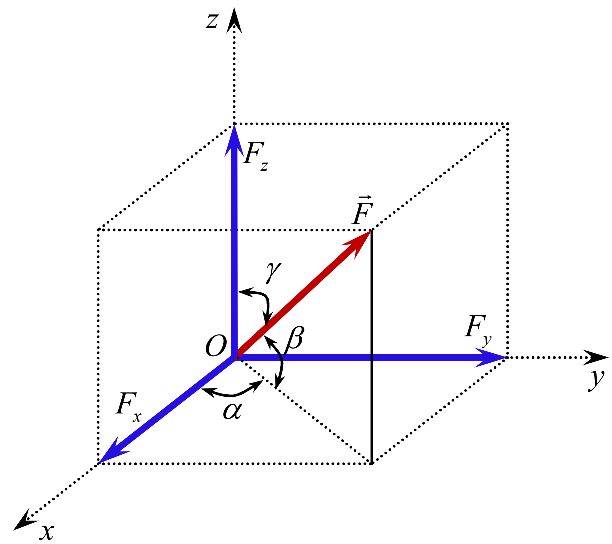
Phần 2

TĨNH HỌC



2.1. Lực:

Trong không gian ba chiều một véctơ lực có ba thành phần theo ba trục tọa độ được biểu diễn: $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

Viết dưới dạng véctơ: $F = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$

Trị số của lực: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Các cosin chỉ phương:

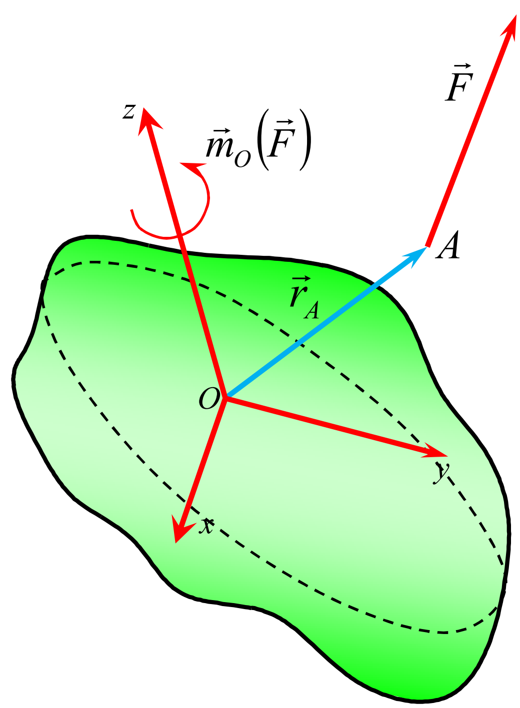
$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

2.2. Mômen của lực đối với một điểm:

Mômen của lực đối với một điểm được định nghĩa là tích có hướng của hai véctơ

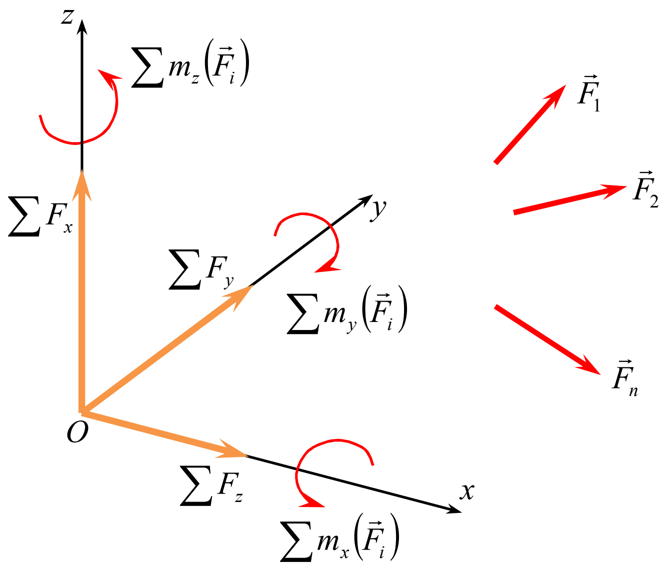
$$\vec{m}_o\left(\vec{F}\right) = \vec{r}_A \wedge \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

Với $r_A = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T ; F = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$



2.3. Hợp lực và hợp của mômen của hệ lực:

➢ Hợp lực của hệ lực : $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

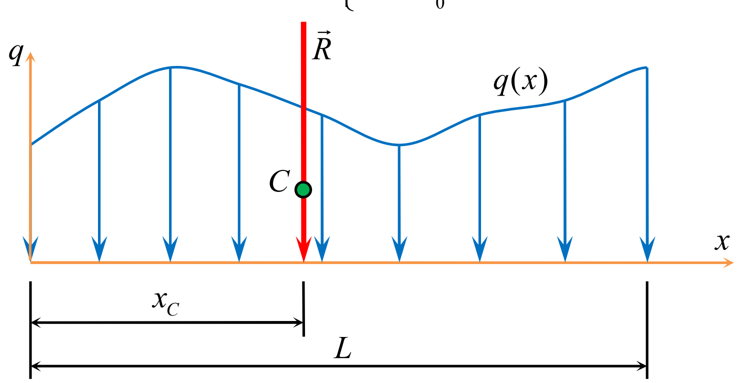


➢ Hợp mô men của hệ lực đối với điểm O : $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$

2.4. Thu gọn hệ lực và điều kiện cân bằng của một hệ lực

➢ Thu gọn một hệ lực về một tâm O ta được một hợp lực $\vec{R}$ và một hợp của mômen $\vec{M}_O$.

➢ Thu gọn hệ lực phân bố: $\begin{cases} \vec{R} = \int_0^L q(x)dx \\ x_C = \dfrac{\int_0^L q(x).xdx}{\int_0^L q(x)dx} \end{cases}$



➢ Điều kiện cần và đủ để một hệ lực cân bằng: $\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = 0 \end{cases}$

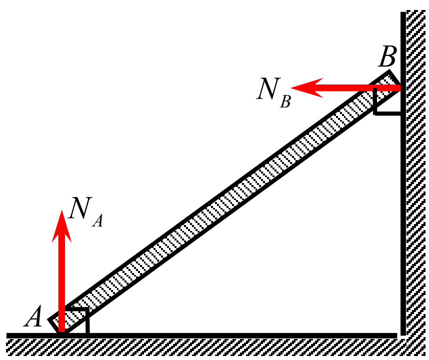
- Các trường hợp đặc biệt:

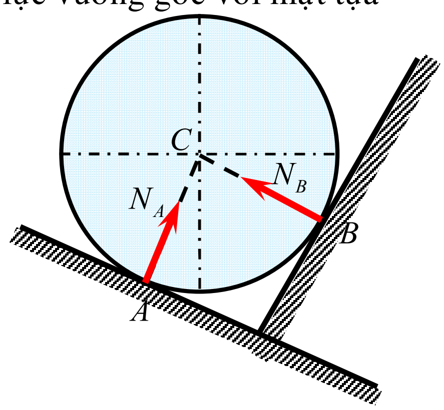
Hệ lực	Hệ phương trình cân bằng	Ghi chú
Không gian	$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum m_x = 0 \\ \sum m_y = 0 \\ \sum m_z = 0 \end{cases}$	$\sum F_x$: tổng hình chiếu của các lực lên trục x. $\sum m_x$: tổng mômen của các lực lấy đối với trục x
Hệ lực song song	$\begin{cases} \sum F_z = 0 \\ \sum m_x = 0 \\ \sum m_y = 0 \end{cases}$	Hệ lực song song với trục z
Hệ lực đồng qui	$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$	
Hệ lực phẳng	$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum m_z = 0 \end{cases}$	Hệ lực nằm trong mặt phẳng (xy)

Hệ lực phẳng song song	$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum m_z = 0 \end{cases}$	Hệ lực nằm trong mặt phẳng (xy) và đường tác dụng của các lực song song với trục y
Hệ lực phẳng đồng qui	$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$	Hệ lực nằm trong mặt phẳng (xy)

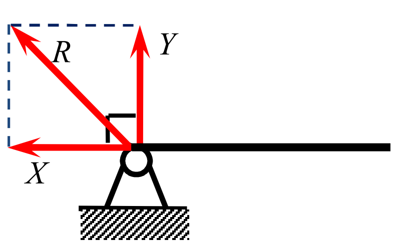
2.5. Các loại liên kết thường gặp

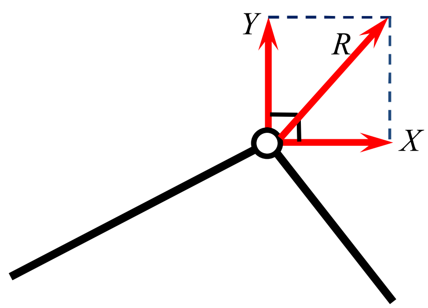
2.5.1. Liên kết tựa trên mặt nhẵn : Phản lực vuông góc với mặt tựa



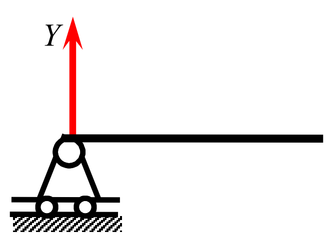


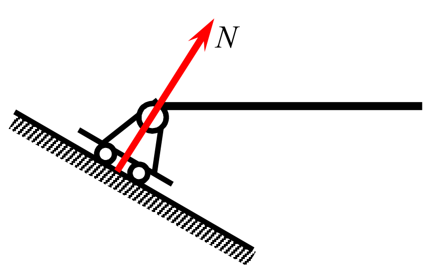
2.5.2. Liên kết bản lề, gối cố định, khớp xoay: Phản lực đi qua tâm quay



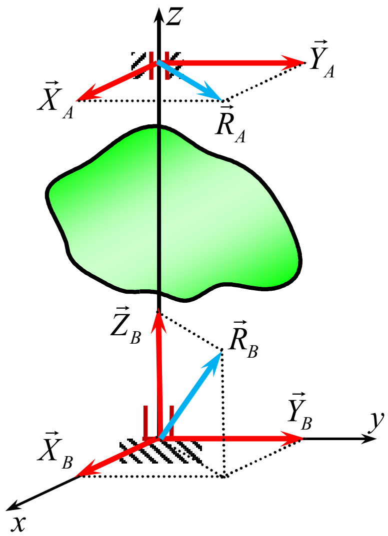


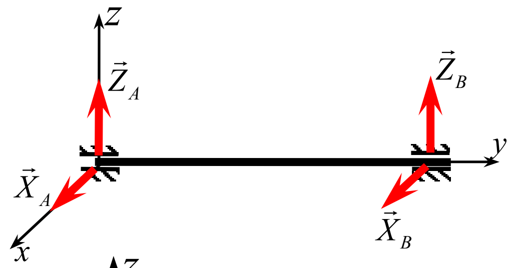
2.5.3. Liên kết gối di động: phản lực vuông góc với phương bị hạn chế chuyển động

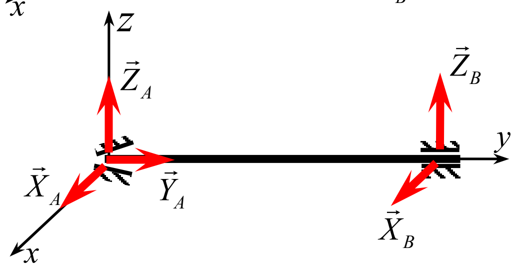




2.5.4. Liên kết ổ đỡ, ổ trục

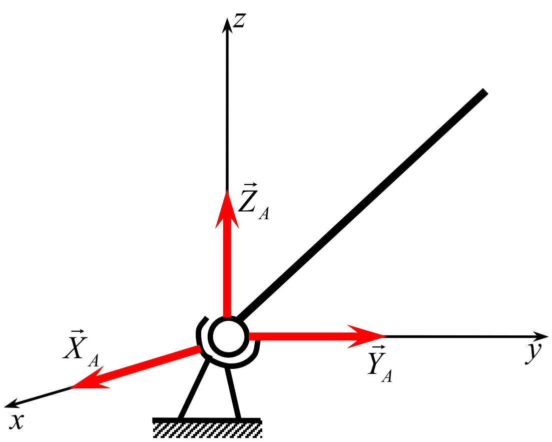


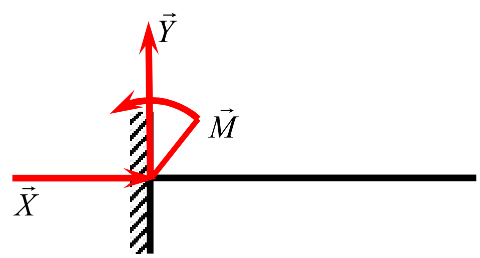


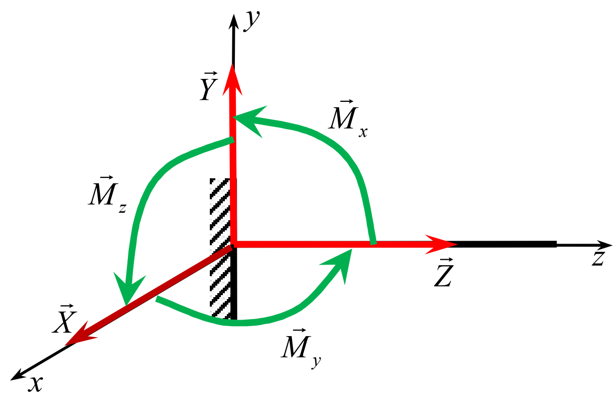


2.5.5. Liên kết gối cầu

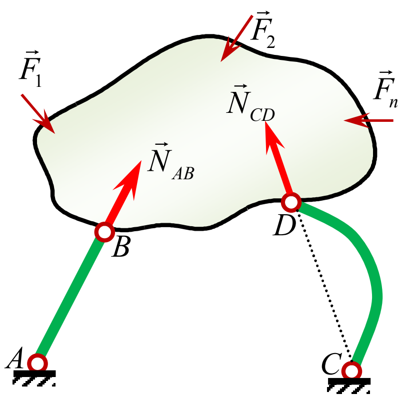
2.5.6. Liên kết ngàm





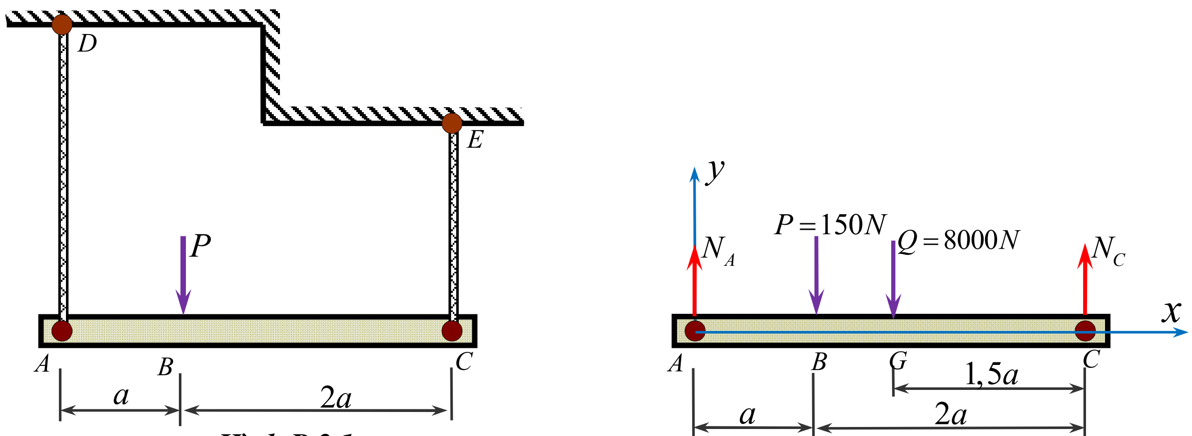


2.5.7. Liên kết thanh cứng: (thanh không khối lượng): Nếu thanh thẳng ứng lực dọc trục thanh, nếu thanh cong ứng lực đi qua điểm đầu và điểm cuối của thanh.



VÍ DỤ

B2.1. Thanh AC đồng chất khối lượng $800kg$ được giữ bởi hai thanh AD, CE và chịu tác dụng của lực $P = 150N$ như ***hình B.2.1***. Xác định ứng lực trong hai thanh AD, CE.



Hình B.2.1

➢ Xét cân bằng thanh AC và giải phóng liên kết thanh AC như hình vẽ.
Các véctơ lực và các véctơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ N_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}; F_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ N_C \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_G = \begin{bmatrix} 1,5a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} 3a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_G + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_G \wedge \vec{F}_G + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(2) = 0, M(3) = 0)$ ta tìm được N_A, N_C

➢ **Chương trình Maple**

restart;
Loading LinearAlgebra

$$Fa := \begin{bmatrix} 0 \\ Na \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} 0 \\ -150 \\ 0 \end{bmatrix} : Fg := \begin{bmatrix} 0 \\ -8000 \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{Nc} \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rg := \begin{bmatrix} 1.5 \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 3 \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$R := Fa + Fb + Fg + Fc;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Na - 8150 + Nc \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

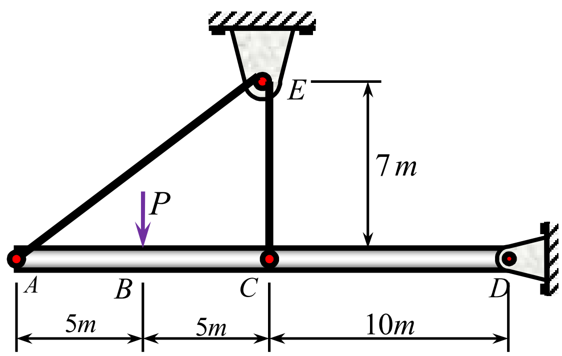
$M := ra \,\&x\, Fa + rb \,\&x\, Fb + rg \,\&x\, Fg + rc \,\&x\, Fc;$

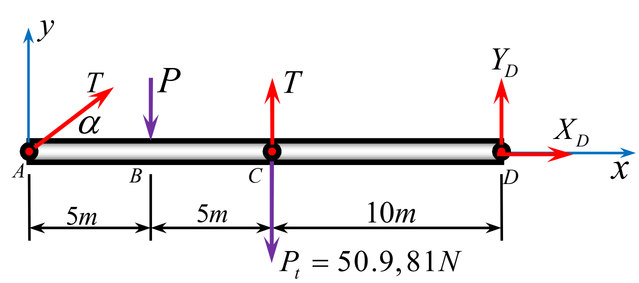
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12150.0\, a + 3\, a\, Nc \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$n := solve(\{R[2], M[3]\}, [Na, Nc]);$

$$[[Na = 4100., Nc = 4050.]] \quad \textbf{(3)}$$

B2.2. Thanh AD đồng chất khối lượng $50kg$ chịu liên kết khớp xoay tại D, được giữ bởi dây cáp từ A đến C vòng qua ròng rọc nhẵn tại E và chịu tác dụng của lực $P = 850N$ như ***hình B.2.2***. Xác định ứng lực phát sinh trong dây cáp và phản lực tại khớp xoay D. (gợi ý: lực căng trong các nhánh của dây cáp là như nhau).





Hình B.2.2

- Xét cân bằng thanh AD và giải phóng liên kết thanh AD như hình vẽ.

  $\alpha = a\tan\dfrac{7}{10}$

  Các véctơ lực và các véctơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} T.\cos\alpha \\ T.\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ T-P_t \\ 0 \end{bmatrix}; F_D = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0, R(2)=0, M(3)=0)$ ta tìm được X_D, Y_D, T

➢ **Chương trình Maple**

restart;

Loading LinearAlgebra

$m := 50 : P := 850 : \alpha := \arctan\left(\frac{7}{10}\right) : g := 9.81 :$

$$Fa := \begin{bmatrix} T\cdot\cos(\alpha) \\ T\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ T - m\cdot g \\ 0 \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} Xd \\ Yd \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$R := Fa + Fb + Fc + Fd;$

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{149} T\sqrt{149} + Xd \\ \frac{7}{149} T\sqrt{149} - 1340.50 + T + Yd \\ 0 \end{bmatrix}$$

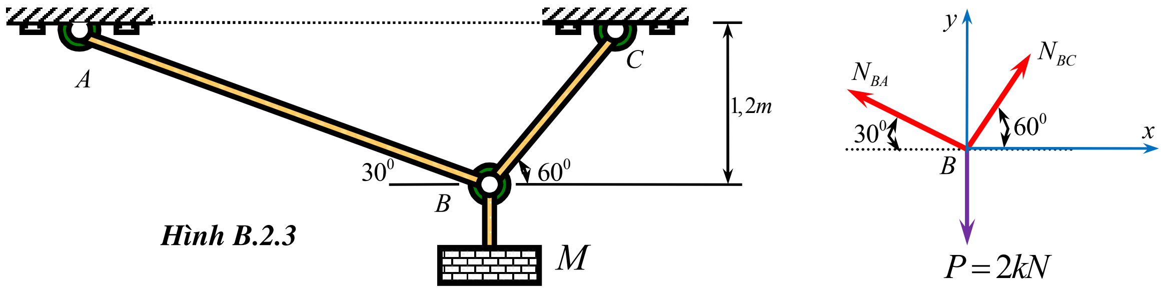
M := ra &x Fa + rb &x Fb + rc &x Fc + rd &x Fd;

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9155.00 + 10\,T + 20\,Yd \end{bmatrix}$$

$n := solve(\{R[1], R[2], M[3]\}, [Xd, Yd, T]);$

$$[[Xd = -673.6863958, Yd = 46.58047708, T = 822.3390458]]$$

B2.3. Vật nặng có khối lượng $M = 200kg$ được giữ bởi hai dây cáp như ***hình B.2.3***. Tính lực căng trong các dây cáp.



Hình B.2.3

- Giải phóng liên kết như hình vẽ.

  Hệ lực đồng qui, ta có các véctơ lực

$$R_1 = \begin{bmatrix} -N_{BA}\cos 30^0 \\ N_{BA}\sin 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}; R_2 = \begin{bmatrix} N_{BC}\cos 60^0 \\ N_{BC}\sin 60^0 \\ 0 \end{bmatrix}; R_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Điều kiện cân bằng của hệ lực: $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_P = 0$

  Giải hệ phương trình trên $(R(1) = 0, R(2) = 0)$ ta tìm được N_{BA}, N_{BC}

- **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$$R1 := \begin{bmatrix} -Nba\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ Nba\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 \end{bmatrix} : R2 := \begin{bmatrix} -Nbc\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ Nbc\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 \end{bmatrix} : R3 := \begin{bmatrix} 0 \\ -200\cdot 9.81 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

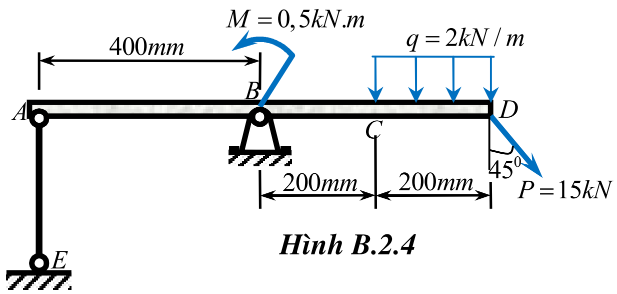
$R := R1 + R2 + R3;$

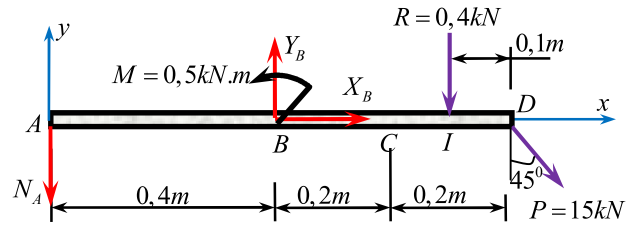
$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,Nba\,\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,Nbc \\ \frac{1}{2}\,Nba + \frac{1}{2}\,Nbc\,\sqrt{3} - 1962.00 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$n := solve(\{R[1], R[2]\}, [Nba, Nbc]);$

$$[[Nba = -1962., Nbc = 3398.283684]] \tag{2}$$

B2.4. Thanh AD tuyệt đối cứng chịu liên kết khớp xoay tại B và được giữ bởi thanh AF. Hệ chịu lực và có kích thước như ***hình B.2.4***. Xác định phản lực liên kết tại B và ứng lực trong thanh AF.





Hình B.2.4

- Giải phóng liên kết như hình vẽ.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{bmatrix}; F_I = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.0,2 \\ 0 \end{bmatrix}; F_D = \begin{bmatrix} P\sin 45^0 \\ -P\cos 45^0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_I = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$r_D = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; M_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_I + \vec{F}_D = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_I \wedge \vec{F}_I + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{M}_B = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1) = 0, R(2) = 0, M(3) = 0)$ ta tìm được X_B, Y_B, N_A

- **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$q := 2 : P := 15 : Mb := 0.5 :$

$$Fa := \begin{bmatrix} 0 \\ -Na \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} Xb \\ Yb \\ 0 \end{bmatrix} : Fi := \begin{bmatrix} 0 \\ -q \cdot 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} P \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -P \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ri := \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : M1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Mb \end{bmatrix} :$$

$R := Fa + Fb + Fi + Fd$

$$\begin{bmatrix} Xb + \frac{15}{2}\sqrt{2} \\ -Na + Yb - 0.4 - \frac{15}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$M := ra \,\&x\, Fa + rb \,\&x\, Fb + ri \,\&x\, Fi + rd \,\&x\, Fd + M1$

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0.4\, Yb + 0.22 - 6.000000000\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$n := solve(\{R[1], R[2], M[3]\}, [Xb, Yb, Na])$

$$[[Xb = -10.60660172, Yb = 20.66320344, Na = 9.656601718]] \quad (3)$$

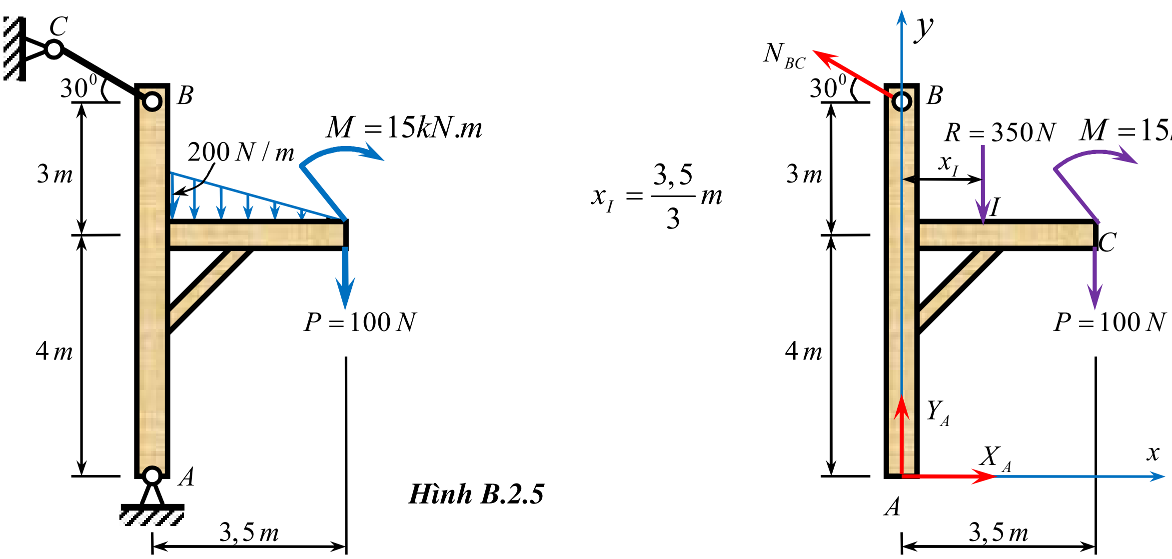
B2.5. Khung AB tuyệt đối cứng chịu liên kết khớp xoay tại A và được giữ bởi thanh BC như ***hình B.2.5***. Xác định ứng lực trong thanh BC và phản lực liên kết tại A.

➢ Giải phóng liên kết như hình vẽ.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} -N_{BC}\cos 30^0 \\ N_{BC}\sin 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F_I = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}; \; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$r_I = \begin{bmatrix} 3,5/3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}; M_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix}$$



Hình B.2.5

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_A+\vec{F}_B+\vec{F}_I+\vec{F}_C=0\\ \vec{M}=\vec{r}_A\wedge\vec{F}_A+\vec{r}_B\wedge\vec{F}_B+\vec{r}_I\wedge\vec{F}_I+\vec{r}_C\wedge\vec{F}_C=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0, R(2)=0, M(3)=0)$ ta tìm được X_A, Y_A, N_{BC}

➢ **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$P := 100 : q := 200 : M1 := 15 :$

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} -Nbc\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ Nbc\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ 0 \end{bmatrix} : Fi := \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}\cdot q\cdot 3.5 \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} : ri := \begin{bmatrix} \frac{3.5}{3} \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 3.5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} : Mc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M1 \end{bmatrix} :$$

$R := Fa + Fb + Fi + Fc;$

$$\begin{bmatrix} Xa - \frac{1}{2}\, Nbc\,\sqrt{3} \\ Ya + \frac{1}{2}\, Nbc - 450.0000000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

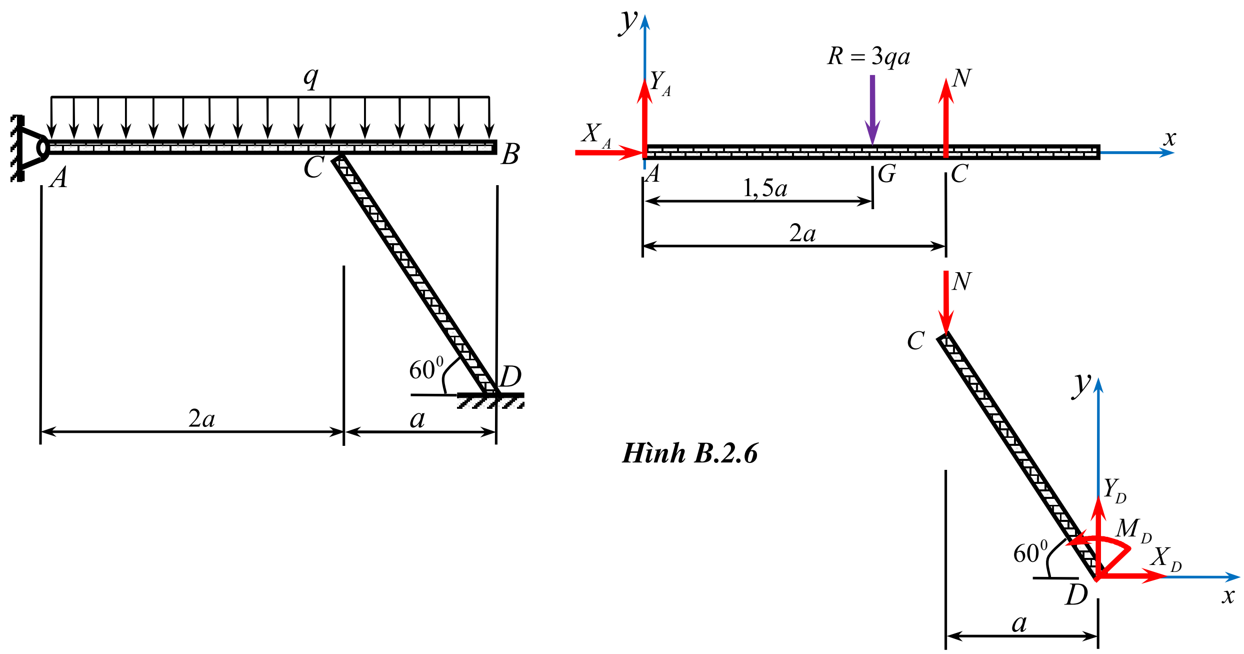
$M := ra \,\&x\, Fa + rb \,\&x\, Fb + ri \,\&x\, Fi + rc \,\&x\, Fc + Mc;$

$$\begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ \frac{7}{2}\, Nbc\,\sqrt{3} - 773.3333334 \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$ng := solve(\{R[1], R[2], M[3]\}, [Xa, Ya, Nbc]);$

$$[[Xa = 110.4761905,\ Ya = 386.2165417,\ Nbc = 127.5669166]] \quad \textbf{(3)}$$

B2.6. Cho cơ hệ như hình vẽ. Thanh AB nằm ngang tựa lên thanh CD tại C. Hệ chịu lực và có kích thước như ***hình B.2.6***. Xác định phản lực liên kết tại A, C và ngàm D.



Hình B.2.6

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh AB.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -3qa \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_G = \begin{bmatrix} 1,5a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_G + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_G \wedge \vec{F}_G + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C = 0 \end{cases}$$

  Giải hệ phương trình trên $(R(1) = 0, R(2) = 0, M(3) = 0)$ ta tìm được X_A, Y_A, N

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh CD.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_D = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} -a \\ a\tan 60^0 \\ 0 \end{bmatrix}; M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_D \end{bmatrix}$$

  Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_D + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{M}_1 = 0 \end{cases}$$

  Giải hệ phương trình trên $(R(1) = 0, R(2) = 0, M(3) = 0)$ ta tìm được X_D, Y_D, M_D

- **Chương trình Maple:**

restart :
Loading LinearAlgebra

$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rg := \begin{bmatrix} 1.5 \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 2 \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fg := \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \cdot q \cdot a \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} :$

$R := Fa + Fg + Fc$

$$\begin{bmatrix} Xa \\ -3\,a\,q + N + Ya \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M := CrossProduct(ra, Fa) + CrossProduct(rg, Fg) + CrossProduct(rc, Fc)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.5\,a^2\,q + 2\,a\,N \end{bmatrix}$$

$n := solve(\{R(1), R(2), M(3)\}, [Xa, Ya, N])$

$$[[Xa = 0., Ya = 0.7500000000\,q\,a, N = 2.250000000\,q\,a]]$$

$assign(n)$:

$rd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} -a \\ a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Fd := \begin{bmatrix} Xd \\ Yd \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ -N \\ 0 \end{bmatrix} : M1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Md \end{bmatrix}$

$R := Fd + Fc$

$$\begin{bmatrix} Xd \\ Yd - 2.250000000\,q\,a \\ 0 \end{bmatrix}$$

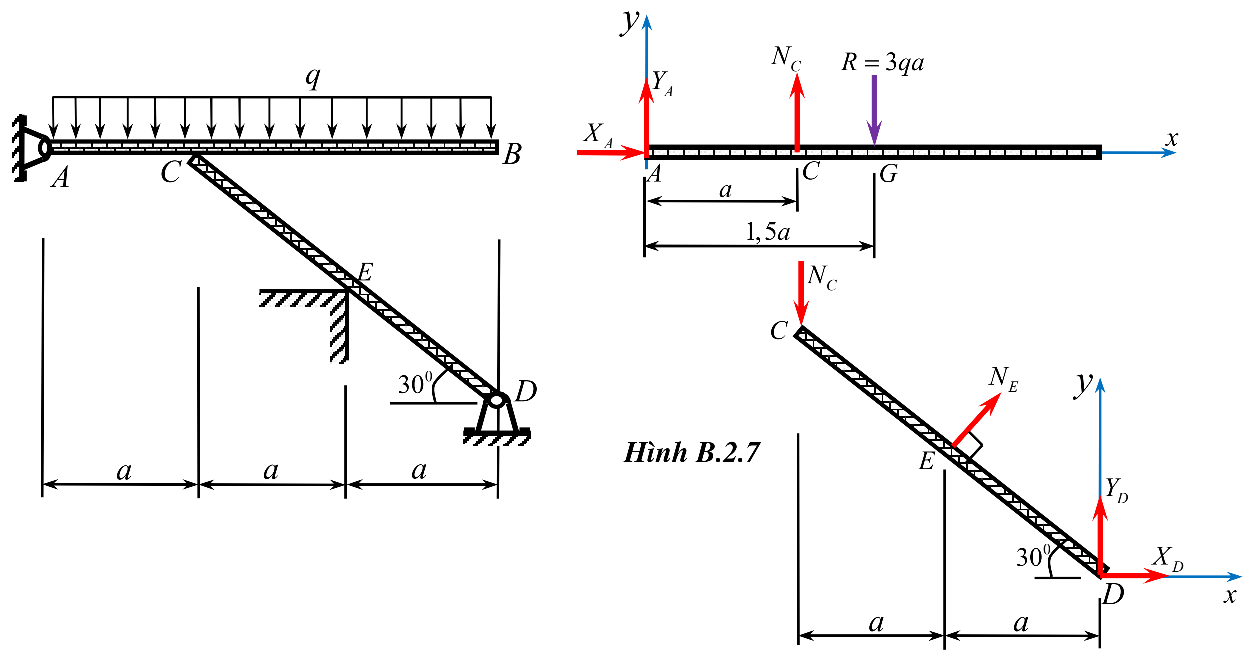
$M := CrossProduct(rd, Fd) + CrossProduct(rc, Fc) + M1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.250000000\, a^2\, q + Md \end{bmatrix}$$

$n1 := solve(\{R(1), R(2), M(3)\}, [Xd, Yd, Md])$

$$[[Xd = 0., Yd = 2.250000000\, q\, a, Md = -2.250000000\, a^2\, q]]$$

B2.7. Cho cơ hệ như hình vẽ. Thanh AB nằm ngang tựa lên thanh CD tại C. Hệ chịu lực và có kích thước như ***hình B.2.7***. Xác định phản lực liên kết tại A, C, E và D.



Hình B.2.7

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh AB.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_G = \begin{bmatrix} 0 \\ -3qa \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ N_C \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_G = \begin{bmatrix} 1,5a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_G + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_G \wedge \vec{F}_G + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C = 0 \end{cases}$$

  Giải hệ phương trình trên $(R(1) = 0, R(2) = 0, M(3) = 0)$ ta tìm được X_A, Y_A, N_C

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh CD.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_D = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -N_C \\ 0 \end{bmatrix}; F_E = \begin{bmatrix} N_E \sin 30^0 \\ N_E \cos 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} -2a \\ 2a \tan 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_E = \begin{bmatrix} -a \\ a \tan 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_D+\vec{F}_C+\vec{F}_E=0\\ \vec{M}=\vec{r}_D\wedge\vec{F}_D+\vec{r}_C\wedge\vec{F}_C+\vec{r}_E\wedge\vec{F}_E=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0, R(2)=0, M(3)=0)$ ta tìm được X_D, Y_D, N_E

- Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$$ra := \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} : rg := \begin{bmatrix}1.5\cdot a\\0\\0\end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix} :$$

$$Fa := \begin{bmatrix}Xa\\Ya\\0\end{bmatrix} : Fg := \begin{bmatrix}0\\-3\cdot qa\\0\end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix}0\\Nc\\0\end{bmatrix} :$$

$$R := Fa + Fg + Fc$$

$$\begin{bmatrix}Xa\\Ya-3\,qa+Nc\\0\end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$$M := CrossProduct(ra, Fa) + CrossProduct(rg, Fg) + CrossProduct(rc, Fc)$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\-4.5\,a\,qa+a\,Nc\end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$$n := solve(\{R(1), R(2), M(3)\}, [Xa, Ya, Nc])$$

$$[[Xa=0., Ya=-1.500000000\,qa, Nc=4.500000000\,qa]] \quad \textbf{(3)}$$

assign(*n*) :

$$rd := \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix}-2\cdot a\\2\cdot a\cdot\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\\0\end{bmatrix} : re := \begin{bmatrix}-a\\a\cdot\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\\0\end{bmatrix} :$$

$$Fd := \begin{bmatrix}Xd\\Yd\\0\end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix}0\\-Nc\\0\end{bmatrix} : Fe := \begin{bmatrix}Ne\cdot\sin\left(\frac{Pi}{6}\right)\\Ne\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\0\end{bmatrix}$$

$R := Fd + Fc + Fe$

$$\begin{bmatrix} Xd + \frac{1}{2}\,Ne \\ Yd - 4.500000000\,qa + \frac{1}{2}\,Ne\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

$M := CrossProduct(rd, Fd) + CrossProduct(rc, Fc) + CrossProduct(re, Fe)$

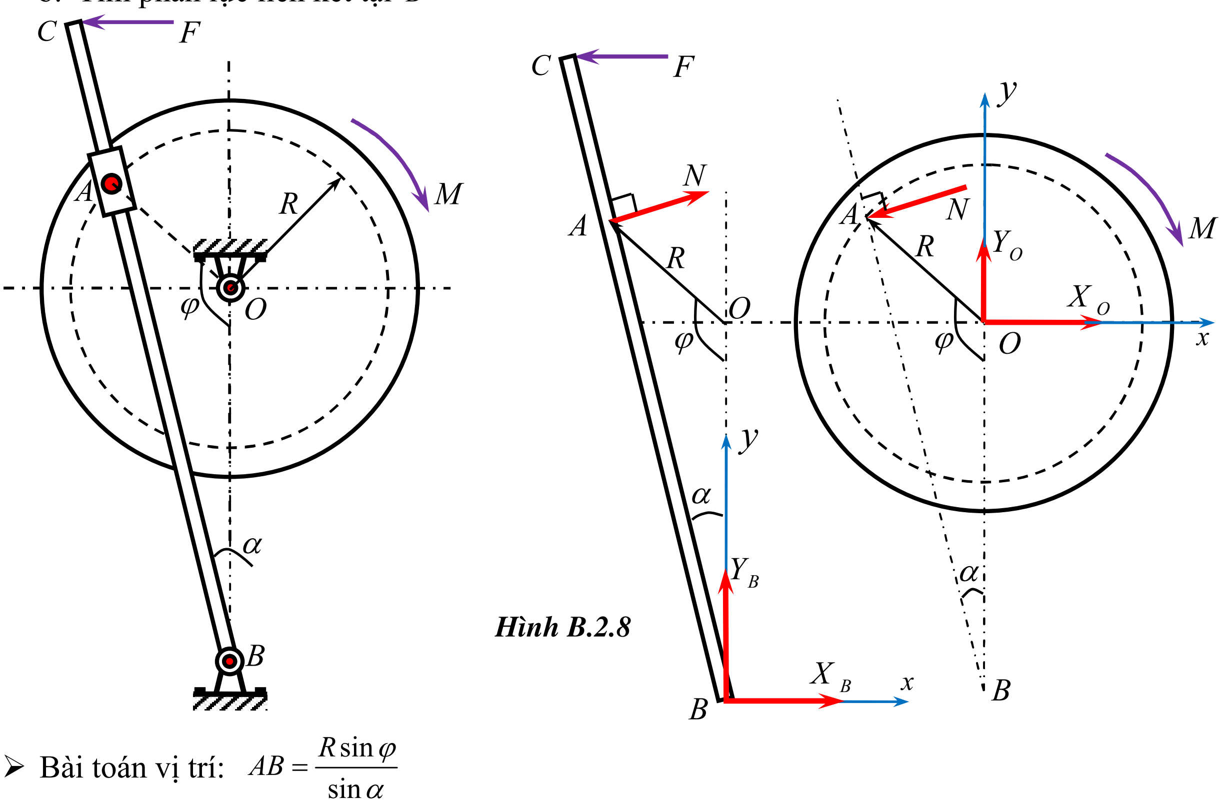
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.000000000\,a\,qa - \frac{2}{3}\,a\,Ne\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

$n1 := solve(\{R(1), R(2), M(3)\}, [Xd, Yd, Ne])$

$$[[Xd = -3.897114317\,qa,\ Yd = -2.250000000\,qa,\ Ne = 7.794228634\,qa]] \quad \textbf{(6)}$$

B2.8. Cho cơ cấu culít như ***hình B.2.7***. Bánh răng quay quanh trục cố định tại O làm cần BC lắc qua lại quanh trục cố định tại B. Bánh răng chịu tác dụng của ngẫu lực M, cần BC chịu tác dụng của lực F theo phương ngang đặt tại C. Biết $BC = l$, hệ cân bằng tại vị trí như hình vẽ. Bỏ qua ma sát và trọng lượng của các vật.

a. Tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu tại vị trí như hình vẽ.
b. Tìm phản lực liên kết tại B



Hình B.2.8

➢ Bài toán vị trí: $AB = \dfrac{R\sin\varphi}{\sin\alpha}$

➢ Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh BC.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_B=\begin{bmatrix}X_B\\Y_B\\0\end{bmatrix};F_A=\begin{bmatrix}N\cos\alpha\\N\sin\alpha\\0\end{bmatrix};F_C=\begin{bmatrix}-F\\0\\0\end{bmatrix};r_B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};r_A=\begin{bmatrix}-R\sin\varphi\\AB\cos\alpha\\0\end{bmatrix};r_C=\begin{bmatrix}-l\sin\alpha\\l\cos\alpha\\0\end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_B+\vec{F}_A+\vec{F}_C=0\\ \vec{M}_B=\vec{r}_B\wedge\vec{F}_B+\vec{r}_A\wedge\vec{F}_A+\vec{r}_C\wedge\vec{F}_C=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0,R(2)=0,M(3)=0)$ ta tìm được X_B,Y_B,N

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng bánh răng.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_O=\begin{bmatrix}X_O\\Y_O\\0\end{bmatrix};F_A=\begin{bmatrix}-N\cos\alpha\\-N\sin\alpha\\0\end{bmatrix};M_d=\begin{bmatrix}0\\0\\-M\end{bmatrix};r_O=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};r_A=\begin{bmatrix}-R\sin\varphi\\-R\cos\varphi\\0\end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_O+\vec{F}_A=0\\ \vec{M}_O=\vec{r}_O\wedge\vec{F}_O+\vec{r}_A\wedge\vec{F}_A+\vec{M}_d=0\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0,R(2)=0,M_O(3)=0)$ ta tìm được X_O,Y_O,M

- Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$$rb:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:ra:=\begin{bmatrix}-r\cdot\sin(\varphi)\\ \dfrac{r\cdot\sin(\varphi)}{\sin(\alpha)}\cdot\cos(\alpha)\\0\end{bmatrix}:rc:=\begin{bmatrix}-l\cdot\sin(\alpha)\\l\cdot\cos(\alpha)\\0\end{bmatrix}:$$

$$Fb:=\begin{bmatrix}Xb\\Yb\\0\end{bmatrix}:Fa:=\begin{bmatrix}N\cdot\cos(\alpha)\\N\cdot\sin(\alpha)\\0\end{bmatrix}:Fc:=\begin{bmatrix}-F\\0\\0\end{bmatrix}:$$

$R := Fb + Fa + Fc$

$$\begin{bmatrix}Xb+N\cos(\alpha)-F\\Yb+N\sin(\alpha)\\0\end{bmatrix}\quad\textbf{(1)}$$

$Mb := CrossProduct(rb, Fb) + CrossProduct(ra, Fa) + CrossProduct(rc, Fc)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\sin(\varphi)\,N\sin(\alpha) - \dfrac{r\sin(\varphi)\cos(\alpha)^2 N}{\sin(\alpha)} + l\cos(\alpha)\,F \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$n := solve(\{R(1), R(2), Mb(3)\}, [Xb, Yb, N])$

$$\left[\left[Xb = \frac{F\left(-l\cos(\alpha)^2\sin(\alpha) + r\sin(\varphi)\right)}{r\sin(\varphi)}, Yb = \frac{l\cos(\alpha)\,F\left(-1+\cos(\alpha)^2\right)}{r\sin(\varphi)}, N = \frac{l\cos(\alpha)\,F\sin(\alpha)}{r\sin(\varphi)}\right]\right] \quad \textbf{(3)}$$

$assign(n):$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} -r\cdot\sin(\varphi) \\ -r\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$Fo := \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ 0 \end{bmatrix} : Fa := \begin{bmatrix} -N\cdot\cos(\alpha) \\ -N\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Md := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix}$$

$R := Fo + Fa$

$$\begin{bmatrix} Xo - \dfrac{l\cos(\alpha)^2 F\sin(\alpha)}{r\sin(\varphi)} \\ Yo - \dfrac{l\cos(\alpha)\,F\sin(\alpha)^2}{r\sin(\varphi)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

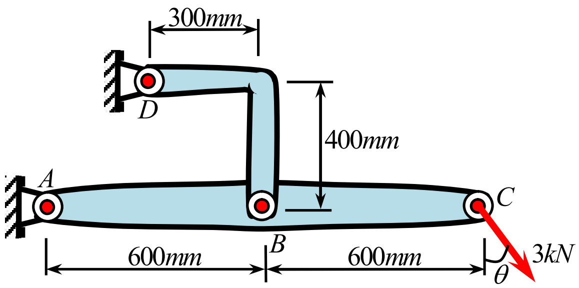
$Mo := CrossProduct(ro, Fo) + CrossProduct(ra, Fa) + Md$

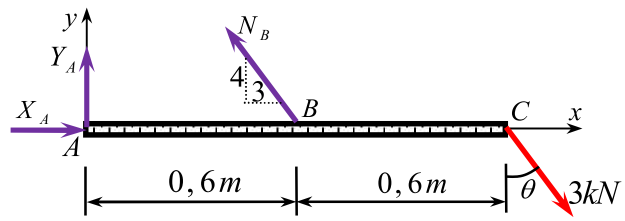
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l\cos(\alpha)\,F\sin(\alpha)^2 - \dfrac{\cos(\varphi)\,l\cos(\alpha)^2 F\sin(\alpha)}{\sin(\varphi)} - M \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

$n1 := solve(\{R(1), R(2), Mo(3)\}, [Xo, Yo, M])$

$$\left[\left[Xo = \frac{l\cos(\alpha)^2 F\sin(\alpha)}{r\sin(\varphi)}, Yo = \frac{l\cos(\alpha)\,F\sin(\alpha)^2}{r\sin(\varphi)}, M = -\frac{l\cos(\alpha)\,F\sin(\alpha)\left(-\sin(\alpha)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\cos(\alpha)\right)}{\sin(\varphi)}\right]\right] \quad \textbf{(6)}$$

B2.9. Cho kết cấu chịu tác dụng của lực có trị số $3kN$ với góc $\theta = \left[-90^0, 90^0\right]$ tại C. Cần thiết kế khớp A, B sao cho chúng có thể chịu được lực lớn nhất truyền qua khi góc θ thay đổi. Hãy vẽ sự thay đổi của lực cắt tại A, B theo góc θ và xác định trị số lớn nhất của chúng tương ứng với góc θ đó.





Hình B.2.9

- Giải phóng liên kết thanh AC như hình vẽ.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí:

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F_B = \begin{bmatrix} -N_B.3/5 \\ N_B.4/5 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad F_C = \begin{bmatrix} 3\sin\theta \\ -3\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_B = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_C = \begin{bmatrix} 1,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Phương trình cân bằng: $\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C = 0 \end{cases}$

  Giải hệ phương trình trên $\left(R_O(1) = 0, R_O(2) = 0, M_O(3) = 0\right)$ ta tìm được X_A, Y_A, N_B

- **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} -\frac{Nb \cdot 3}{5} \\ \frac{Nb \cdot 4}{5} \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 3 \cdot \sin(\theta) \\ -3 \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$R := Fa + Fb + Fc;$

$$\begin{bmatrix} Xa - \frac{3}{5}\,Nb + 3\sin(\theta) \\ Ya + \frac{4}{5}\,Nb - 3\cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$M := ra \mathbin{\&x} Fa + rb \mathbin{\&x} Fb + rc \mathbin{\&x} Fc;$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0. \\ 0.4800000000\, Nb - 3.6\cos(\theta) \end{array}\right]$$

$n := solve(\{R[1], R[2], M[3]\}, [Xa, Ya, Nb]);$

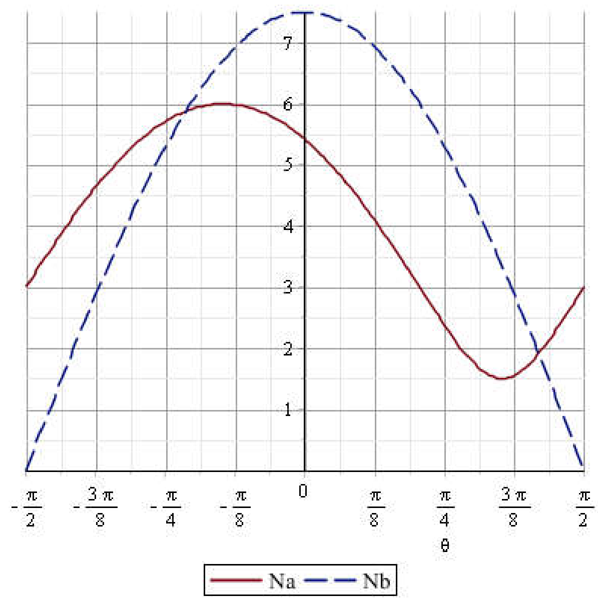
$$[[Xa = 4.500000000\cos(\theta) - 3.\sin(\theta), Ya = -3.\cos(\theta), Nb = 7.500000000\cos(\theta)]]$$

$assign(n):$

$Na := \mathrm{sqrt}(Xa^2 + Ya^2);$

$$\sqrt{(4.500000000\cos(\theta) - 3.\sin(\theta))^2 + 9.\cos(\theta)^2}$$

$plot\left([Na, Nb], \theta = -\frac{\pi}{2}..\frac{\pi}{2}, linestyle = [solid, dash], legend = ["Na", "Nb"], gridlines = true\right)$



$\theta 1 := solve(diff(Nb, \theta\$1), \theta)$

$$0.$$

$Nbmax := evalf(subs(\theta = \theta 1, Nb))$

$$7.500000000$$

$n := solve\left(\left\{diff(Na, \theta\$1), \theta \geq -\frac{Pi}{2}, \theta \leq \frac{Pi}{2}\right\}, \theta\right);$

$$\{\theta = -0.4636476090\}, \{\theta = 1.107148718\}$$

$Namax := eval(Na, n[1])$

$$6.000000000$$

B2.10. Cho hệ gồm hai thanh liên kết với nền thông qua bản lề tại A, gối tựa di động tại B, đồng thời liên kết với nhau nhờ bản lề tại C, hai thanh được giữ với nhau bởi thanh EF. Một khối trụ trọng lượng P được đặt hai thanh như hình vẽ. Xác định phản lực liên kết tại A, B, C và sức căng của dây. Khi tính bỏ qua trọng lượng các thanh.

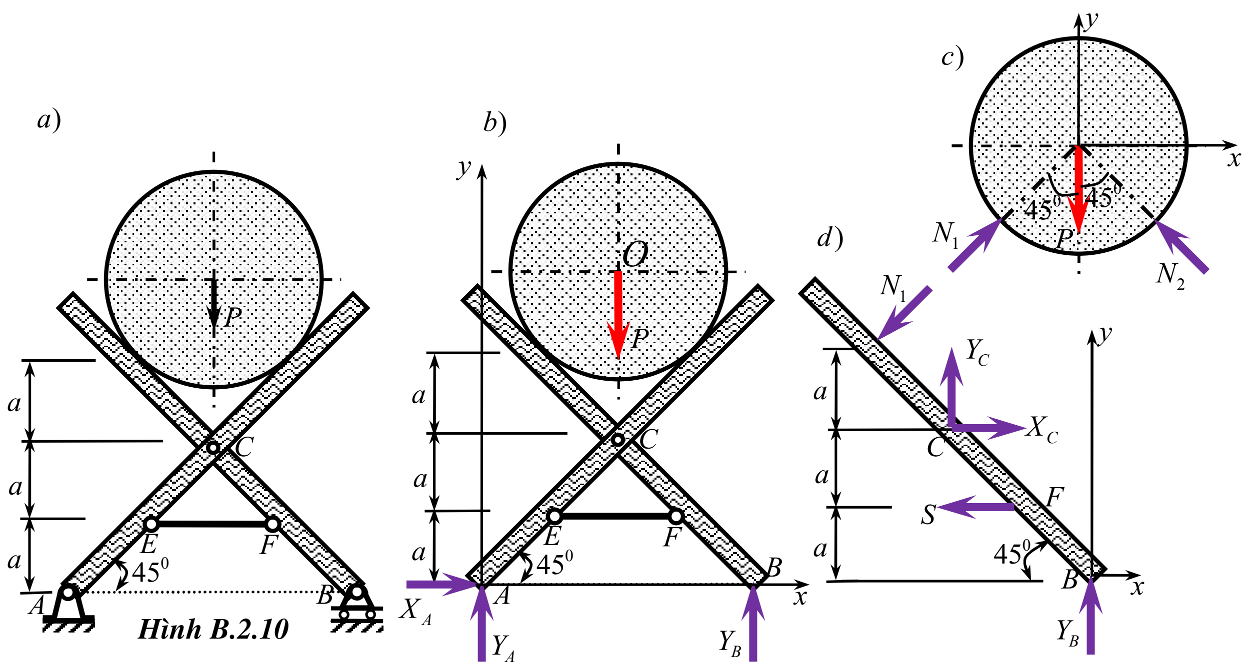
➢ Hóa rắn toàn hệ, giải phóng liên kết như ***hình B.2.10b***.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix};\quad F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{bmatrix};\quad F_O = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix};\quad r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad r_B = \begin{bmatrix} 4a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad r_O = \begin{bmatrix} 2a \\ 3a + R\cos 45^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình cân bằng: $\begin{cases} \vec{R}_A = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_O = 0 \\ \vec{M}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_O \wedge \vec{F}_O = 0 \end{cases}$ (10.1)

Giải hệ phương trình ***10.1*** $\left(R_A(1) = 0, R_A(2) = 0, M_A(3) = 0\right)$ ta tìm được X_A, Y_A, Y_B



Hình B.2.10

➢ Xét cân bằng khối trụ, giải phóng liên kết cho khối trụ như ***hình B.2.10c***. Đây là hệ lực phẳng đồng qui.

Các véc tơ lực: $R_{N_1} = \begin{bmatrix} N_1 \sin 45^0 \\ N_1 \cos 45^0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad R_{N_2} = \begin{bmatrix} -N_2 \sin 45^0 \\ N_2 \cos 45^0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad R_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}$

Ta có phương trình cân bằng: $\vec{R} = \vec{R}_{N_1} + \vec{R}_{N_2} + \vec{R}_P = 0$ (10.2)

Giải hệ phương trình ***10.2*** $\left(R(1) = 0, R(2) = 0\right)$ ta được N_1, N_2

➢ Xét cân bằng thanh BC, giải phóng liên kết cho thanh BC như ***hình B.2.10d***.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_B \\ 0 \end{bmatrix}; F_F = \begin{bmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{bmatrix}; F_{N_1} = \begin{bmatrix} -N_1 \sin 45^0 \\ -N_1 \cos 45^0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_F = \begin{bmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} -2a \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix}; r_{N_1} = \begin{bmatrix} -3a \\ 3a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình cân bằng: $\begin{cases} \vec{R}_B = \vec{F}_B + \vec{F}_F + \vec{F}_C + \vec{F}_{N_1} = 0 \\ \vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_F \wedge \vec{F}_F + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_{N_1} \wedge \vec{F}_{N_1} = 0 \end{cases}$ (10.3)

Giải hệ phương trình ***10.3*** $\left(R_B(1) = 0, R_B(2) = 0, M_B(3) = 0\right)$ ta tìm được X_C, Y_C, S

➢ **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} 0 \\ Yb \\ 0 \end{bmatrix} : Fo := \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 4 \cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ro := \begin{bmatrix} 2 \cdot a \\ 3 \cdot a + r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$RA := Fa + Fb + Fo;$

$$\begin{bmatrix} Xa \\ Ya + Yb - P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$MA := ra \ \&x \ Fa + rb \ \&x \ Fb + ro \ \&x \ Fo;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4\, a\, Yb - 2\, a\, P \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$n1 := solve(\{RA[1], RA[2], MA[3]\}, [Xa, Ya, Yb]);$

$$\left[\left[Xa = 0, Ya = \frac{1}{2} P, Yb = \frac{1}{2} P\right]\right] \quad \textbf{(3)}$$

$assign(n1):$

#---

$$Rn1 := \begin{bmatrix} \mathrm{N1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{N1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} : Rn2 := \begin{bmatrix} -\mathrm{N2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \mathrm{N2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} : Rp := \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$R := Rn1 + Rn2 + Rp$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,N1\,\sqrt{2} - \frac{1}{2}\,N2\,\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\,N1\,\sqrt{2} + \frac{1}{2}\,N2\,\sqrt{2} - P \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

$n2 := solve(\{R(1), R(2)\}, [N1, N2])$

$$\left[\left[N1 = \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,P, N2 = \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,P\right]\right] \qquad \textbf{(5)}$$

assign($n2$)

#---

$$Fb := \begin{bmatrix} 0 \\ Yb \\ 0 \end{bmatrix} : Ff := \begin{bmatrix} -S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} \mathrm{Xc} \\ Yc \\ 0 \end{bmatrix} : Fn1 := \begin{bmatrix} -\mathrm{N1}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\mathrm{N1}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$rb := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rf := \begin{bmatrix} -\mathrm{a} \\ \mathrm{a} \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} -2\cdot a \\ 2\cdot a \\ 0 \end{bmatrix} : rn1 := \begin{bmatrix} -3\cdot a \\ 3\cdot a \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$R := Fb + Ff + Fc + Fn1;$

$$\begin{bmatrix} -S + Xc - \frac{1}{2}\,P \\ Yc \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(6)}$$

$M := rb \,\&x\, Fb + rf \,\&x\, Ff + rc \,\&x\, Fc + rn1 \,\&x\, Fn1;$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\,S - 2\,a\,Yc - 2\,a\,Xc + 3\,a\,P \end{bmatrix} \qquad \textbf{(7)}$$

$n3 := solve(\{R[1], R[2], M[3]\}, [S, Xc, Yc]);$

$$\left[\left[S = 2\,P, Xc = \frac{5}{2}\,P, Yc = 0\right]\right] \qquad \textbf{(8)}$$

B2.11. Cho cần trục nâng hành như hình vẽ. Thùng hàng cần nâng có khối lượng $500kg$, cần OA có khối lượng $50kg$ đặt tại khối tâm G_1, chân cần trục DE có khối lượng $70kg$ đặt tại khối tâm G_2. Các kích thước cho trên hình có đơn vị là milimét. Khi tính bỏ qua khối lượng của pítông-xylanh BC.

a. Xác định phản lực liên kết tại khớp xoay O, ngàm D và lực nâng trong pítông-xylanh BC theo φ.

b. Vẽ đồ thị phản lực liên kết tại khớp xoay O, ngàm D và lực nâng trong pítông-xylanh BC theo φ với $\varphi = \left[-30^0, 60^0\right]$.

c. Xác định lực nâng lớn nhất trong pítông-xylanh BC khi $\varphi = \left[-30^0, 60^0\right]$.

- Hóa rắn toàn hệ, giải phóng liên kết tại ngàm A như ***hình B.2.11a***

  Các véctơ lực và các véctơ vị trí

$$F_D = \begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ 0 \end{bmatrix}; F_{G2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,7 \\ 0 \end{bmatrix}; F_{G1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}; M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_D \end{bmatrix}$$

$$r_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_{G2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_{G1} = \begin{bmatrix} -150-490\cos\varphi \\ 560+490\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} -150-1240\cos\varphi \\ 560+1240\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình cân bằng: $\begin{cases} \vec{R}_D = \vec{F}_D + \vec{F}_{G2} + \vec{F}_{G1} + \vec{F}_A = 0 \\ \vec{M}_D = \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{r}_{G2} \wedge \vec{F}_{G2} + \vec{r}_{G1} \wedge \vec{F}_{G1} + \vec{r}_A \wedge \vec{R}_A + \vec{M}_1 = 0 \end{cases}$ (11.1)

Giải hệ phương trình ***11.1*** $\left(R_D(1)=0, R_D(2)=0, M_D(3)=0\right)$ ta tìm được X_D, Y_D, M_D

- Xét cân bằng cần OA, giải phóng liên kết cho cần OA như ***hình B.2.11b***

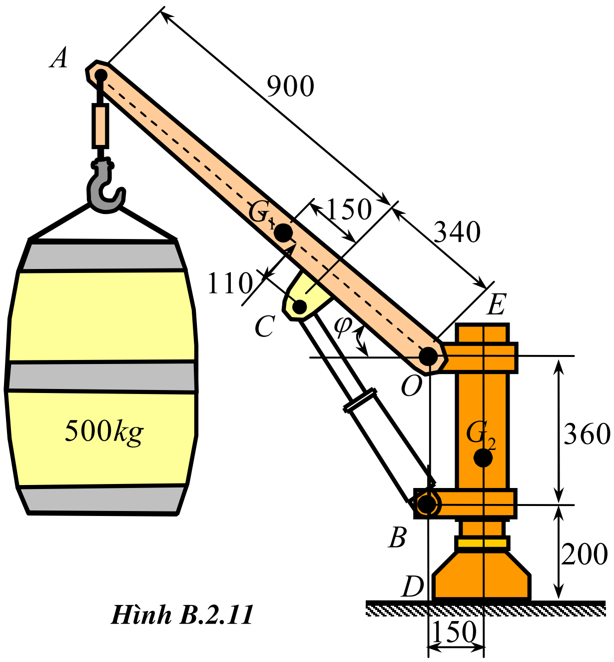
  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_O = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} S\cos\beta \\ S\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; F_{G1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \end{bmatrix}; F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}; \beta = arc\tan\left(\frac{360+340\sin\varphi-110\cos\varphi}{340\cos\varphi+110\sin\varphi}\right)$$

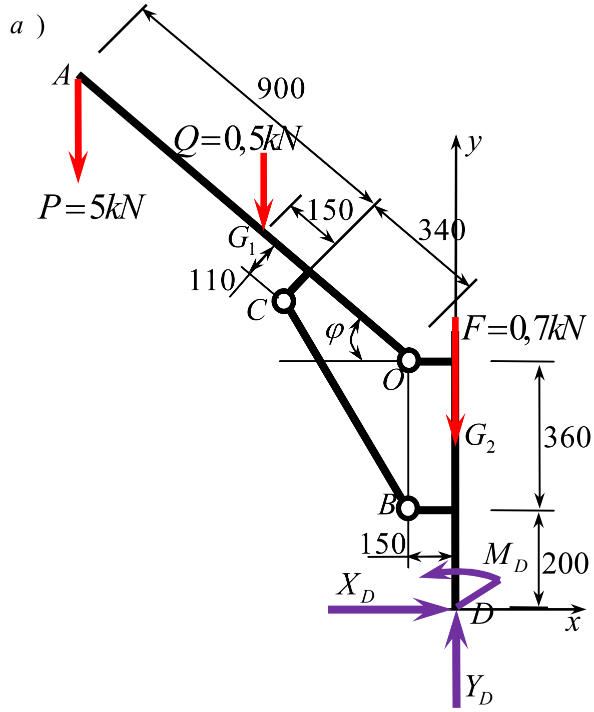
$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} 340\cos\varphi+110\sin\varphi \\ 340\sin\varphi-110\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_{G1} = \begin{bmatrix} 490\cos\varphi \\ 490\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 1240\cos\varphi \\ 1240\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

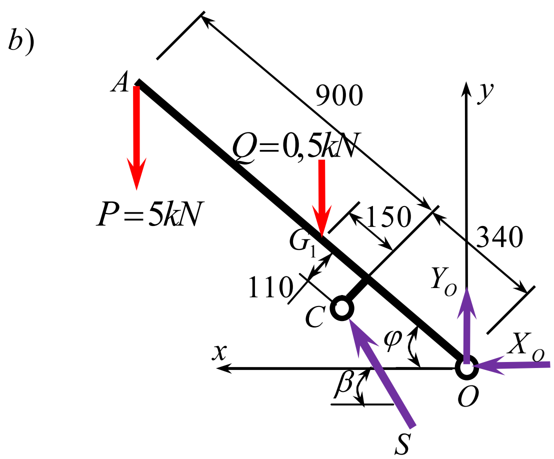
Phương trình cân bằng: $\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_O + \vec{F}_C + \vec{F}_{G1} + \vec{F}_A = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_O \wedge \vec{F}_O + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_{G1} \wedge \vec{F}_{G1} + \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A = 0 \end{cases}$ (11.2)

Giải hệ phương trình ***11.2*** $\left(R(1)=0, R(2)=0, M(3)=0\right)$ ta tìm được X_O, Y_O, S



Hình B.2.11





➢ **Chương trình Maple:**

restart;

Loading LinearAlgebra

$$Fd := \begin{bmatrix} Xd \\ Yd \\ 0 \end{bmatrix} : Fg2 := \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7 \\ 0 \end{bmatrix} : Fg1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} : Fa := \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} : M1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Md \end{bmatrix} :$$

$$rd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rg2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rg1 := \begin{bmatrix} -150 - 490\cdot\cos(\varphi) \\ 560 + 490\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} -150 - 1240\cdot\cos(\varphi) \\ 560 + 1240\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$RA := Fd + Fg1 + Fg2 + Fa :$

$MA := rd \,\&x\, Fd + rg1 \,\&x\, Fg1 + rg2 \,\&x\, Fg2 + ra \,\&x\, Fa + M1 :$

$n1 := solve(\{RA[1], RA[2], MA[3]\}, [Xd, Yd, Md]);$

$$[[Xd = 0., Yd = 6.200000000, Md = -825. - 6445.\cos(\varphi)]]$$

$assign(n1):$

#---

$$\beta := \arctan\left(\frac{360 + 340\cdot\sin(\varphi) - 110\cdot\cos(\varphi)}{340\cdot\cos(\varphi) + 110\cdot\sin(\varphi)}\right):$$

$$Fo := \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} S\cdot\cos(\beta) \\ S\cdot\sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} : Fg1 := \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} : Fa := \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 340\cdot\cos(\varphi) + 110\cdot\sin(\varphi) \\ 340\cdot\sin(\varphi) - 110\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rg1 := \begin{bmatrix} 490\cdot\cos(\varphi) \\ 490\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} 1240\cdot\cos(\varphi) \\ 1240\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$RO := Fo + Fc + Fg1 + Fa:$

$MO := ro \ \&x \ Fo + rc \ \&x \ Fc + rg1 \ \&x \ Fg1 + ra \ \&x \ Fa:$

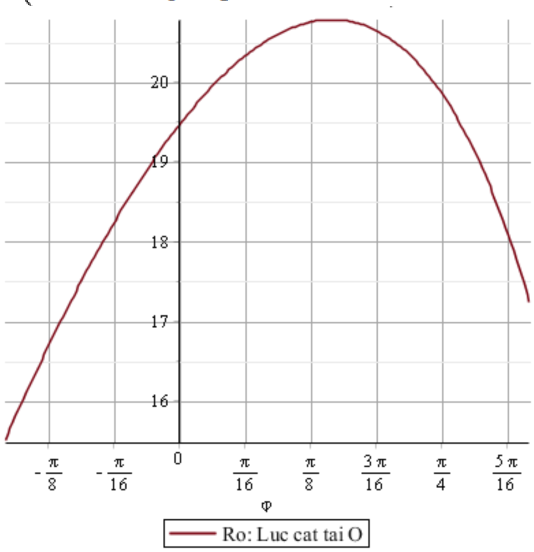
$n2 := combine(solve(\{RO[1], RO[2], MO[3]\}, [Xo, Yo, S]));$

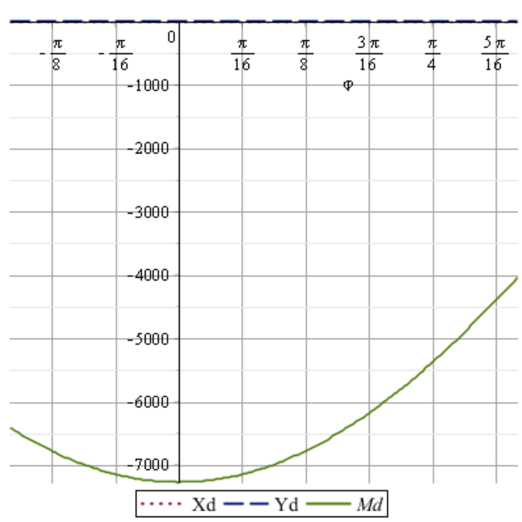
$$\left[\left[Xo = -17.90277778\cos(\varphi), Yo = \frac{1}{34.\cos(\varphi) + 11.\sin(\varphi)}(-304.3472222\sin(2\varphi) + 98.46527779\cos(2\varphi) + 98.46527779 + 60.50000000\sin(\varphi) - 457.5000000\cos(\varphi)), S = 17.90277778\sqrt{\frac{2573. + 2448.\sin(\varphi) - 792.\cos(\varphi)}{517.5000000\cos(2\varphi) + 638.5000000 + 374.\sin(2\varphi)}}\cos(\varphi)\right]\right]$$

$assign(n2):$

$NO := \text{sqrt}(Xo^2 + Yo^2):$

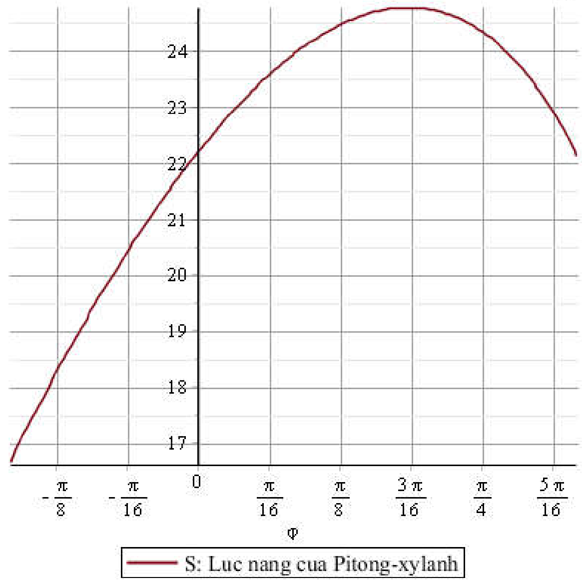
$$plot\left(NO, \varphi = -\frac{\pi}{6} .. \frac{\pi}{3}, legend = \text{"Ro: Luc cat tai O"}, gridlines = true\right)$$





$plot\left([Xd, Yd, Md], \varphi = -\frac{\pi}{6} .. \frac{\pi}{3}, linestyle = [dot, dash, solid], legend = [\text{"Xd"}, \text{"Yd"}, 'Md'], gridlines = true\right)$

$plot\left(S, \varphi = -\frac{\pi}{6} .. \frac{\pi}{3}, legend = \text{"S: Luc nang cua Pitong-xylanh"}, gridlines = true\right)$



$evalf\left(subs\left(\varphi = \frac{\pi}{6}, [Xd, Yd, Md, S, Xo, Yo]\right)\right)$

$\varphi 1 := solve\left(\left\{diff(S, \varphi\$1), \varphi \geq -\frac{Pi}{6}, \varphi \leq \frac{Pi}{3}\right\}, \varphi\right)$

$$\{\varphi = 0.5800311515\}$$

$assign(\varphi 1)$:

$Smax := eval(S, \varphi = \varphi 1)$

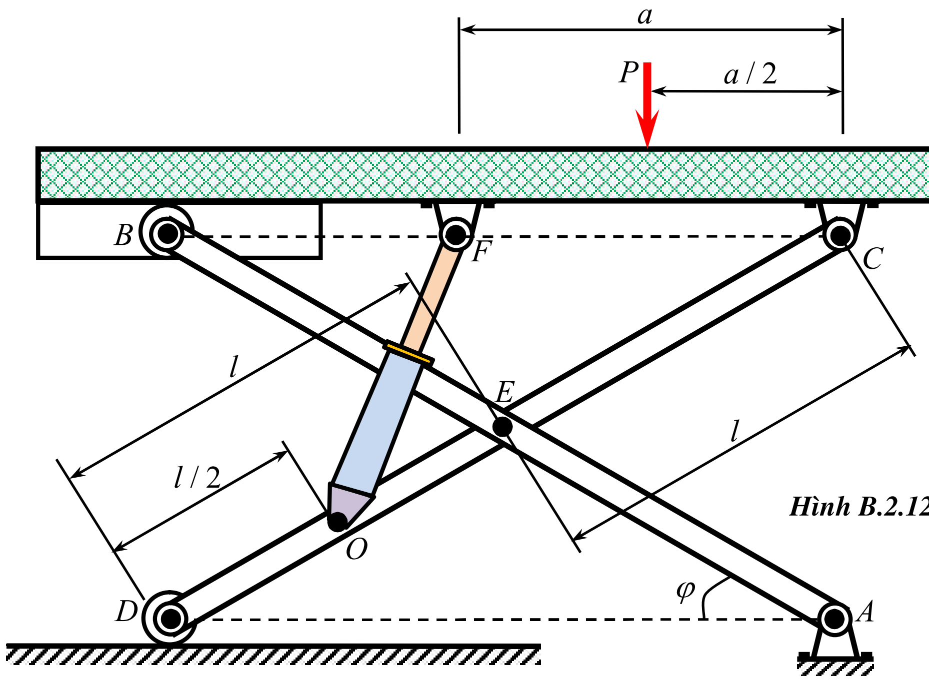
$$24.77603824$$

B2.12. Cho mô hình của bàn nâng như hình vẽ. Khi tính bỏ qua trọng lượng của các chi tiết trong hệ. Vật cần nâng có khối lượng m. Cho: $l = 1m, a = 0,866m, m = 500kg$.

a. Xác định lực nâng trong pítông-xylanh OF, phản lực liên kết tại A, B, C, D, E theo góc φ.

b. Vẽ đồ thị của lực nâng trong pítông-xylanh OF theo φ với $\varphi = \left[10^0, 60^0\right]$.

c. Xác định lực nâng trong pítông-xylanh OF, phản lực liên kết tại A, B, C, D, E với $\varphi = 30^0$.



Hình B.2.12

➢ Hóa rắn toàn hệ, giải phóng liên kết và xét cân bằng bàn nâng như ***hình a***

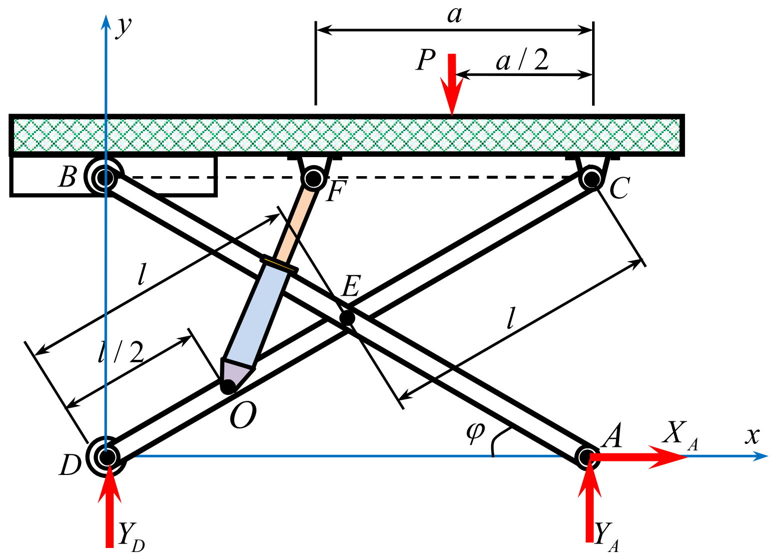
Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_D=\begin{bmatrix}0\\Y_D\\0\end{bmatrix};F_A=\begin{bmatrix}X_A\\Y_A\\0\end{bmatrix};F_P=\begin{bmatrix}0\\-P\\0\end{bmatrix};r_D=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};r_A=\begin{bmatrix}2l\cos\varphi\\0\\0\end{bmatrix};r_P=\begin{bmatrix}2l\cos\varphi-a/2\\2l\sin\varphi\\0\end{bmatrix}$$

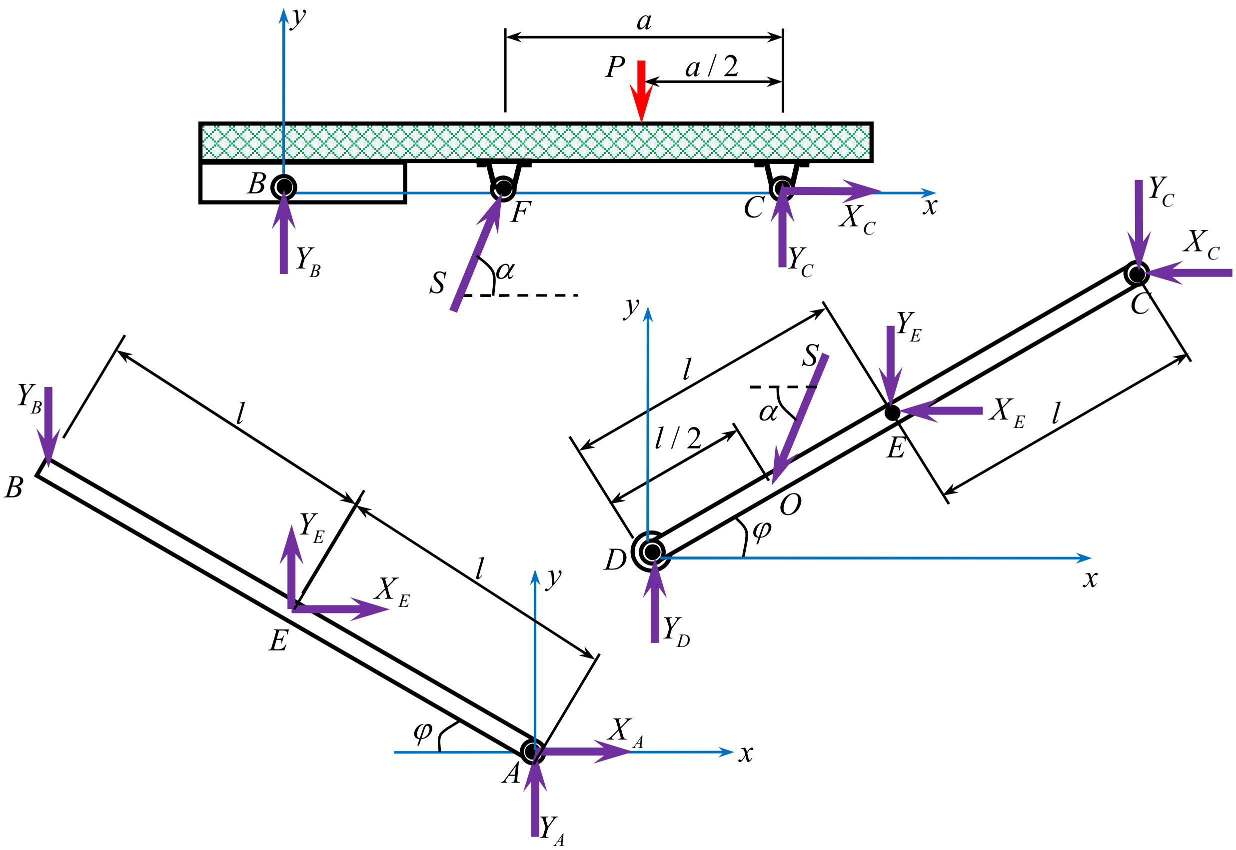
Phương trình cân bằng: $\begin{cases}\vec{R}=\vec{F}_D+\vec{F}_A+\vec{F}_P=0\\\vec{M}=\vec{r}_D\wedge\vec{F}_D+\vec{r}_A\wedge\vec{F}_A+\vec{r}_P\wedge\vec{F}_P=0\end{cases}$ (12.1)

Giải hệ phương trình ***12.1*** $\left(R(1)=0,R(2)=0,M(3)=0\right)$ ta tìm được X_A,Y_A,Y_D

a)



➢ Xét cân bằng thanh AB như hình vẽ.



Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_E = \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y_B \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_E = \begin{bmatrix} -l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} -2l\cos\varphi \\ 2l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Phương trình cân bằng: $$\begin{cases} \vec{R}_A = \vec{F}_A + \vec{F}_E + \vec{F}_B = 0 \\ \vec{M}_A = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_E \wedge \vec{F}_E + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B = 0 \end{cases} \quad (12.2)$$

Giải hệ phương trình ***12.2*** $\left(R_A(1)=0, R_A(2)=0, M_A(3)=0\right)$ ta tìm được X_E, Y_E, Y_B

- Xét cân bằng thanh CD như hình vẽ.

  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_D \\ 0 \end{bmatrix}; F_O = \begin{bmatrix} -S\cos\alpha \\ -S\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; F_E = \begin{bmatrix} -X_E \\ -Y_E \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} -X_C \\ -Y_C \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$r_D=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};r_O=\begin{bmatrix}\frac{l}{2}\cos\varphi\\ \frac{l}{2}\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix};r_E=\begin{bmatrix}l\cos\varphi\\ l\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix};r_C=\begin{bmatrix}2l\cos\varphi\\ 2l\sin\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

Phương trình cân bằng: $\begin{cases}\vec{R}_D=\vec{F}_D+\vec{F}_O+\vec{F}_E+\vec{F}_C=0\\ \vec{M}_D=\vec{r}_D\wedge\vec{F}_D+\vec{r}_O\wedge\vec{F}_O+\vec{r}_E\wedge\vec{F}_E+\vec{r}_C\wedge\vec{F}_C=0\end{cases}$ (12.3)

Giải hệ phương trình ***12.3*** $\left(R_D(1)=0,R_D(2)=0,M_D(3)=0\right)$ ta tìm được X_C,Y_C,S

➢ Bài toán vị trí: $\begin{cases}2l\cos\varphi-a=\frac{l}{2}\cos\varphi+OF\cos\alpha\\ 2l\sin\varphi=\frac{l}{2}\sin\varphi+OF\sin\alpha\end{cases}$

➢ Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$\#a:=0.866:\varphi:=\frac{\pi}{6}:l:=1:m:=500:g:=9.81:P:=m\cdot g:$

$pt1:=2\cdot l\cdot\cos(\varphi)-a-\frac{l}{2}\cdot\cos(\varphi)-OF\cdot\cos(\alpha):$

$pt2:=2\cdot l\cdot\sin(\varphi)-\frac{l}{2}\cdot\sin(\varphi)-OF\cdot\sin(\alpha):$

$n1:=solve(\{pt1,pt2\},[OF,\alpha]):$

$assign(n1[1]):$

$Fd:=\begin{bmatrix}0\\Yd\\0\end{bmatrix}:Fa:=\begin{bmatrix}Xa\\Ya\\0\end{bmatrix}:Fp:=\begin{bmatrix}0\\-P\\0\end{bmatrix}:$

$rd:=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}:ra:=\begin{bmatrix}2\cdot l\cdot\cos(\varphi)\\0\\0\end{bmatrix}:rp:=\begin{bmatrix}2\cdot l\cdot\cos(\varphi)-a\\2\cdot l\cdot\sin(\varphi)\\0\end{bmatrix}:$

$R := Fd + Fa + Fp :$
$M := rd \,\&x\, Fd + ra \,\&x\, Fa + rp \,\&x\, Fp :$
$n2 := solve(\{R(1), R(2), M(3)\}, [Xa, Ya, Yd])$

$$\left[\left[Xa = 0, Ya = \frac{1}{2}\,\frac{(2\,l\cos(\varphi) - a)\,P}{l\cos(\varphi)}, Yd = \frac{1}{2}\,\frac{P\,a}{l\cos(\varphi)}\right]\right] \quad \textbf{(1)}$$

$assign(\mathrm{n2}) :$
#---

$Fa := \begin{bmatrix} \mathrm{Xa} \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fe := \begin{bmatrix} \mathrm{Xe} \\ \mathrm{Ye} \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{Yb} \\ 0 \end{bmatrix} :$

$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : re := \begin{bmatrix} -1\cdot\cos(\varphi) \\ 1\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} -2\cdot l\cdot\cos(\varphi) \\ 2\cdot l\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Ra := Fa + Fe + Fb :$
$Ma := ra \,\&x\, Fa + re \,\&x\, Fe + rb \,\&x\, Fb :$
$n3 := solve(\{Ra(1), Ra(2), Ma(3)\}, [Xe, Ye, Yb])$

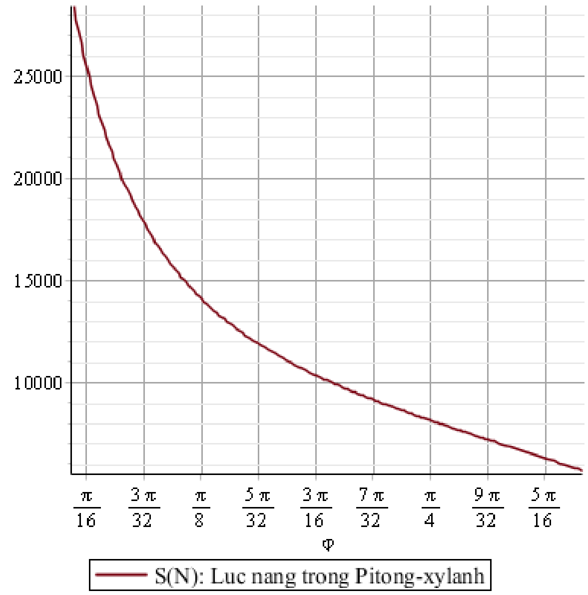
$$\left[\left[Xe = 0, Ye = \frac{P\,(-2\,l\cos(\varphi) + a)}{l\cos(\varphi)}, Yb = \frac{1}{2}\,\frac{P\,(-2\,l\cos(\varphi) + a)}{l\cos(\varphi)}\right]\right] \quad \textbf{(2)}$$

$assign(\mathrm{n3}) :$
#---

$Fd := \begin{bmatrix} 0 \\ Yd \\ 0 \end{bmatrix} : Fo := \begin{bmatrix} -S\cdot\cos(\alpha) \\ -S\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Fe := \begin{bmatrix} -Xe \\ -\mathrm{Ye} \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} -Xc \\ -\mathrm{Yc} \\ 0 \end{bmatrix} :$

$rd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ro := \begin{bmatrix} \frac{l}{2}\cdot\cos\left(\varphi\right) \\ \frac{l}{2}\cdot\sin\left(\varphi\right) \\ 0 \end{bmatrix} : re := \begin{bmatrix} l\cdot\cos(\varphi) \\ l\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 2\cdot l\cdot\cos(\varphi) \\ 2\cdot l\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Rd := Fd + Fo + Fe + Fc :$
$Md := rd \,\&x\, Fd + ro \,\&x\, Fo + re \,\&x\, Fe + rc \,\&x\, Fc :$
$n4 := solve(\{Rd(1), Rd(2), Md(3)\}, [Xc, Yc, S]) :$
$assign(\mathrm{n4}) :$
#--ve do thi luc nang cua pitong-xylanh
$a := 0.866 : l := 1 : m := 500 : g := 9.81 : P := m\cdot g :$
$plot\left(S, \varphi = \frac{\pi}{18} .. \frac{\pi}{3}, legend = \text{"S(N)"}\right)$

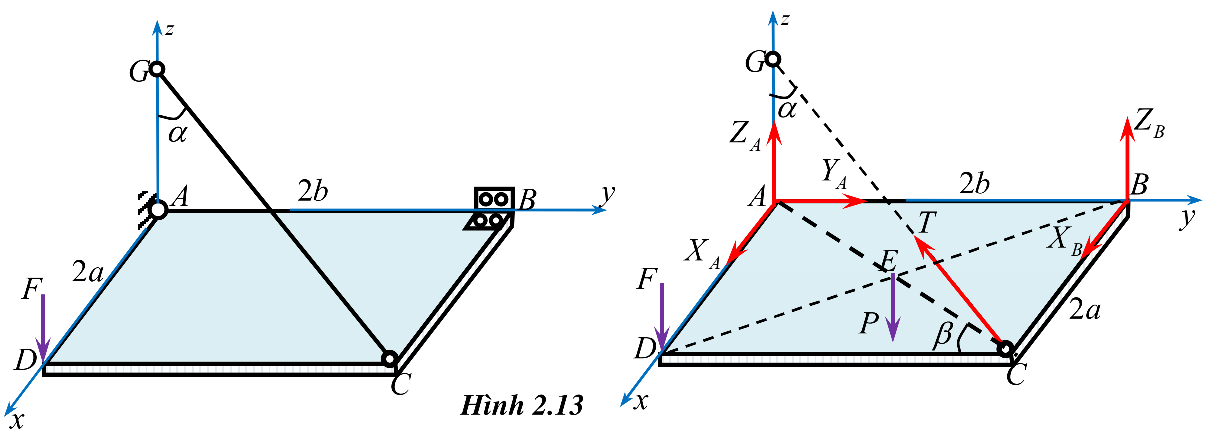


$$S1 := evalf\left(subs\left(\varphi = \frac{\pi}{6}, S\right)\right)$$

$$11328.11072 \qquad \textbf{(3)}$$

B2.13. Tấm $ABCD$ hình chữ nhật đồng chất có trọng lượng P được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ gối cầu tại A, bản lề tại B và dây CG. Cho $AD = BC = 2a; AB = CD = 2b$. Các đại lượng $\alpha; P; F$ đã biết. Xác định phản lực tại A, B và lực căng trong dây CG.

Áp dụng số với $P = 2000; F = 1000; a = 10; b = 15; \alpha = 60^0$.



Hình 2.13

- Giải phóng liên kết như hình vẽ.
  Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{bmatrix}; \; F_C = \begin{bmatrix} -T\sin\alpha\sin\beta \\ -T\sin\alpha\cos\beta \\ T.\cos\alpha \end{bmatrix}; \;\; F_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}; F_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}; \;\; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$r_C = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}; \; \beta = a\tan\frac{a}{b}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_E + \vec{F}_D = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_E \wedge \vec{F}_E + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_O(1)=0, R_O(2)=0, R_O(3)=0, M_O(1)=0, M_O(2)=0, M_O(3)=0)$ ta tìm được $X_A, Y_A, Z_A, X_B, Z_B, T$

- **Chương trình Maple:**

restart

Loading LinearAlgebra

$$\beta := \arctan\left(\frac{a}{b}\right):$$

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ Za \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} Xb \\ 0 \\ Zb \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} -T\cdot\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \\ -T\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \\ T\cdot\cos(\alpha) \end{bmatrix} : Fe := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{bmatrix}:$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cdot b \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 2\cdot a \\ 2\cdot b \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 2\cdot a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : re := \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$R := Fa + Fb + Fc + Fe + Fd$$

$$\begin{bmatrix} Xa + Xb - \dfrac{T\sin(\alpha)\, a}{b\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}} \\ Ya - \dfrac{T\sin(\alpha)}{\sqrt{1+\dfrac{a^2}{b^2}}} \\ Za + Zb + T\cos(\alpha) - P - F \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$$M := ra \,\&x\, Fa + rb \,\&x\, Fb + rc \,\&x\, Fc + re \,\&x\, Fe + rd \,\&x\, Fd$$

$$\begin{bmatrix} 2\,b\,Zb+2\,b\,T\cos(\alpha)-b\,P \\ -2\,a\,T\cos(\alpha)+a\,P+2\,a\,F \\ -2\,b\,Xb \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

$n := solve(\{R(1), R(2), R(3), M(1), M(2), M(3)\}, [Xa, Ya, Za, Xb, Zb, T])$

$$\left[\left[Xa=\frac{1}{2}\,\frac{(P+2\,F)\,\sin(\alpha)\,a}{b\,\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2}}\,\cos(\alpha)},\, Ya=\frac{1}{2}\,\frac{(P+2\,F)\,\sin(\alpha)}{\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2}}\,\cos(\alpha)},\, Za=\frac{1}{2}\,P+F,\, Xb=0,\, Zb=-F,\, T=\frac{1}{2}\,\frac{P+2\,F}{\cos(\alpha)}\right]\right] \qquad \textbf{(3)}$$

$\#assign(n):$

$P := 2000 : F := 1000 : a := 10 : b := 15 : \alpha := \frac{\pi}{3} :$

$evalf(n)$

$$[[Xa=1921.537847,\, Ya=2882.306768,\, Za=2000.,\, Xb=0.,\, Zb=-1000.,\, T=4000.]] \qquad \textbf{(4)}$$

B2.14. Tấm $ABCD$ hình chữ nhật đồng chất có trọng lượng $P=1000N$ được giữ cân bằng ở vị trí tạo với mặt phẳng ngang một góc $\alpha=20^0$ nhờ gối cầu tại A, bản lề tại B và thanh chống DE. Cho $AD=BC=2a=2m; AB=CD=2b=3m;$

a. Xác định phản lực liên kết tại A, B và lực kéo-nén trong thanh DE phụ thuộc β.

b. Vẽ $S(\beta)$, với $\beta\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{9\pi}{12}\right]$. Xác định S khi $\beta=1rad$; $\beta=1,8rad$; $\beta=2,1rad$; Nhận xét trạng thái kéo-nén của thanh DE.

c. Khi $\beta=\frac{\pi}{4}$, xác định phản lực liên kết tại A, D và lực kéo-nén trong thanh DE.

➢ Giải phóng liên kết như hình vẽ.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

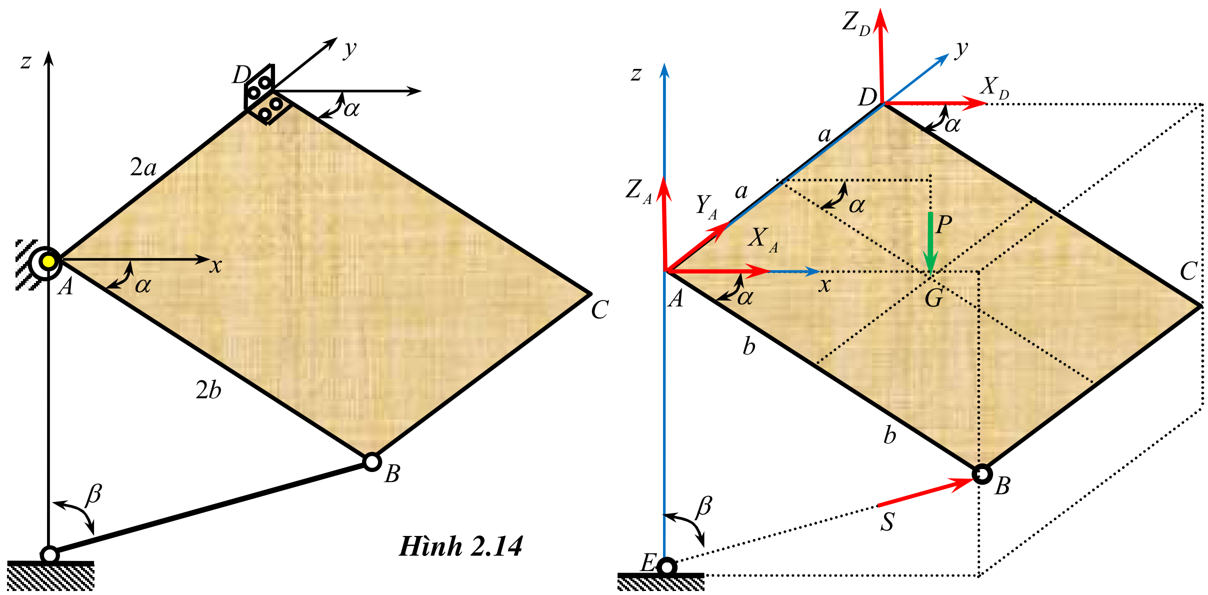
$$F_A=\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix};\quad F_D=\begin{bmatrix} X_D \\ 0 \\ Z_D \end{bmatrix};\quad F_B=\begin{bmatrix} S\sin\beta \\ 0 \\ S\cos\beta \end{bmatrix};\quad F_G=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

$$r_A=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\quad r_D=\begin{bmatrix} 0 \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix};\quad r_B=\begin{bmatrix} 2b\cos\alpha \\ 0 \\ -2b\sin\alpha \end{bmatrix};\quad r_G=\begin{bmatrix} b\cos\alpha \\ a \\ -b\sin\alpha \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_A=\vec{F}_A+\vec{F}_D+\vec{F}_B+\vec{F}_G=0 \\ \vec{M}_A=\vec{r}_A\wedge\vec{F}_A+\vec{r}_D\wedge\vec{F}_D+\vec{r}_B\wedge\vec{F}_B+\vec{r}_G\wedge\vec{F}_G=0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_A(1)=0, R_A(2)=0, R_A(3)=0, M_A(1)=0, M_A(2)=0, M_A(3)=0)$ ta tìm được $X_A, Y_A, Z_A, X_D, Z_D, S$



Hình 2.14

➢ **Chương trình Maple:**

```
restart :
Loading LinearAlgebra
```

$P := 1000 : \alpha := \frac{20\cdot\pi}{180} : a := 1 : b := 1.5 :$

$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ Za \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} Xd \\ 0 \\ Zd \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} S\cdot\sin(\beta) \\ 0 \\ S\cdot\cos(\beta) \end{bmatrix} : Fg := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} :$

$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 0 \\ 2\cdot a \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 2\cdot b\cdot\cos(\alpha) \\ 0 \\ -2\cdot b\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix} : rg := \begin{bmatrix} b\cdot\cos(\alpha) \\ a \\ -b\cdot\sin(\alpha) \end{bmatrix} :$

$R := Fa + Fd + Fb + Fg$

$$\begin{bmatrix} Xa + Xd + S\sin(\beta) \\ Ya \\ Za + Zd + S\cos(\beta) - 1000 \end{bmatrix}$$

$M := ra \ \&x\ Fa + rd \ \&x\ Fd + rb \ \&x\ Fb + rg \ \&x\ Fg$

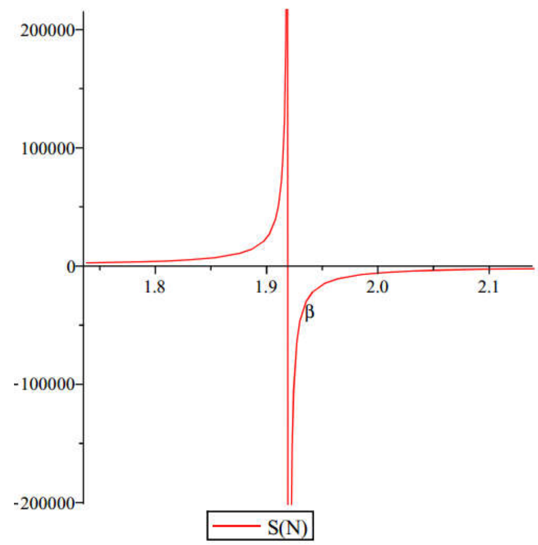
$$\begin{bmatrix} 2\,Zd - 1000 \\ -3.0\sin\left(\frac{1}{9}\pi\right) S\sin(\beta) - 3.0\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right) S\cos(\beta) + 1500.0\cos\left(\frac{1}{9}\pi\right) \\ -2\,Xd \end{bmatrix}$$

$n := solve(\{R(1), R(2), R(3), M(1), M(2), M(3)\}, [Xa, Ya, Za, Xd, Zd, S])$

$$\left[\left[Xa = -\frac{469.8463104 \sin(\beta)}{0.3420201433 \sin(\beta) + 0.9396926208 \cos(\beta)}, Ya = 0., Za = \frac{171.0100717 \sin(\beta)}{0.3420201433 \sin(\beta) + 0.9396926208 \cos(\beta)}, Xd = 0., Zd = 500., S = \frac{469.8463104}{0.3420201433 \sin(\beta) + 0.9396926208 \cos(\beta)}\right]\right]$$

$assign(n):$

$plot\left(S, \beta = \frac{\pi}{12} .. \frac{9 \cdot \pi}{12}, legend = "S(N)"\right)$



$S1 := evalf(subs(\beta = 1, S))$

$$590.6167322 \quad (4)$$

if S1 < 0 **then** *print*(*thanh chiu keo*) **else** *print*(*thanh chiu nen*) **end if**

thanh chiu nen **(5)**

$S2 := evalf(subs(\beta = 1.8, S))$

$$3929.289892 \quad (6)$$

if S2 < 0 **then** *print*(*thanh chiu keo*) **else** *print*(*thanh chiu nen*) **end if**

thanh chiu nen **(7)**

$S3 := evalf(subs(\beta = 2.1, S))$

$$-2622.419950 \quad (8)$$

if S3 < 0 **then** *print*(*thanh chiu keo*) **else** *print*(*thanh chiu nen*) **end if**

thanh chiu keo **(9)**

$Xa := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{Pi}{4}, Xa\right)\right)$

$$-366.5769146 \quad (10)$$

$Ya := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{\pi}{4}, Ya\right)\right)$

$$0. \qquad (11)$$

$Xa := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{\pi}{4}, Za\right)\right)$

$$133.4230855 \qquad (12)$$

$Xd := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{\pi}{4}, Xd\right)\right)$

$$0. \qquad (13)$$

$Zd := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{\pi}{4}, Zd\right)\right)$

$$500. \qquad (14)$$

$S := evalf\left(subs\left(\beta = \frac{\pi}{4}, S\right)\right)$

$$518.4180442 \qquad (15)$$

B2.15. Một trục kéo AB nằm ngang và được đỡ trên hai ổ trục (bản lề trụ) tại A, D. Hai nhánh đai tác dụng lên trục tời qua puli có đương kính $D = 0,6m$ các lực kéo $T_1 = 5kN; T_2 = 2kN$ theo phương ngang, vật được kéo có trọng lượng $P = 5kN$ nhờ tang tời có đường kính $d = 0,3m$. Trục tời còn chịu tác dụng của ngẫu lực cản có mômen M. Xác định ngẫu lực cản M cần thiết để trục kéo cân bằng và xác định các phản lực tại ổ trục A, D. Khi tính bỏ qua ma sát.

- Giải phóng liên kết như hình vẽ.

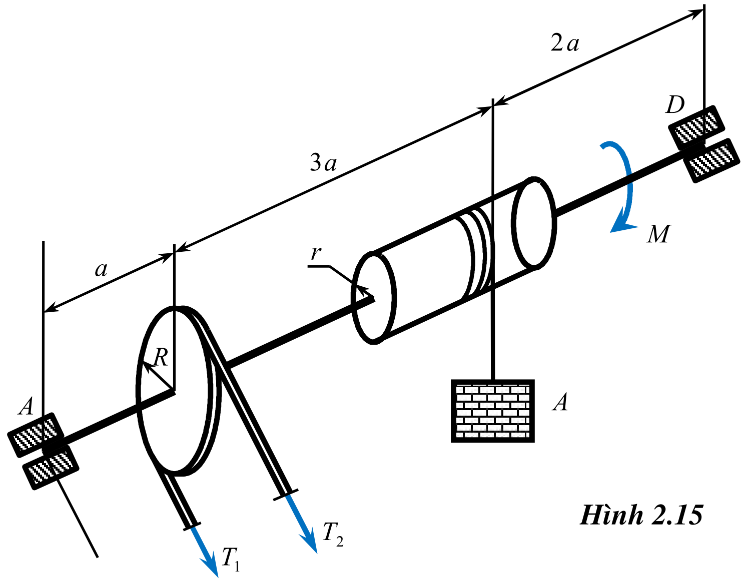
Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ 0 \\ Z_A \end{bmatrix}; F_D = \begin{bmatrix} X_D \\ 0 \\ Z_D \end{bmatrix}; F_{B1} = \begin{bmatrix} T_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_{B2} = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}; M_C = \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix}$$

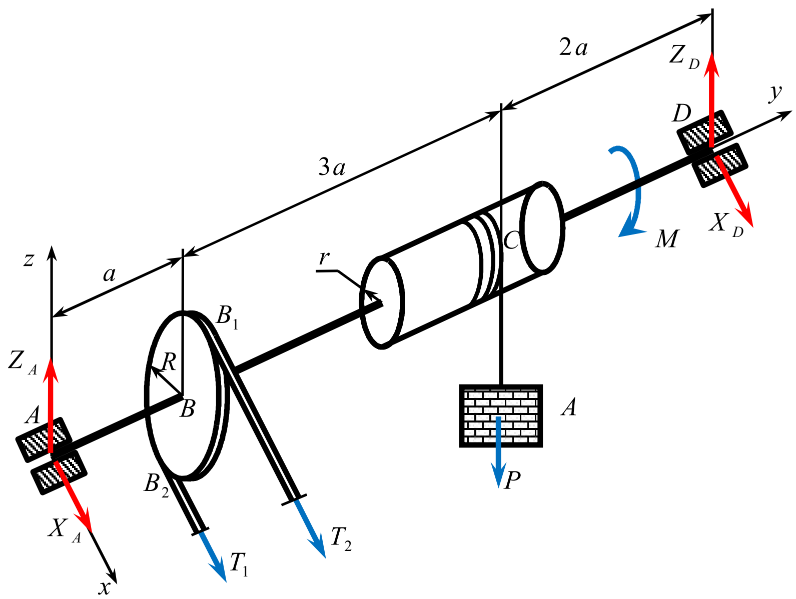
$$r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_{B1} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ D/2 \end{bmatrix}; \quad r_{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -D/2 \end{bmatrix}; \quad r_C = \begin{bmatrix} d/2 \\ 4a \\ 0 \end{bmatrix}; \quad r_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 6a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_A = \vec{F}_A + \vec{F}_D + \vec{F}_{B1} + \vec{F}_{B2} + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M} = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{r}_{B1} \wedge \vec{F}_{B1} + \vec{r}_{B2} \wedge \vec{F}_{B2} + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{M}_C = 0 \end{cases}$$



Hình 2.15



Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0, R(3)=0, M(1)=0, M(2)=0, M(3)=0)$ ta tìm được X_A, Z_A, X_D, Z_D, M

➢ Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$T1 := 5 : T2 := 2 : R := 0.3 : r := 0.15 : P := 5 :$

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ 0 \\ Za \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} Xd \\ 0 \\ Zd \end{bmatrix} : Fb1 := \begin{bmatrix} T2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : Fb2 := \begin{bmatrix} T1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} : Mc := \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb1 := \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ R \end{bmatrix} : rb2 := \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ -R \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} r \\ 4 \cdot a \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \cdot a \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Ra := Fa + Fb1 + Fb2 + Fc + Fd$

$$\begin{bmatrix} Xa + 7 + Xd \\ 0 \\ Za - 5 + Zd \end{bmatrix} \quad (1)$$

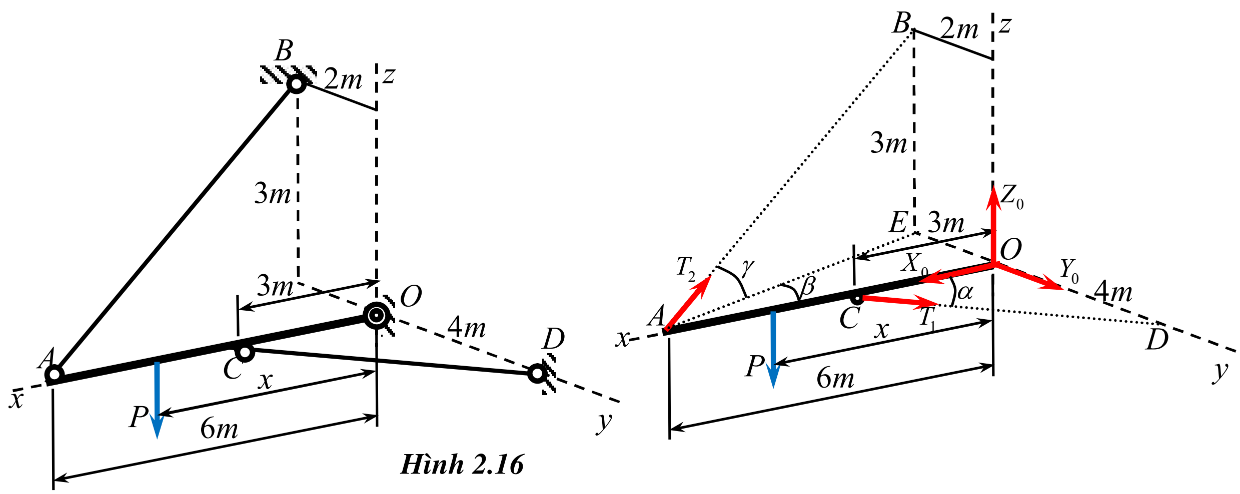
$Ma := ra \,\&x\, Fa + rb1 \,\&x\, Fb1 + rb2 \,\&x\, Fb2 + rc \,\&x\, Fc + rd \,\&x\, Fd + Mc$

$$\begin{bmatrix} -20\,a + 6\,a\,Zd \\ -0.15 + M \\ -7\,a - 6\,a\,Xd \end{bmatrix} \quad (2)$$

$n := solve(\{Ra(1), Ra(3), Ma(1), Ma(2), Ma(3)\}, [Xa, Za, Xd, Zd, M])$

$[[Xa = -5.833333333, Za = 1.666666667, Xd = -1.166666667, Zd = 3.333333333, M = 0.1500000000]]$ **(3)**

B2.16. Thanh OA được giữ nằm ngang nhờ liên kết gối cầu tại O và hai dây cáp AB, CD như hình 2.16. Xác định phản lực liên kết tại O và lực căng trong hai dây cáp AB, CD. Vẽ đồ thị biểu diễn sự thay đổi của phản lực tại O theo x (vị trí của điểm đặt lực) với $x = [0,2;\ 5,8]m$. Cho $P = 12kN$.



Hình 2.16

- Giải phóng liên kết như hình vẽ.

Ta có: $\alpha = \arctan(4/3); \beta = \arctan(2/6); AE = \sqrt{2^2 + 6^2}; \gamma = \arctan(3/AE)$

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_O = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ Z_O \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} -T_1 \cos\alpha \\ T_1 \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; F_A = \begin{bmatrix} -T_2 \cos\gamma \cos\beta \\ -T_2 \cos\gamma \sin\beta \\ T_2 \sin\gamma \end{bmatrix}; F_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}; r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$r_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_P = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_O + \vec{F}_C + \vec{F}_A + \vec{F}_P = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_O \wedge \vec{F}_O + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_P \wedge \vec{F}_P = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R(1)=0, R(2)=0, R(3)=0, M(1)=0, M(3)=0)$ ta tìm được X_O, Y_O, Z_O, T_1, T_2.

➢ **Chương trình Maple:**

restart :

Loading LinearAlgebra

$\alpha := \arctan\left(\frac{4}{3}\right) : \beta := \arctan\left(\frac{2}{6}\right) : AE := \mathrm{sqrt}(2^2 + 6^2) : \gamma\gamma := \arctan\left(\frac{3}{AE}\right) : P := 12 :$

$Fo := \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ Zo \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} -T1 \cdot \cos(\alpha) \\ T1 \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Fa := \begin{bmatrix} -T2 \cdot \cos(\gamma\gamma) \cdot \cos(\beta) \\ -T2 \cdot \cos(\gamma\gamma) \cdot \sin(\beta) \\ T2 \cdot \sin(\gamma\gamma) \end{bmatrix} : Fp := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} :$

$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rp := \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$

$R0 := Fo + Fc + Fa + Fp$

$$\begin{bmatrix} Xo - \frac{3}{5}\,T1 - \frac{6}{7}\,T2 \\ Yo + \frac{4}{5}\,T1 - \frac{2}{7}\,T2 \\ Zo + \frac{3}{7}\,T2 - 12 \end{bmatrix}$$

$M0 := ro \,\&x\, Fo + rc \,\&x\, Fc + ra \,\&x\, Fa + rp \,\&x\, Fp$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{18}{7}\,T2 + 12\,x \\ \frac{12}{5}\,T1 - \frac{12}{7}\,T2 \end{bmatrix}$$

$n := solve(\{R0(1), R0(2), R0(3), M0(2), M0(3)\}, \{Xo, Yo, Zo, T1, T2\})$

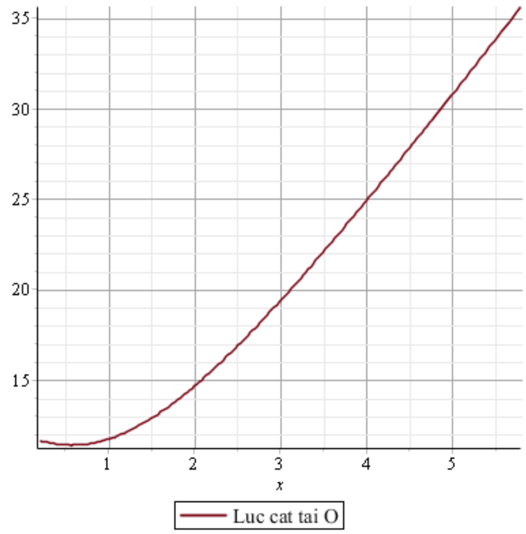
$$\left\{T1 = \frac{10}{3}\,x,\ T2 = \frac{14}{3}\,x,\ Xo = 6\,x,\ Yo = -\frac{4}{3}\,x,\ Zo = 12 - 2\,x\right\}$$

$assign(n)$:

$R := \mathrm{sqrt}(Xo^2 + Yo^2 + Zo^2)$

$$\frac{2}{3}\sqrt{94\,x^2 - 108\,x + 324}$$

$plot(R, x = 0.2\,..5.8,\ legend = \text{"Luc cat tai O"},\ gridlines = true)$



B2.17. Cho hệ cân bằng trong mặt phẳng đứng như hình 2.17 Cột OA thẳng đứng trọng lượng P. Thanh ngang BD trọng lượng không đáng kể được gắn cứng với cột và chịu tác dụng lực F, ngẫu lực có mômen M cùng với hệ lực phân bố có cường độ $q(x)$ như hình 2.17. Dây AE tạo với phương ngang một góc α. Cho các số liệu: $OA = h_1 = 10m; OB = h_2 = 8m; BD = l = 3m;$ $q(x) = 9 - x^2 N/m$; $P = 5000N; F = 40R;\ M = 75l^2 N.m; \alpha_{\min} = 45^0; \alpha_{max} = 80^0; \beta = 25^0.$

a. Xác định hợp lực R và khoảng cách x_C .
b. Xác định lực căng T trong dây AE, các lực liên kết tại O và B phụ thuộc vào góc α .
c. Vẽ đồ thị $T(\alpha)$ với $\alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{max}]$.
d. Khi $\alpha = \alpha_0 = 67^0$, xác định trị số của T và các lực liên kết tại O, B.

- Hợp lực và vị trí của hợp lực: $R = \int_0^l q(x)dx; x_C = \dfrac{\int_0^l q(x).xdx}{R}$
- Giải phóng liên kết như hình vẽ

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

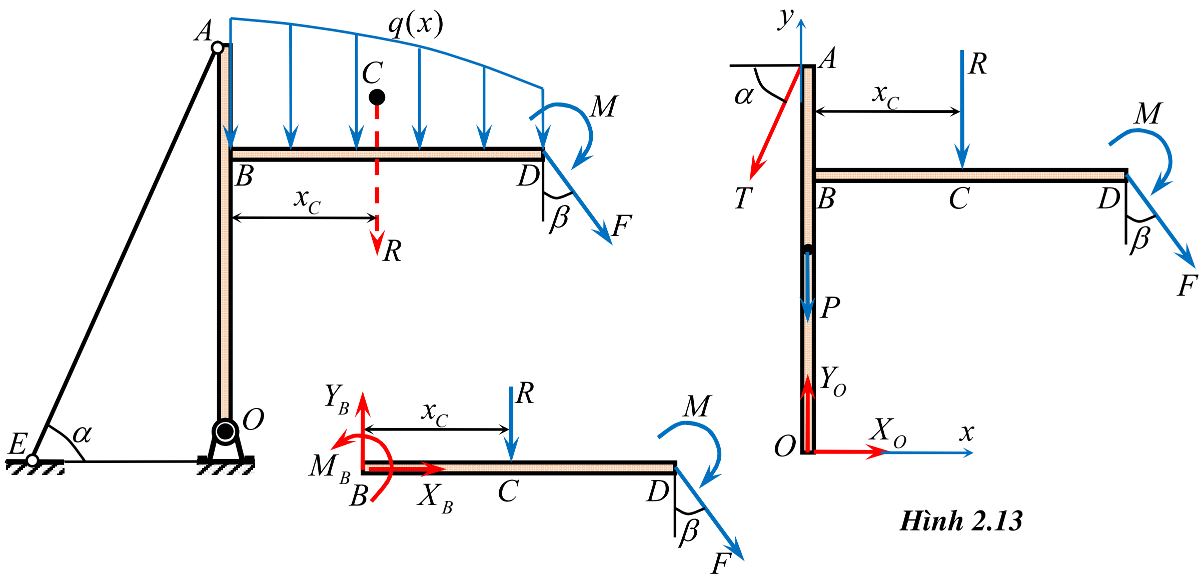
$$F_O = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{bmatrix}; F_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix}; F_A = \begin{bmatrix} -T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}; F_D = \begin{bmatrix} F\sin\beta \\ -F\cos\beta \\ 0 \end{bmatrix}; M_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix};$$

$$F_B = \begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{bmatrix}; M_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_b \end{bmatrix}; r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} x_C \\ h_2 \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} l \\ h_1 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_O + \vec{F}_P + \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_D = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_O \wedge \vec{F}_O + \vec{r}_P \wedge \vec{F}_P + \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{M}_D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_O(1) = 0, R_O(2) = 0, M_O(3) = 0)$ ta tìm được X_O, Y_O, T .



Hình 2.13

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_B = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D = 0 \\ \vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C + \vec{r}_D \wedge \vec{F}_D + \vec{M}_B + \vec{M}_D = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_B(1)=0, R_B(2)=0, M_B(3)=0)$ ta tìm được X_B, Y_B, M_B.

➢ **Chương trình Maple:**

restart :

Loading LinearAlgebra

$h1 := 10 : h2 := 8 : l := 3 : q := 9 - x^2 : P := 5000 : F := 40 \cdot R : M := 75 \cdot l^2 : \beta := \frac{25 \cdot \mathrm{Pi}}{180} :$

$\alpha max := \frac{\mathrm{Pi}}{4} : \alpha min := \frac{80 \cdot \mathrm{Pi}}{180} :$

$Fo := \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ 0 \end{bmatrix} : Fp := \begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{bmatrix} : Fa := \begin{bmatrix} -T \cdot \cos(\alpha) \\ -T \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} : Fd := \begin{bmatrix} \mathrm{F} \cdot \sin(\beta) \\ -\mathrm{F} \cdot \cos(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} :$

$Md := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} : ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rp := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{h1} \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} \mathrm{xc} \\ \mathrm{h2} \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{h2} \\ 0 \end{bmatrix} :$

$R := int(q, x = 0..l)$

$$18$$

$xc := evalf\left(\frac{int(q \cdot x, x = 0..l)}{R}\right)$

$$1.125000000$$

$Ro := Fo + Fp + Fa + Fc + Fd$

$$\begin{bmatrix} Xo - T\cos(\alpha) + 720\sin\left(\frac{5}{36}\pi\right) \\ Yo - 5018 - T\sin(\alpha) - 720\cos\left(\frac{5}{36}\pi\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Mo := ro \&x Fo + rp \&x Fp + ra \&x Fa + rc \&x Fc + rd \&x Fd + Md$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0. \\ 10\,T\cos(\alpha) - 695.2500000 - 2160\cos\left(\frac{5}{36}\pi\right) - 5760\sin\left(\frac{5}{36}\pi\right) \end{bmatrix}$$

$Fb := \begin{bmatrix} Xb \\ Yb \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 0 \\ h2 \\ 0 \end{bmatrix} : Mb := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{Mbb} \end{bmatrix} :$

$Rb := Fb + Fc + Fd$

$$\begin{bmatrix} Xb + 720\sin\left(\frac{5}{36}\pi\right) \\ Yb - 18 - 720\cos\left(\frac{5}{36}\pi\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$Mb := rb \&x Fb + rc \&x Fc + rd \&x Fd + Md + Mb$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0. \\ -8\,Xb - 695.2500000 - 2160\cos\left(\frac{5}{36}\pi\right) - 5760\sin\left(\frac{5}{36}\pi\right) + Mbb \end{bmatrix}$$

$n := combine(solve(\{Ro(1), Ro(2), Mo(3), Rb(1), Rb(2), Mb(3)\}, \{Xo, Yo, T, Xb, Yb, Mbb\}))$

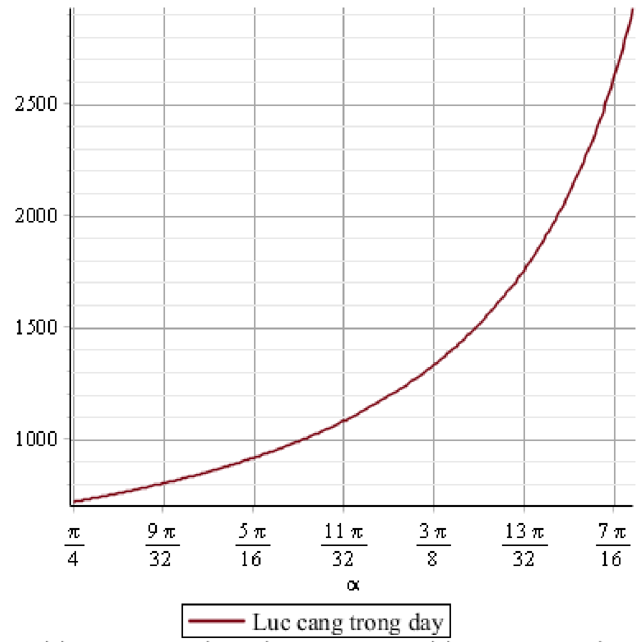
$$\left\{Mbb = 2652.874820,\ T = \frac{508.7156008}{\cos(\alpha)},\ Xb = -304.2851485,\ Xo = 204.4304523,\ Yb = 670.5416067,\ Yo = \frac{5670.541608\cos(\alpha) + 508.7156008\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right\}$$

$assign(n) :$

$plot(T, \alpha = \alpha min..\alpha max, gridlines = true, legend = \text{"Luc cang trong day"})$

$XO = eval\left(Xo, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right); YO = evalf\left(eval\left(Yo, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right)\right); TA = evalf\left(eval\left(T, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right)\right);$

$XB = evalf\left(eval\left(Xb, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right)\right); YB = evalf\left(eval\left(Yb, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right)\right); MB = evalf\left(eval\left(Mbb, \alpha = \frac{67\cdot Pi}{180}\right)\right);$



$XO = 204.4304523$

$YO = 6869.000462$

$TA = 1301.958211$

$XB = -304.2851485$

$YB = 670.5416067$

$MB = 2652.874820$

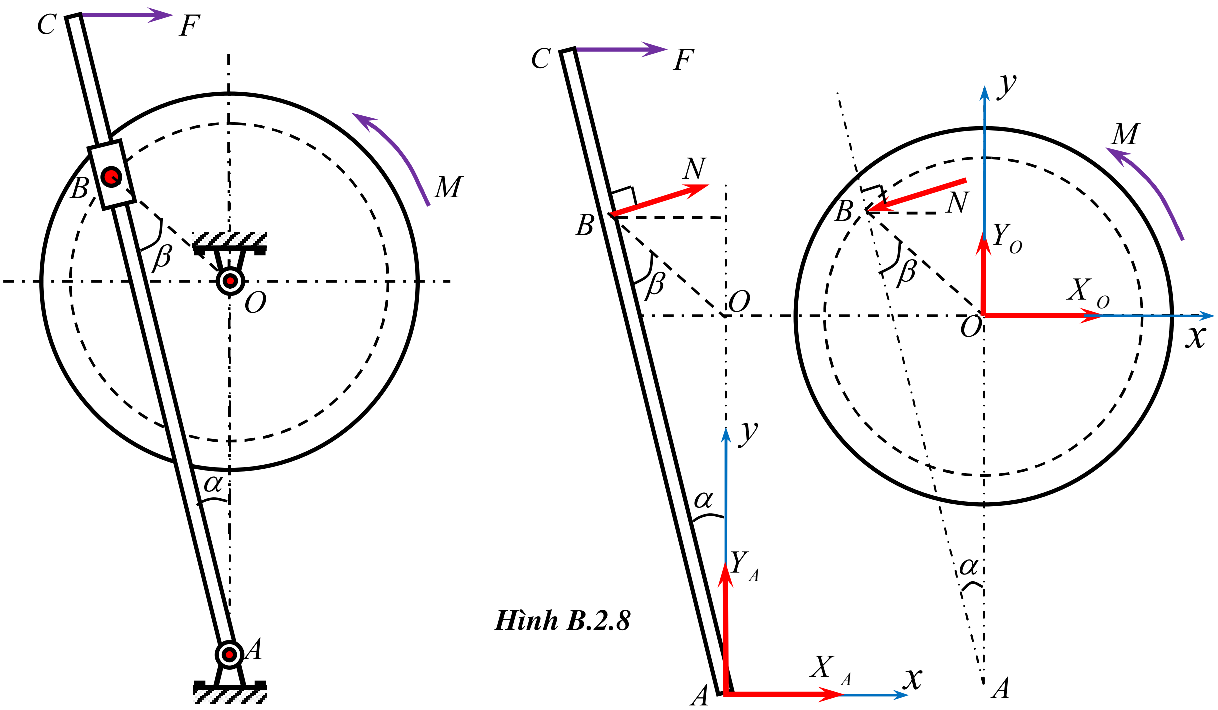
B2.18. Cho cơ cấu culít như ***hình B.2.18***. Đĩa tròn tâm O chịu tác dụng của ngẫu lực có mômen M, trên đĩa có gắn trục B của con trượt rỗng. Thanh AC có thể quay quanh trục A và trượt trong con trượt, lực F theo phương ngang đặt tại C. Góc $\widehat{OAB} = \alpha$. Cho các số liệu: $OA = 35cm; OB = 15cm; AC = 50cm; F = 1000N$; đặt góc $\widehat{OBA} = \beta$

a. Xác định góc β và độ dài AB theo α.

b. Xác định lực liên kết tại bản lề A và mômen M theo α.

c. Vẽ đồ thị $M(\alpha)$ với $\alpha \in \left[\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{6}\right]$.

d. Tính trị số của M và lực liên kết tại A khi $\alpha = \frac{\pi}{9}$.



Hình B.2.8

- Bài toán vị trí: $\begin{cases} OB\sin(\alpha+\beta) = AB\sin\alpha \\ OA + OB\cos(\alpha+\beta) = AB\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \beta, AB$
- Giải phóng liên kết và xét cân bằng thanh AC.

Các véctơ lực và các véctơ vị trí

$$F_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} N\cos\alpha \\ N\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; F_C = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} -AB\sin\alpha \\ AB\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} -AC\sin\alpha \\ AC\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_B = \vec{F}_B + \vec{F}_A + \vec{F}_C = 0 \\ \vec{M}_B = \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_C \wedge \vec{F}_C = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_B(1)=0, R_B(2)=0, M_B(3)=0)$ ta tìm được X_A, Y_A, N

- Giải phóng liên kết và xét cân bằng bánh răng.

Các véctơ lực và các véc tơ vị trí

$$F_O = \begin{bmatrix} X_O \\ Y_O \\ 0 \end{bmatrix}; F_B = \begin{bmatrix} -N\cos\alpha \\ -N\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; M_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{bmatrix}; r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} -OB\sin(\alpha+\beta) \\ OB\cos(\alpha+\beta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Điều kiện cân bằng của hệ lực:

$$\begin{cases} \vec{R}_O = \vec{F}_O + \vec{F}_B = 0 \\ \vec{M}_O = \vec{r}_O \wedge \vec{F}_O + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B + \vec{M}_d = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên $(R_O(1)=0, R_O(2)=0, M_O(3)=0)$ ta tìm được X_O, Y_O, M

- **Chương trình Maple:**

restart :
Loading LinearAlgebra
$OA := 35 : OB := 15 : AC := 50 : F := 1000 :$

$$pt1 := \frac{OB}{\sin(\alpha)} = \frac{OA}{\sin(\beta)} :$$

$$pt2 := \frac{OA}{\sin(\beta)} = \frac{AB}{\sin(\mathrm{Pi} - \alpha - \beta)} :$$

$n1 := allvalues(solve(\{pt1, pt2\}, \{\beta, AB\})) :$
$assign(n1[1]) :$

$$Fa := \begin{bmatrix} Xa \\ Ya \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} N\cdot\cos(\alpha) \\ N\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Fc := \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} -AB\cdot\sin(\alpha) \\ AB\cdot\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} -AC\cdot\sin(\alpha) \\ AC\cdot\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$Ra := Fa + Fb + Fc :$
$Ma := ra \,\&x\, Fa + rb \,\&x\, Fb + rc \,\&x\, Fc :$

$$Fo := \begin{bmatrix} Xo \\ Yo \\ 0 \end{bmatrix} : Fb := \begin{bmatrix} -N\cdot\cos(\alpha) \\ -N\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : Md := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{M} \end{bmatrix} :$$

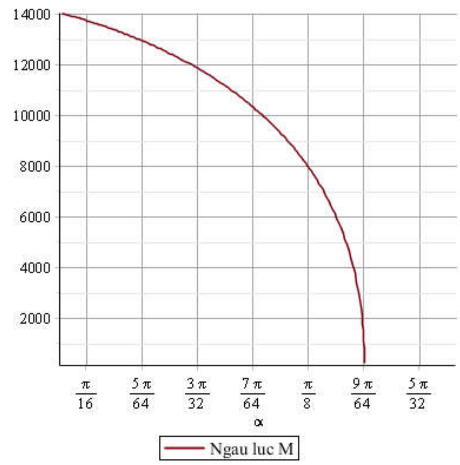
$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} -OB\cdot\sin(\alpha+\beta) \\ OB\cdot\cos(\alpha+\beta) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$Ro := Fo + Fb :$
$Mo := ro \,\&x\, Fo + rb \,\&x\, Fb + Md :$
$n2 := combine(solve(\{Ra(1), Ra(2), Ma(3), Ro(1), Ro(2), Mo(3)\}, \{Xa, Ya, N, Xo, Yo, M\}))$

$$\left\{ M = \frac{300000\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}\,\cos(\alpha)}{6\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+84\cos(\alpha)}, N = -\frac{20000\cos(\alpha)}{\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+14\cos(\alpha)}, Xa = \frac{-1000\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}-14000\cos(\alpha)+10000\cos(2\alpha)+10000}{\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+14\cos(\alpha)}, Xo = \frac{-10000\cos(2\alpha)-10000}{\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+14\cos(\alpha)}, Ya = \frac{10000\sin(2\alpha)}{\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+14\cos(\alpha)}, Yo = -\frac{10000\sin(2\alpha)}{\sqrt{-62+98\cos(2\alpha)}+14\cos(\alpha)} \right\}$$

$assign(n2) :$

$$plot\left(M, \alpha = \frac{\mathrm{Pi}}{18} .. \frac{\mathrm{Pi}}{6}, gridlines = true, legend = \text{"Ngau luc M"}\right)$$



$M1 = evalf\left(subs\left(\alpha = \frac{\text{Pi}}{9}, M\right)\right); XA = evalf\left(subs\left(\alpha = \frac{\text{Pi}}{9}, Xa\right)\right); YA = evalf\left(subs\left(\alpha = \frac{\text{Pi}}{9}, Ya\right)\right);$

$M1 = 10129.00644$

$XA = 53.01784604$

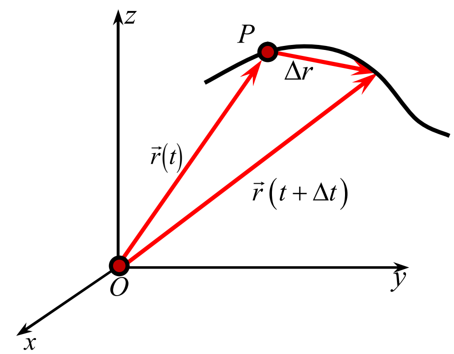
$YA = 383.2671521$

Phần 3

ĐỘNG HỌC

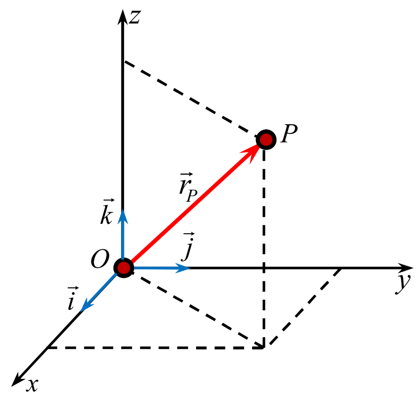
3.1. ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

1.1.1. Véc tơ vị trí, vận tốc, gia tốc



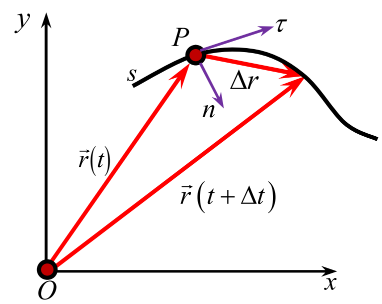
- Véc tơ vị trí của điểm P:
  $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$
- Vận tốc trung bình của điểm P trong khoảng thời gian Δt: $\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- Vận tốc tức thời của điểm P tại thời điểm t:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$



- Gia tốc trung bình của điểm P trong khoảng thời gian Δt: $\vec{a}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
- Gia tốc tức thời của điểm P tại thời điểm t:
  $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

1.1.2. Trong hệ tọa độ Descartes:



$$\begin{cases} \vec{r}_P(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v}_P = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \\ \vec{a}_P = \dfrac{d\vec{v}_P}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

Trị số vận tốc và gia tốc của điểm P:

$$\begin{cases} v_P = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ a_P = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \end{cases}$$

1.1.3. Trong hệ tọa độ tự nhiên:

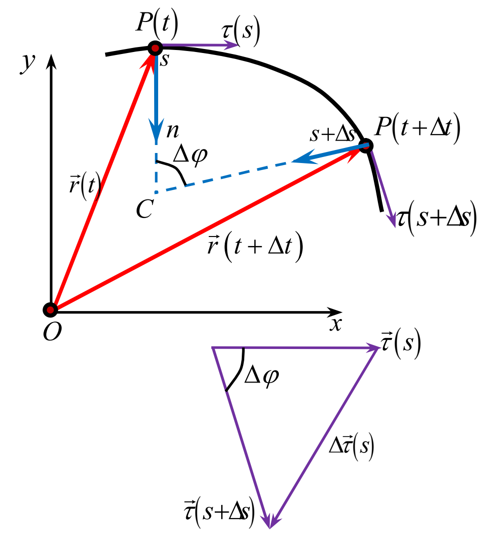
Ta có: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

Ta có thể viết: $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)\left(\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right)$

Trong đó $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \dfrac{ds}{dt} = \vec{v}$

Khi $\Delta t \to 0$ véc tơ $\Delta\vec{r}$ có phương trùng với tiếp tuyến của quĩ đạo tại $\vec{r}(t)$ vì vầy ta có $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right)=\vec{\tau}$. Vì vậy ta có $\vec{v}=\dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$.

Các thành phần của gia tốc: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}\right)=\dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}+\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}=\dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}+\dfrac{ds}{dt}\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt}$



Xét véc tơ đơn vị $\vec{\tau}$ tại hai điểm s và $s+\Delta s$ như hình vẽ. Ta có: $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left(\dfrac{\vec{\tau}(s+\Delta s)-\vec{\tau}(s)}{\Delta s}\right)=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$

Khi $\Delta s \to 0$ véc tơ $\Delta\vec{\tau}$ nằm trong mặt phẳng mật tiếp của quĩ đạo tại s và hướng về tâm của quĩ đạo, trùng với hướng của pháp véc tơ $\vec{n}$ của quĩ đạo.

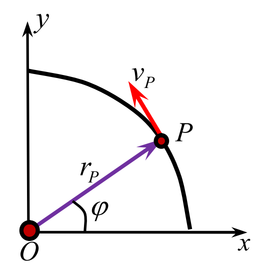
Ta lại có, khi $\Delta s \to 0$: $|\Delta\vec{\tau}|\to|\vec{\tau}|\Delta\varphi=\Delta\varphi\to\dfrac{\Delta s}{\rho}$. Vì vậy ta có: $\Delta\vec{\tau}\to\dfrac{\Delta s}{\rho}\vec{n}$. Với ρ là bán kính cong của quĩ đạo.

Từ đó ta có: $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{(\Delta s/\rho)\vec{n}}{\Delta s}=\dfrac{\vec{n}}{\rho}$.

Vì vậy các thành phần của gia tốc: $\vec{a}=\dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}+\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\dfrac{\vec{n}}{\rho}$ hoặc $\vec{a}=a^\tau\vec{\tau}+a^n\vec{n}$

Với: $a^\tau=\dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{dv}{dt}=\ddot{s}$: gia tốc tiếp

$a^n=\dfrac{v^2}{\rho}$: gia tốc tiếp



1.1.4. Chuyển động quay quanh một điểm cố định trong mặt phẳng:

Ta có véc tơ vị trí của điểm P: $\vec{r}_P=R\cos\varphi\vec{i}+R\sin\varphi\vec{j}$

Vận tốc của điểm P:

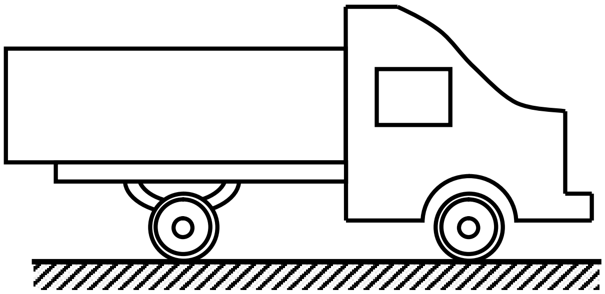
$$\vec{v}_P=R\frac{d\varphi}{dt}\left[-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}\right]=\frac{d\varphi}{dt}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}R\cos\varphi\\R\sin\varphi\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&d\varphi/dt\\R\cos\varphi&R\sin\varphi&0\end{bmatrix}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}_P$$

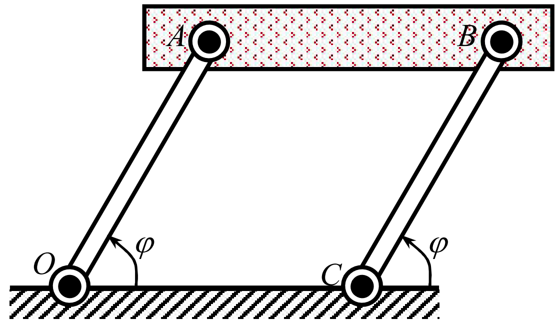
Gia tốc của điểm P: $\vec{a}_P=\vec{a}^\tau+\vec{a}^n$, với $\vec{a}^\tau=\vec{\varepsilon}\wedge\vec{r}_P$, $\vec{a}^n=-\vec{\omega}^2\wedge\vec{r}_P$

3.2. ĐỘNG HỌC VẬT RẮN

3.2.1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn:

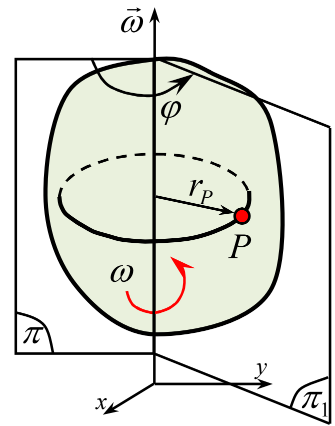
Vật rắn chuyển động tịnh tiến nếu mọi đường thẳng thuộc vật luôn song song với vị trí ban đầu của nó.





Khi một vật chuyển động tịnh tiến, tại một thời điểm vận tốc mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau, gia tốc mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau.

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn đều bằng không.



3.2.2. Chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định:

➢ Vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định khi tồn tại ít nhất hai điểm thuộc vật không thay đổi vị trí trong quá trình chuyển động, đường thẳng đi qua hai điểm cố định này được gọi là trục quay.

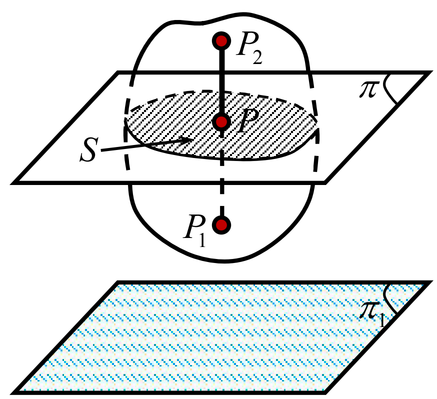
➢ Qui luật chuyển động của vật rắn: $\varphi = \varphi(t)$

➢ Vận tốc góc của vật rắn: $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$

➢ Gia tốc góc của vật rắn: $\vec{\varepsilon} = \dot{\omega}\vec{k}$

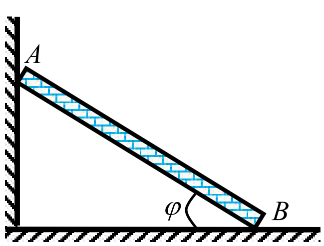
➢ Vận tốc, gia tốc của điểm thuộc vật rắn:

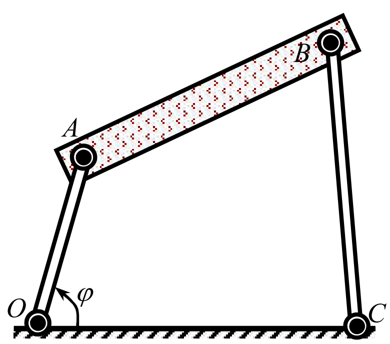
$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P \\ \vec{a}_P = \vec{a}_P^{\tau} + \vec{a}_P^{n};\ \vec{a}_P^{\tau} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_P, \vec{a}_P^{n} = -\vec{\omega}^2 \wedge \vec{r}_P \end{cases}$$

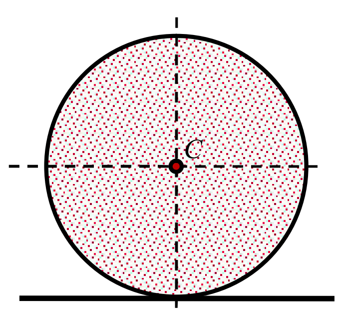


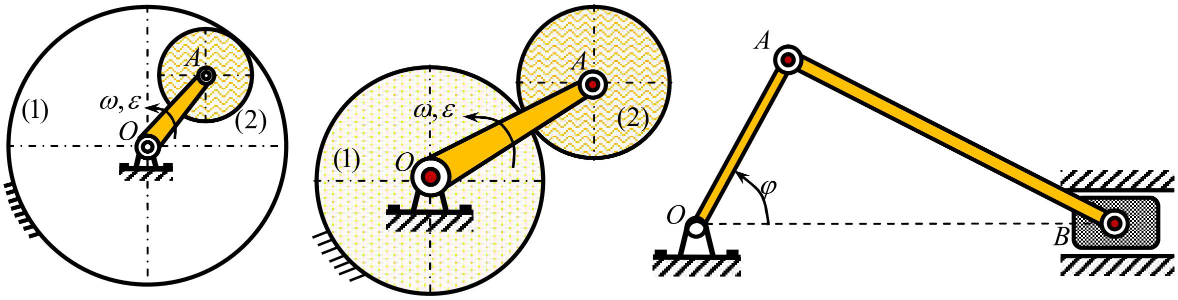
3.3. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN

➢ Vật rắn chuyển động song phẳng trong một hệ qui chiếu cố định khi mỗi điểm thuộc vật rắn luôn chuyển động trong một mặt phẳng xác định song song với mặt phẳng cố định cho trước.

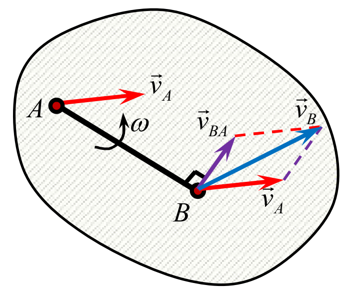


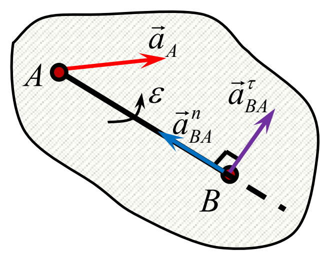






➢ Mô hình chuyển động phẳng: xét một đoạn thẳng P_1P_2 tùy ý thuộc vật rắn mà P_1P_2 vuông góc với mặt phẳng cố định cho trước π_1. Vì P_1 và P_2 là hai điểm thuộc vật rắn nên $P_1P_2 = const$. Mặt khác do vật rắn chuyển động song phẳng nên các điểm P_1 và P_2 luôn chuyển động trong hai mặt phẳng song song nhau và song song với mặt phẳng cố định cho trước π_1. Vậy P_1P_2 luôn song song với vị trí ban đầu của nó. Theo định nghĩa P_1P_2 chuyển động tịnh tiến. Vậy chuyển động của đoạn thẳng P_1P_2 được đặc trưng bởi chuyển động của điểm P. Vật rắn tập hợp vô số các đường thẳng P_iP_j, các đường này được đặc trưng bởi các điểm P_k. Tập hợp các điểm P_k tạo thành một mặt (S) song song với mặt phẳng cố định cho trước π_1. Do đó chuyển động song phẳng của vật rắn được đặc trưng bởi chuyển động của thiết diện phẳng (S). Như vậy việc khảo sát chuyển động song phẳng của vật rắn trong không gian được đưa về bài toán khảo sát chuyển động của thiết diện phẳng (S).





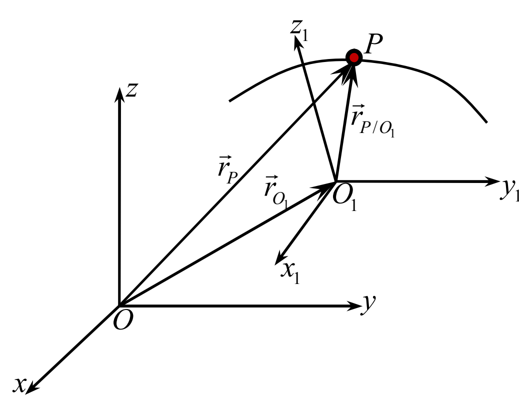
➢ Quan hệ vận tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng (S): $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$, trong đó $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA}$ là vận tốc của điểm B quay quanh điểm A.

➢ Quan hệ gia tốc giữa hai điểm thuộc hình phẳng (S): $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, trong đó $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$; $\vec{a}_{BA}^\tau = \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA}$, $\vec{a}_{BA}^n = -\vec{\omega}_{BA}^2 \wedge \vec{r}_{BA}$ là gia tốc của điểm B quay quanh điểm A.

3.4. HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

➢ Hệ trục tạo độ $Oxyz$ là hệ tọa độ cố định, hệ trục tạo độ $Ox_1y_1z_1$ là hệ tọa độ động.

➢ Chuyển động của điểm P đối với hệ tọa độ cố định được gọi là chuyển động tuyệt đối. Vận tốc, gia tốc của điểm P được xác định trong hệ tọa độ cố định được gọi là vận tốc tuyệt đối $\vec{v}_a$, gia tốc tuyệt đối $\vec{a}_a$.



➢ Chuyển động của điểm P đối với hệ tọa độ động được gọi là chuyển động tương đối. Vận tốc, gia tốc của điểm P được xác định trong hệ tọa độ động được gọi là vận tốc tương đối $\vec{v}_r$, gia tốc tương đối $\vec{a}_r$.

➢ Chuyển động của hệ tọa độ động đối với hệ tọa độ cố định được gọi là chuyển động theo. Vận tốc, gia tốc của hệ tọa độ động được xác định trong hệ tọa độ động được gọi là vận tốc kéo theo $\vec{v}_e$, gia tốc kéo theo $\vec{a}_e$.

➢ Công thức cộng vận tốc: ở mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của điểm P bằng tổng hình học vận tốc tương đối và vận tốc kéo theo của nó. $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

➢ Công thức cộng gia tốc: ở mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối của điểm P bằng tổng hình học gia tốc tương đối, gia tốc kéo theo và gia tốc Côriôlis của nó. $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$. Trong đó gia tốc Côriôlis được xác định $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$, với $\vec{\omega}_e$ là vận tốc góc của hệ động.

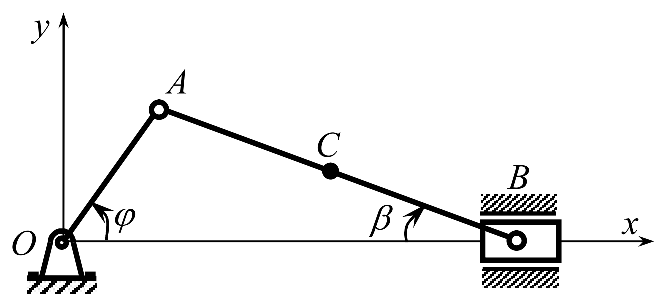
B3.1. Tay quay OA của cơ cấu tay quay con trượt chuyển động theo qui luật $\varphi = \omega t$ (với $\omega = const$). Cho biết các độ dài $OA = r;\ AB = l;\ AC = l/2$.

a. Xác định phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc con trượt B và trung điểm C của thanh truyền AB.

b. Cho $r = 10cm;\ l = 25cm;\ \omega = 5rad/s$, vẽ đồ thị vị trí, vận tốc, gia tốc của con trượt B và trung điểm C của thanh AB với $t = [0,\ 5]\,(s)$.

c. vẽ qũi đạo, vận tốc, gia tốc của trung điểm C của thanh AB với $t = [0,\ 5]\,(s)$.

d. Xác định vận tốc, gia tốc con trượt B và trung điểm C của thanh AB tại thời điểm $t = 2,5s$.



➢ Phương trình xác định góc $\beta: r\sin(\varphi) - l\sin(\beta) = 0$

➢ Phương trình xác định vị trí con trượt B: $\begin{cases} x_B = r\cos(\varphi) + l\cos(\beta) \\ y_B = 0 \end{cases}$

➢ Vận tốc, gia tốc con trượt B: $v_B = \dfrac{dx_B}{dt},\ a_B = \dfrac{d^2x_B}{dt^2}$

➢ Phương trình xác định vị trí trung điểm C:

$$\begin{cases} x_C = r\cos(\varphi) + \dfrac{l}{2}\cos(\beta) \\ y_C = r\sin(\varphi) - \dfrac{l}{2}\sin(\beta) \end{cases}$$

➢ Vận tốc, gia tốc trung điểm C: $\begin{cases} v_{C,x} = \dfrac{dx_C}{dt},\ v_{C,y} = \dfrac{dy_C}{dt},\ v_C = \sqrt{v_{C,x}^2 + v_{C,y}^2} \\ a_{C,x} = \dfrac{d^2x_C}{dt^2}, a_{C,y} = \dfrac{d^2y_C}{dt^2},\ a_C = \sqrt{a_{C,x}^2 + a_{C,y}^2} \end{cases}$

➢ **Chương trình Maple:**

$restart:$

Loading LinearAlgebra

Loading plots

$\varphi := \omega \cdot t:$

$pt := \dfrac{r}{\sin(\beta)} = \dfrac{l}{\sin(\varphi)}:$

$\beta := solve(pt, \beta)$

$$\arcsin\left(\frac{r\sin(\omega t)}{l}\right)$$

$xb := r\cdot\cos(\varphi) + l\cdot\cos(\beta):$

$xc := r\cdot\cos(\varphi) + \dfrac{l}{2}\cdot\cos(\beta):$

$yc := r\cdot\sin(\varphi) - \dfrac{l}{2}\cdot\sin(\beta):$

$vb := diff(xb, t):$

$vcx := diff(xc, t) : vcy := diff(yc, t):$

$vc := \mathrm{sqrt}(vcx^2 + vcy^2):$

$ab := diff(vb, t):$

$acx := diff(vcx, t) : acy := diff(vcy, t):$

$ac := \mathrm{sqrt}(acx^2 + acy^2):$

$r := 10 : l := 25 : \omega := 5:$

plot([*xb*, *vb*, *ab*], *t* = 0 ..5, *linestyle* = [*solid*, *dashdot*, *dash*], *color* = [*red*, *green*, *blue*], *legend* = ["x_B", "v_B", "a_B"], *gridlines* = *true*)

plot([*xc*, *yc*, *t* = 0 ..5], *legend* = "Qui dao trung diem C", *gridlines* = *true*)

plot([*vc*, *ac*], *t* = 0 ..5, *linestyle* = [*solid*, *dash*], *color* = [*red*, *blue*], *legend* = ["v_C", "a_C"], *gridlines* = *true*)

 # van toc, gia toc con truot B tai t=2,5 s

vB = *evalf* (*eval*(*vb*, *t* = 2.5)); *aB* = *evalf* (*eval*(*ab*, *t* = 2.5)); *vC* = *evalf* (*eval*(*vc*, *t* = 2.5));

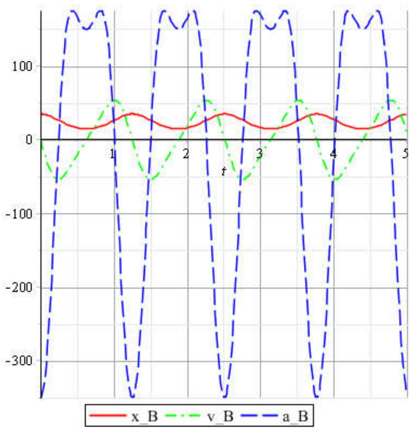
aC = *evalf* (*eval*(*ac*, *t* = 2.5));

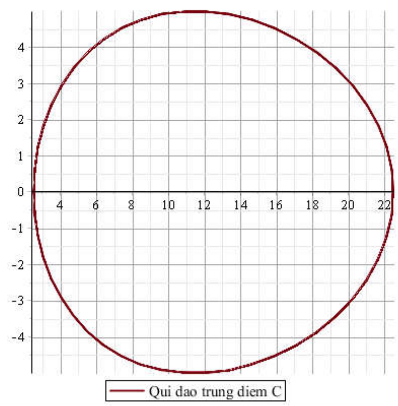
$$vB = 4.640078344$$

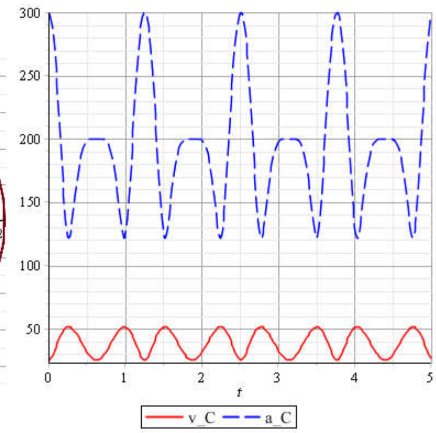
$$aB = -348.6748905$$

$$vC = 25.26016730$$

$$aC = 299.1771140$$





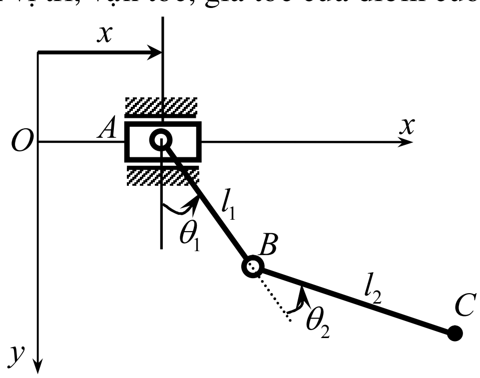


B3.2. Con trượt A chuyển động theo phương ngang trong khi hai thanh $AB = l_1$ và $BC = l_2$ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Cho biết các khoảng cách: $x = 2\sin(50t)\,cm$, các góc: $\theta_1 = 0,2\pi\sin(50t)\ rad$; $\theta_2 = 0,2\pi\sin\left(50t - \frac{\pi}{3}\right)\ rad$.

a. Xác định các biểu thức vị trí, vận tốc, gia tốc của điểm cuối C theo hàm thời gian. Cho $l_1 = 15cm; l_2 = 35cm;$

b. Vẽ quĩ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm cuối C trong khoảng $t = [0,\ 1]s$.

c. Xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của điểm cuối C khi $t = 0,5s$.



- Phương trình xác định vị trí điểm C:

$$\begin{cases} x_C = x + l_1\sin(\theta_1) + l_2\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ y_C = l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

- Vận tốc, gia tốc của điểm C:

$$\begin{cases} v_{C,x} = \dfrac{dx_C}{dt},\ v_{C,y} = \dfrac{dy_C}{dt},\ v_C = \sqrt{v_{C,x}^2 + v_{C,y}^2} \\ a_{C,x} = \dfrac{d^2x_C}{dt^2},\ v_{C,y} = \dfrac{d^2y_C}{dt^2},\ a_C = \sqrt{a_{C,x}^2 + a_{C,y}^2} \end{cases}$$

➢ Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

Loading plottools

$\theta 1 := 0.2\cdot\pi\cdot\sin(50\cdot t) : \theta 2 := 0.2\cdot\pi\cdot\sin\left(50\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) : x := 2\cdot\sin(50\cdot t) :$

$xc := x + l1\cdot\sin(\theta 1) + l2\cdot\sin(\theta 1 + \theta 2)$

$$2\sin(50\,t) + l1\sin(0.2\,\pi\sin(50\,t)) - l2\sin\left(-0.2\,\pi\sin(50\,t) + 0.2\,\pi\cos\left(50\,t + \frac{1}{6}\,\pi\right)\right) \quad \textbf{(1)}$$

$yc := l1\cdot\cos(\theta 1) + l2\cdot\cos(\theta 1 + \theta 2)$

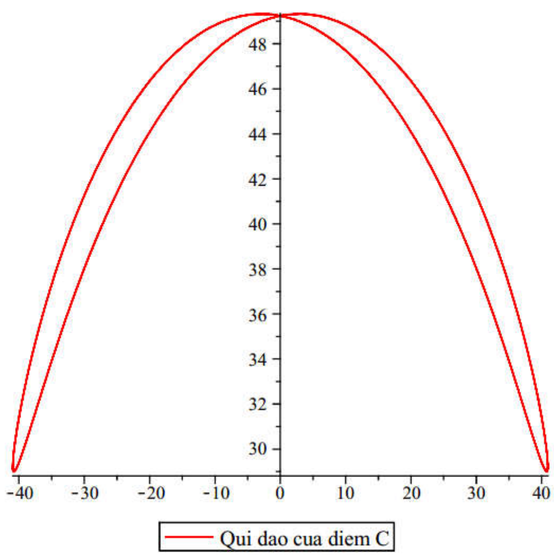
$$l1\cos(0.2\,\pi\sin(50\,t)) + l2\cos\left(-0.2\,\pi\sin(50\,t) + 0.2\,\pi\cos\left(50\,t + \frac{1}{6}\,\pi\right)\right) \quad \textbf{(2)}$$

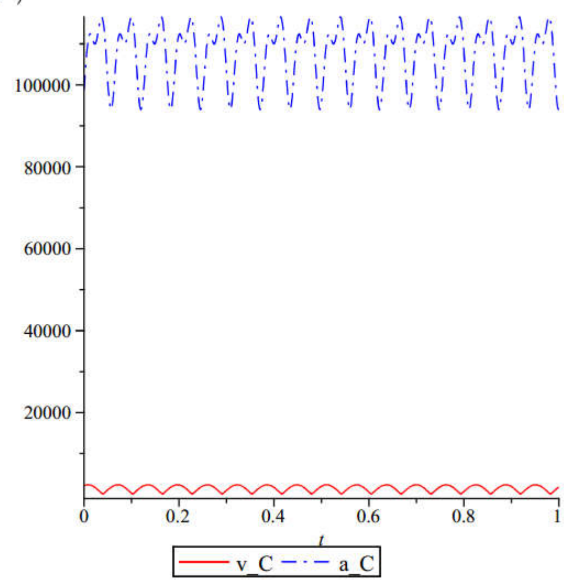
$vcx := diff(xc, t) : vcy := diff(yc, t) : vc := \text{sqrt}(vcx^2 + vcy^2) :$

$acx := diff(xc, t\$2) : acy := diff(yc, t\$2) : ac := \text{sqrt}(acx^2 + acy^2) :$

$l1 := 15 : l2 := 35 :$

plot([*xc*, *yc*, *t* = 0 ..1], *legend* = "Qui dao cua diem C")





plot([*vc*, *ac*], *t* = 0 ..1, *linestyle* = [*solid*, *dashdot*], *color* = [*red*, *blue*], *legend* = ["v_C", "a_C"])

 # vi tri, van toc, gia toc diem C khi t=0,5s
$xC := evalf(subs(t=0.5, xc))$

$$-23.08269073 \quad (3)$$

$vC := evalf(subs(t=0.5, vc))$

$$2002.635675 \quad (4)$$

$aC := evalf(subs(t=0.5, ac))$

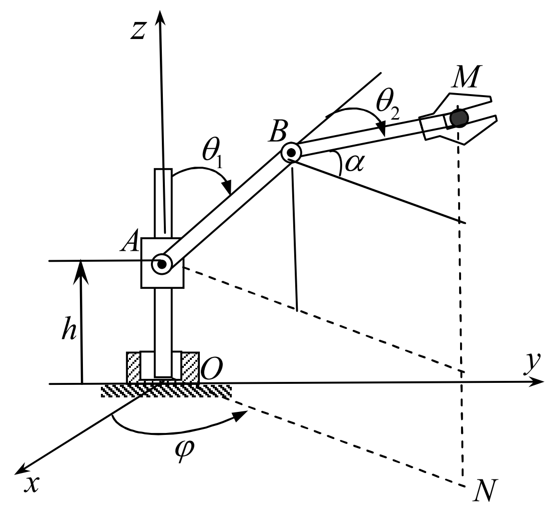
$$95538.59955 \quad (5)$$

B3.3. Cho tay máy như hình vẽ. Các độ dài $AB = l_1 = 30cm, BM = l_2 = 20cm$, dịch chuyển của con trượt A các góc quay $h = e^{-0.2t} cm; \varphi = \sin(2t); \theta_1 = \sin t; \theta_2 = \sin(0.5t); t_1 = 3\,s; t_f = 6\,s$.

a. Vẽ quĩ đạo điểm M trong khoảng $t = [0, t_f]$.

b. Vẽ đồ thị vận tốc, gia tốc điểm M trong khoảng $t = [0, t_f]$.

c. Khi $t = t_1$, xác định vận tốc, gia tốc điểm M.



- Xác định tọa độ điểm M : (x_M, y_M, z_M)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2); ON = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \cos\alpha$$
$$x_M = ON\cos\varphi; y_M = ON\sin\varphi;$$
$$z_M = h + l_1\cos\theta_1 + l_2\sin\alpha$$
Vẽ $(x_M, y_M, z_M); t \in [0, t_f]$

- Vận tốc điểm M

$$v_{Mx} = \dot{x}_M; v_{My} = \dot{y}_M; v_{Mz} = \dot{z}_M; v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2 + v_{Mz}^2}$$
$$a_{Mx} = \ddot{x}_M; a_{My} = \ddot{y}_M; a_{Mz} = \ddot{z}_M; a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2}$$

- Vẽ $v_M(t), a_M(t); t \in [0, t_f]$
- Thay $t = t_1$ vào v_M, a_M.
- **Chương trình Maple**

restart :
Loading LinearAlgebra
Loading plottools
Loading plots
$l1 := 30 : l2 := 20 : h := \exp(-0.2 \cdot t) : \varphi := \sin(2 \cdot t) : \theta 1 := \sin(t) : \theta 2 := \sin(0.5 \cdot t) : t1 := 3 : tf := 6 :$
$\alpha := \frac{\text{Pi}}{2} - (\theta 1 + \theta 2) :$
$ON := l1 \cdot \sin(\theta 1) + l2 \cdot \cos(\alpha) :$
$xm := ON \cdot \cos(\varphi)$

$$(30 \sin(\sin(t)) + 20 \sin(\sin(t) + \sin(0.5\,t))) \cos(\sin(2\,t))$$

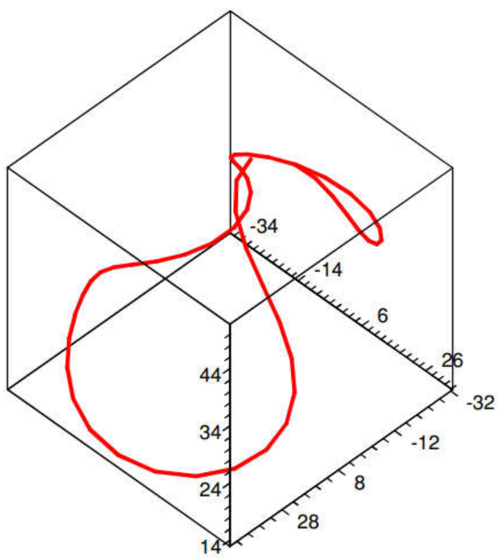
$ym := ON \cdot \sin(\varphi)$

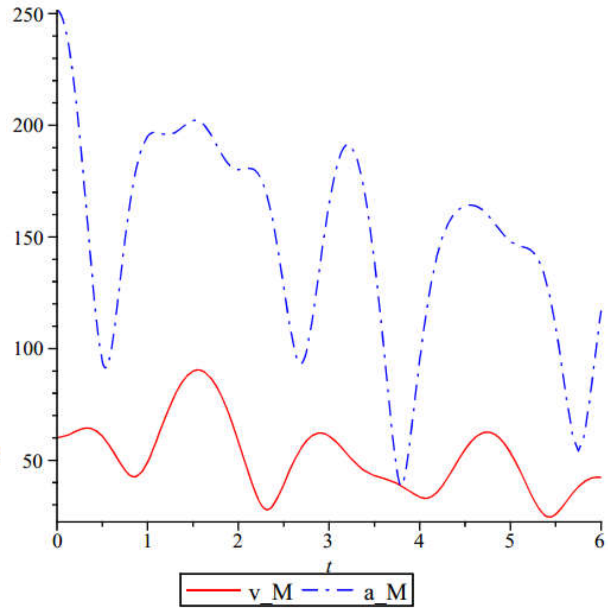
$$(30 \sin(\sin(t)) + 20 \sin(\sin(t) + \sin(0.5\,t))) \sin(\sin(2\,t))$$

$zm := h + l1 \cdot \cos(\theta 1) + l2 \cdot \sin(\alpha)$

$$e^{-0.2\,t} + 30\cos(\sin(t)) + 20\cos(\sin(t) + \sin(0.5\,t))$$

$vmx := diff(xm, t) : vmy := diff(ym, t) : vmz := diff(zm, t) : vm := \text{sqrt}(vmx^2 + vmy^2 + vmz^2) :$
$amx := diff(xm, t\$2) : amy := diff(ym, t\$2) : amz := diff(zm, t\$2) : am := \text{sqrt}(amx^2 + amy^2 + amz^2) :$
$spacecurve([xm, ym, zm], t = 0 ..tf, axes = box, color = red, thickness = 2)$





$plot([vm, am], t = 0 ..tf, linestyle = [solid, dashdot], color = [red, blue], legend = ["v\_M", "a\_M"])$
vi tri, van toc, gia toc diem M khi t=0,3 s
$x_M := evalf(subs(t = t1, xm))$

$$21.51265437 \tag{4}$$

$v_M := evalf(subs(t = t1, vm))$

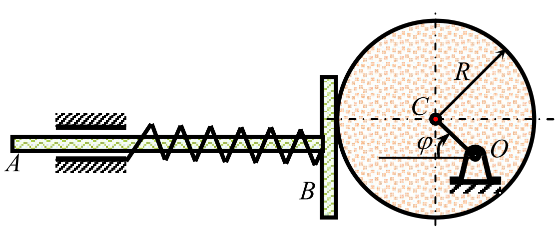
$$60.86192622 \tag{5}$$

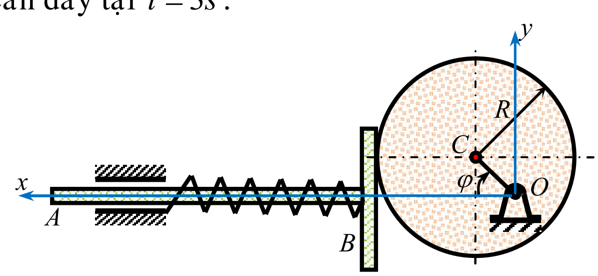
$a_M := evalf(subs(t = t1, am))$

$$164.8251246 \tag{6}$$

B3.4. Cho cơ cấu cam cần đẩy đáy bằng như hình vẽ. Cam có biên dạng là đường tròn bán kính $R = 15cm$ quay qanh trục tại O với qui luật $\varphi = 0,5t^2$ với $OC = 10cm$.

a. Xác định qui luật chuyển động của cần đẩy AB.
b. Vẽ đồ thị vị trí, vận tốc, gia tốc của cần đẩy trong khoảng thời gian $t = [0, 5]s$.
c. Xác định vị trí vận tốc, gia tốc của cần đẩy tại $t = 3s$.



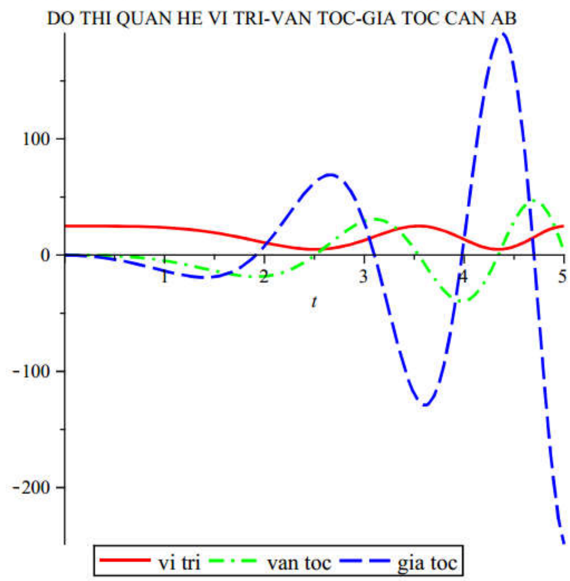


➢ Vị trí của cần đẩy AB được xác định: $\begin{cases} x_{AB} = OC\cos\varphi + R \\ y_{AB} = 0 \end{cases}$

➢ Vận tốc cần đẩy AB : $\begin{cases} v_{AB} = \dot{x}_{AB} \\ a_{AB} = \ddot{x}_{AB} \end{cases}$

➢ Chương trình Maple:

```
restart :
Loading LinearAlgebra
R := 15 : OC := 10 : φ := 0.5·t^2 :
x := R + OC·cos(φ) :
v := diff(x, t) :
a := diff(x, t$2) :
#---------------------------------
plot([x, v, a], t=0..5, linestyle=[solid, dashdot, dash], color=[red, green, blue], legend=["vi tri",
    "van toc", "gia toc"], thickness=[2, 2, 2], title
    ="DO THI QUAN HE VI TRI-VAN TOC-GIA TOC CAN AB")
```




```
# vi tri, van toc, gia toc can AB tai t=3s
xAB=evalf(eval(x, t=3)); vAB=evalf(eval(v, t=3)); aAB=evalf(eval(a, t=3));
```

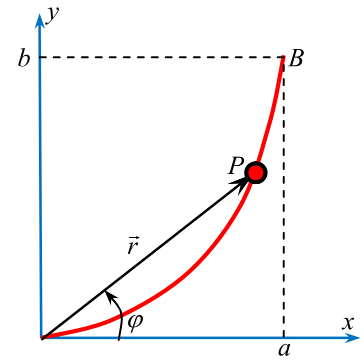
$xAB = 12.89204201$

$vAB = 29.32590353$

$aAB = 28.74692313$

B3.5. Điểm P chuyển động theo quĩ đạo parabol $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$. Cho biết qui luật $\varphi = \arctan\omega_0 t$ trong đó φ là góc giữa trục x và véctơ vị trí $\vec{r}$ của điểm P như hình vẽ, a, b, ω_0 là các hằng số cho trước.

a. Hãy xác định biểu thức xác định vị trí, vận tốc, gia tốc của điểm P.



b. Vẽ qũi đạo của điểm P, đồ thị quan hệ vận tốc, gia tốc của điểm P với $a = 15cm; b = 20cm; \omega_0 = 5rad/s; t = [0,3]s$.

c. Xác định vận tốc, gia tốc của điểm P khi đạt tới vị trí điểm B.

- Ta có quan hệ vị trí: $\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \omega_0 t$
- Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ \frac{y}{x} = \omega_0 t \end{cases}$ ta xác định được vị trí của điểm P: $\begin{cases} x = \frac{a^2}{b}\omega_0 t \\ y = \frac{a^2}{b}(\omega_0 t)^2 \end{cases}$
- Vận tốc, gia tốc điểm P: $\begin{cases} v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y} \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \end{cases}$
- Khi $P \equiv B, x = a, y = b$
- Chương trình Maple:

```
restart :
Loading LinearAlgebra
pt1 := y-b·(x/a)^2 : pt2 := y/x - ω·t :
n := solve({pt1, pt2}, [x, y])
```

$$\left[\left[x = \frac{\omega t a^2}{b}, y = \frac{\omega^2 t^2 a^2}{b}\right]\right] \quad \textbf{(1)}$$

```
assign(n) :
vx := diff(x, t) : vy := diff(y, t) : vp := sqrt(vx^2 + vy^2)
```

$$\sqrt{\frac{\omega^2 a^4}{b^2} + \frac{4\omega^4 t^2 a^4}{b^2}} \quad \textbf{(2)}$$

```
ax := diff(x, t$2) : ay := diff(y, t$2) : ap := sqrt(ax^2 + ay^2)
```

$$2\sqrt{\frac{\omega^4 a^4}{b^2}} \quad \textbf{(3)}$$

```
a := 15 : b := 20 : ω := 5 :
plot([x, y, t=0..3], title="QUI DAO CUA DIEM P")
plot([vp, ap], t=0..3, legend=["van toc", "gia toc"], thickness=[2, 2], linestyle=[solid, dash])
t2 := solve(a - x, t)
```

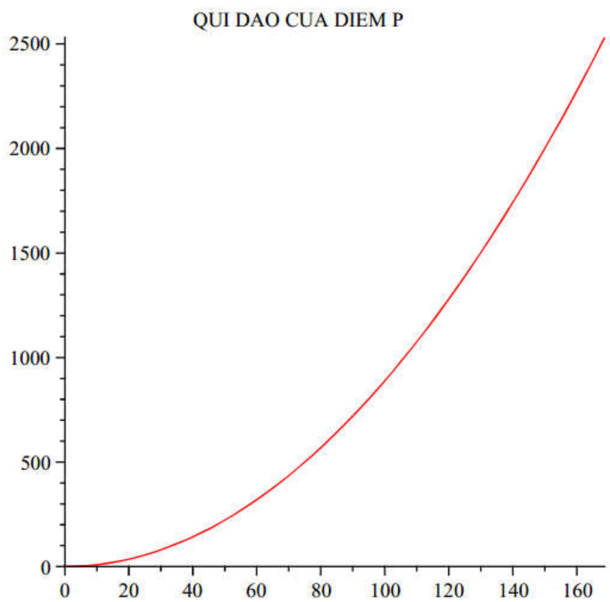
$$\frac{4}{15} \quad \textbf{(4)}$$

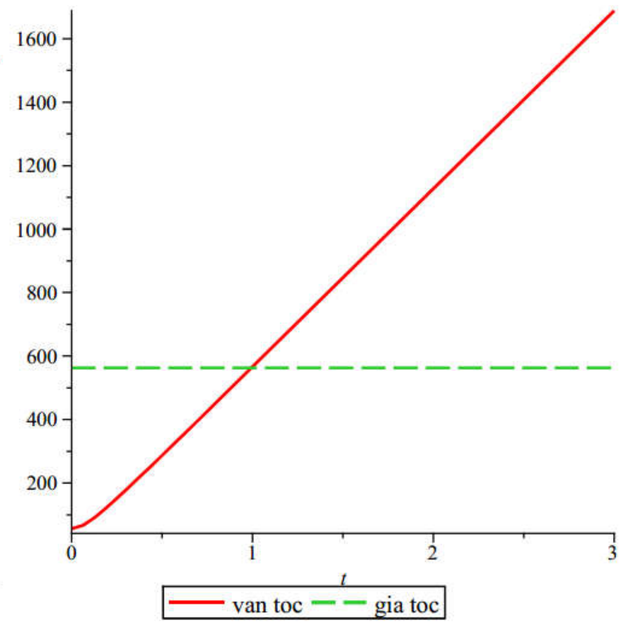
$vp1 := evalf(subs(t = t2, vp))$

$$160.2000702 \quad (5)$$

$ap1 := evalf(subs(t = t2, ap))$

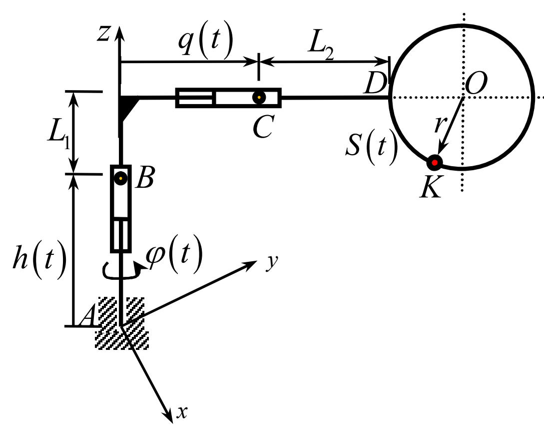
$$562.5000000 \quad (6)$$





B3.6. Cho tay máy như hình vẽ. Các độ dài $L_1 = 20cm; L_2 = 30cm; r = 10cm$ và các góc quay $\varphi = 2t; h = 2e^{-0.2t}; q = 3,5t;\ \widehat{DK} = S(t) = \sin(0,2t)$. (thời gian tính bằng giây, chiều dài tính bằng centimet).

a. Lập phương trình chuyển động của K
b. Vẽ quĩ đạo điểm K trong khoảng $t = [0, 10s]$.
c. Vẽ đồ thị vận tốc, gia tốc điểm K trong khoảng $t = [0, 10s]$.
d. Khi $t = 3s$, xác định vị trí, vận tốc, gia tốc điểm K.



➢ Ta có vị trí của điểm K:

$$\begin{cases} x_K = \left[q + L_2 + r(1 - \cos\frac{S}{r})\right]\cos\varphi \\ y_K = \left[q + L_2 + r(1 - \cos\frac{S}{r})\right]\sin\varphi \\ z_K = h + L_1 - r\sin\frac{S}{r} \end{cases}$$

➢ Vận tốc, gia tốc điểm K: $\begin{cases} v_x = \dot{x}_K, v_y = \dot{y}_K, v_z = \dot{z}_K \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ a_x = \ddot{x}_K, a_y = \ddot{y}_K, a_z = \ddot{z}_K \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{cases}$

➢ Chương trình Maple:

restart :

Loading LinearAlgebra

Loading plots

$l1 := 20 : l2 := 30 : r := 10 :$

$\varphi := 2 \cdot t : h := 2 \cdot \exp(-0.2 \cdot t) : q := 3.5 \cdot t : S := \sin(0.2 \cdot t) :$

$xk := \left(q + l2 + r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{S}{r}\right)\right)\right) \cdot \cos(\varphi)$

$$\left(3.5\, t + 40 - 10 \cos\left(\frac{1}{10} \sin(0.2\, t)\right)\right) \cos(2\, t) \quad \textbf{(1)}$$

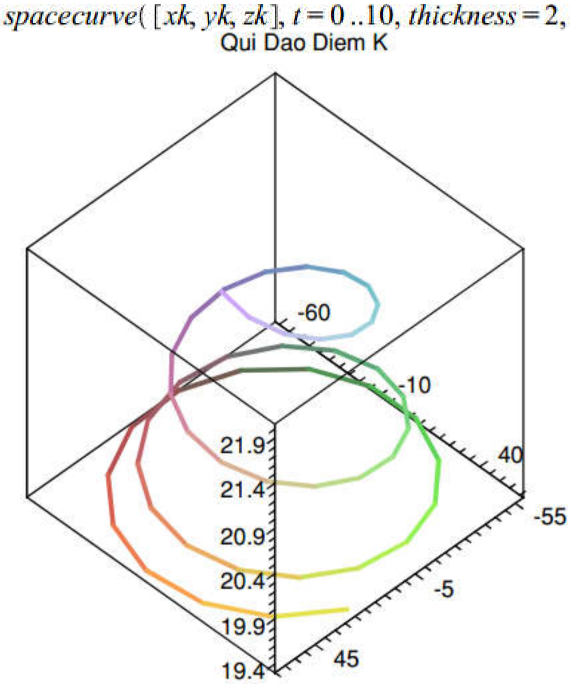
$yk := \left(q + l2 + r \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{S}{r}\right)\right)\right) \cdot \sin(\varphi)$

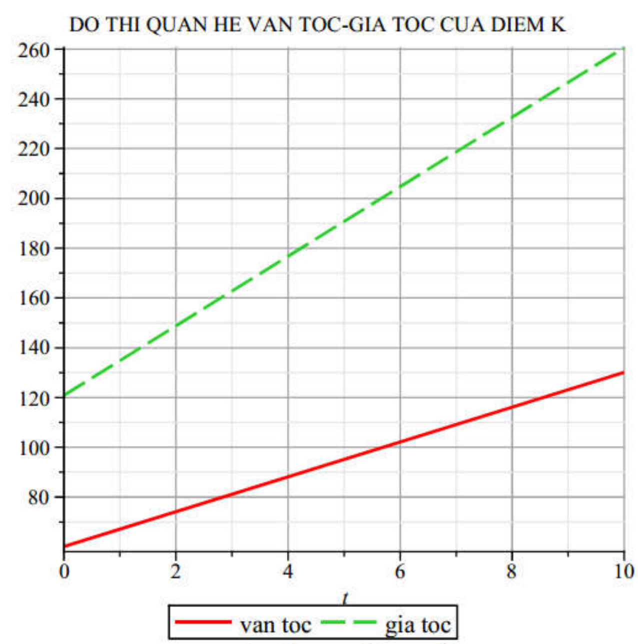
$$\left(3.5\, t + 40 - 10 \cos\left(\frac{1}{10} \sin(0.2\, t)\right)\right) \sin(2\, t) \quad \textbf{(2)}$$

$zk := h + l1 - r \cdot \sin\left(\frac{S}{r}\right)$

$$2\, e^{-0.2\, t} + 20 - 10 \sin\left(\frac{1}{10} \sin(0.2\, t)\right) \quad \textbf{(3)}$$

spacecurve([*xk*, *yk*, *zk*], *t* = 0 ..10, *thickness* = 2, *axes* = *box*, *title* = "Qui Dao Diem K")





$vx := diff(xk, t) : vy := diff(yk, t) : vz := diff(zk, t) : vk := \mathrm{sqrt}(vx^2 + vy^2 + vz^2) :$

$ax := diff(xk, t\$2) : ay := diff(yk, t\$2) : az := diff(zk, t\$2) : ak := \mathrm{sqrt}(ax^2 + ay^2 + az^2) :$

plot([*vk*, *ak*], *t* = 0 ..10, *thickness* = [2, 2], *linestyle* = [*solid*, *dash*], *legend* = ["van toc", "gia toc"], *gridlines* = *true*, *title* = "DO THI QUAN HE VAN TOC-GIA TOC CUA DIEM K")

 # vi tri, van toc, gia toc diem K tai t=3s

$x1 := evalf(subs(t = 3, xk))$

$$38.90219867 \quad \textbf{(4)}$$

$vx := evalf(subs(t = 3, vk))$

$$81.10873904 \quad \textbf{(5)}$$

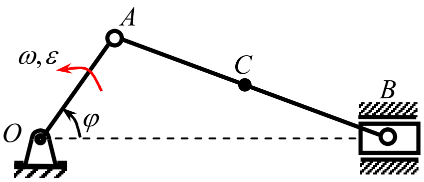
$a1 := evalf(subs(t=3, ak))$

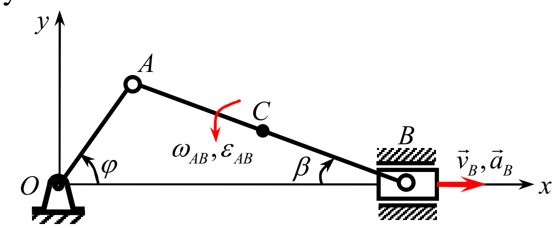
$$162.6691081 \tag{6}$$

B3.7. Tay quay OA của cơ cấu tay quay con trượt quay quanh trục cố định tại O. Cho biết các độ dài $OA = r = 10cm;\ AB = l = 30cm;\ AC = l/2$. Tại thời điểm $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ tay quay OA có vận tốc góc $\omega = 5rad/s$, gia tốc góc $\varepsilon = 10rad/s^2$.

a. Xác định vận tốc, gia tốc con trượt B và trung điểm C của thanh AB.

b. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc thanh truyền AB.





- Tay quay OA quay quanh O ta có vận tốc và gia tốc của điểm A thuộc tay quay OA:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_{AO} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_{AO} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_{AO} \times \vec{r}_{AO} - \omega_{AO}^2 .\vec{r}_{AO} \end{cases}$$

- Thanh AB chuyển động song phẳng, ta có quan hệ vận tốc và gia tốc của điểm B so với điểm A thuộc thanh truyền AB:

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_{B_x} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_{B_x} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{BA}^2 .\vec{r}_{BA} \end{cases}$$

- Ta có quan hệ vận tốc và gia tốc của điểm C so với điểm A thuộc thanh truyền AB:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{CA} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} \Rightarrow \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{CA} - \omega_{BA}^2 .\vec{r}_{CA} \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A + \begin{bmatrix} l\cos\beta \\ -l\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = r_A + \begin{bmatrix} \dfrac{l}{2}\cos\beta \\ -\dfrac{l}{2}\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$\omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{AB} \end{bmatrix}; v_B = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_B = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \beta = \arcsin(\frac{r\sin\varphi}{l})$$

- Chương trình Maple

restart :
Loading LinearAlgebra
Loading plots

$r := 10 : l := 30 : \varphi := \frac{\text{Pi}}{3} : \omega := 5 : \varepsilon := 10 :$

$\beta := \arcsin\left(\frac{r \cdot \sin(\varphi)}{l}\right) :$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := ra + \begin{bmatrix} 1 \cdot \cos(\beta) \\ -1 \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := ra + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \cos(\beta) \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$\omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} : \omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} : vb := \begin{bmatrix} v3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ab := \begin{bmatrix} a3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$va := \omega oa \ \&x \ (ra - ro) : aa := \varepsilon oa \ \&x \ (ra - ro) - \omega oa \ . \ \omega oa \cdot (ra - ro) :$

$pt1 := vb - va - \omega ab \ \&x \ (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} v3 + 25\sqrt{3} - 5\,\omega 2\sqrt{3} \\ -25 - 5\,\omega 2\sqrt{33} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

$n1 := evalf(solve(\{pt1[1], pt1[2]\}, [v3, \omega 2]))$

$$[[v3 = -50.83905382,\ \omega 2 = -0.8703882798]] \quad \textbf{(2)}$$

$assign(n1) :$

$pt2 := ab - aa - \varepsilon ab \ \&x \ (rb - ra) + \omega ab \ . \ \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} a3 + 50\sqrt{3} + 125 - 5\,\varepsilon 2\sqrt{3} + 3.787878788\sqrt{33} \\ -50 + 121.2121212\sqrt{3} - 5\,\varepsilon 2\sqrt{33} \\ 0. \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

$n2 := evalf(solve(\{pt2[1], pt2[2]\}, [a3, \varepsilon 2]))$

$$[[a3 = -185.1368488,\ \varepsilon 2 = 5.568589369]] \quad \textbf{(4)}$$

$assign(n2) :$

$vc := evalf(norm(va + \omega ab \ \&x \ (rc - ra), 2))$

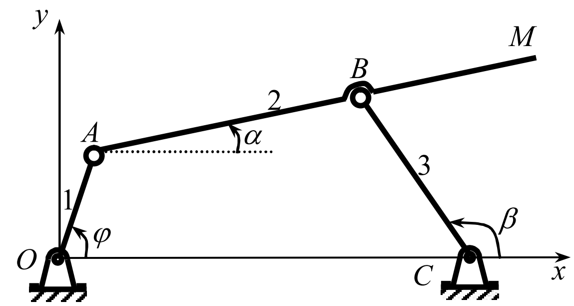
$$48.70164422 \quad \textbf{(5)}$$

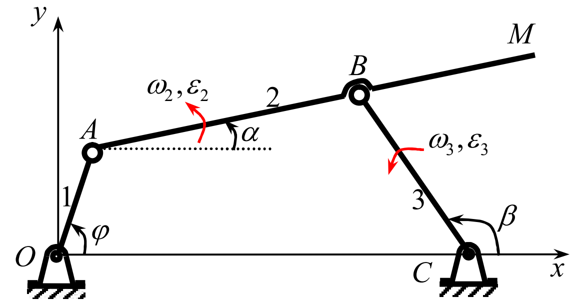
$ac := evalf(norm(aa + \varepsilon ab \ \&x \ (rc - ra) - \omega ab \ . \ \omega ab \cdot (rc - ra), 2))$

$$215.1316503 \quad \textbf{(6)}$$

B.4.1. Cho cơ cấu bốn khâu bản lề như hình vẽ. Tay quay OA quay quanh O. Cho biết các độ dài $OA = l_1 = 10cm;\ AB = l_2 = 20cm;\ BC = l_3 = 30cm;\ CO = l_4 = 40cm;\ BM = 10cm$. Tại thời điểm $\varphi = \frac{\pi}{2}$ tay quay OA có vận tốc góc $\omega_1 = 3rad/s$, gia tốc góc $\varepsilon_1 = 5rad/s^2$. Hãy xác định:

a. Các góc α, β tính bằng radian.
b. Vận tốc góc các thanh AB, BC.
c. Gia tốc góc các thanh AB, BC.
d. Trị số vận tốc và gia tốc điểm M





➢ Ta có quan hệ vị trí:

$$\begin{cases} l_1\cos\varphi + l_2\cos\alpha - l_3\cos\beta - l_4 = 0 \\ l_1\sin\varphi + l_2\sin\alpha - l_3\sin\beta = 0 \end{cases}$$

➢ Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{AO}^2.\vec{r}_{AO} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{BA}^2.\vec{r}_{BA} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} - \omega_{BC}^2.\vec{r}_{BC} \\ \vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA} \Rightarrow \vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{MA} \wedge \vec{r}_{MA} \\ \vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} \Rightarrow \vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{MA} \wedge \vec{r}_{MA} - \omega_{MA}^2.\vec{r}_{MA} \end{cases}$$

➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} l_1\cos\varphi \\ l_1\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A + \begin{bmatrix} l_2\cos\alpha \\ l_2\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = r_B + \begin{bmatrix} -l_3\cos\beta \\ -l_3\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; r_M = r_A + \begin{bmatrix} AM\cos\alpha \\ AM\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}; \omega_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}; \varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple

$restart:$
Loading LinearAlgebra

$l1 := 10 : l2 := 20 : l3 := 30 : l4 := 40 : l5 := 10 : \varphi := \frac{\pi}{2} : \omega 1 := 3 : \varepsilon 1 := 5 :$

$pt1 := l1 \cdot \cos(\varphi) + l2 \cdot \cos(\alpha) - l3 \cdot \cos(\beta) - l4 :$
$pt2 := l1 \cdot \sin(\varphi) + l2 \cdot \sin(\alpha) - l3 \cdot \sin(\beta) :$
$n1 := evalf(solve(\{pt1, pt2\}, [\alpha, \beta]))$

$$[[\alpha = 0.5109907479, \beta = 2.421623983]] \quad \textbf{(1)}$$

$assign(n1):$

$\omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 1 \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 1 \end{bmatrix} : \omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} : \omega bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 3 \end{bmatrix} : \varepsilon bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix} :$

$ra := \begin{bmatrix} l1 \cdot \cos(\varphi) \\ l1 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := ra + \begin{bmatrix} l2 \cdot \cos(\alpha) \\ l2 \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := rb + \begin{bmatrix} -l3 \cdot \cos(\beta) \\ -l3 \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} : rm := ra + \begin{bmatrix} (l2 + l5) \cdot \cos(\alpha) \\ (l2 + l5) \cdot \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} :$

$va := \omega oa \;\&x\; ra : \quad aa := \varepsilon oa \;\&x\; ra - \omega oa . \omega oa \cdot ra :$
$pt3 := \omega bc \;\&x\; (rb - rc) - va - \omega ab \;\&x\; (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} -19.7808335399999998\, \omega 3 + 30 + 9.78083353999999972\, \omega 2 \\ -22.5547916099999988\, \omega 3 - 17.4452083800000004\, \omega 2 \\ 0. \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$n2 := solve(\{pt3[1], pt3[2]\}, [\omega 2, \omega 3])$

$$[[\omega 2 = -1.196148456, \omega 3 = 0.9251718853]] \quad \textbf{(3)}$$

$assign(n2):$
$pt4 := \varepsilon bc \;\&x\; (rb - rc) - \omega bc . \omega bc \cdot (rb - rc) - aa - \varepsilon ab \;\&x\; (rb - ra) + \omega ab . \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} -19.7808335399999998\, \varepsilon 3 + 94.26571687 + 9.78083353999999972\, \varepsilon 2 \\ -22.5547916099999988\, \varepsilon 3 + 87.06286790 - 17.4452083800000004\, \varepsilon 2 \\ 0. \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

$n3 := solve(\{pt4[1], pt4[2]\}, [\varepsilon 2, \varepsilon 3])$

$$[[\varepsilon 2 = -0.7141204006, \varepsilon 3 = 4.412403751]] \quad \textbf{(5)}$$

$assign(n3):$
$vm := evalf(norm(va + \omega ab \;\&x\; (rm - ra), 2))$

$$33.68611600 \quad \textbf{(6)}$$

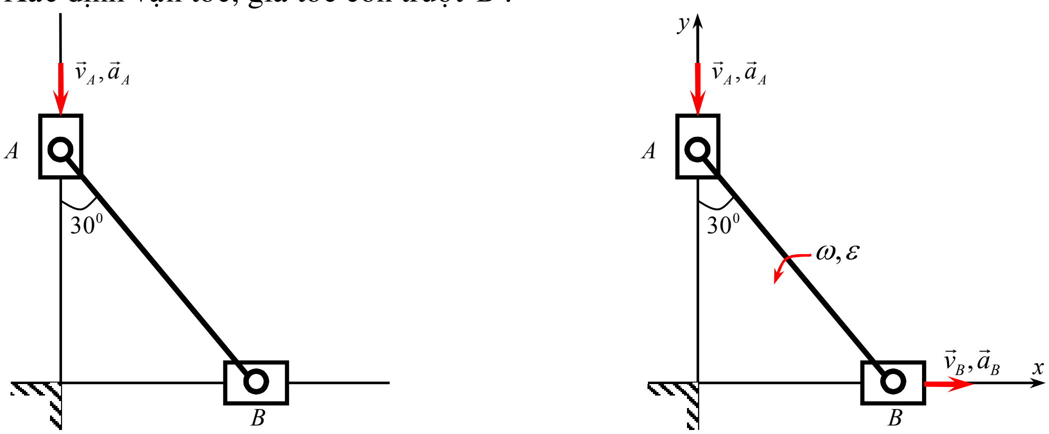
$am := evalf(norm(aa + \varepsilon ab \,\&x\, (rm - ra) - \omega ab\,.\,\omega ab \cdot (rm - ra), 2))$

$$150.7970436 \qquad (7)$$

B.4.2. Cho cơ cấu như hình vẽ, con trượt A trượt theo phương thẳng đứng làm con trượt B trượt dọc theo phương ngang. Tại thời điểm khảo sát con trượt A có vận tốc $v_A = 20cm/s$ và gia tốc $a_A = 15cm/s^2$. Cho $AB = l = 25cm$.

a. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc thanh AB.

b. Xác định vận tốc, gia tốc con trượt B.



➢ Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega^2 . \vec{r}_{BA} \end{cases}$$

➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ l\cos 30^0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} l\sin 30^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; v_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -v_A \\ 0 \end{bmatrix}; a_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_A \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$v_B = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_B = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple

restart :
Loading LinearAlgebra

$l := 25 : va := 20 : aa := 15 : \varphi := \frac{\mathrm{Pi}}{6} :$

$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ l\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} l\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : vA := \begin{bmatrix} 0 \\ -va \\ 0 \end{bmatrix} : aA := \begin{bmatrix} 0 \\ -aa \\ 0 \end{bmatrix} : vB := \begin{bmatrix} vb \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : aB := \begin{bmatrix} ab \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$

$\omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} :$

$pt1 := vB - vA - \omega ab \ \&x \ (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} vb - \frac{25}{2}\,\omega\sqrt{3} \\ 20 - \frac{25}{2}\,\omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$n1 := solve(\{pt1[1], pt1[2]\}, [vb, \omega])$

$$\left[\left[vb = 20\sqrt{3}, \omega = \frac{8}{5}\right]\right] \quad (2)$$

$assign(n1)$

$pt2 := aB - aA - \varepsilon ab \ \&x \ (rb - ra) + \omega ab \,.\, \omega ab \cdot (rb - ra)$

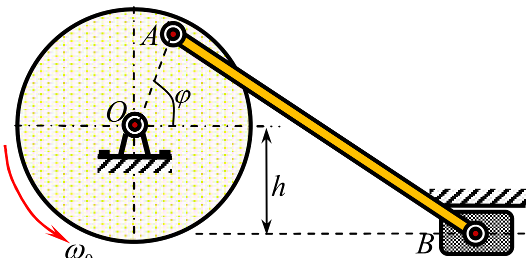
$$\begin{bmatrix} ab - \frac{25}{2}\,\varepsilon\sqrt{3} + 32 \\ 15 - \frac{25}{2}\,\varepsilon - 32\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$n2 := evalf(solve(\{pt2[1], pt2[2]\}, [ab, \varepsilon]))$

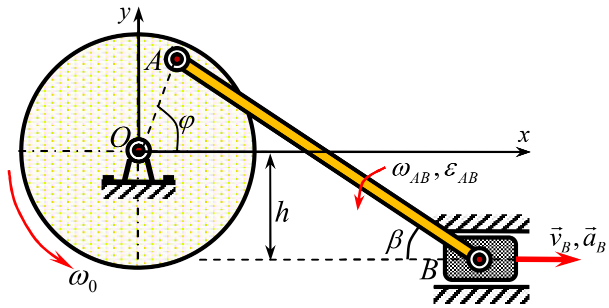
$$[[ab = -102.0192379, \varepsilon = -3.234050068]] \quad (4)$$

B.4.3. Cho cơ cấu tay quay con trượt như hình vẽ. Đĩa tròn quay đều quanh trục cố định tại O với vận tốc góc $\omega_0 = 5rad/s$ làm con trượt B tịnh tiến qua lại theo phương ngang. Cho các kích thước $OA = r = 20cm,\ AB = l = 50cm,\ h = 20cm$. Khi $\varphi = 60^0$, hãy xác định:

a. Vận tốc góc, gia tốc góc thanh truyền AB.
b. Vận tốc, gia tốc con trượt B.



Hình 3.10



- Ta có quan hệ vị trí: $r\sin\varphi - l\sin\beta + h = 0$
- Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} \Rightarrow \vec{a}_A = -\omega_{AO}^2.\vec{r}_{AO} \ \left(\varepsilon_{OA} = 0\right) \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{BA}^2.\vec{r}_{BA} \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_A = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A + \begin{bmatrix} l\cos\beta \\ -l\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{AB} \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{AB} \end{bmatrix}; v_B = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_B = \begin{bmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple

$restart:$

Loading LinearAlgebra

$r := 20 : l := 50 : h := 20 : \varphi := \frac{\pi}{3} : \omega 0 := 5 :$

$pt1 := r\cdot\sin(\varphi) - l\cdot\sin(x) + h :$

$\beta := evalf(solve(pt1, x))$

$$0.8426513251 \tag{1}$$

$ra := \begin{bmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := ra + \begin{bmatrix} l\cdot\cos(\beta) \\ -l\cdot\sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} : \omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 0 \end{bmatrix} : \omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} :$

$vb := \begin{bmatrix} v3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ab := \begin{bmatrix} a3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$

$va := \omega oa \ \&x \ ra : \ aa := -\omega oa \, . \, \omega oa \cdot ra :$

$pt2 := vb - va - \omega ab \ \&x \ (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} v3 + 50\sqrt{3} - 37.32050808\,\omega 2 \\ -50 - 33.27430956\,\omega 2 \\ 0. \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

$n2 := solve(\{pt2[1], pt2[2]\}, [v3, \omega 2])$

$$[[v3 = -142.6826042, \omega 2 = -1.502660781]] \quad \textbf{(3)}$$

$assign(n2):$

$pt3 := ab - aa - \varepsilon ab \,\&x\, (rb - ra) + \omega ab \,.\, \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} a3 + 325.1330390 - 37.32050808\,\varepsilon 2 \\ 250\sqrt{3} - 33.27430956\,\varepsilon 2 - 84.2693125056260471 \\ 0. \end{bmatrix} \quad \textbf{(4)}$$

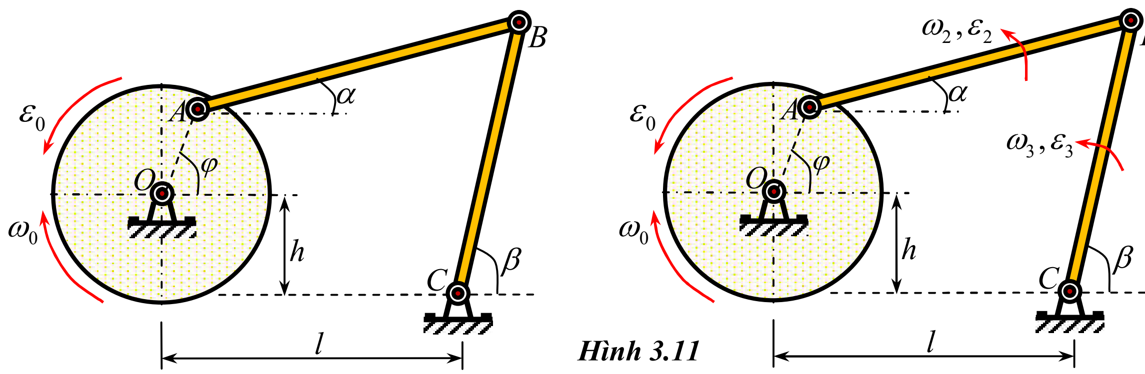
$n3 := solve(\{pt3[1], pt3[2]\}, [a3, \varepsilon 2])$

$$[[a3 = 66.01799174, \varepsilon 2 = 10.48086028]] \quad \textbf{(5)}$$

B.4.4. Cho cơ cấu bốn khâu bản lề như hình 2.46. Đĩa tròn quay quanh trục cố định tại O, thanh BC quay quanh trục cố định tại C. Cho các kích thước $OA = 10cm,\ AB = 40cm,\ BC = 40cm,\ l = 30cm,\ h = 10cm,$ khi $\varphi = 30^0$ đĩa tròn quay quanh trục cố định tại O với vận tốc góc, gia tốc góc $\omega_0 = 10rad/s, \varepsilon_0 = 5rad/s^2$. Hãy xác định:

a. Các góc α, β.

b. Vận tốc góc, gia tốc góc các thanh AB và BC.



Hình 3.11

➢ Ta có quan hệ vị trí:

$$\begin{cases} OA\cos\varphi + AB\cos\alpha - BC\cos\beta - l = 0 \\ h + OA\sin\varphi + AB\sin\alpha - BC\sin\beta = 0 \end{cases}$$

➢ Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} \Rightarrow \vec{v}_A = \vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{AO}^2.\vec{r}_{AO} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{BA}^2.\vec{r}_{BA} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{\varepsilon}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} - \omega_{BC}^2.\vec{r}_{BC} \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} OA\cos\varphi \\ OA\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A + \begin{bmatrix} AB\cos\alpha \\ AB\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = r_B + \begin{bmatrix} -BC\cos\beta \\ -BC\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}; \omega_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}; \varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$OA := 10 : AB := 40 : BC := 40 : l := 30 : h := 10 : \varphi := \frac{\pi}{6} : \omega 0 := 10 : \varepsilon 0 := 5 :$

$pt1 := OA\cdot\cos(\varphi) + AB\cdot\cos(\alpha) - BC\cdot\cos(\beta) - l :$

$pt2 := h + OA\cdot\sin(\varphi) + AB\cdot\sin(\alpha) - BC\cdot\sin(\beta) :$

$n1 := evalf(solve(\{pt1, pt2\}, [\alpha, \beta]))$

$$[[\alpha = 0.6259928567, \beta = 1.290242200]] \quad \textbf{(1)}$$

$assign(n1) :$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} OA\cdot\cos(\varphi) \\ OA\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : rb := ra + \begin{bmatrix} AB\cdot\cos(\alpha) \\ AB\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := rb + \begin{bmatrix} -BC\cdot\cos(\beta) \\ -BC\cdot\sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$\omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 0 \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 0 \end{bmatrix} : \omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} : \omega bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 3 \end{bmatrix} : \varepsilon bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix} :$$

$va := \omega oa \ \&x \ (ra - ro) : aa := \varepsilon oa \ \&x \ (ra - ro) - \omega oa \ . \ \omega oa \cdot (ra - ro) :$

$pt3 := \omega bc \ \&x \ (rb - rc) - va - \omega ab \ \&x \ (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} -38.43608619\,\omega 3 + 50 + 23.43608618\,\omega 2 \\ 11.07552611\,\omega 3 - 50\sqrt{3} - 32.41527208\,\omega 2 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (2)$$

$n2 := solve(\{pt3[1], pt3[2]\}, [\omega 2, \omega 3])$

$$[[\omega 2 = -2.813290040, \omega 3 = -0.4145195158]] \quad (3)$$

$assign(n2):$

$pt4 := \varepsilon bc \ \&x\ (rb - rc) - \omega bc . \omega bc \cdot (rb - rc) - aa - \varepsilon ab\ \&x\ (rb - ra) + \omega ab . \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} -38.43608619\,\varepsilon 3 + 279.6508718 + 500\sqrt{3} + 23.43608618\,\varepsilon 2 \\ 11.07552611\,\varepsilon 3 + 678.8829321 - 25\sqrt{3} - 32.41527208\,\varepsilon 2 \\ 0. \end{bmatrix} \quad (4)$$

$n3 := solve(\{pt4[1], pt4[2]\}, [\varepsilon 2, \varepsilon 3])$

$$[[\varepsilon 2 = 37.63194493, \varepsilon 3 = 52.75307611]] \quad (5)$$

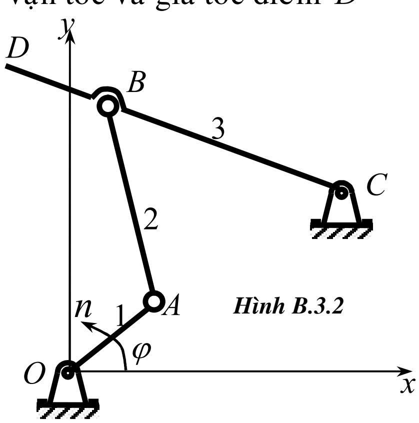
B.4.5. Cho cơ cấu bốn khâu bản lề như hình vẽ. Tay quay OA quay đều quanh O với tốc độ $n = 60vong/phut$. Cho biết các độ dài $OA = l_1 = 0{,}15m;\ AB = l_2 = 0{,}35m;$ $BC = l_3 = 0{,}3m;\ \ BD = l_4 = 0{,}15m;\ \ x_C = 0{,}3m; y_C = 0{,}3m$. Tại thời điểm $\varphi = 45^0$ Hãy xác định:

a. Tọa độ các điểm B, C.

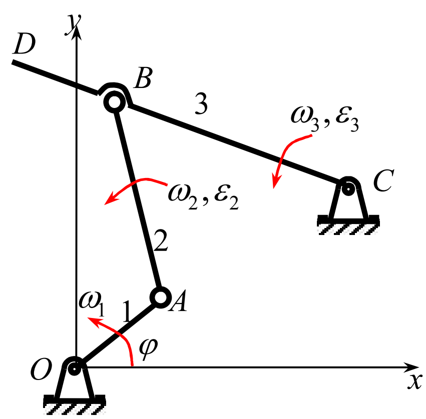
b. Vận tốc góc các thanh AB, BC.

c. Gia tốc góc các thanh AB, BC.

d. Trị số vận tốc và gia tốc điểm D



Hình B.3.2



- Ta có quan hệ vị trí:

$$\begin{cases} x_A = OA\cos\varphi \\ y_A = OA\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = AB^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = BC^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 = BD^2 \\ \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \end{cases}$$

- Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{AO} = \vec{\omega}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} = \vec{\varepsilon}_{AO} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{AO}^2 . \vec{r}_{AO} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{BA} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{BA}^2 . \vec{r}_{BA} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC} = \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC} = \vec{\varepsilon}_{BC} \wedge \vec{r}_{BC} - \omega_{BC}^2 . \vec{r}_{BC} \\ \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC} = \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{DC} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC} = \vec{\varepsilon}_{BC} \wedge \vec{r}_{DC} - \omega_{BC}^2 . \vec{r}_{DC} \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}; \omega_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}; \varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple

$restart:$
Loading LinearAlgebra

$n, l1, l2, l3, l4, xc, yc, \varphi := 60, 0.15, 0.35, 0.3, 0.15, 0.3, 0.3, \frac{\pi}{4}:$

$\omega 1 := \frac{\pi \cdot n}{30}:$
$xa := l1 \cdot \cos(\varphi) : ya := l1 \cdot \sin(\varphi):$
$pt1 := (xb - xa)^2 + (yb - ya)^2 = l2^2:$
$pt2 := (xb - xc)^2 + (yb - yc)^2 = l3^2:$
$n1 := solve(\{pt1, pt2\}, [xb, yb])$

$$[[xb = 0.4497875697, yb = 0.04006984789], [xb = 0.04006984789, yb = 0.4497875697]] \quad (1)$$

if $eval(xb, n1[1]) < xc$ **then** $xb := eval(xb, n1[1]) : yb := eval(yb, n1[1]):$
else $xb := eval(xb, n1[2]) : yb := eval(yb, n1[2]):$ **end if**:
$pt3 := (xd - xb)^2 + (yd - yb)^2 = l4^2:$
$pt4 := \frac{yc - yb}{xc - xb} = \frac{yd - yb}{xd - xb}:$
$n2 := solve(\{pt3, pt4\}, [xd, yd])$

$$[[xd = 0.1700349239, yd = 0.3748937849], [xd = -0.08989522816, yd = 0.5246813545]] \quad (2)$$

if $eval(xd, n2[1]) < xb$ **then** $xd := eval(xd, n2[1]) : yd := eval(yd, n2[1]):$
else $xd := eval(xd, n2[2]) : yd := eval(yd, n2[2]):$ **end if**:

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} xa \\ ya \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} xb \\ yb \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} xc \\ yc \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} xd \\ yd \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$\omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 1 \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} : \omega bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 3 \end{bmatrix} : \varepsilon bc := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix}:$$

$va := \omega oa \,\&x\, (ra - ro) : aa := \varepsilon oa \,\&x\, (ra - ro) - \omega oa \,.\, \omega oa \cdot (ra - ro):$
$pt5 := \omega bc \,\&x\, (rb - rc) - va - \omega ab \,\&x\, (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} -0.1497875697\,\omega 3 + 0.1500000000\,\pi\sqrt{2} + \omega 2\,(0.4497875697 - 0.07500000000\sqrt{2}) \\ -0.2599301521\,\omega 3 - 0.1500000000\,\pi\sqrt{2} - \omega 2\,(0.04006984789 - 0.07500000000\sqrt{2}) \\ 0. \end{bmatrix} \quad (3)$$

$n3 := solve(\{pt5[1], pt5[2]\}, [\omega 2, \omega 3])$

$$[[\omega 2 = -3.436388151, \omega 3 = -3.436388152]] \quad (4)$$

$assign(n3):$
$pt6 := \varepsilon bc \,\&x\, (rb - rc) - \omega bc \,.\, \omega bc \cdot (rb - rc) - aa - \varepsilon ab \,\&x\, (rb - ra) + \omega ab \,.\, \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$[[-0.1497875697\,\varepsilon 3 + 3.542629058 + 0.3000000000\,\pi^2\sqrt{2} + \varepsilon 2\,(0.4497875697 - 0.07500000000\sqrt{2}) - 0.8856572640\sqrt{2}], \quad (5)$$
$$[-0.2599301521\,\varepsilon 3 + 3.542629055 + 0.3000000000\,\pi^2\sqrt{2} - \varepsilon 2\,(0.04006984789 - 0.07500000000\sqrt{2}) - 0.8856572640\sqrt{2}],$$

[0.]]

$n4 := solve(\{pt6[1], pt6[2]\}, [\varepsilon2, \varepsilon3])$

$$[[\varepsilon2 = -8.978833644, \varepsilon3 = 22.64019925]] \quad (6)$$

$assign(n4)$:

$vD := norm(\omega bc \,\&x\, (rd - rc), 2)$

$$1.54637466878991160 \quad (7)$$

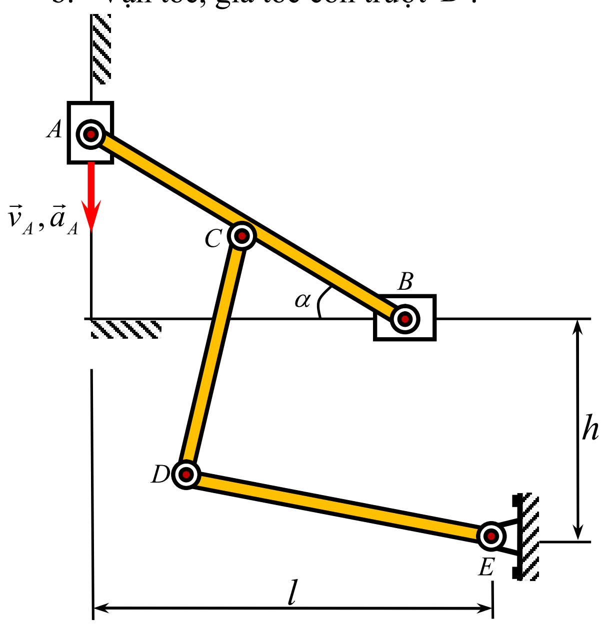
$aD := norm(\varepsilon bc \,\&x\, (rd - rc) - \omega bc \,.\, \omega bc \cdot (rd - rc), 2)$

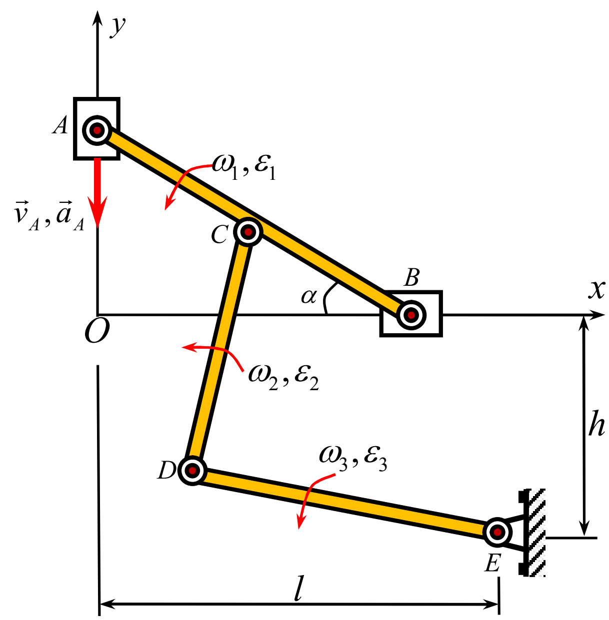
$$11.4906556581059008 \quad (8)$$

B.4.6. Cho cơ hệ như hình vẽ. Con trượt A trượt dọc theo phương thẳng đứng làm con trượt B trượt dọc theo phương ngang. Tại vị trí khảo sát con trượt A có vận tốc $v_A = 10cm/s$, gia tốc $a_A = 4cm/s^2$, thanh AB hợp với phương ngang một góc $\alpha = 30^0$. Cho các kích thước: $AB = l1 = 40cm; AC = BC; CD = l2 = 30cm; DE = l3 = 50cm; l = 50cm; h = 20cm$. Xác định:

a. Vận tốc góc, gia tốc góc các thanh AB, CD và thanh DE.

b. Vận tốc, gia tốc con trượt B.





- Ta có quan hệ vị trí:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{l_1}{2}\cos\alpha \\ y_C = \dfrac{l_1}{2}\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = CD^2 \\ (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 = DE^2 \end{cases}$$

- Quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_{AB}^2.\vec{r}_{BA} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{r}_{CA} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_{AB} \wedge \vec{r}_{CA} - \omega_{AB}^2.\vec{r}_{CA} \\ \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_{DC} = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC} = \vec{a}_C + \vec{\varepsilon}_{CD} \wedge \vec{r}_{DC} - \omega_{DC}^2.\vec{r}_{DC} \\ \vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_{DE} = \vec{\omega}_{DE} \wedge \vec{r}_{DE} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{DE} = \vec{\varepsilon}_{DE} \wedge \vec{r}_{DE} - \omega_{DE}^2.\vec{r}_{DE}\end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2}\cos\alpha \\ \frac{l_1}{2}\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} l_1\cos\alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 0 \end{bmatrix}; r_E = \begin{bmatrix} l \\ -h \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}; \omega_{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix}; \varepsilon_{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}; \omega_{DE} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix}; \varepsilon_{DE} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$l1 := 40 : l2 := 20 : l3 := 40 : l := 50 : h := 40 : v := 10 : a := 4 : \alpha := \frac{\pi}{6} :$

$xc := \frac{l1}{2}\cdot\cos(\alpha) : yc := \frac{l1}{2}\cdot\sin(\alpha) : xe := l : ye := -h :$

$pt1 := (xd - xc)^2 + (yd - yc)^2 = l2^2 :$

$pt2 := (xd - xe)^2 + (yd - ye)^2 = l3^2 :$

$n1 := evalf(solve(\{pt1, pt2\}, [xd, yd]))$

$$[[xd = 30.39744335, yd = -5.132539913]] \quad \textbf{(1)}$$

$assign(n1)$

$$ra := \begin{bmatrix} 0 \\ l1\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : rc := \begin{bmatrix} xc \\ yc \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} 11\cdot\cos(\alpha) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rd := \begin{bmatrix} xd \\ yd \\ 0 \end{bmatrix} : re := \begin{bmatrix} xe \\ ye \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$\omega ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 1 \end{bmatrix} : \varepsilon ab := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 1 \end{bmatrix} : \omega cd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon cd := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} : \omega de := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega 3 \end{bmatrix} : \varepsilon de := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 3 \end{bmatrix} :$$

$va := \begin{bmatrix} 0 \\ -v \\ 0 \end{bmatrix} : aa := \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} :$

$pt3 := \begin{bmatrix} vb \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - va - \omega ab \,\&x\, (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} vb - 20\,\omega 1 \\ 10 - 20\,\omega 1\,\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

$n2 := solve(\{pt3[1], pt3[2]\}, [vb, \omega 1])$

$$\left[\left[vb = \frac{10}{3}\sqrt{3}, \omega 1 = \frac{1}{6}\sqrt{3}\right]\right] \qquad (3)$$

$assign(n2):$

$pt4 := \begin{bmatrix} ab \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - aa - \varepsilon ab \,\&x\, (rb - ra) + \omega ab \,.\, \omega ab \cdot (rb - ra)$

$$\begin{bmatrix} ab - 20\,\varepsilon 1 + \frac{5}{3}\sqrt{3} \\ \frac{7}{3} - 20\,\varepsilon 1\,\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$n3 := solve(\{pt4[1], pt4[2]\}, [ab, \varepsilon 1])$

$$\left[\left[ab = -\frac{8}{9}\sqrt{3}, \varepsilon 1 = \frac{7}{180}\sqrt{3}\right]\right] \qquad (5)$$

$assign(n3):$

> $vc := va + \omega ab \,\&x\, (rc - ra) : ac := aa + \varepsilon ab \,\&x\, (rc - ra) + \omega ab \,.\, \omega ab \cdot (rc - ra) :$

$pt5 := \omega de \,\&x\, (rd - re) - vc - \omega cd \,\&x\, (rd - rc)$

$$\begin{bmatrix} -34.86746009\,\omega 3 - \frac{5}{3}\sqrt{3} - 15.13253991\,\omega 2 \\ -19.60255665\,\omega 3 + 5 - \omega 2\left(30.39744335 - 10\sqrt{3}\right) \\ 0. \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$n4 := solve(\{pt5[1], pt5[2]\}, [\omega 2, \omega 3])$

$$[[\omega 2 = 1.449413693, \omega 3 = -0.7118402612]] \qquad (7)$$

$assign(n4):$

$pt6 := \varepsilon de \ \&x \ (rd - re) + \omega de \ . \ \omega de \cdot \ (rd - re) - ac - \varepsilon cd \ \&x \ (rd - rc) + \omega cd \ . \ \omega cd \cdot \ (rd - rc)$

$$\begin{bmatrix} -34.86746009\ \varepsilon 3 + 53.92601058 - 22.23022275\sqrt{3} - 15.13253991\ \varepsilon 2 \\ -19.60255665\ \varepsilon 3 - 10.45585462 - \varepsilon 2\left(30.39744335 - 10\sqrt{3}\right) \\ 0. \end{bmatrix} \quad (8)$$

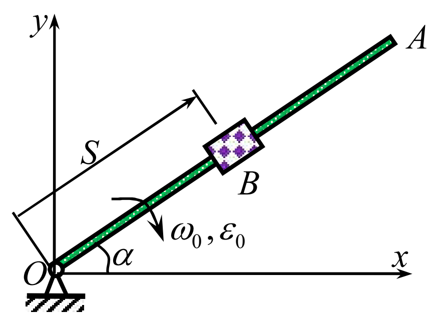
$n5 := solve(\{pt6[1], pt6[2]\}, [\varepsilon 2, \varepsilon 3])$

$$[[\varepsilon 2 = -4.185724435, \varepsilon 3 = 2.258919267]] \quad (9)$$

B.4.7. Tay quay OA quay quanh trục cố định tại O làm con trượt B trượt dọc theo OA với qui luật $S = 2t^2 - 1$ (t tính bằng giây, S tính bằng centimét) như hình B.3.14. Tại thời điểm khảo sát tay quay OA quay với vận tốc góc, gia tốc góc $\omega_0 = 6rad/s; \varepsilon_0 = 12rad/s^2$. Xác định vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối con trượt tại thời điểm $t = 2s$.

- Biểu thức quan hệ vận tốc và gia tốc trong hợp chuyển động:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \end{cases}$$



- Trong đó:

$$\begin{cases} \vec{v}_e = \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{r}_{BO} \\ \vec{v}_r = dS/dt \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{a}_e = \vec{\varepsilon}_{OA} \wedge r_{BO} - \omega_0^2 \wedge \vec{r}_{BO} \\ \vec{a}_r = d^2S/dt^2 \\ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} S\cos\alpha \\ S\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix}; v_r = \begin{bmatrix} \dot{S}\cos\alpha \\ \dot{S}\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; a_r = \begin{bmatrix} \ddot{S}\cos\alpha \\ \ddot{S}\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Chương trình Maple

restart :
Loading LinearAlgebra

$S := 2\cdot t^2 - 1 : \omega 0 := 6 : \varepsilon 0 := 12 : t1 := 2 :$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rb := \begin{bmatrix} S\cdot\cos(\alpha) \\ S\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : \omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega 0 \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon 0 \end{bmatrix} :$$

$$vr := \begin{bmatrix} diff(S,t)\cdot\cos(\alpha) \\ diff(S,t)\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : ar := \begin{bmatrix} diff(S,t\$2)\cdot\cos(\alpha) \\ diff(S,t\$2)\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$va := vr + \omega oa \;\&x\; (rb - ro)$

$$\begin{bmatrix} 4\,t\cos(\alpha) + 6\,(2\,t^2 - 1)\,\sin(\alpha) \\ 4\,t\sin(\alpha) - 6\,(2\,t^2 - 1)\,\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

$aa := ar + \varepsilon oa \;\&x\; (rb - ro) - \omega oa\,.\,\omega oa\cdot(rb - ro)$

$$\begin{bmatrix} 4\cos(\alpha) + 12\,(2\,t^2 - 1)\,\sin(\alpha) - 36\,(2\,t^2 - 1)\,\cos(\alpha) \\ 4\sin(\alpha) - 12\,(2\,t^2 - 1)\,\cos(\alpha) - 36\,(2\,t^2 - 1)\,\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

$t := t1 : \alpha := 1 :$

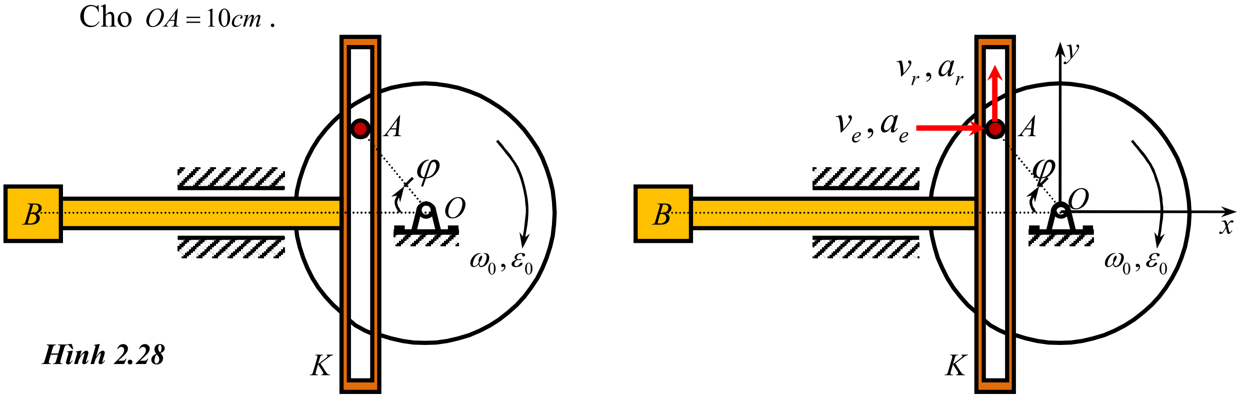
$Va := evalf(norm(va, 2,))$

$$42.75511666 \qquad \textbf{(3)}$$

$Aa := evalf(norm(aa, 2,))$

$$261.8396456 \qquad \textbf{(4)}$$

B.4.8. Đĩa tròn quay quanh trục cố định tại O làm cho chốt A chuyển động trong rãnh của culit K, tạo ra chuyển động theo phương ngang của culit K và pit-tông B. Tại thời điểm khảo sát $\varphi = 30^0$, đĩa tròn có vận tốc góc $\omega_0 = 5rad/s$, gia tốc góc $\varepsilon_0 = 4rad/s^2$. Hãy xác định vận tốc của pit-tông B, vận tốc tương đối của chốt A đối với rãnh K, gia tốc của pit-tông B. Cho $OA = 10cm$.



Hình 2.28

BK là hệ động.

Chốt A trượt dọc rãnh K là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.

Điểm A tịnh tiến cùng BK là chuyển động kéo theo (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.

Điểm A quay quanh O là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.

Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc: $\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_a = \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r, \quad \vec{a}_a = \vec{\varepsilon}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{OA}^2 . \vec{r}_{AO} \end{cases}$

Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} -OA\cos\varphi \\ OA\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon_0 \end{bmatrix}; v_r = \begin{bmatrix} 0 \\ v_r \\ 0 \end{bmatrix}; a_r = \begin{bmatrix} 0 \\ a_r \\ 0 \end{bmatrix}; v_e = \begin{bmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_e = \begin{bmatrix} a_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$$r := 10 : \omega 0 := 5 : \varepsilon 0 := 4 : \varphi := \frac{\pi}{6} :$$

$$ro := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : ra := \begin{bmatrix} -r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : \omega oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega 0 \end{bmatrix} : \varepsilon oa := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon 0 \end{bmatrix} : vra := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{vr} \\ 0 \end{bmatrix} : ara := \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{ar} \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$vea := \begin{bmatrix} \mathrm{ve} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : aea := \begin{bmatrix} \mathrm{ae} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

pt1 := *ωoa* &x (*ra* − *ro*) − *vea* − *vra*

$$\begin{bmatrix} 25 - ve \\ 25\sqrt{3} - vr \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

n1 := *solve*({*pt1*[1], *pt1*[2]}, [*ve*, *vr*])

$$[[ve = 25, vr = 25\sqrt{3}]] \quad \textbf{(2)}$$

pt2 := *εoa* &x (*ra* − *ro*) − *ωoa* . *ωoa*·(*ra* − *ro*) − *aea* − *ara*

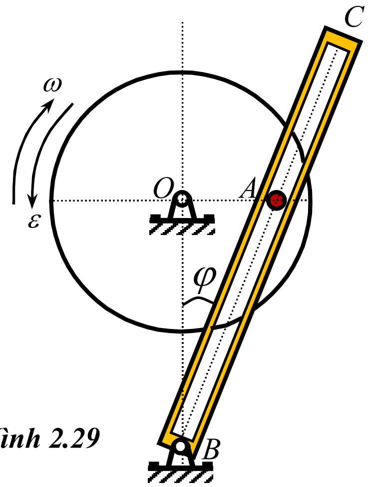
$$\begin{bmatrix} 20 + 125\sqrt{3} - ae \\ 20\sqrt{3} - 125 - ar \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

n2 := *evalf*(*solve*({*pt2*[1], *pt2*[2]}, [*ae*, *ar*]))

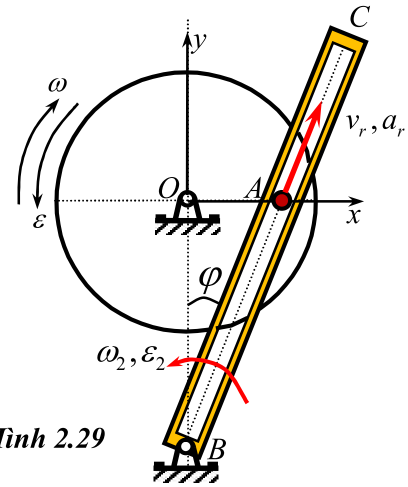
$$[[ae = 236.5063510, ar = -90.35898384]] \quad \textbf{(4)}$$

B.4.9. Đĩa tròn quay quanh trục cố định tại O, chốt A được gắn cố định trên đĩa, chốt A có thể trượt dọc theo rãnh của cần lắc BC. Khi $OA = 0{,}5m$ có vị trí nằm ngang, đĩa có vận tốc góc

$\omega = 6rad/s$, gia tốc góc $\varepsilon = 2rad/s^2$ và góc $\varphi = 30^0$. Hãy xác định vận tốc góc, gia tốc góc của cần lắc BC tại thời điểm đó.



Hình 2.29



Hình 2.29

Cần BC là hệ động.

Chốt A trượt dọc rãnh BC là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.

Điểm A quay cùng BC là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh B) có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.

Điểm A quay quanh O là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.

Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \ \ \vec{v}_a = \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO}, \vec{v}_e = \vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{r}_{AB} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \ \ \vec{a}_a = \vec{\varepsilon}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{OA}^2 . \vec{r}_{AO}, \vec{a}_e = \vec{\varepsilon}_{BC} \wedge \vec{r}_{AB} - \omega_{BC}^2 . \vec{r}_{AB}, \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{BC} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -r/\tan\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; v_r = \begin{bmatrix} v_r \sin\varphi \\ v_r \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; a_r = \begin{bmatrix} a_r \sin\varphi \\ a_r \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple

restart :

Loading LinearAlgebra

$r := 0.5 : \omega := 6 : \varepsilon := 2 : \varphi := \frac{\pi}{6} :$

$$rO := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rA := \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rB := \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{r}{\tan(\varphi)} \\ 0 \end{bmatrix} : \omega OA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix} : \varepsilon OA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} :$$

$$vrA := \begin{bmatrix} vr\cdot\sin(\varphi) \\ vr\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : arA := \begin{bmatrix} ar\cdot\sin(\varphi) \\ ar\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} : \omega BC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega 2 \end{bmatrix} : \varepsilon BC := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon 2 \end{bmatrix} :$$

vaA := ωOA &x (rA − rO) : veA := ωBC &x (rA − rB) :

pt1 := vaA − veA − vrA

pt1 := vaA − veA − vrA

$$\begin{bmatrix} -0.5000000000\,\omega 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,vr \\ -3.0 + 0.5\,\omega 2 - \frac{1}{2}\,vr\sqrt{3} \\ 0. \end{bmatrix} \quad (1)$$

n1 := solve({pt1[1], pt1[2]}, [ω2, vr])

$$[[\omega 2 = 1.500000000, vr = -2.598076211]] \quad (2)$$

assign(n1) :

aaA := εOA &x (rA − rO) − ωOA . ωOA·(rA − rO) :

aeA := εBC &x (rA − rB) − ωBC . ωBC·(rA − rB) :

acA := 2·ωBC &x vrA :

pt2 := aaA − aeA − arA − acA

$$\begin{bmatrix} -16.87500000 + 0.5000000000\,\varepsilon 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,ar + 3.897114318\sqrt{3} \\ -2.897114318 - 0.5\,\varepsilon 2 + 1.125000000\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,ar\sqrt{3} \\ 0. \end{bmatrix} \quad (3)$$

n2 := solve({pt2[1], pt2[2]}, [ε2, ar])

$$[[\varepsilon 2 = 8.294228632, ar = -5.883974596]] \quad (4)$$

B.4.10. Đĩa tròn quay quanh trục cố định tại O được xẻ rãnh, con trượt A có thể trượt dọc trong rãnh làm cần AB tịnh tiến lên xuống. Xác định vận tốc, gia tốc của cần AB, tại thời điểm khảo sát đĩa tròn có vận tốc góc ω, gia tốc góc ε và rãnh tạo với phương ngang một góc α. Vẽ đồ thị quan hệ vận tốc, gia tốc của cần AB khi $\omega = 10rad/s; \varepsilon = 0rad/s^2$ $; l = 10cm; \alpha = \left[0; 45^0\right]$

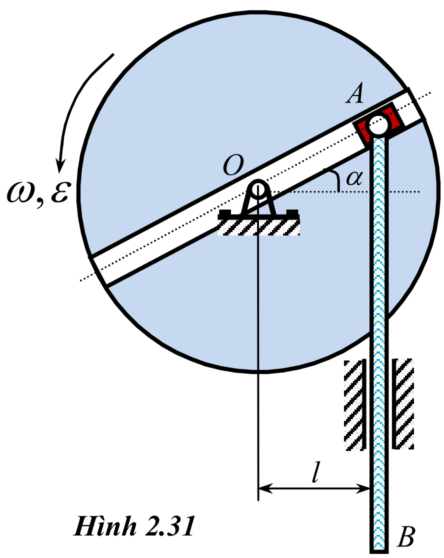
- Đĩa tròn là hệ động.
- Chốt A trượt dọc rãnh là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
- Điểm A quay cùng đĩa là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh O) có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.

- Điểm A tịnh tiến cùng thanh AB là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

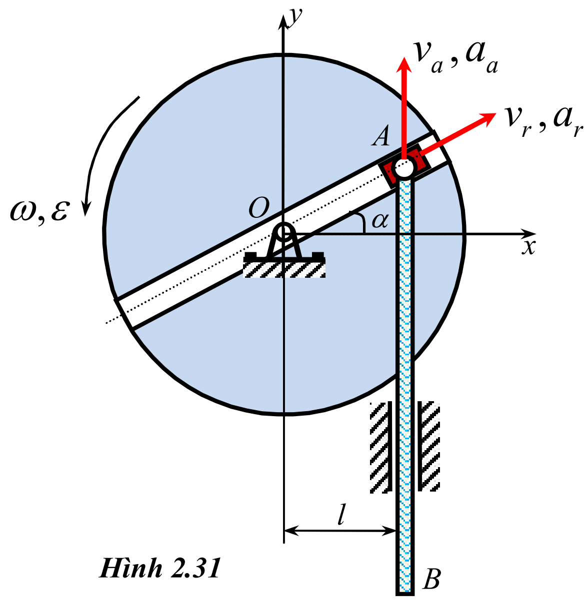
$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_e = \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_e = \vec{\varepsilon}_{OA} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_{OA}^2 . \vec{r}_{AO}, \ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} l \\ l\tan\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; v_r = \begin{bmatrix} v_r\cos\alpha \\ v_r\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; a_r = \begin{bmatrix} a_r\cos\alpha \\ a_r\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; v_a = \begin{bmatrix} 0 \\ v_a \\ 0 \end{bmatrix}; a_a = \begin{bmatrix} 0 \\ a_a \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hình 2.31



Hình 2.31

- Chương trình Maple

restart :
Loading LinearAlgebra

$$rO := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : rA := \begin{bmatrix} l \\ l\cdot\tan(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : \omega OA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} : \varepsilon OA := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} :$$

$$vrA := \begin{bmatrix} vr\cdot\cos(\alpha) \\ vr\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : arA := \begin{bmatrix} ar\cdot\cos(\alpha) \\ ar\cdot\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} : vaA := \begin{bmatrix} 0 \\ va \\ 0 \end{bmatrix} : aaA := \begin{bmatrix} 0 \\ aa \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$veA := \omega OA\ \&x\ (rA - rO)$:
$pt1 := vaA - \mathrm{veA} - \mathrm{vrA}$

$$\begin{bmatrix} \omega\, l \tan(\alpha) - vr\cos(\alpha) \\ va - \omega\, l - vr\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$n1 := simplify(solve(\{pt1[1], pt1[2]\}, [va, vr]))$

$$\left[\left[va = \frac{\omega\, l}{\cos(\alpha)^2}, vr = \frac{\omega\, l\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)^2}\right]\right] \tag{2}$$

$assign(n1)$:
$aeA := \varepsilon OA\ \&x\ (rA - rO) - \omega OA\,.\,\omega OA\cdot(rA - rO)$:
$acA := 2\cdot\omega OA\ \&x\ vrA$:
$pt2 := aaA - aeA - arA - acA$

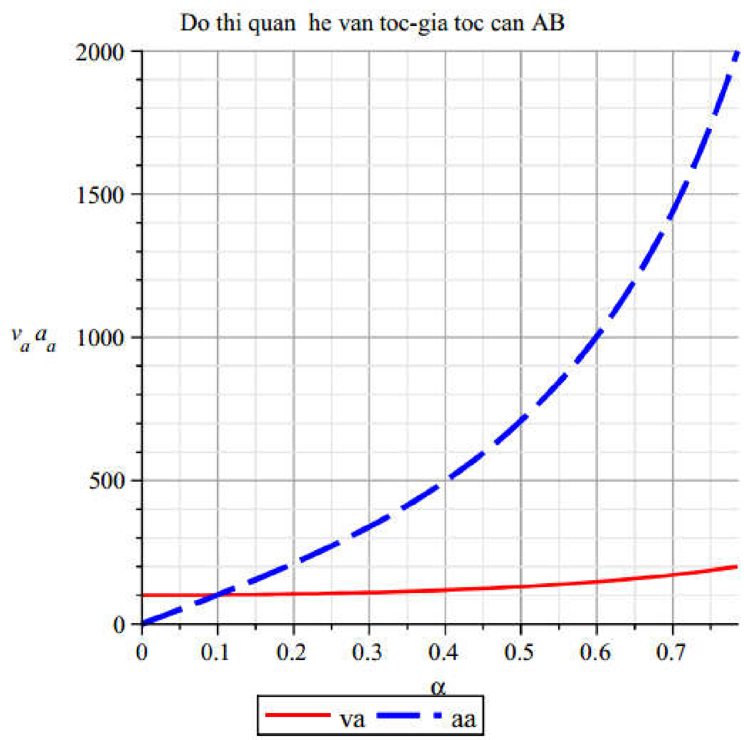
$$\begin{bmatrix} \varepsilon\, l\tan(\alpha) + \overline{\omega}\,\omega\, l - ar\cos(\alpha) + \dfrac{2\,\omega^2\, l\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2} \\ aa - \varepsilon\, l + \overline{\omega}\,\omega\, l\tan(\alpha) - ar\sin(\alpha) - \dfrac{2\,\omega^2\, l\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$n2 := simplify(solve(\{pt2[1], pt2[2]\}, [aa, ar]))$

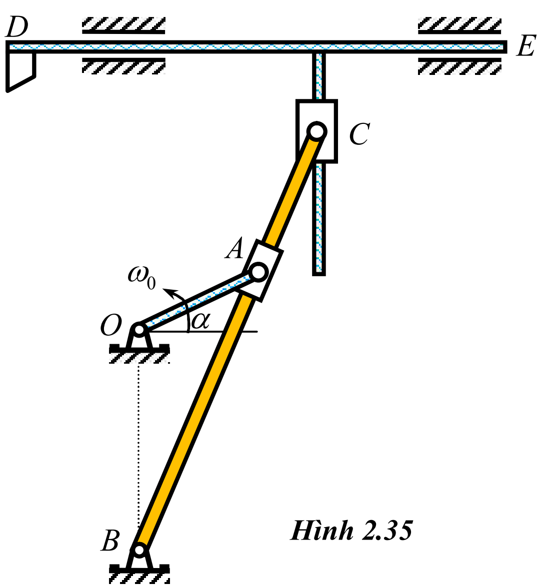
$$\left[\left[aa = \frac{l\,(2\,\omega^2\sin(\alpha) + \varepsilon\cos(\alpha))}{\cos(\alpha)^3}, ar = \frac{l\,(\varepsilon\sin(\alpha)\cos(\alpha) + |\omega|^2\cos(\alpha)^2 + 2\,\omega^2 - 2\,\omega^2\cos(\alpha)^2)}{\cos(\alpha)^3}\right]\right] \tag{4}$$

$assign(n2)$:
$\omega := 5 : \varepsilon := 0 : l := 20$:

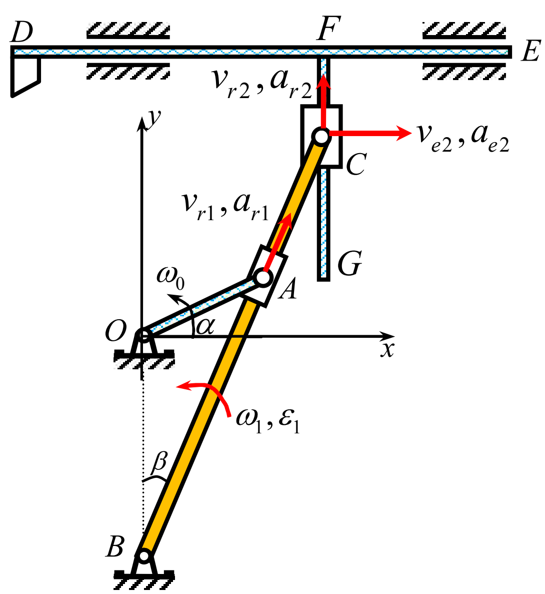
$plot\left([va, aa], \alpha = 0 .. \frac{\mathrm{Pi}}{4}, linestyle = [solid, dash], color = [red, blue], gridlines = true, legend = [\text{"va"}, \text{"aa"}], thickness = [2, 3], title = \text{"Do thi quan he van toc-gia toc can AB "}, labels = [\alpha, v_a\, a_a]\right)$



B.4.11. Cho cơ cấu truyền động của máy bào ngang (dạng đơn giản) được mô tả như hình 2.33. Tay quay $OA = r = 30cm$ quay đều quanh trục cố định qua O với vận tốc góc $\omega_0 = 8rad/s$, DE chuyển động tịnh tiến theo phương ngang, đường trượt của con trượt C hướng thẳng đứng. Cho biết các khoảng cách $OB = r,\ BC = 2r\sqrt{3}$. Tại thời điểm $\alpha = 30^0$, hãy tìm vận tốc và gia tốc của DE.



Hình 2.35



➢ Bài toán vị trí

$$\begin{cases} OA\cos\alpha = AB\sin\beta \\ OB + OA\sin\alpha = AB\cos\beta \end{cases}$$ giải hệ phương trình ta được $\Rightarrow AB,\beta$

- Xét cơ cấu culit $OABC$
  - Tay quay BC là hệ động.
  - Con trượt A trượt dọc BC là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r1},\vec{a}_{r1}$.
  - Điểm A quay cùng cần BC là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh B) có $\vec{v}_{e1},\vec{a}_{e1}$.
  - Điểm A quay cùng tay quay OA là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a1},\vec{a}_{a1}$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_{a1} = \vec{v}_{e1} + \vec{v}_{r1},\ \ \vec{v}_{a1} = \vec{\omega}_{OA}\wedge\vec{r}_{AO}, \vec{v}_{e1} = \vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{r}_{AB} \\ \vec{a}_{a1} = \vec{a}_{e1} + \vec{a}_{r1} + \vec{a}_{c1},\ \ \vec{a}_{a1} = \vec{\varepsilon}_{OA}\wedge\vec{r}_{AO} - \omega_{OA}^2.\vec{r}_{AO},\ \vec{a}_{e1} = \vec{\varepsilon}_{BC}\wedge\vec{r}_{AB} - \omega_{BC}^2.\vec{r}_{AB}, \vec{a}_{c1} = 2\vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{v}_{r1} \end{cases}$$

- Xét cơ cấu truyền động $BCDE$
  - Giao DE là hệ động.
  - Con trượt C trượt dọc FG là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r2},\vec{a}_{r2}$.
  - Điểm C tịnh tiến cùng giao DE là chuyển động kéo theo (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{e2},\vec{a}_{e2}$.
  - Điểm A quay cùng cần BC là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a2},\vec{a}_{a2}$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_{a2} = \vec{v}_{e2} + \vec{v}_{r2},\ \ \vec{v}_{a2} = \vec{\omega}_{BC}\wedge\vec{r}_{CB} \\ \vec{a}_{a2} = \vec{a}_{e2} + \vec{a}_{r2} + \vec{a}_{c2},\ \ \vec{a}_{a2} = \vec{\varepsilon}_{BC}\wedge\vec{r}_{CB} - \omega_{BC}^2.\vec{r}_{CB},\ \vec{a}_{c2} = 0 \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

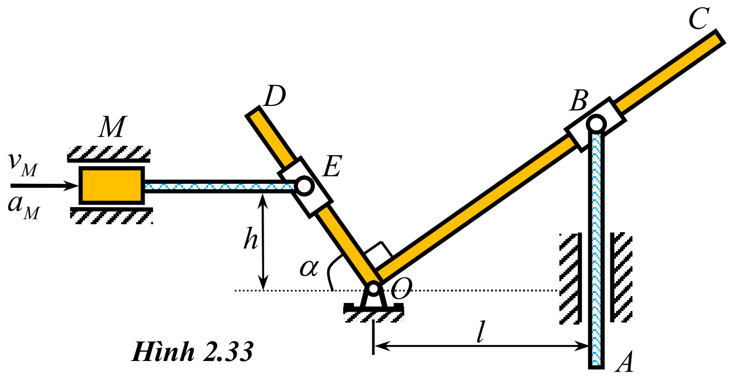
$$r_O = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix}r\cos\alpha\\r\sin\alpha\\0\end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix}0\\-OB\\0\end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix}BC.\sin\beta\\BC.\cos\beta - OB\\0\end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega0\end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon0\end{bmatrix}; v_{rA} = \begin{bmatrix}v_{r1}\sin\beta\\v_{r1}\cos\beta\\0\end{bmatrix}$$

$$\omega_{BC} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega1\end{bmatrix}; \varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon1\end{bmatrix}; a_{rA} = \begin{bmatrix}a_{r1}\sin\beta\\a_{r1}\cos\beta\\0\end{bmatrix}; v_{eC} = \begin{bmatrix}v_{e2}\\0\\0\end{bmatrix}; a_{eC} = \begin{bmatrix}a_{e2}\\0\\0\end{bmatrix}; v_{rC} = \begin{bmatrix}0\\v_{r2}\\0\end{bmatrix}; a_{rC} = \begin{bmatrix}0\\a_{r2}\\0\end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple:

B.4.12. Tay máy được điều khiển bằng pit-tông M trượt trong xylanh ngang. Tay quay COD $(OC \perp OD)$ quanh quanh trục cố định O. Con trượt B nối với thanh AB thẳng đứng, con trượt E nối với thanh EM, khoảng cách $h = 15cm, l = 30cm$. Khi pit-tông M có vận tốc $v_M = 10cm/s$, gia tốc $a_M = 2cm/s^2$, góc $\alpha = 60^0$. Hãy xác định:

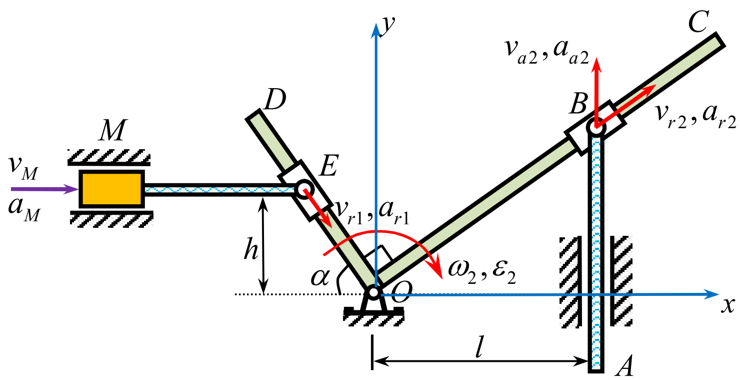
a. Vận tốc góc của thanh COD, vận tốc của thanh AB.
b. Gia tốc góc của thanh COD, gia tốc của thanh AB



Hình 2.33

- Xét cơ cấu culit $MEOD$
  - Thanh OD là hệ động.
  - Con trượt E trượt dọc OD là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r1},\vec{a}_{r1}$.
  - Điểm E quay cùng thanh OD là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh O) có $\vec{v}_{e1},\vec{a}_{e1}$.
  - Điểm E tịnh tiến cùng EM là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a1},\vec{a}_{a1}$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_{a1}=\vec{v}_{e1}+\vec{v}_{r1},\quad \vec{v}_{a1}=\vec{v}_M,\vec{v}_{e1}=\vec{\omega}_{OD}\wedge\vec{r}_{EO}\\ \vec{a}_{a1}=\vec{a}_{e1}+\vec{a}_{r1}+\vec{a}_{c1},\quad \vec{a}_{a1}=\vec{a}_M,\ \vec{a}_{e1}=\vec{\varepsilon}_{OD}\wedge\vec{r}_{EO}-\omega_{OD}^2.\vec{r}_{EO},\vec{a}_{c1}=2\vec{\omega}_{OD}\wedge\vec{v}_{r1}\end{cases}$$



- Xét cơ cấu culit $OCBA$
  - Thanh OC là hệ động.
  - Con trượt B trượt dọc OC là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r2},\vec{a}_{r2}$.
  - Điểm B quay cùng thanh OC là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh O) có $\vec{v}_{e1},\vec{a}_{e1}$.
  - Điểm B tịnh tiến cùng AB là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a2},\vec{a}_{a2}$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_{a2}=\vec{v}_{e2}+\vec{v}_{r2},\quad \vec{v}_{e2}=\vec{\omega}_{OD}\wedge\vec{r}_{BO}\\ \vec{a}_{a2}=\vec{a}_{e2}+\vec{a}_{r2}+\vec{a}_{c2},\quad \vec{a}_{e2}=\vec{\varepsilon}_{OD}\wedge\vec{r}_{BO}-\omega_{OD}^2.\vec{r}_{BO},\vec{a}_{c2}=2\vec{\omega}_{OD}\wedge\vec{v}_{r2}\end{cases}$$

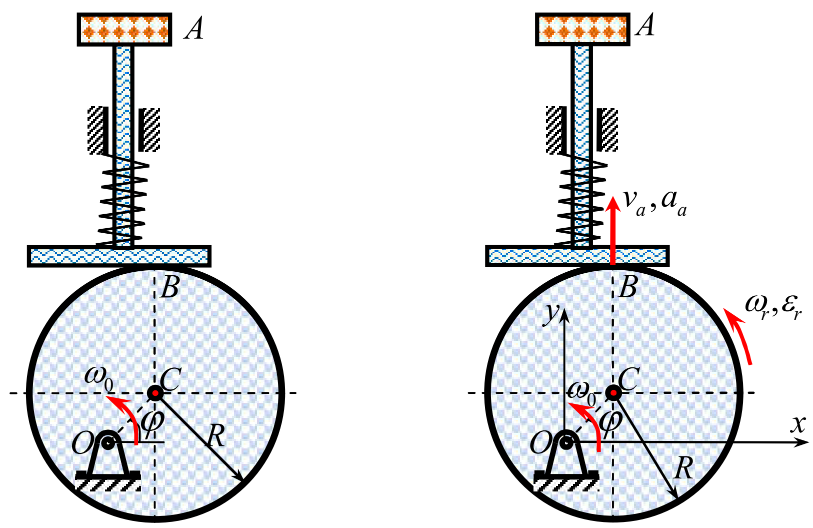
➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix};r_E=\begin{bmatrix}-h/\tan\alpha\\h\\0\end{bmatrix};r_B=\begin{bmatrix}l\\l*\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)\\0\end{bmatrix};\omega_{OD}=\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_2\end{bmatrix};\varepsilon_{OD}=\begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_2\end{bmatrix};v_{aE}=\begin{bmatrix}v_M\\0\\0\end{bmatrix};a_{aE}=\begin{bmatrix}a_M\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$v_{rE}=\begin{bmatrix}v_{r1}\cos\alpha\\-v_{r1}\sin\alpha\\0\end{bmatrix};a_{rE}=\begin{bmatrix}a_{r1}\cos\alpha\\-a_{r1}\sin\alpha\\0\end{bmatrix};v_{rB}=\begin{bmatrix}v_{r2}\sin\alpha\\v_{r2}\cos\alpha\\0\end{bmatrix};a_{rB}=\begin{bmatrix}a_{r2}\sin\alpha\\a_{r2}\cos\alpha\\0\end{bmatrix};v_{aB}=\begin{bmatrix}0\\v_{a2}\\0\end{bmatrix};a_{aB}=\begin{bmatrix}0\\a_{a2}\\0\end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

B.4.13. Cho cơ cấu cam cần đẩy đáy bằng như hình vẽ. Cam có biên dạng là đường tròn bán kính $R=15cm$ quay đều quanh trục cố định tại O với vận tốc góc $\omega_0=5rad/s$ làm cần đẩy AB chuyển động lên xuống. Tại thời điểm khảo sát $\varphi=30^0$. Cho $OC=10cm$. Xác định vận tốc, gia tốc của cần đẩy AB. Vẽ đồ thị quan hệ vận tốc, gia tốc của cần đẩy AB theo góc φ trong khoảng thời gian $t=[0,3]$ giây.



- Đĩa tròn là hệ động.
- Điểm B trượt trên cung tròn là chuyển động tương đối (chuyển động quay quanh C) có $\vec{v}_r,\vec{a}_r$.
- Điểm B quay cùng đĩa tròn là chuyển động kéo theo (chuyển động quay quanh O) có $\vec{v}_e,\vec{a}_e$.
- Điểm B tịnh tiến cùng AB là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a,\vec{a}_a$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_a=\vec{v}_e+\vec{v}_r, \quad \vec{v}_e=\vec{\omega}_0\wedge\vec{r}_{BO};\vec{v}_r=\vec{\omega}_d\wedge\vec{r}_{BC}\\ \vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_c, \quad \vec{a}_e=\vec{\varepsilon}_0\wedge\vec{r}_{BO}-\omega_0^2.\vec{r}_{BO};\vec{a}_r=\vec{\varepsilon}_r\wedge\vec{r}_{BC}-\omega_r^2.\vec{r}_{BC};\ \vec{a}_{c2}=2\vec{\omega}_0\wedge\vec{v}_r\end{cases}$$

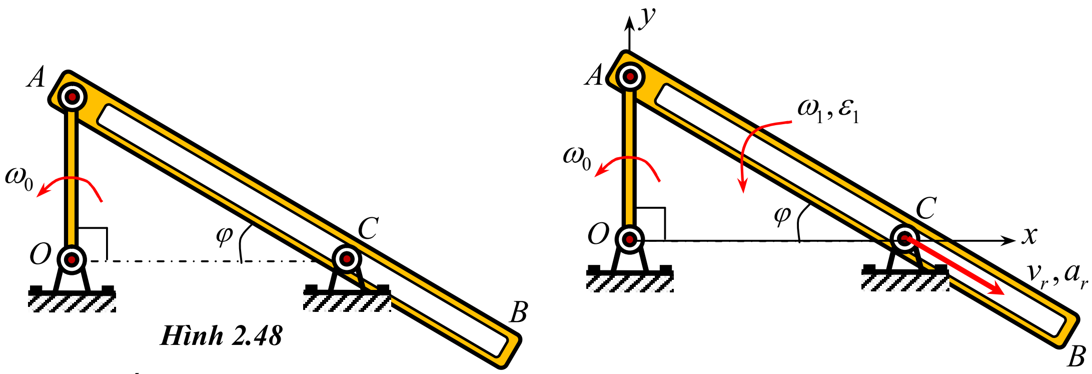
➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} OC*\cos\varphi \\ OC*\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} OC*\cos\varphi \\ OC*\sin\varphi + R \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}; \varepsilon_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix}; v_{aB} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_a \\ 0 \end{bmatrix}; a_{aB} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{rB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{bmatrix}; \varepsilon_{rB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_r \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

B.4.14. Tay quay OA của cơ cấu quay đều quanh O với vận tốc góc $\omega_0 = 5rad/s$. Một chốt cố định được gắn tại C, chốt này được lắp trơn vào rãnh thẳng của thanh AB như hình 2.48. Cho biết $OA = r = 20cm$. Hãy xác định vận tốc góc, gia tốc góc thanh AB khi tay quay OA vuông góc với OC và góc $\varphi = 30^0$.



Hình 2.48

➢ Xét cơ cấu OAB

Thanh AB chuyển động song phẳng, chọn A làm cực ta có:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}, \ \vec{v}_A = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{r}_{AO}, \vec{v}_{CA} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{CA} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}, \ \vec{a}_A = \vec{\varepsilon}_0 \wedge \vec{r}_{AO} - \omega_0^2.\vec{r}_{AO}, \ \vec{a}_{CA} = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{CA} - \omega_1^2.\vec{r}_{CA} \end{cases} \quad (1)$$

➢ Xét cơ cấu ACB, Thanh AB là hệ động.

- Điểm C trượt dọc theo rãnh AB là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
- Điểm C chuyển động cùng thanh AB là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.
- Điểm C chuyển động so với đất là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a = 0, \vec{a}_a = 0$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = 0 = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_C \\ \vec{a}_a = 0 = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_C; \ \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_r \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} -\vec{v}_r = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} \\ -\vec{a}_r - \vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA} \end{cases}$

➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix} r/\tan\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_0 \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

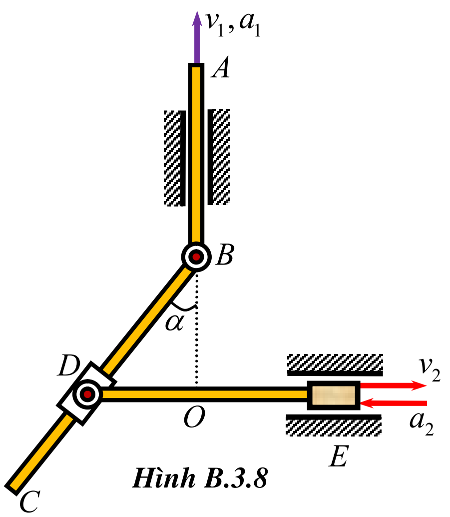
$$v_{rC} = \begin{bmatrix} v_r \cos\varphi \\ -v_r \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; a_{rC} = \begin{bmatrix} a_r \cos\varphi \\ -a_r \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

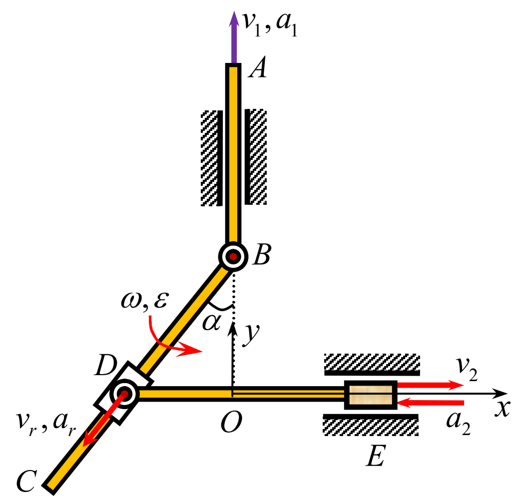
B.4.15. Cho cơ cấu như hình vẽ. Thanh AB trượt nhanh dần lên phía trên, truyền chuyển động qua thanh BC và con trượt D, thanh DE chuyển động tịnh tiến ngang. Khi cơ cấu ở vị trí như hình vẽ, góc $\alpha = 30^0$, $DO = 3cm$, thanh AB có vận tốc $v_1 = \sqrt{3}cm/s$, gia tốc $a_1 = 3cm/s^2$ còn thanh DE có vận tốc $v_2 = 5cm/s$, gia tốc $a_2 = 1cm/s^2$. Xác định:

a) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh BC.

b) Vận tốc, gia tốc của con trượt D đối với thanh BC.



Hình B.3.8



➢ Thanh BC chuyển động song phẳng, chọn B làm cực ta có:

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}, \ \vec{v}_B = \vec{v}_1, \vec{v}_{DB} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{DB} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}, \ \vec{a}_B = \vec{a}_1, \vec{a}_{DB} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{DB} - \omega^2.\vec{r}_{DB} \end{cases} \quad (1)$$

➢ Xét cơ cấu $BCDE$, thanh BC là hệ động

- Điểm D trượt dọc theo thanh BC là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
- Điểm D chuyển động cùng thanh BC là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.
- Điểm D chuyển động cùng thanh DE là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_D; \vec{v}_a = \vec{v}_2 \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_D; \ \vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r; \vec{a}_a = \vec{a}_2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \vec{v}_2 - \vec{v}_r = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB} \\ \vec{a}_2 - \vec{a}_r - \vec{a}_c = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB} \end{cases}$

➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

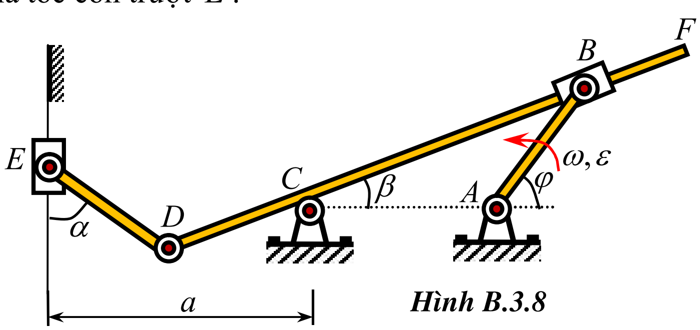
$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix} 0 \\ OD/\tan\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} -OD \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; v_B = \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix}; a_B = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{aD} = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_{aD} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; v_{rD} = \begin{bmatrix} -v_r \sin\alpha \\ -v_r \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; a_{rD} = \begin{bmatrix} -a_r \sin\alpha \\ -a_r \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

B.4.16. Cho cơ cấu như hình vẽ. Tay quay AB quay quanh trục cố định tại A, con trượt B trượt dọc DF, con trượt E trượt dọc theo phương thẳng đứng. Cho các kích thước: $AB = 100mm, AC = 200mm, CD = 120mm, DE = 100mm, a = 130mm, \varphi = 60^0$. Tại thời điểm khảo sát, tay quay AB có vận tốc góc và gia tốc góc lần lượt là $\omega = 15rad/s, \varepsilon = 5rad/s^2$. Hãy xác định:

a) Góc β, α, độ dài CB.
b) Vận tốc tương đối, gia tốc tương đối của con trượt B dọc DF
c) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh DF.
d) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh DE.
e) Vận tốc, gia tốc con trượt E.



Hình B.3.8

➢ Bài toán vị trí:

$\begin{cases} AC + AB.\cos\varphi = BC.\cos\beta \\ AB.\sin\varphi = BC.\sin\beta \end{cases}$ giải hệ phương trình này ta tìm được BC, β.

$CD.\cos\beta + DE.\sin\alpha = a$, giải phương trình này ta tìm được α.

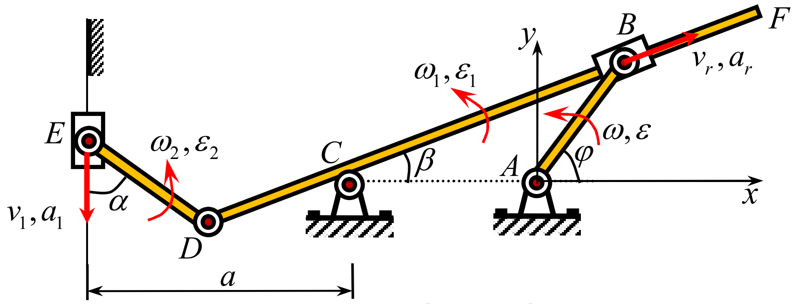
➢ Xét cơ cấu $ABDCF$, thanh DF là hệ động

- Điểm B trượt dọc theo thanh DF là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
- Điểm B chuyển động cùng thanh DF là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.
- Điểm B chuyển động cùng thanh AB là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{BA}; \vec{v}_e = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{BC} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_a = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{BA} - \omega^2.\vec{r}_{BA}; \ \vec{a}_e = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{BC} - \omega_1^2.\vec{r}_{BC}; \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_r\end{cases}$$

➢ Xét cơ cấu CDE , thanh DE chuyển động song phẳng, chọn D làm cực ta có quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_{ED}, \ \vec{v}_D = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{DC}; \vec{v}_{ED} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{ED} \\ \vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{ED}, \ \vec{a}_D = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{DC} - \omega_1^2.\vec{r}_{DC}; \vec{a}_{ED} = \vec{\varepsilon}_2 \wedge \vec{r}_{ED} - \omega_2^2.\vec{r}_{ED}\end{cases}$$



➢ Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_A = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}; r_B = \begin{bmatrix}AB.\cos\varphi\\AB.\sin\varphi\\0\end{bmatrix}; r_C = \begin{bmatrix}-AC\\0\\0\end{bmatrix}; r_D = r_C - \begin{bmatrix}CD.\cos\beta\\CD.\sin\beta\\0\end{bmatrix}; r_E = r_D - \begin{bmatrix}DE.\sin\gamma\\-DE.\cos\gamma\\0\end{bmatrix};$$

$$\omega_{AB} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon\end{bmatrix}; \omega_{DF} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_1\end{bmatrix}; \varepsilon_{DF} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_1\end{bmatrix}; \omega_{DE} = \begin{bmatrix}0\\0\\\omega_2\end{bmatrix};$$

$$\varepsilon_{DE} = \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon_2\end{bmatrix}; v_{rB} = \begin{bmatrix}v_r\cos\beta\\v_r\sin\beta\\0\end{bmatrix}; a_{rB} = \begin{bmatrix}a_r\cos\beta\\a_r\sin\beta\\0\end{bmatrix}; \ v_E = \begin{bmatrix}0\\-v_1\\0\end{bmatrix}; a_E = \begin{bmatrix}0\\-a_1\\0\end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

B.4.17. Cho cơ cấu như hình vẽ. Tay quay OA quay quanh trục cố định tại O, con trượt B trượt dọc theo phương ngang, thanh CD trượt trong bạc trượt E, bạc trượt E quay quanh E. Cho các kích thước: $OA = 200mm, AC = 210mm, CB = 390mm$, $a = 300mm$, $b = 250mm$, $\varphi = 45^0$. Tại thời điểm khảo sát tay quay OA có vận tốc góc và gia tốc góc lần lượt là $\omega = 5rad/s, \varepsilon = 8rad/s^2$. Hãy xác định:

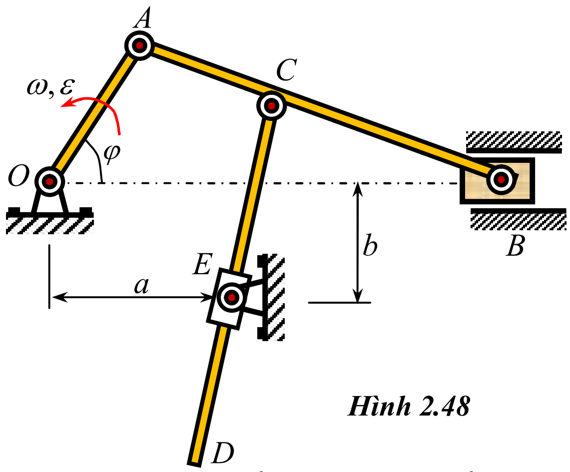
a) Vận tốc, gia tốc con trượt B.
b) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh AB.
c) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh CD.

➢ Bài toán vị trí: $OA.\sin\varphi = AB.\sin\alpha$ giải phương trình này ta tìm được α

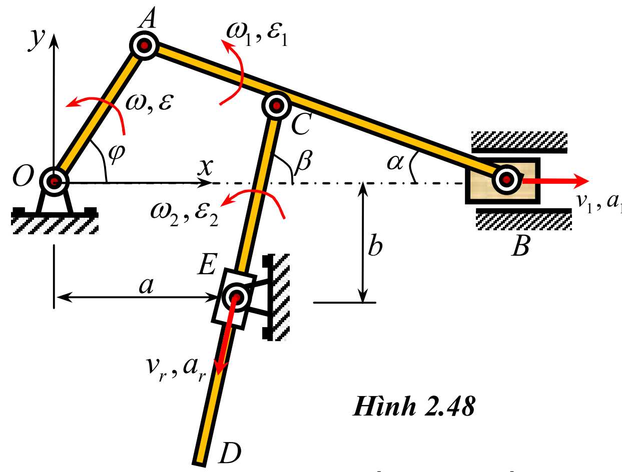
➢ Xét cơ cấu OAB , thanh AB chuyển động song phẳng, chọn A làm cực ta có quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases}\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}, \ \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AO}; \vec{v}_{BA} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}, \ \vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega^2.\vec{r}_{AO}; \vec{a}_{BA} = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_1^2.\vec{r}_{BA}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA}, \ \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AO}; \vec{v}_{CA} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{CA} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}, \ \vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega^2 . \vec{r}_{AO}; \vec{a}_{CA} = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{CA} - \omega_1^2 . \vec{r}_{CA} \end{cases}$$



Hình 2.48



Hình 2.48

- Thanh CD chuyển động song phẳng, chọn C làm cực ta có quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{v}_{EC}, \ \vec{v}_C = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{CA}; \vec{v}_{EC} = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_{EC} \\ \vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC}, \ \vec{a}_C = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{CA} - \omega_1^2 . \vec{r}_{CA}; \vec{a}_{EC} = \vec{\varepsilon}_2 \wedge \vec{r}_{EC} - \omega_2^2 . \vec{r}_{EC} \end{cases} \qquad (1)$$

- Xét cơ cấu CDE , thanh CD là hệ động
  - Điểm E trượt dọc theo thanh CD là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
  - Điểm E chuyển động cùng thanh CD là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_e, \vec{a}_e$.
  - Điểm E chuyển động so với đất là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_a = 0, \vec{a}_a = 0$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_a = 0 = \vec{v}_e + \vec{v}_r, \quad \vec{v}_e = \vec{v}_E \\ \vec{a}_a = 0 = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_E; \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_r \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} -\vec{v}_r = \vec{v}_C + \vec{v}_{EC} \\ -\vec{a}_r - \vec{a}_c = \vec{a}_C + \vec{a}_{EC} \end{cases}$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} OA.\cos\varphi \\ OA.\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A + \begin{bmatrix} AB.\cos\alpha \\ -AB.\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_C = r_A + \begin{bmatrix} AC.\cos\alpha \\ -AC.\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_E = r_C - \begin{bmatrix} CE.\cos\beta \\ CE.\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; \omega_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}; \varepsilon_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}; \omega_{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix};$$

$$\varepsilon_{CD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}; v_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ v_{rE} = \begin{bmatrix} -v_r \cos\beta \\ -v_r \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; a_{rE} = \begin{bmatrix} -a_r \cos\beta \\ -a_r \sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

➢ Chương trình Maple:

B.4.18. Cho cơ cấu như hình vẽ. Tay quay OA quay đều quanh trục cố định tại O với tốc độ $n = 120v/p$, thanh BC trượt trong bạc trượt D, bạc trượt D quay quanh khớp tại D, con trượt B trượt dọc EF làm cho cần EF tịnh tiến lên xuống. Cho các kích thước: $OA = 80mm, OD = 200mm, AB = 100mm, a = 150mm$. Tại vị trí khảo sát tay quay OA hợp với phương ngang một góc $\alpha = 30^0$. Hãy xác định:

a) Vận tốc góc, gia tốc góc thanh BC.
b) Vận tốc tương đối, gia tốc tương đối của con trượt B trượt dọc thanh EF.
c) Vận tốc, gia tốc cần EF.

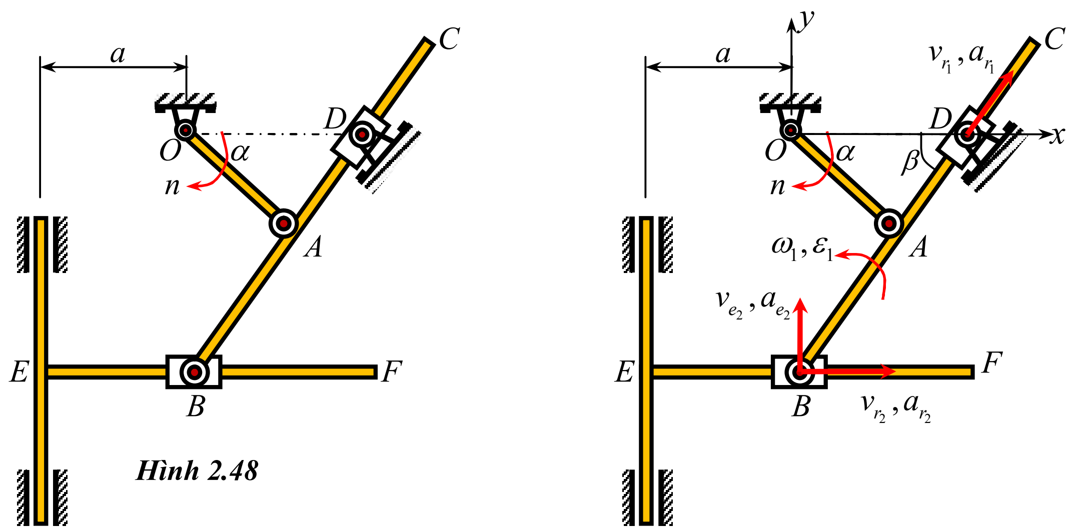
➢ Bài toán vị trí:

$\begin{cases} OA.\cos\alpha + AD.\cos\beta = OD \\ OA.\sin\alpha = AD.\sin\beta \end{cases}$ giải hệ phương trình này ta tìm được AD, β.

➢ Xét cơ cấu $OADC$, thanh BC là hệ động

- Điểm D trượt dọc theo thanh BC là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r_1}, \vec{a}_{r_1}$.
- Điểm D chuyển động cùng thanh BC là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_{e_1}, \vec{a}_{e_1}$.
- Điểm D chuyển động so với đất là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a_1} = 0, \vec{a}_{a_1} = 0$.
- Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_{a_1} = 0 = \vec{v}_{e_1} + \vec{v}_{r_1} \\ \vec{a}_{a_1} = 0 = \vec{a}_{e_1} + \vec{a}_{r_1} + \vec{a}_{c_1}, \quad \vec{a}_{c_1} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{r_1} \end{cases} \qquad (1)$$



Hình 2.48

➢ Thanh BC chuyển động song phẳng, chọn A làm cực ta có quan hệ vận tốc và gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA}, \ \vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{AO}; \vec{v}_{DA} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{DA}; \vec{v}_D = \vec{v}_{e_1} \\ \vec{a}_D = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA}, \ \vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}_{AO} - \omega^2.\vec{r}_{AO}; \vec{a}_{DA} = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{DA} - \omega_1^2.\vec{r}_{DA}; \vec{a}_D = \vec{a}_{e_1} \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} -\vec{v}_{r_1} = \vec{v}_A + \vec{v}_{DA} \\ -\vec{a}_{r_1} - \vec{a}_{c_1} = \vec{a}_A + \vec{a}_{DA} \end{cases}$

- Xét cơ cấu BEF , thanh EF là hệ động
  - Điểm B trượt dọc theo thanh EF là chuyển động tương đối (chuyển động tịnh tiến) có $\vec{v}_{r_2}, \vec{a}_{r_2}$.
  - Điểm B chuyển động cùng thanh EF là chuyển động kéo theo có $\vec{v}_{e_2}, \vec{a}_{e_2}$.
  - Điểm B chuyển động cùng thanh BC là chuyển động tuyệt đối có $\vec{v}_{a_2}, \vec{a}_{a_2}$.
  - Định lý hợp vận tốc, hợp gia tốc:

$$\begin{cases} \vec{v}_{a_2} = \vec{v}_{e_2} + \vec{v}_{r_2}, \vec{v}_{a_2} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_{BA} \\ \vec{a}_{a_2} = \vec{a}_{e_2} + \vec{a}_{r_2} + \vec{a}_{c_2}, \quad \vec{a}_{a_2} = \vec{\varepsilon}_1 \wedge \vec{r}_{BA} - \omega_1^2 . \vec{r}_{BA}; \vec{a}_{c_2} = 0 \end{cases}$$

- Các véctơ vị trí và các véctơ vận tốc, gia tốc:

$$r_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_A = \begin{bmatrix} OA.\cos\alpha \\ -OA.\sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix}; r_D = \begin{bmatrix} OD \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; r_B = r_A - \begin{bmatrix} AB.\cos\beta \\ AB.\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; \omega_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}; \varepsilon_{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}; \omega_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix}; v_{rD} = \begin{bmatrix} v_{r_1}\cos\beta \\ v_{r_1}\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; a_{rD} = \begin{bmatrix} a_{r_1}\cos\beta \\ a_{r_1}\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}; v_{rB} = \begin{bmatrix} v_{r_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; a_{rB} = \begin{bmatrix} a_{r_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; v_{eB} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{e_2} \\ 0 \end{bmatrix}; a_{eB} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{e_2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Chương trình Maple: