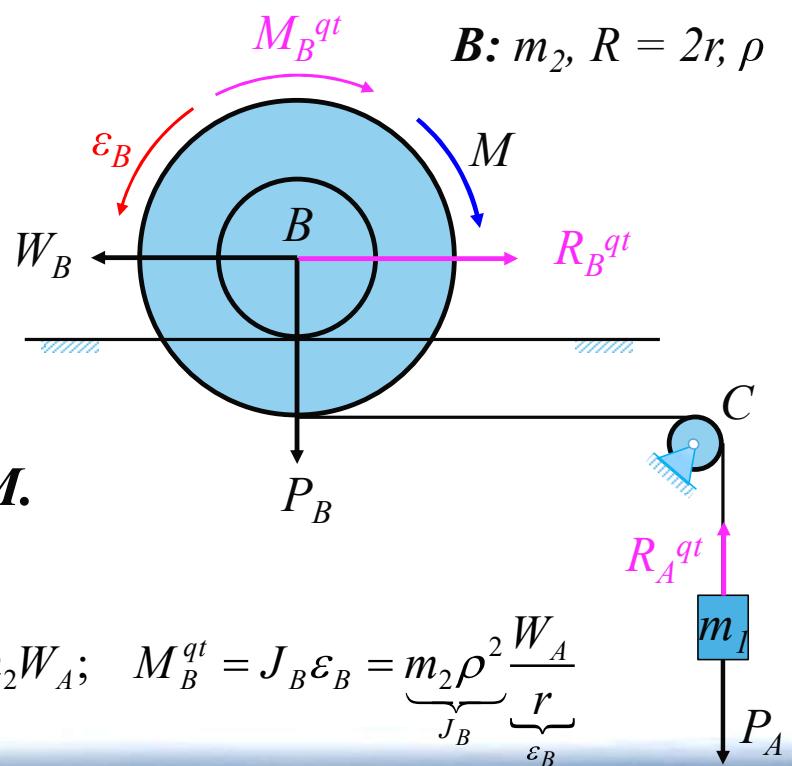
45

VÍDUI

VD Hê 1 bậc tự do:

Cho cơ hệ chịu lực như hình vẽ, dây mềm, bỏ qua ma sát và khối lượng dây. Xác định gia tốc của tải A.

- Hệ gồm: A , B , dây mềm, ròng rọc C
 - Hệ có liên kết giữ, dừng, hình học và lý tưởng \rightarrow Áp dụng được PTTQ ĐLH
 - Lực hoạt động: P_A , P_B
 - Lực quán tính:



$$R_A^{qt} = m_1 W_A; \quad R_B^{qt} = m_2 W_B = m_2 W_A; \quad M_B^{qt} = J_B \varepsilon_B = \underbrace{m_2 \rho^2}_{J_B} \underbrace{\frac{W_A}{r}}_{\varepsilon_B}$$

VÍ DỤ

$$R = 2r$$

VD Hệ 1 bậc tự do:

- Cho cơ hệ thực hiện 1 DCKD: Tải A đi xuống δh thẳng đứng

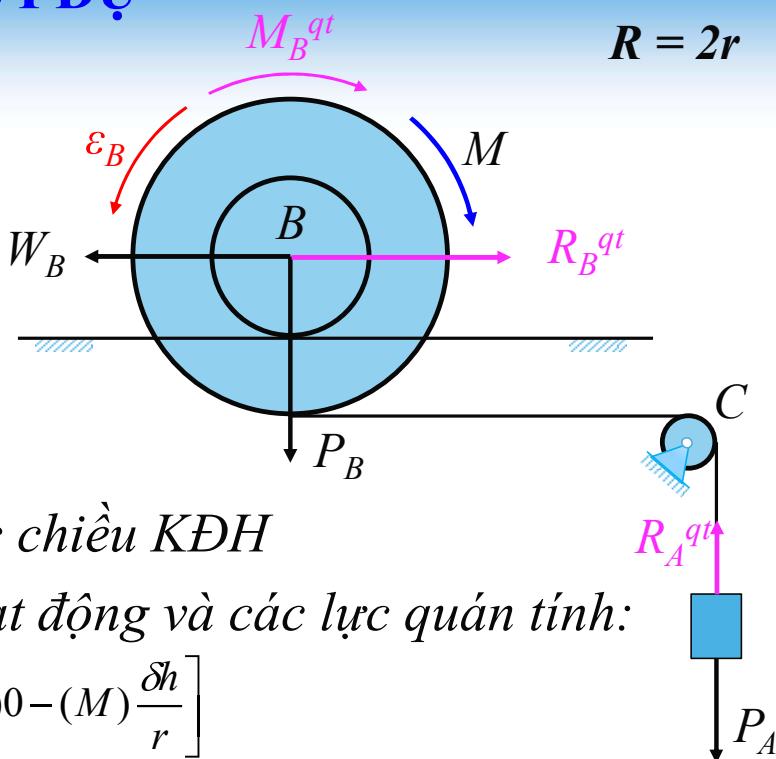
→ Độ dời tương của B:

- Sang trái: δh
- Xoay: $\delta\varphi = \delta h/r$, ngược chiều KDH

Tổng công của các lực hoạt động và các lực quán tính:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} = \left[(m_1 g) \delta h + (m_2 g) 0 - (M) \frac{\delta h}{r} \right] + \left[-(m_1 W_A) \delta h - (m_2 W_A) \delta h - (m_2 \rho^2 \frac{W_A}{r}) \frac{\delta h}{r} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left[m_1 g - \frac{M}{r} - (m_1 + m_2 + m_2 \frac{\rho^2}{r^2}) W_A \right] \delta h = 0 \Rightarrow W_A = \frac{m_1 g r - M}{r(m_1 + m_2 + m_2 \frac{\rho^2}{r^2})}$$



47

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Xét cơ hệ **chịu liên kết giữ, dừng, hình học và lý tưởng**. Biểu diễn **phương trình tổng quát động lực học của cơ hệ**:

$$\sum_1^N (\vec{F}_k - m_k \vec{W}_k) \delta \vec{r}_k = 0 \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\} \Leftrightarrow \sum_1^N m_k \vec{W}_k \delta \vec{r}_k = \sum_1^N \vec{F}_k \delta \vec{r}_k \quad \forall \{\delta \vec{r}_k\}$$

Thông qua các tọa độ suy rộng đủ $\{q_i\}$ ($i=1 \sim r$, có r bậc tự do), ta được:

$$\sum_1^r \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_1^r Q_i \delta q_i, \quad \text{trong đó: } T = \sum_1^N \frac{1}{2} m_k V_k^2$$

Do các δq_i là độc lập tuyến tính, do đó:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

Phương trình trên được gọi là phương trình Lagrange loại II.

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Nếu các lực hoạt động là lực có thế, khi đó:

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad \text{trong đó: } \Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_r)$$

Phương trình Lagrange được viết lại dưới dạng:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \right) = 0$$

Hay:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Trong đó: $L = T - \Pi$ được gọi là hàm Lagrange.

51

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II

Áp dụng cho cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và hình học

1) Xác định bậc tự do \rightarrow chọn $\{q_i\}$ đủ.

2) Xét liên kết của cơ hệ:

- Liên kết lý tưởng: Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ.
- LK không lý tưởng: Xem các thành phần PLLK không lý tưởng là các lực hoạt động.

3) Tính Q_i .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

4) Tính T .

5) Áp dụng PT Lagrange.

52

NHẮC LẠI THẾ NĂNG (1)

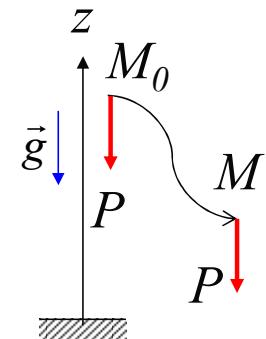
Thế năng: Thế năng của cơ hệ tại vị trí M là tổng công của các lực thế đặt vào cơ hệ trên độ dời từ vị trí M đến vị trí O được chọn (tùy ý) làm mốc. Thế năng chỉ phụ thuộc vào vị trí: $\Pi = \Pi(M)$.

☐ Thế năng trọng trường của vật có trọng lượng P :

- ✓ Gốc thế năng tại M_0 (có tọa độ z_0)
- ✓ Thế năng của vật ở M (có tọa độ z)

Theo định nghĩa, thế năng của vật tại vị trí M là:

$$\Pi(M) = A(P) \Big|_{M \rightarrow M_0} = \int_z^{z_0} -P dz = -Pz \Big|_z^{z_0} = P(z - z_0)$$



Vậy: $\Pi(M) = P(z - z_0)$, gốc tại z_0 .

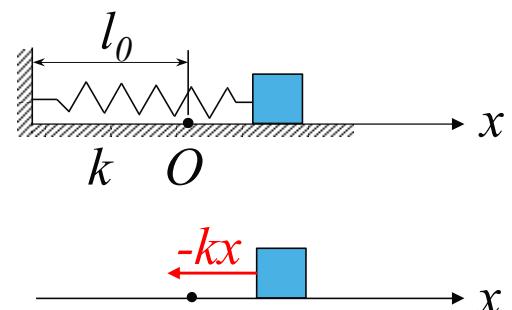
NHẮC LẠI THẾ NĂNG (2)

☐ Thế năng của lực đàn hồi lò xo:

- ✓ Gốc O của trục Ox tại vị trí lò xo không bị biến dạng
- ✓ Gốc thế năng tại M_0 (li độ x_0)
- ✓ Thế năng của vật ở M (li độ x)

$$\begin{aligned} \Pi(M) &= A(F_{lx}) \Big|_{M \rightarrow M_0} \\ &= \int_x^{x_0} -kx dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_x^{x_0} \end{aligned}$$

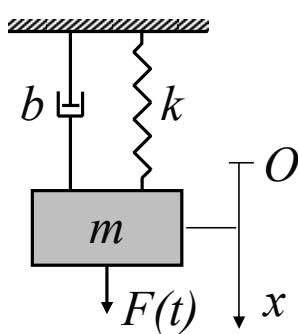
$$\Rightarrow \Pi(M) = \frac{1}{2} k(x^2 - x_0^2)$$



- » Nếu chọn gốc thế năng của lò xo tại vị trí lò xo không bị biến dạng (tức là $x_0 = 0$), khi đó x chính là độ biến dạng dài của lò xo và thế năng đàn hồi của lò xo là: $\Pi_{lò xo} = \frac{1}{2} kx^2$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD1: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

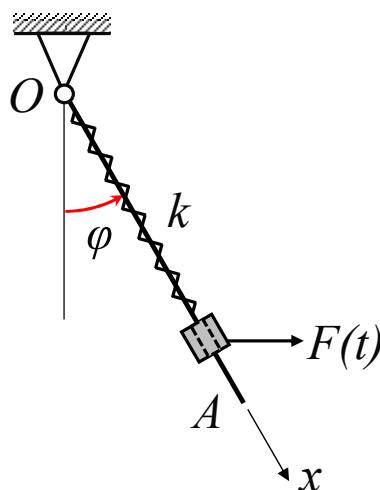
$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q^N_i$$

- BTD: 1 → Chọn TĐSR đủ $q = x$, gốc tại vị trí lò xo không bị biến dạng, hướng như hình vẽ.
- Lực hoạt động:
 - Có thể: kx, mg
 - Không thể: $b\dot{x}, F(t)$
- Động năng: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (*CĐ tịnh tiến*)
- Thế năng: $\Pi = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$ (Gốc tại VT lò xo không bị biến dạng)
- Công khả dĩ của lực không thể: $\delta A^N = -b\dot{x}\delta x + F(t)\delta x \rightarrow Q^N = -b\dot{x} + F(t)$
- PTVPCĐ: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mg + F(t)$

56

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cho cơ hệ như hình vẽ. Thanh mảnh đồng chất OA có chiều dài $2a$, khối m_1 , con trượt có khối lượng m_2 , kích thước nhỏ có thể xem như chất điểm. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



1) Xác định bậc tự do → chọn $\{q_i\}$ đủ.

2) Xét liên kết của cơ hệ:

- Liên kết lý tưởng: Biểu diễn tất cả các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ
- LK không lý tưởng: Xem các thành phần PLLK không lý tưởng là các lực hoạt động.

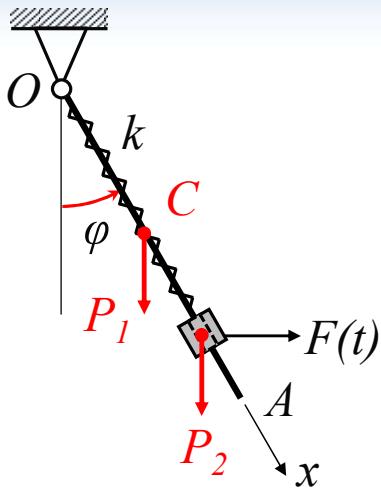
3) Tính Q_i , với $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q^N_i$

4) Tính T

5) Áp dụng PT Lagrange loại II: $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (1)



- 1) BTD: 2 → chọn TĐSR đủ: x, φ
- 2) Xét liên kết của cơ hệ
- 3) Tính Q_i , với: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$
 - Lực có thể P_1, P_2, F_{lx}
 - Lực không thể: $F(t)$

(C là khối tâm của thanh OA)

- Hàm thế năng: $\Pi = \Pi(P_1) + \Pi(P_2) + \Pi(F_{lx})$
 $\Rightarrow \Pi = [-(m_1 g) \cdot OC \cdot \cos \varphi] + [-(m_2 g) \cdot x \cdot \cos \varphi] + [\frac{1}{2} k(x - l_0)^2] + const$
 $\Rightarrow \Pi = -m_1 g a \cos \varphi - m_2 g x \cos \varphi + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2 + const$

Trong đó, $(x - l_0)$ chính là độ biến dạng của lò xo.

Trương Quang Trí, Ts (email: tri.truongquang@gmail.com), E1-301 – BM Cơ sở thiết kế máy – Khoa Cơ khí chế tạo máy – DH SPKT Tp.HCM

58

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (2)

3) Tính Q_i , với: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Hàm thế năng của cơ hệ:

$$\Pi = -m_1 g a \cos \varphi - m_2 g x \cos \varphi + \frac{1}{2} k(x - l_0)^2 + const$$

- Lực suy rộng (do các lực có thể):

$$Q_x^C = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -[-m_2 g \cos \varphi + k(x - l_0)]$$

$$\Rightarrow Q_x^C = m_2 g \cos \varphi - k(x - l_0) \quad (1)$$

$$Q_\varphi^C = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -[m_1 g a \sin \varphi + m_2 g x \sin \varphi]$$

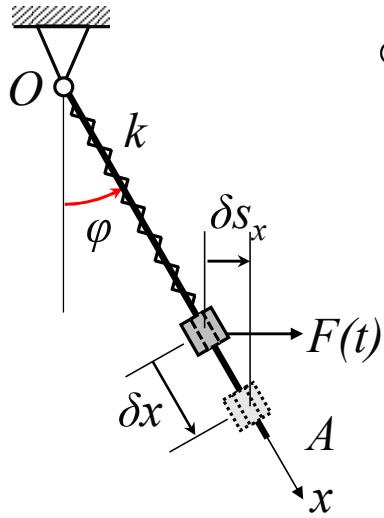
$$\Rightarrow Q_\varphi^C = -m_1 g a \sin \varphi - m_2 g x \sin \varphi \quad (2)$$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (3)

3) Tính Q_i , với: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Lực suy rộng (do các lực không thế, tức là lực $F(t)$):



○ Tìm Q_x^N :

✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x \neq 0, \delta\varphi = 0$

✓ Quan hệ động học: $\delta s_x = \delta x \cdot \sin\varphi$

✓ Công khả dĩ của các lực không thế:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(F(t)) = F(t) \cdot \delta s_x = F(t) \cdot [\delta x \cdot \sin \varphi]$$

$$\Rightarrow \sum \delta A_k^N = [F(t) \sin \varphi] \delta x$$

$$\Rightarrow Q_x^N = F(t) \sin \varphi \quad (3)$$

δs_x : dịch chuyển theo phương ngang (phương của lực $F(t)$) do di chuyển δx gây ra, xem hình vẽ.

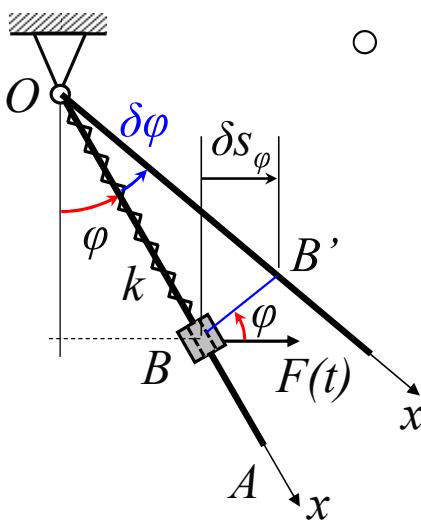
60

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Cách 1 – Xác định các lực suy rộng thông qua hàm thế năng (4)

3) Tính Q_i , với: $Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N = Q_i^C + Q_i^N$

- Lực suy rộng (do các lực không thế, tức là lực $F(t)$):



○ Tìm Q_φ^N :

✓ Cho cơ hệ một DCKD: $\delta x = 0, \delta\varphi \neq 0$

✓ Quan hệ động học: $\delta s_\varphi = BB' \cos\varphi = x\delta\varphi \cdot \cos\varphi$

✓ Công khả dĩ của các lực không thế:

$$\sum \delta A_k^N = \delta A(F(t)) = F(t) \cdot \delta s_\varphi = F(t) \cdot [x \delta\varphi \cdot \cos\varphi]$$

$$\Rightarrow \sum \delta A_k^N = [F(t)x \cos\varphi] \delta\varphi$$

$$\Rightarrow Q_\varphi^N = xF(t) \cos\varphi \quad (4)$$

Thay (1), (2), (3) và (4) vào biểu thức tính Q_i , ta được:

$$Q_x = m_2 g \cos\varphi - k(x - l_0) + F(t) \sin\varphi, \quad Q_\varphi^C = -m_1 g a \sin\varphi - m_2 g x \sin\varphi + xF(t) \cos\varphi$$

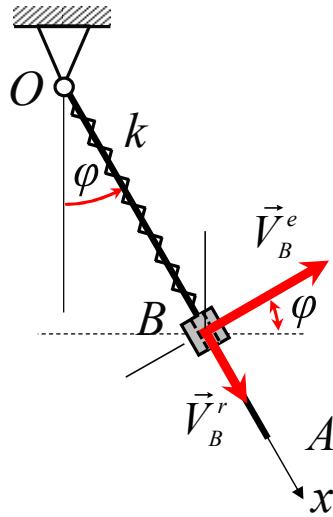
δs_φ : dịch chuyển theo phương ngang (phương của lực $F(t)$) do di chuyển $\delta\varphi$ gây ra, xem hình vẽ. 61

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: (4) Tính động năng T

- Động năng của cơ hệ: $T = T_{OA} + T_B$

○ OA chuyển động quay quanh trục O cố định: $T_{OA} = \frac{1}{2}J_o^{OA}\omega_{OA}^2$



$$T_{OA} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} m_1 (2a)^2 \right] \dot{\phi}^2 = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\phi}^2$$

- Con chạy B nhỏ (xem như chất điểm): $T_B = \frac{1}{2} m_2 V_B^2$
 B Chuyển động tương đối với thanh OA , OA lại quay quanh O , nên:

Do $\vec{V}_B = \vec{V}_B^e + \vec{V}_B^r \Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + (V_B^r)^2 + 2\vec{V}_B^e \cdot \vec{V}_B^r$

$$\vec{V}_B^e \perp \vec{V}_B^r \Rightarrow \vec{V}_B^e \cdot \vec{V}_B^r = 0 \Rightarrow V_B^2 = (V_B^e)^2 + (V_B^r)^2$$

- Trong đó: $V_B^r = \dot{x}$, $V_B^e = OB \cdot \dot{\phi} = x \dot{\phi}$

- Suy ra: $T_B = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2)$ và $T = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2)$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD2: Đến đây, ta có:

- Biểu thức động năng của cơ hệ: $T = \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + x^2 \dot{\phi}^2)$

- Các lực suy rộng:

$$\begin{cases} Q_x = m_2 g \cos \varphi - k(x - l_0) + F(t) \cdot \sin \varphi \\ Q_\varphi = -m_1 g a \sin \varphi - m_2 g x \sin \varphi + x \cdot F(t) \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

- Phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = Q_\phi \end{cases}$$

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m_2 \ddot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m_2 x \dot{\phi}^2$

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m_1 a^2 \dot{\phi} + m_2 x^2 \dot{\phi} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\phi} + m_2 \frac{d}{dt} (x^2 \dot{\phi}), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$

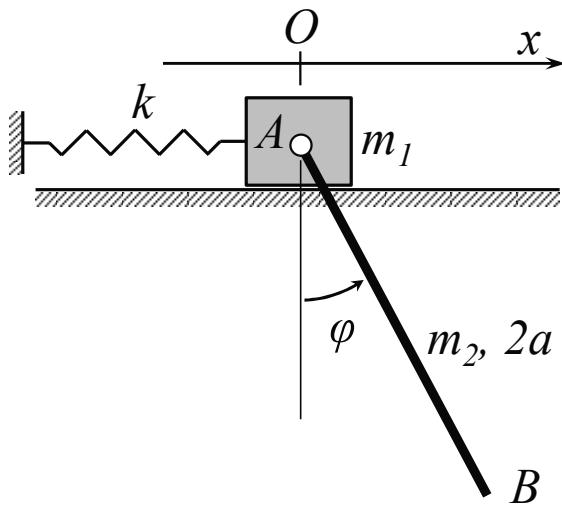
$$\frac{d}{dt} (x^2 \dot{\phi}) = 2x \dot{x} \dot{\phi} + x^2 \ddot{\phi}$$

PHƯƠNG TRÌNH LAGRANGE LOẠI II – VÍ DỤ

VD3: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

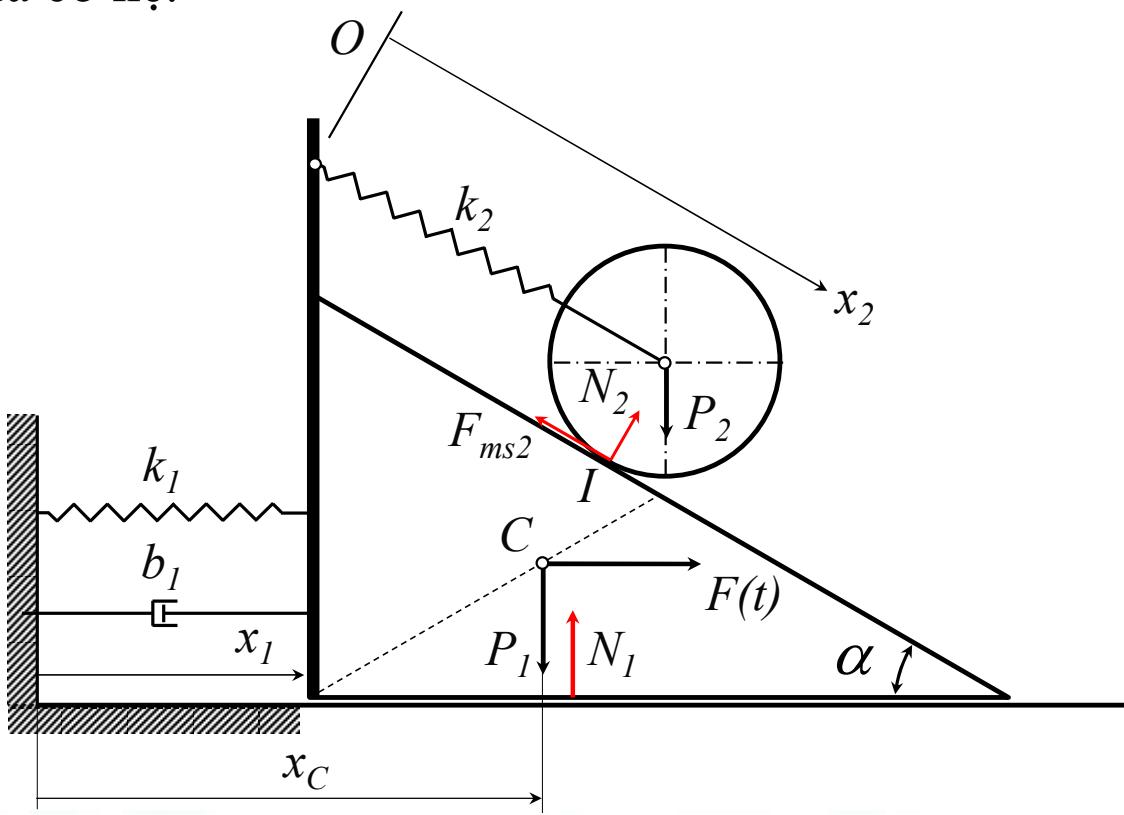
$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^N$$



Một vài nhầm lẫn:

VÍ DỤ

VD4: Cho cơ hệ như hình vẽ. Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

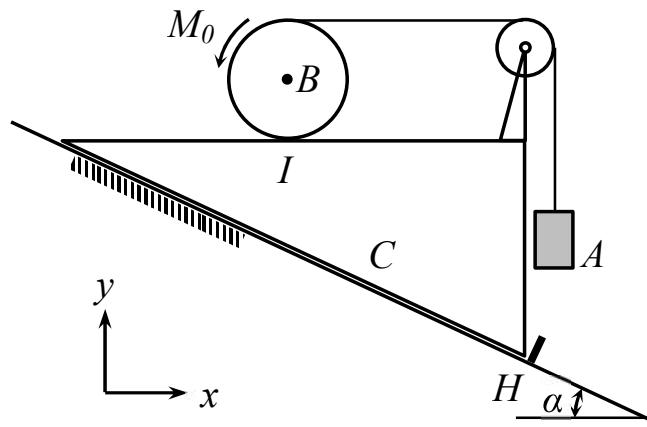


TỔNG HỢP – VD 1(*)

Cơ hệ chịu lực và liên kết như hình vẽ. Con lăn tâm B là trụ đặc đồng chất lăn không trượt, lăn trụ C được giữ đứng yên nhờ chốt H . Tại tiếp điểm I chỉ tồn tại ma sát trượt, mọi tiếp xúc khác đều bỏ qua ma sát.

Tính:

1. Động năng của cơ hệ
2. Tổng công suất của nội, ngoại lực tác dụng vào cơ hệ
3. Gia tốc của vật A .
4. Lực tác dụng của chốt tại H lên lăn trụ C
5. Áp lực của lăn trụ C lên mặt nền
6. Lực ma sát trượt $F_I = F_I \mathbf{e}_x$ con lăn tác động vào lăn trụ C
7. Tìm giá trị của $E = M_0/(2R)$ để cơ hệ cân bằng tĩnh



(*) Trích đề thi cuối kỳ môn Cơ lý thuyết, Bộ môn CKT – Khoa KHUD – ĐHBK Tp.HCM.

Trương Quang Tri, Ts (email: tri.truongquang@gmail.com), E1-301 – BM Cơ sở thiết kế máy - Khoa Cơ khí chế tạo máy – ĐH SPKT Tp.HCM

100

TỔNG HỢP – VD 1(*)

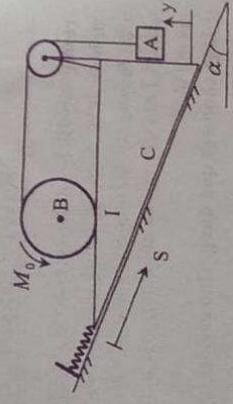
<p>TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA TP. HCM KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT</p> <p>ĐỀ THI HỌC KỲ II/13-14 Môn thi: CƠ LÝ THUYẾT Ngày thi: 19/06/2014 Giờ thi: 7 giờ 15 Thời lượng: 90 phút</p> <p>ĐỀ 1</p> <p>Sinh viên được sử dụng tài liệu và nộp lại đề kíp vào phiếu trả nghiệm.</p> <p>Họ và tên sinh viên MSSV:</p>	<p>Trường hợp I. Cơ hệ có các vật rắn liên kết và chịu lực như hình vẽ. Con lăn tâm B là trụ đặc đồng chất lăn không trượt, lăn trụ C được giữ đứng yên nhờ chốt H. Tại tiếp điểm I chỉ tồn tại ma sát trượt, mọi tiếp xúc khác đều bỏ qua ma sát.</p> <p>Hãy chọn kết quả đúng. Cho các đại lượng:</p> $m_A = 8m_0, m_B = 16m_0, m_C = 26m_0, \frac{M_0}{R} = 20m_0g$ <p>Câu 1: Động năng của cơ hệ</p> <p>a. $T = 9m_0\dot{y}^2$ b. $T = 7m_0\dot{y}^2$ c. Không có kết quả đúng d. $T = 7,5m_0\dot{y}^2$</p> <p>Câu 2: Tổng công suất của ngoại, nội lực tác động vào cơ hệ N</p> <p>a. $N = 2m_0g\dot{y}$ b. $N = m_0g\dot{y}$ c. $N = 3m_0g\dot{y}$ d. Không có kết quả đúng</p> <p>Câu 3: Gia tốc $\bar{W}_A = \dot{y}\hat{e}_y$</p> <p>a. $\ddot{y} = \frac{2g}{15}$ b. $\ddot{y} = \frac{g}{18}$ c. Không có kết quả đúng d. $\ddot{y} = \frac{g}{7}$</p> <p>Câu 4: Lực tác động của chốt tại H lên lăn trụ C.</p> <p>a. $F = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \sin\alpha + 4m_0\dot{y} \cdot \cos\alpha$ $\quad\quad\quad F = (50m_0g + 8m_0\dot{y}) \cdot \sin\alpha + 8m_0\dot{y} \cdot \cos\alpha$</p> <p>b. $F = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 16m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$ $\quad\quad\quad F = (50m_0g + 8m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 8m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$</p> <p>c. $F = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \sin\alpha + 8m_0\dot{y} \cdot \cos\alpha$ $\quad\quad\quad F = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 16m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$</p> <p>d. Không có kết quả đúng</p> <p>Câu 5: Áp lực N của lăn trụ C lên mặt nền</p> <p>a. $N = (50m_0g + 8m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 16m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$ $\quad\quad\quad N = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 8m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$</p> <p>b. $N = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 8m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$ $\quad\quad\quad N = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 16m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$</p> <p>c. $N = (40m_0g + 12m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 16m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$ $\quad\quad\quad N = (50m_0g + 8m_0\dot{y}) \cdot \cos\alpha - 8m_0\dot{y} \cdot \sin\alpha$</p> <p>d. Không có kết quả đúng</p> <p>Câu 6: Lực ma sát trượt $\vec{F}_I = F_I \hat{e}_x$ con lăn tác động vào lăn trụ C</p> <p>a. $F_I = 12m_0(g + \dot{y})$ hoặc $F_I = 8m_0g + 16m_0\dot{y}$ $\quad\quad\quad F_I = 14m_0g + 16m_0\dot{y}$</p> <p>b. $F_I = 14m_0g + 16m_0\dot{y}$ hoặc $F_I = 12m_0g + 20m_0\dot{y}$ $\quad\quad\quad F_I = 18m_0g + 14m_0\dot{y}$</p> <p>c. $F_I = 18m_0g + 14m_0\dot{y}$ hoặc $F_I = 12m_0g + 16m_0\dot{y}$ $\quad\quad\quad F_I = 12m_0g + 16m_0\dot{y}$</p> <p>d. Không có kết quả đúng</p>
--	--

TỔNG HỢP – VD 1(*)

- Câu 7: Tìm giá trị của $E = \frac{M_0}{2R}$ để cơ hệ cân bằng
- $E = 12m_0g$
 - $E = 8m_0g$
 - $E = 10m_0g$
 - Không có kết quả đúng
- Trường hợp II: Bỏ chốt tại H, lắp thêm lò xo độ cứng K như hình vẽ. Gọi độ dài di xuông của C so với lăng trụ C là y , bỏ qua di chuyển ngang của tải A so với lăng trụ C.

Câu 8: Động năng của cơ hệ

- $T = 7m_0\dot{y}^2 + 25m_0\dot{s}^2 - 8m_0(\sin\alpha + \cos\alpha)\dot{s}\dot{y}$
- $T = 7,5m_0\dot{y}^2 + 20m_0\dot{s}^2 - (12\sin\alpha + 4\cos\alpha)m_0\dot{s}\dot{y}$
- Không có kết quả đúng
- $T = 9m_0\dot{y}^2 + 20m_0\dot{s}^2 - (12\sin\alpha + 8\cos\alpha)m_0\dot{s}\dot{y}$



Câu 9: Lực suy rộng Q_y, Q_s

- $Q_y = 3m_0g, Q_s = -ks$
- $Q_y = 2m_0g, Q_s = 50m_0g - ks$
- $Q_y = 2m_0g, Q_s = 50m_0g - ks$
- Không có kết quả đúng

Câu 10: Hệ phương trình vi phân chuyen động

- $\begin{cases} 15\ddot{y} - (12\sin\alpha + 4\cos\alpha)\ddot{s} = g \\ (12\sin\alpha + 4\cos\alpha)m_0\ddot{y} - 40m_0\ddot{s} = ks \end{cases}$
- $\begin{cases} 14\ddot{y} - 8(\sin\alpha + \cos\alpha)\ddot{s} - 2g = 0 \\ 8m_0(\sin\alpha + \cos\alpha)\ddot{y} - 50m_0\ddot{s} - ks = 0 \end{cases}$
- Không có kết quả đúng

Câu 11: Dạng nghiệm của hệ phương trình với điều kiện đầu: $s = 0, \dot{y} = 0, s > 0, y > 0$ (A_1, A_2, C_1, C_2 , là các hằng số).

- $\begin{cases} s = A_1 \cos(\omega_1 t) + C_1 \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t) + C_2 \end{cases}$
- $\begin{cases} 18\ddot{y} - (12\sin\alpha + 8\cos\alpha)\ddot{s} - g = 0 \\ (12\sin\alpha + 8\cos\alpha)m_0\ddot{y} - 40m_0\ddot{s} - ks = 0 \end{cases}$
- Không có kết quả đúng
- $\begin{cases} s = A_1 \cos(\omega_1 t) + C_1 \\ y = A_2 \cos(\omega_2 t) + C_2 t^2 \end{cases}$

Câu 12: Cho $g\alpha$ xấp xỉ / (là hệ số ma sát trượt tĩnh giữa lăng trụ C và nền). Bỏ chốt tại H, nếu $\dot{y} = 0$ cơ hệ sẽ cân bằng (không trượt). Nếu $\dot{y} > 0$ (đều lùm) lăng trụ C có trượt không?

- Trượt lên
- Không trượt
- Không đánh giá được chiều trượt
- Trượt xuống

*Chú ý: Bỏ qua khái lượng ràng buộc và đây trong cả 2 trường hợp.

(— HẾT —)

CHỦ NHIỆM BỘ MÔN

GIAO VIÊN RA ĐỀ

TS. Vũ Công Hòa

Musa

ThS. Vũ Duy Cường