

## Bài 2: THU GỌN HỆ LỰC

(Lecture 2: Simplification of a Force and Couple System)

Trương Quang Tri, Ts.

[tri.truongquang@gmail.com](mailto:tri.truongquang@gmail.com)

Office: Phòng 201B4 – PTN Cơ học Ứng dụng – BM Cơ Kỹ Thuật Khoa  
Khoa học Ứng dụng – Đại học Bách Khoa Tp.HCM

2016.03.01

1

## Tài liệu học tập

### □ Giáo trình:

- [1] Vũ Duy Cường, *Giáo trình Cơ học lý thuyết*, ĐHQG Tp. HCM, 2005
- [2] Vũ Duy Cường, *Bài tập trắc nghiệm Cơ học lý thuyết*, ĐHQG Tp. HCM, 2006.

### □ Tài liệu tham khảo:

- [1] Đỗ Sanh, *Cơ học kỹ thuật tập 1, 2*. NXB GD, 2009
- [2] X. M. Targ, *Giáo trình giản yếu cơ học lý thuyết*, NXB ĐH&THCN, NXB Mir, 1983.
- [3] I.V. Meserxki, *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết*, (Người dịch: Đào Huy Bích, Nguyễn Xuân Bội, Ngô Thành Phong), ĐHQG Tp. HCM, 2007.
- [4] J.L. Meriam, L.G. Kraige, *Engineering Mechanics – Statics&Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [5] E.W. Nelson, C.L. Best, W.G. McLEAN, *Theory and Problems of Engineering Mechanics – Statics and Dynamics*, McGraw-Hill, 1998.
- [6] F. Beer, E. R. Johnston Jr., D. Mazurek, *Vector of Mechanics for Engineers, Statics & Dynamics*, McGraw-Hill, 2013.

2

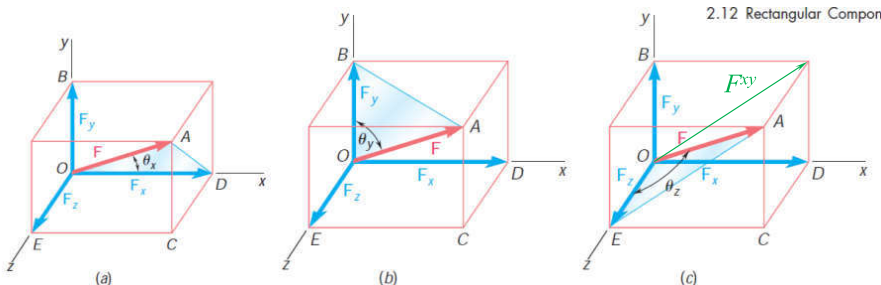
## 1. HAI ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC (1)

□ Vector chính của hệ lực

□ Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm

### □ Vector chính của hệ lực

- Các thành phần tọa độ vuông góc của vector lực trong không gian



3

## 1. HAI ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC (2)

□ Vector chính của hệ lực

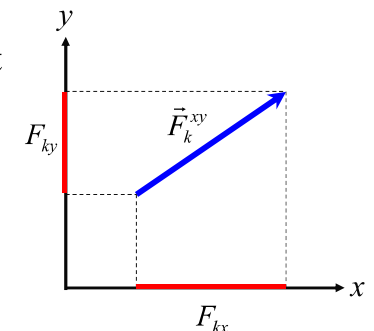
□ Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm

### □ Vector chính của hệ lực

Tổng hình học của các lực của một hệ lực là vector chính của hệ lực đó.

$$\vec{R}' = \sum \vec{F}_k, \quad \begin{cases} R'_x = \sum F_{kx} \\ R'_y = \sum F_{ky} \\ R'_z = \sum F_{kz} \end{cases}$$

- $R'_x, R'_y, R'_z$  **xác định**
  - Điểm đặt tùy ý
- }  $\vec{R}'$  là **vector tự do**.



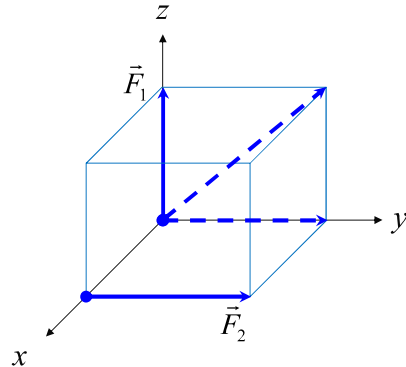
4

## 1. HAI ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC (3)

- ❑ Vector chính của hệ lực
- ❑ Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm

### ⚠ Lưu ý:

- ✓ Đối với hệ lực nào ta cũng tìm được **vector chính** nhưng có nhiều hệ lực không có **hợp lực**
- ✓ Hợp lực của hệ lực: Là một lực **DUY NHẤT** tương đương với hệ lực



5

## 1. HAI ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC (4)

- ❑ Vector chính của hệ lực
- ❑ Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm

### ❑ Vector moment chính của hệ lực đối với một tâm

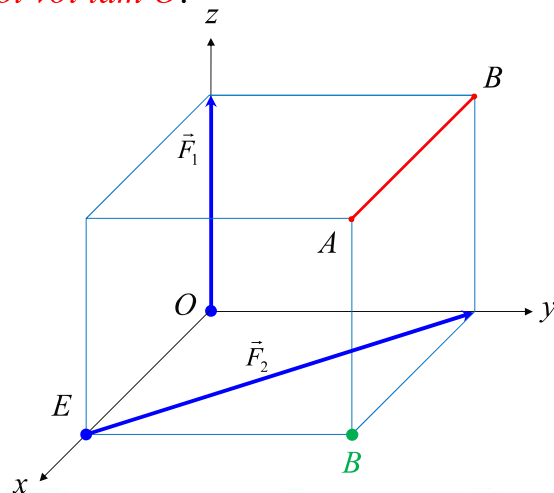
Vector moment chính của hệ lực đối với tâm  $O$  của hệ lực đó bằng tổng các vector moment của lực thuộc hệ lấy đối với cùng tâm  $O$  đó.

$$\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \Rightarrow \begin{cases} M_{Ox} = \sum m_{Ox}(\vec{F}_k) \\ M_{Oy} = \sum m_{Oy}(\vec{F}_k) \\ M_{Oz} = \sum m_{Oz}(\vec{F}_k) \end{cases}$$

6

## 1. HAI ĐẶC TRƯNG CỦA HỆ LỰC (5)

- ❑ VD: Xác định vector chính và *vector moment chính của hệ lực đối với tâm  $O$ .*

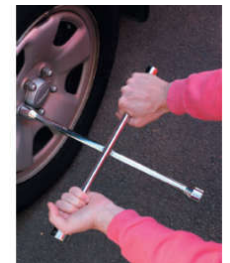
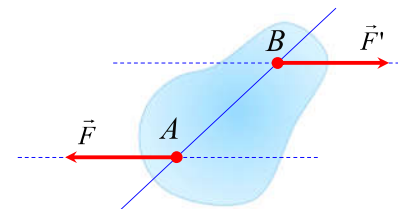


7

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (1)

### 2.1. Vector moment ngẫu lực

Ngẫu lực là hệ hai lực  $(\vec{F}, \vec{F}')$  có cùng trị số, song song và ngược chiều nhau tác dụng lên vật thể.



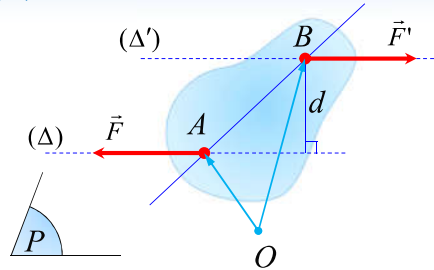
- ✓  $\vec{R}' = \vec{0}$ , tuy nhiên  $(\vec{F}, \vec{F}')$  không phải là một hệ lực cân bằng (TD 1)
- ✓ Ngẫu lực là một hệ lực không có hợp lực, nó là một hệ lực tối giản đặc biệt.

8

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (2)

### 2.1. Vector moment ngẫu lực (tt)

- ✓ Mặt phẳng (P) chứa các đường tác dụng của các lực của ngẫu lực được gọi là *mặt phẳng tác dụng của ngẫu lực*
- ✓  $d$ : *tay đòn của ngẫu lực*



#### ➤ Vector moment của ngẫu lực:

$$\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}') = \vec{M}_A(\vec{F}') = \vec{M}_B(\vec{F}) \begin{cases} \text{Phương: } M(\vec{F}, \vec{F}') \perp mp(P) \\ \text{Chiều: } RHR \\ \text{Độ lớn: } |M(\vec{F}, \vec{F}')| = F.d \end{cases}$$

- Vector moment của ngẫu lực không phụ thuộc vào điểm lấy moment  $\rightarrow$  Vector tự do và hoàn toàn đặc trưng cho một ngẫu lực.

9

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (3)

### 2.1. Vector moment ngẫu lực (tt)

#### □ Các định lý

- ✓ Hai ngẫu lực tương đương nếu chúng có vector moment chính (vector moment của ngẫu lực) bằng nhau.
- ✓ Từ một ngẫu lực đã cho, ta có thể tìm được vô số ngẫu lực khác tương đương với nó.
- ✓ Mọi hệ ngẫu lực tác dụng lên vật thể đều tương đương với một ngẫu lực có moment bằng tổng hình học của moment của các ngẫu lực thành phần.

$$\exists(\vec{Q}, \vec{Q}'): (\vec{Q}, \vec{Q}') \Leftrightarrow (\vec{F}_k, \vec{F}'_k): \vec{M}(\vec{Q}, \vec{Q}') = \sum \vec{M}(\vec{F}_k, \vec{F}'_k)$$

11

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (4)

### 2.2. Định lý thu gọn

Hệ lực  $\varphi(\vec{F}_k)$  khi thu gọn về một tâm  $O$ , tương đương với một lực bằng vector chính của hệ lực ( $\vec{R}'$ ) và một ngẫu lực bằng vector moment chính của hệ lực lấy cùng với tâm  $O$  đó.

$$\varphi(\vec{F}_k) \equiv (\vec{R}'_O, \vec{M}_O), \quad \begin{cases} \vec{R}'_O = \sum \vec{F}_k \\ \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \end{cases}$$

**Lưu ý định lý:** Mọi hệ ngẫu lực tác dụng lên vật thể đều tương đương với một ngẫu lực có moment bằng tổng hình học của moment của các ngẫu lực thành phần.

$$\exists(\vec{Q}, \vec{Q}'): (\vec{Q}, \vec{Q}') \Leftrightarrow (\vec{F}_k, \vec{F}'_k): \vec{M}(\vec{Q}, \vec{Q}') = \sum \vec{M}(\vec{F}_k, \vec{F}'_k)$$

12

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (5)

### 2.3. Các trường hợp thu gọn hệ lực không gian (HLKG) về dạng tối giản

$$\varphi(\vec{F}_k) \equiv (\vec{R}'_O, \vec{M}_O), \quad \begin{cases} \vec{R}'_O = \sum \vec{F}_k \\ \vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) \end{cases}$$

	$\vec{R}' = \vec{0}$	$\vec{R}' \neq \vec{0}$
$\vec{M}_O = \vec{0}$	<b>TH1:</b> Hệ lực cân bằng	<b>TH3:</b> Thu về một <b>hợp lực</b> đi qua tâm $O$
$\vec{M}_O \neq \vec{0}$	<b>TH2:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Thu về một ngẫu lực <math>M_O</math></li> <li><math>M_O</math> không phụ thuộc vào vị trí tâm <math>O</math>.</li> <li>Không có hợp lực</li> </ul>	<b>TH4:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li><b>TH4a:</b> <math>\vec{M}_O \perp \vec{R}'</math></li> <li><b>TH4b:</b> <math>\vec{M}_O \parallel \vec{R}'</math></li> <li><b>TH4c:</b> <math>\vec{M}_O \cdot \vec{R}' \neq 0, \vec{M}_O \times \vec{R}' \neq \vec{0}</math></li> </ul>

13

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (6)

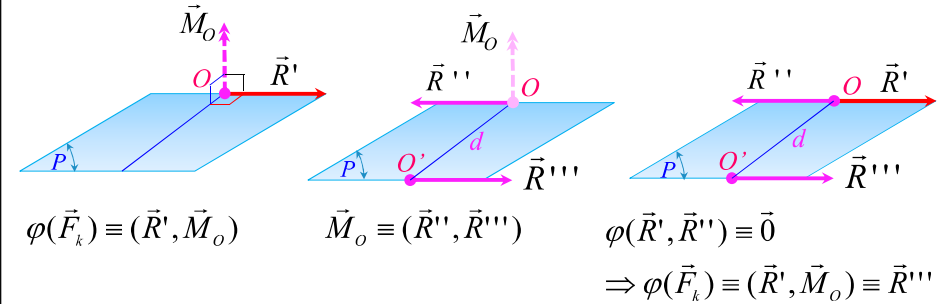
### 2.3. Các trường hợp thu gọn hệ lực không gian (HLKG) về dạng tối giản

Trường hợp 4	Kết quả thu gọn về dạng tối giản
<b>TH4a:</b> $\vec{M}_O \perp \vec{R}'$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thu về một <b>hợp lực</b> bằng <math>\vec{R}'</math> nhưng không đi qua tâm <math>O</math></li> </ul>
<b>TH4b:</b> $\vec{M}_O \parallel \vec{R}'$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thu về một vít động (hay vít)</li> <li>Đường thẳng mà <math>\vec{R}'</math> hướng theo được gọi là trục vít</li> <li>Không thể thu hệ này về dạng đơn giản hơn nữa</li> </ul>
<b>TH4c:</b> $\begin{cases} \vec{M}_O \cdot \vec{R}' \neq 0 \\ \vec{M}_O \times \vec{R}' \neq \vec{0} \end{cases}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Thu về một vít nhưng trục của vít này sẽ không đi qua tâm <math>O</math></li> </ul>

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (8)

### 2.3. Các trường hợp thu gọn HLKG về dạng tối giản

➤ **TH4a:** Nếu  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O \perp \vec{R}'$  thì hệ lực cũng được thu về một **hợp lực** bằng  $\vec{R}'$  nhưng không đi qua tâm  $O$ .



- TH này luôn xảy ra đối với mọi hệ lực song song hay hệ lực nằm trên một mặt phẳng, nếu vector chính của hệ này khác không.
- Dời lực song song:  $O' \rightarrow O$

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (8)

### 2.3. Các trường hợp thu gọn HLKG về dạng tối giản

➤ **TH4a:** Nếu  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O \perp \vec{R}'$  thì hệ lực cũng được thu về một **hợp lực** bằng  $\vec{R}'$  nhưng không đi qua tâm  $O$ .

- TH này luôn xảy ra đối với mọi hệ lực song song, nếu vector chính của hệ này khác không.

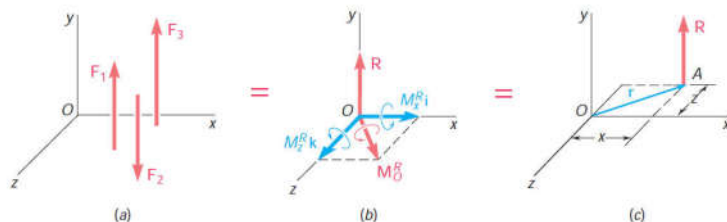


Fig. 3.45

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (8)

### 2.3. Các trường hợp thu gọn HLKG về dạng tối giản

➤ **TH4a:** Nếu  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O \perp \vec{R}'$  thì hệ lực cũng được thu về một **hợp lực** bằng  $\vec{R}'$  nhưng không đi qua tâm  $O$ .

- Hệ lực nằm trên một mặt phẳng, nếu vector chính của hệ này khác không.

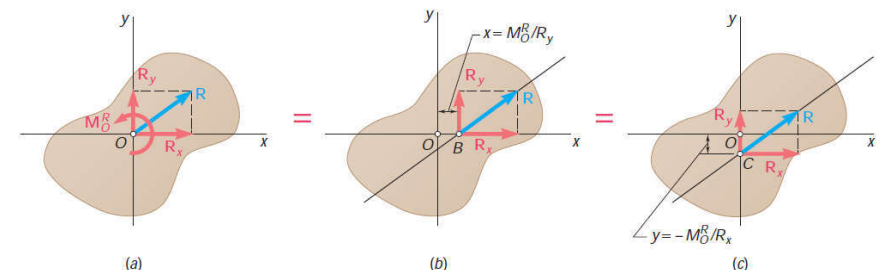
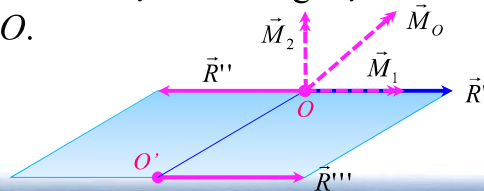


Fig. 3.44

## 2. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ (10)

### 2.3. Các trường hợp thu gọn HLKG về dạng tối giản

- **TH4b:** Nếu  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O // \vec{R}'$  thì hệ lực được thu về một tập hợp lực  $\vec{R}'$  và một ngẫu lực  $(\vec{Q}, \vec{Q}')$  nằm trên  $mp$  vuông góc với lực.
- Tập hợp lực và ngẫu lực như vậy được gọi là vít động hay vít, đường thẳng mà  $\vec{R}'$  hướng theo được gọi là trục vít.
  - Ta không thể thu hệ này về dạng đơn giản hơn nữa.
- **TH4c:** Nếu  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O \cdot \vec{R}' \neq 0, \vec{M}_O \times \vec{R}' \neq \vec{0}$  thì hệ lực này cũng được thu về một vít nhưng trục của vít này sẽ không đi qua tâm  $O$ .



21

## 3. ĐỊNH LÝ VỀ HAI HỆ LỰC TƯƠNG ĐƯƠNG

### Định lý về hai hệ lực tương đương

Hai hệ lực được gọi là tương đương khi và chỉ khi vector chính và vector moment chính của chúng là giống nhau khi chúng được thu gọn về cùng một tâm  $O$  bất kỳ.

$$\varphi_1(\vec{F}_k) \equiv \varphi_2(\vec{P}_i) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{1/O} = \vec{M}_{2/O} \end{cases}$$

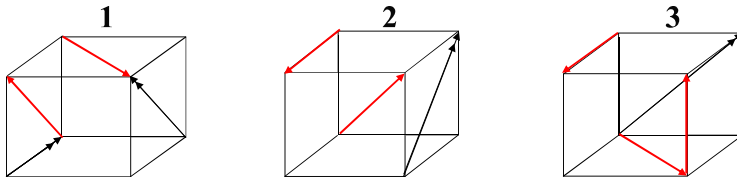
### Ví dụ:

Hệ lực phức tạp  $\rightarrow$  Thu gọn về hệ tối giản.

22

### VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (1)

**Câu 1:** Những hệ lực nào sau đây tương đương nhau? (Hình lập phương cạnh đơn vị. Ký hiệu vector moment  $(\rightarrow)$ ).



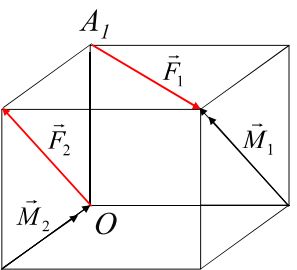
- a. 1, 2      b. 1, 3      c. 2, 3      d. 1, 2, 3      e. không có

**Câu 2:** Trong các hệ lực đã cho như câu 1, hệ nào có hợp lực?

- a. 1, 2, 3      b. 1      c. 3      d. không có      e. 1, 2

### VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (2)

#### Thu gọn hệ lực 1:

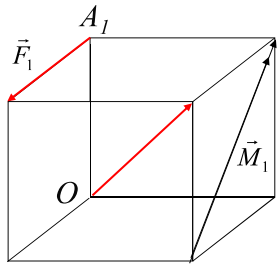


$$\begin{aligned}
 * \quad & \begin{cases} \vec{OA}_1 = (0,0,1) \\ \vec{F}_1 = (1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{OA}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 * \quad & \vec{F}_1 = (1,1,0), \quad \vec{M}_O(\vec{F}_1) = (-1,1,0) \\
 * \quad & \vec{F}_2 = (1,0,1), \quad \vec{M}_O(\vec{F}_2) = (0,0,0) \\
 * \quad & \vec{M}_1 = (1,0,1) \\
 * \quad & \vec{M}_2 = (-1,0,0)
 \end{aligned}$$

- Vector chính:  $\vec{R}'_O = \sum \vec{F}_k = (2,1,1)$
- Vector moment chính:  $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) + \sum \vec{m}_i = (-1,1,1)$

## VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (3)

### Thu gọn hệ lực 2:



$$* \begin{cases} \vec{OA_1} = (0,0,1) \\ \vec{F_1} = (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F_1}) = \vec{OA_1} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$* \vec{F_1} = (1,0,0), \quad \vec{M}_O(\vec{F_1}) = (0,1,0)$$

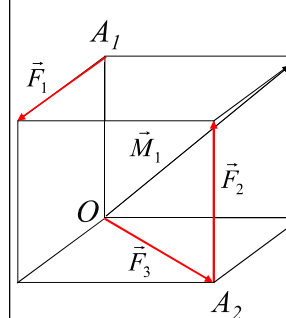
$$* \vec{F_2} = (1,1,1), \quad \vec{M}_O(\vec{F_2}) = (0,0,0)$$

$$* \vec{M_1} = (-1,0,1)$$

- Vector chính:  $\vec{R}'_O = \sum \vec{F_k} = (2,1,1)$
- Vector moment chính:  $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F_k}) + \sum \vec{m_i} = (-1,1,1)$

## VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (4)

### Thu gọn hệ lực 3:



$$* \begin{cases} \vec{OA_1} = (0,0,1) \\ \vec{F_1} = (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F_1}) = \vec{OA_1} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$* \vec{F_1} = (1,0,0), \quad \vec{M}_O(\vec{F_1}) = (0,1,0)$$

$$* \begin{cases} \vec{OA_2} = (1,1,0) \\ \vec{F_2} = (0,0,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{M}_O(\vec{F_2}) = \vec{OA_2} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$* \vec{F_2} = (0,0,1), \quad \vec{M}_O(\vec{F_2}) = (1,-1,0)$$

$$* \vec{F_3} = (1,1,0), \quad \vec{M}_O(\vec{F_3}) = (0,0,0)$$

$$* \vec{M_1} = (0,1,1)$$

- Vector chính:  $\vec{R}'_O = \sum \vec{F_k} = (2,1,1)$
- Vector moment chính:  $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F_k}) + \sum \vec{m_i} = (1,1,1)$

## VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (5)

### Tóm tắt:

Hệ lực	Vector chính $\vec{R}'_O$	Vector moment chính $\vec{M}_O$
1	(2,1,1)	(-1,1,1)
2	(2,1,1)	(-1,1,1)
3	(2,1,1)	(1,1,1)

→ Hệ lực 1 tương đương với hệ lực 2

### ❖ Nhận xét:

## VÍ DỤ VỀ THU GỌN HỆ LỰC (4)

### Câu 2: Hệ lực nào có hợp lực?

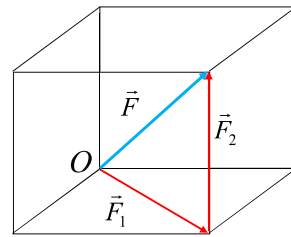
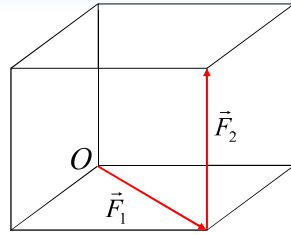
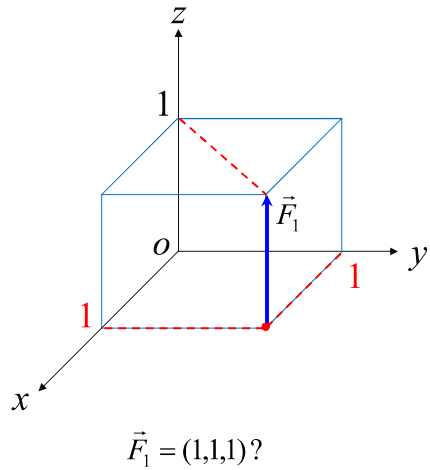
a. 1, 2, 3    b. 1    c. 3    d. không có e. 1, 2

TH3:  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O = \vec{0}$

TH4:  $\vec{R}' \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}, \vec{M}_O \perp \vec{R}'$

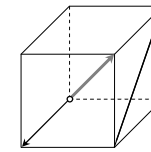
## SAI LẦM Ở ĐÂU (1)

Sai lầm ở đâu? Tại sao?

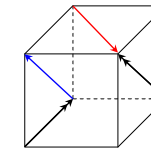


## THU GỌN HỆ LỰC

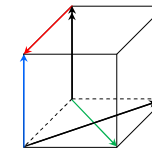
Thu gọn các hệ lực sau:



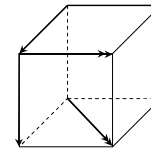
(1)



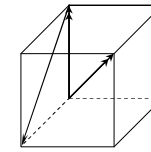
(2)



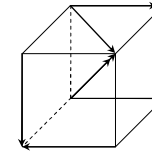
(3)



(4)



(5)



(6)

*Đọc kỹ và làm lại các ví dụ trong giáo trình*