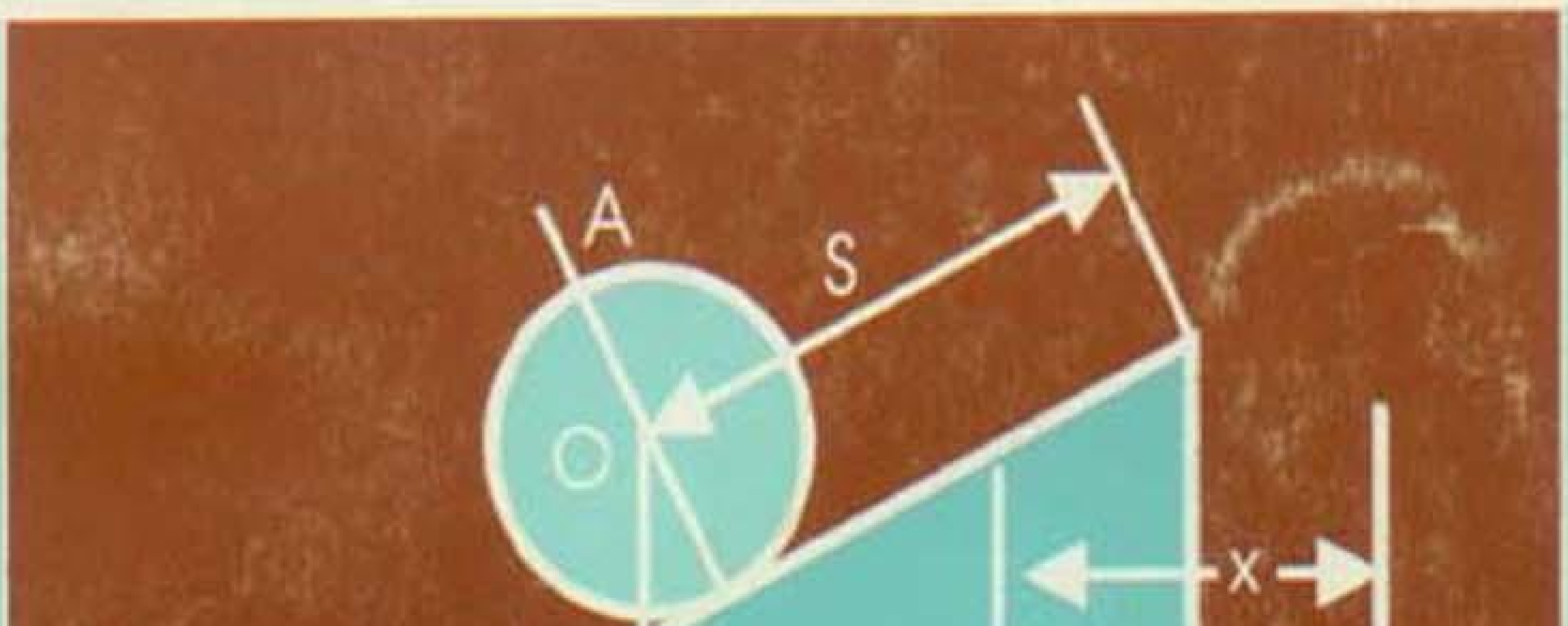
LÊ DOÃN HỒNG
ĐỖ SANH

BÀI TẬP CƠ HỌC

TẬP HAI ĐỘNG LỰC HỌC



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ĐỖ SANH (Chủ biên) - LÊ DOÃN HỒNG

BÀI TẬP
CƠ HỌC

TẬP HAI
ĐỘNG LỰC HỌC

(Tái bản lần thứ 4, có sửa chữa)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - 1999

$\frac{531}{GD-99}$ 223/491 - 99

Mã số : 7B004T9

CHƯƠNG 1

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

1.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

1.1.1. Phương trình cơ bản của động lực học

Khảo sát chất điểm M có khối lượng m, chịu tác dụng của lực $\vec{F}$ chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính với gia tốc $\vec{a}$ thỏa mãn phương trình sau:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (1 - 1)$$

được gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

Chú thích :

– Trong trường hợp chất điểm chịu tác dụng của nhiều lực thì lực $\vec{F}$ là hợp lực của các lực đó, tức $\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$.

– Trong thực tế kỹ thuật hệ quy chiếu quán tính thường được chọn là hệ quy chiếu gắn liền với quả đất hoặc chuyển động tịnh tiến thẳng đều đối với quả đất.

– Đối với chất điểm không tự do, để sử dụng (1 – 1) cần áp dụng tiên đề giải phóng liên kết, thay các liên kết bằng các lực liên kết, và lực tác dụng lên chất điểm bao gồm cả các lực liên kết đó.

1.1.2. Các dạng phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

Khi chọn các hệ trục tọa độ khác nhau gắn với hệ quy chiếu quán tính ta nhận được các phương trình vi phân được gọi là hệ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm, sau khi tích phân chúng, ta nhận được phương trình chuyển động của chất điểm. Từ phương trình (1 – 1) có thể viết phương trình vi phân chuyển động trong các dạng khác nhau. Dưới đây ta nêu tóm tắt trong bảng một số dạng phương trình vi phân chuyển động thường gặp của chất điểm.

BẢNG 1–1

Dạng	Lực	Tọa độ	Gia tốc	Phương trình vi phân của chuyển động của chất điểm
Vectơ	$\vec{F}$	$\vec{r}$	$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$	$m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$
Đề các	$F_x = X$ $F_y = Y$ $F_z = Z$	x y z	$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ $a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ $a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$	$m\ddot{x} = X$ $m\ddot{y} = Y$ $m\ddot{z} = Z$
Tự nhiên	$\bar{F}_t$ F_n F_b	$\bar{s}$ (trên quỹ đạo định hướng)	$\bar{a}^t = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}}$ $a^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}$ $a^b = 0$	$m\bar{a}^t = m\ddot{s} = F_\tau$ $ma^n = m\frac{v^2}{\rho} = F_n$ $ma^b = 0 = F_b$
Độc cực phẳng	F_r F_θ	r θ	$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ $a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$	$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$ $\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_\theta$

1.1.3. Bài toán thuận và bài toán ngược

Áp dụng các phương trình vi phân đã viết trên đây chúng ta có thể giải quyết hai bài toán cơ bản của động lực học chất điểm :

– *Bài toán thuận* là bài toán biết chuyển động của chất điểm, tìm lực tác dụng lên nó hoặc một số điều kiện hình học hay động học có liên quan đến lực đó.

– *Bài toán ngược* là bài toán biết lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện ban đầu của chuyển động, tìm quy luật chuyển động của nó.

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt khảo sát hai bài toán đó và giới thiệu các phương pháp giải hai bài toán đó.

1.2. BÀI TOÁN THUẬN ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

1.2.1. Hướng dẫn áp dụng

Biết chuyển động của chất điểm thường là biết tọa độ hoặc các hình chiếu của vận tốc, gia tốc :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\ ;\ \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)\ ;\ \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}(t);$$

$$x = x(t)\ ;\ \dot{x} = \dot{x}\,(t)\ ;\ \ddot{x} = \ddot{x}\,(t);$$

$$y = y(t)\ ;\ \dot{y} = \dot{y}\,(t)\ ;\ \ddot{y} = \ddot{y}\,(t);$$

$$z = z(t)\ ;\ \dot{z} = \dot{z}\,(t)\ ;\ \ddot{z} = \ddot{z}\,(t).$$

Hoặc biết quỹ đạo chất điểm và quy luật chuyển động trên quỹ đạo đó :

$$\bar{s} = \bar{s}(t)\ ;\ \overline{V}^t = \dot{\bar{s}}(t)\ ;\ \bar{a}^t = \ddot{\bar{s}}\,(t)$$

Vấn đề cần giải quyết ở đây là cần tìm gia tốc của chất điểm rồi từ các dạng phương trình vi phân chuyển động thích hợp suy ra lực tác dụng lên chất điểm. Do đó phương pháp giải quyết bài toán sẽ theo trình tự như sau :

– Xác định vật thể khảo sát dưới dạng một chất điểm chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính. Đặt các lực tác dụng lên chất điểm đó gồm các lực hoạt động và các phản lực liên kết. Viết phương trình vi phân chuyển động theo một trong các dạng phương trình vi phân chuyển động nêu trong bảng tóm tắt trên.

– Tính đạo hàm để tìm gia tốc hoặc hình chiếu véctơ gia tốc lên các trục tọa độ đã cho.

– Thay vào các phương trình vừa viết để tìm các lực theo yêu cầu của bài toán.

1.2.2. Bài giải mẫu

Thí dụ 1–1. Một vật nặng trọng lượng $\vec{P}$ được kéo lên với gia tốc $\vec{a}$, theo phương thẳng đứng. Tìm sức căng $\vec{T}$ của dây ?

Bài giải. Vật khảo sát : vật nặng được coi như một chất điểm.

Các lực tác dụng lên chất điểm gồm :

– Trọng lực $\vec{P}$; Sức căng dây T ;

Khi viết (1 – 1) cho chất điểm khảo sát, ta có:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Chọn trục tọa độ Oz hướng thẳng đứng từ dưới lên. Chiếu phương trình véctơ trên đây lên trục Oz:

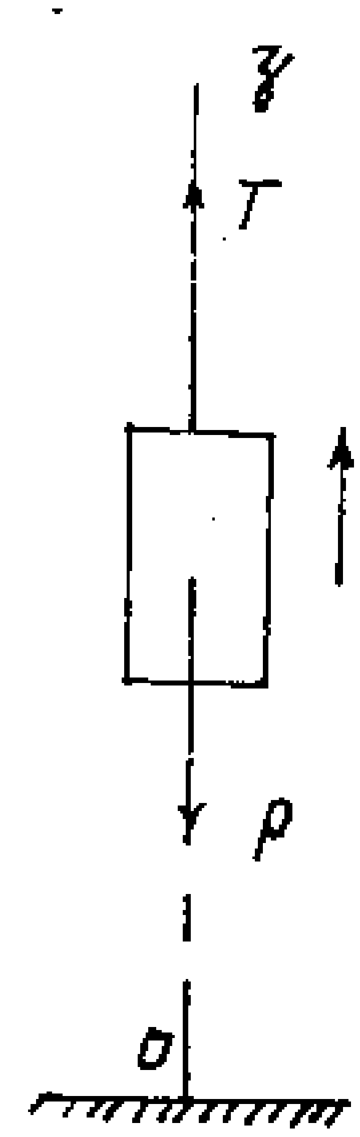
$$ma = -P + T.$$

Từ đây rút ra sức căng dây T là :

$$T = m(g + a).$$

Nhận xét : Nếu gia tốc a hướng xuống thì sức căng T của dây sẽ là :

$$T = m(g - a).$$



HÌNH 1-1

Như vậy khi vật được kéo lên nhanh dần hoặc hạ xuống nhanh dần với gia tốc có trị số a thì sức căng của dây sẽ bằng trọng lượng của vật cộng thêm hoặc trừ đi đại lượng ma.

$$T = P \pm ma.$$

Nếu a =0 tức là vật được kéo lên hạ xuống không có gia tốc thì T = P. Ta gọi đó là sức căng tĩnh của dây.

Sức căng của dây trong điều kiện chuyển động có gia tốc của vật nặng bằng sức căng tĩnh cộng với một lực nữa gọi là phản lực động lực.

Thí dụ 1-2. Điểm M chuyển động trên mặt phẳng xOy có khối lượng m và theo quy luật : x = Acoskt ; y = Bsinkt,

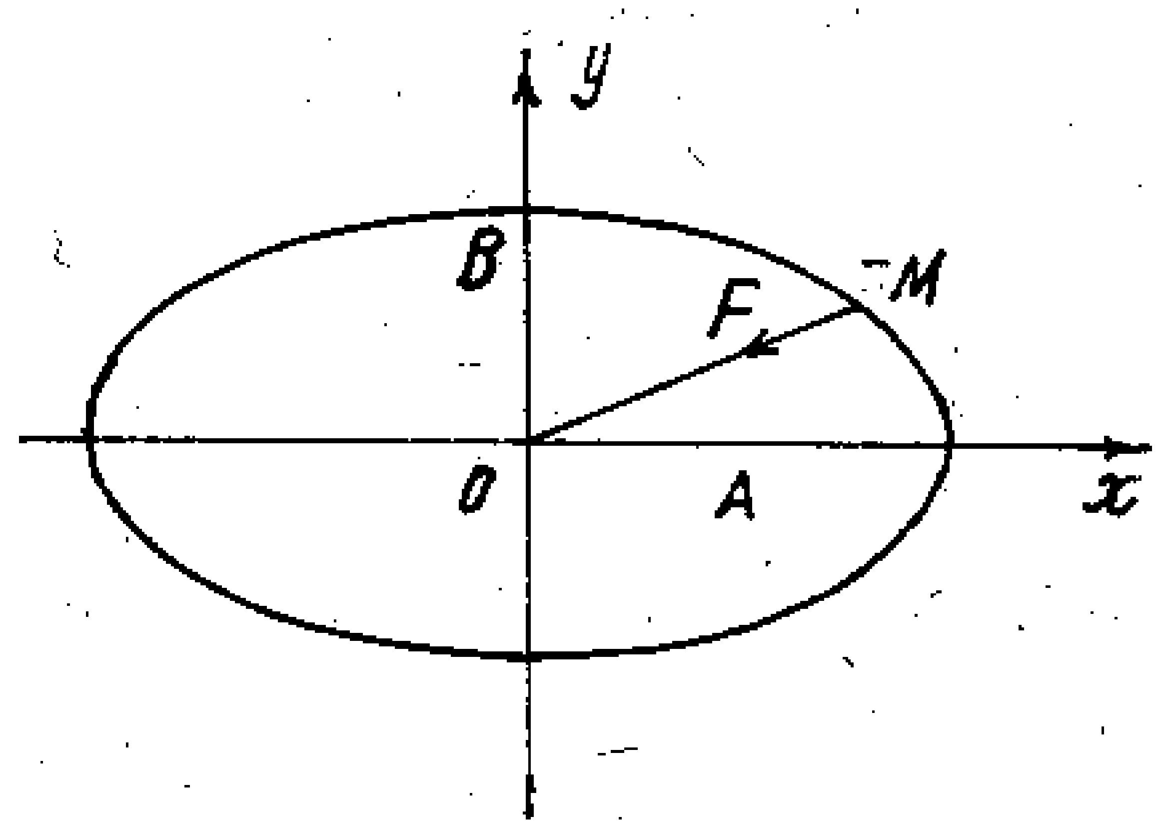
A, B, k, là những hằng số ; x, y tính bằng mét, t tính bằng giây.

Hãy xác định lực $\vec{F}$ tác dụng lên chất điểm đó ?

Bài giải. Nhận xét đầu tiên : Nếu tìm cách loại bỏ t ra khỏi phương trình chuyển động trên ta nhận được phương trình quỹ đạo :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Đây là phương trình elíp. Vậy quỹ đạo của điểm khảo sát là một đường elíp (H.1-2).



HÌNH 1-2

Để giải bài toán này ta gọi lực $\vec{F}$ là hợp lực tác dụng vào chất điểm.

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dưới dạng tọa độ Đề các :

$m\ddot{x} = X$, $m\ddot{y} = Y$, trong đó $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ là hình chiếu của $\vec{a}$ lên các trục Ox và Oy ; X, Y là hình chiếu của $\vec{F}$ lên hai trục đó.

Theo đề ra : x = Acoskt, y = Bsinkt,

suy ra :

$$\ddot{x} = -Ak^2\cos kt = -k^2x,$$
$$\ddot{y} = -Bk^2\sin kt = -k^2y.$$

Do đó ta có :

$$X = -k^2mx;$$
$$Y = -k^2my.$$

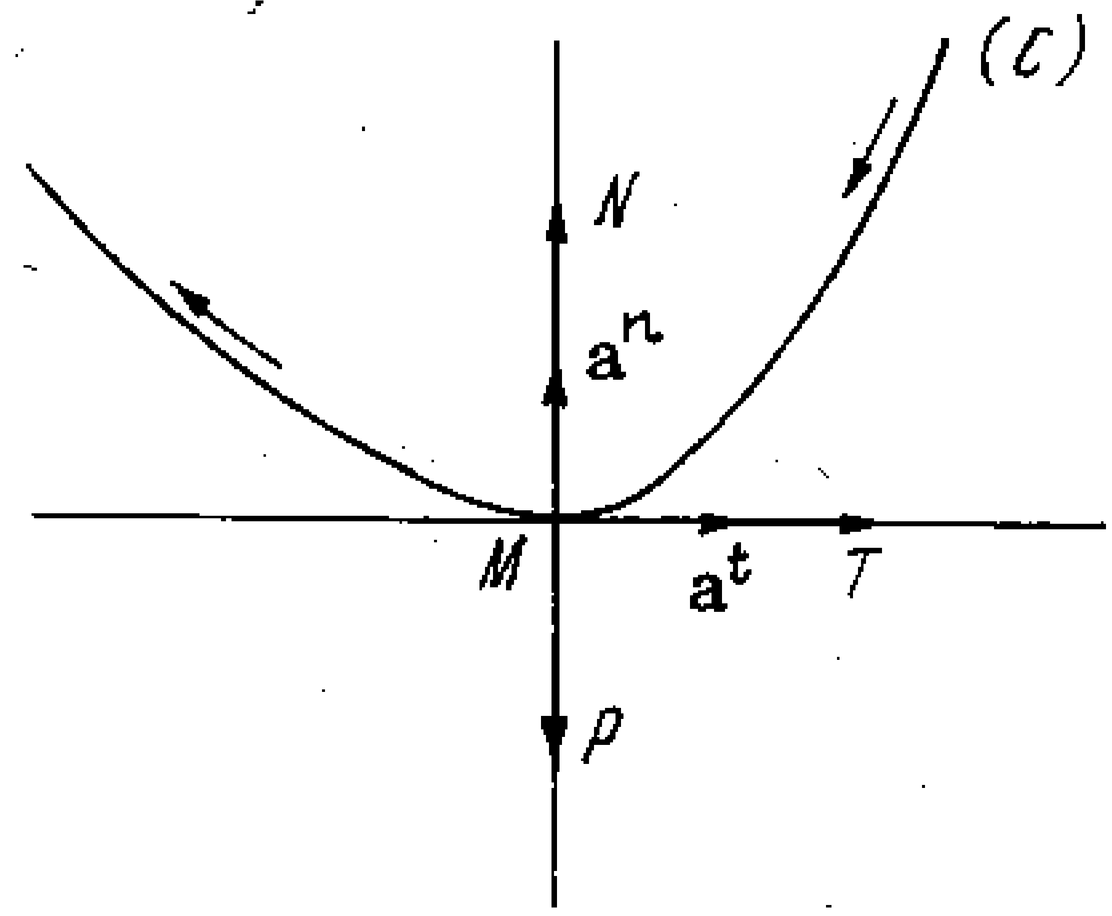
Nếu gọi $\vec{r}$ là bán kính véctơ của chất điểm với hình chiếu lên các trục tọa độ là x, y thì có thể viết lại kết quả vừa nhận được trên dưới dạng vectơ :

$$\vec{F} = -km\vec{r}$$

Biểu thức này chứng tỏ rằng lực tác dụng lên chất điểm buộc nó chuyển động theo quỹ đạo ênlíp trên đây, tỉ lệ với khối lượng m và khoảng cách từ chất điểm đến gốc tọa độ. Lực này luôn luôn hướng về gốc tọa độ O, chính là tâm của quỹ đạo của động điểm. Thí dụ về lực này ta có thể nêu, chẳng hạn, lực đàn hồi.

Thí dụ 1-3. Một máy bay bổ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lái ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo máy bay có vận tốc v = 1000 km/giờ và bán kính cong của quỹ đạo là R = 600 m. Khối lượng của người lái là 80 kg. Tìm áp lực pháp tuyến do người lái tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó của quỹ đạo ?

Bài giải. Xem người lái như một chất điểm chuyển động theo đường cong (C), trong mặt phẳng thẳng đứng, chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ và phản lực $\vec{R}$ của ghế ngồi. Trong đó $\vec{R}$ có thể phân tích theo hai phương tiếp tuyến và pháp tuyến với quỹ đạo tại điểm đó (H. 1-3)



HÌNH 1-3

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}.$$

Ta có phương trình vi phân chuyển động dạng vectơ :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}. \qquad (a)$$

Để tính phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, ta chiếu hai vế của phương trình (a) lên phương pháp tuyến chính, ta có :

$$ma^n = -P + N. \qquad (b)$$

Từ (b) ta suy ra :

$$N = P + m\frac{v^2}{R} = m\left(\frac{v^2}{R} + g\right).$$

Thay các giá trị bằng số đã cho : m = 80 kg, v = 1000 km/giờ $= \frac{2500}{9}$ m/s ; R = 600m, lấy g = 9.81 m/s^2, ta được :

$$N = 80\left(\frac{2500^2}{9^2 \cdot 600} + 9{,}81\right) \approx 11{,}073 \text{ KN}.$$

Vậy người lái đã ép lên mặt ghế một áp lực pháp tuyến bằng 11,073 KN, giống như trong điều kiện tĩnh người ấy nặng lên gấp 14 lần. Trong điều kiện ấy người lái, ghế, giá đỡ, ổ đĩa v.v. đều phải làm việc ở trạng thái chịu siêu tải trọng.

1.3. BÀI TOÁN NGƯỢC ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

1.3.1. Hướng dẫn áp dụng

Biết lực tác dụng lên chất điểm, tức là biết được vế bên phải trong các phương trình vi phân đã nêu trong bảng tóm tắt ở trên. Vậy để tìm luật chuyển động của chất điểm ta phải tích phân các phương trình vi phân chuyển động đó.

Trên thực tế tùy theo bản chất vật lý của lực tác dụng $\vec{F}$ mà những yếu tố xác định lực ở vế phải của các phương trình trên đây là không đổi, hoặc là những hàm đối với thời gian, đối với vận tốc, đối với vị trí của chất điểm,... Những lực đó xác định dạng của các phương trình vi phân nhận được và do đó tương ứng với mỗi loại phương trình ta có các phương pháp tích phân khác nhau.

Hệ phương trình vi phân chuyển động của chất điểm là hệ phương trình vi phân cấp hai, do đó khi tích phân hệ phương trình ấy ta nhận được nghiệm tổng quát của bài toán dưới dạng các hàm của thời gian và chứa các hằng số tích phân. Nghiệm tổng quát xác định một lớp chuyển động có thể xảy ra bao gồm chuyển động thực của chất điểm. Để xác định nghiệm ứng với chuyển động thực xảy ra cần phải xác định các hằng số tích phân trong nghiệm tổng quát nhờ điều kiện đầu của bài toán.

Đó là những điều kiện xác định vị trí và vận tốc của chất điểm ở thời điểm t_o nào đó được gọi là các điều kiện đầu của bài toán. Thường ta lấy $t_o = 0$. Nghiệm của bài toán nhận được khi đã xác định được các hằng số tích phân được gọi là nghiệm riêng của bài toán.

Để giải các bài toán ngược đối với chất điểm ta theo các bước như sau:

– Khảo sát chất điểm ở một vị trí bất kỳ và đặt các lực tác dụng lên nó. Viết phương trình vi phân chuyển động thích hợp (Đề–các hay tự nhiên,...) và các điều kiện đầu của chuyển động.

– Tích phân phương trình nhận được để có nghiệm tổng quát của bài toán. Trên cơ sở điều kiện đầu cho, xác định các hằng số tích phân để cuối cùng nhận được nghiệm riêng của bài toán.

1.3.2. Bài giải mẫu

Trong các thí dụ và bài toán sẽ cho dưới đây ta phân biệt các chuyển động thẳng và chuyển động cong của chất điểm. Việc tích phân phương trình chuyển động phụ thuộc vào dạng của lực tác dụng nên ta sẽ phân loại các chuyển động đó theo dạng lực tác dụng. Dưới đây chúng ta chỉ xét một số trường hợp đơn giản : lực hằng, lực phụ thuộc vào thời gian, lực phụ thuộc vị trí và lực phụ thuộc vận tốc của chất điểm hoặc tổ hợp các yếu tố này. Như sau này sẽ thấy, các trường hợp như vậy rất quan trọng, bởi vì nhiều bài toán có thể đưa về một trong các dạng này.

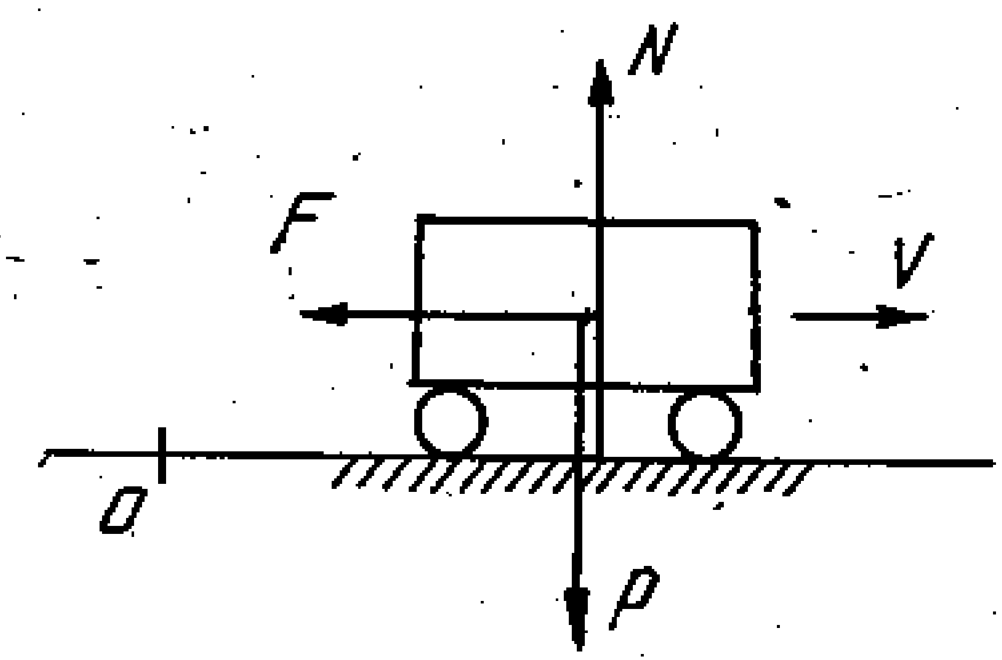
A – BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG THẲNG

Đối với các chuyển động của chất điểm có quỹ đạo thẳng bao giờ cũng chọn ngay đường thẳng quỹ đạo của chất điểm làm trục Ox. Khi ấy phương trình vi phân chuyển động cùng với điều kiện đầu của chuyển động của chất điểm được viết :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ \dot{x}(0) = v_0\,, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (1-4)$$

ở đó F_x là hình chiếu trên trục Ox của hợp lực tác dụng lên chất điểm.

Thí dụ 1–4. Một đoàn tàu chuyển động trên một đường thẳng nằm ngang với vận tốc không đổi v_0. Vào một thời điểm nào đó người ta tắt máy và hãm tàu lại. Lực hãm và cản tổng hợp tác dụng lên tàu bằng 1/10 trọng lượng của nó. Hãy xác định chuyển động của tàu từ khi tắt máy và hãm, (H.1–4).



HÌNH 1–4

Bài giải. Khảo sát đoàn tàu như một chất điểm có khối lượng m.

Các lực tác dụng lên chất điểm gồm :

– Trọng lượng $\vec{P}$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực cản ngang $\vec{F}$.

Chọn trục x hướng theo phương ngang, gốc O là điểm mà từ đó tàu được tắt máy và bắt đầu hãm với thời điểm lúc đó $t_o = 0$.

Theo (1–4), phương trình vi phân chuyển động cùng với điều kiện đầu được viết như sau :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F, \\ \dot{x}(0) = v_o, \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Vì $F = \dfrac{1}{10}P$, nên :

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{10} \longrightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{10}$$

Tích phân phương trình này ta được :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{g}{10}t + c_1, \\ x = -\dfrac{g}{20}t^2 + c_1 t + c_2. \end{cases}$$

Để xác định các hằng số c_1, c_2 bằng cách thay thế điều kiện đầu vào ta có ngay :

$$c_1 = v_o,\ c_2 = 0.$$

Cuối cùng phương trình chuyển động của chất điểm sẽ là :

$$x = v_o t - \frac{gt^2}{20}.$$

Nhận xét : Từ kết quả nhận được ta thấy đoàn tàu chuyển động chậm dần đều với vận tốc đầu là v_o và với gia tốc là $\frac{g}{10}$. Tàu sẽ dừng hẳn ở thời điểm t_1 được tìm từ điều kiện $v(t_1) = 0$:

$$v(t_1) = \dot{x}(t_1) = v_o - \frac{gt_1}{10} = 0.$$

Từ đây tìm được : $t_1 = \frac{10v_o}{g}$.

Quãng đường mà đoàn tàu còn chạy thêm được kể từ khi tắt máy là :

$$x(t_1) = -\frac{g}{20}\left(\frac{10v_o}{g}\right)^2 + v_o\left(\frac{10v_o}{g}\right) = \frac{5v_o^2}{g}.$$

Thí dụ 1-5. Một chất điểm có khối lượng m chịu tác dụng của một lực theo phương ngang x là $X = P\sin kt$, trong đó P và k là những hằng số đã biết. Tìm chuyển động của chất điểm biết rằng lúc ban đầu $t_o = 0$ thì chất điểm ở vị trí x_o và có vận tốc là v_o.

Bài giải. Khảo sát chất điểm chuyển động theo phương ngang dưới tác dụng của lực X. Chọn Ox theo phương ngang, O là điểm gốc. Gọi x là hoành độ của chất điểm.

Ta viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm cùng với điều kiện đầu đã cho như sau :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = P\sin kt, \\ \dot{x}(0) = v_o \\ x(0) = x_o \end{cases}$$

Giải phương trình theo điều kiện đầu ta được :

$$m\frac{dv}{dt} = P\sin kt,$$

hay
$$\begin{cases} mdv = P\sin kt dt \\ v = \dot{x} \end{cases}$$

Tích phân phương trình ta nhận được :

$$mv = -\frac{P}{k}\cos kt + C_1$$

Thay $v = \dot{x}$ vào đây ta có :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{P}{mk}\cos kt + C_1$$

Tích phân phương trình này ta nhóm được :

$$x = -\frac{P}{mK^2}\sin kt + C_1 t + C_2$$

Sử dụng các điều kiện đầu đã cho ở trên ta tính được các hằng số tích phân C_1 và C_2 :

$$C_1 = v_o + \frac{P}{mK}, \quad C_2 = x_o$$

Phương trình chuyển động của chất điểm sẽ là :

$$x = x_o + \left(v_o + \frac{P}{km}\right) t - \frac{P}{k^2 m}\sin kt$$

Nhận xét : Phương trình chuyển động nhận được chứng tỏ chất điểm tham gia hai chuyển động :

1- Chuyển động đều :

$$x = x_o + \left(v_o + \frac{P}{km}\right) t ;$$

2- Dao động điều hòa :

$$x = -\frac{P}{k^2 m}\sin kt$$

Thí dụ 1-6. Một tàu thủy có khối lượng toàn bộ là m mở máy chuyển động từ trạng thái đứng yên trên mặt nước yên tĩnh. Cho biết lực tổng hợp bao gồm lực phát động và lực cản tác dụng vào tàu hướng theo phương chuyển động và có cường độ là $F = A - Bv$; A và B là các hằng số dương đã cho, còn v là tốc độ chuyển động của tàu.

1- Xác định vận tốc giới hạn của tàu thủy.

2- Xác định phương trình chuyển động của tàu.

Bài giải. Khảo sát tàu thủy như một chất điểm chuyển động thẳng ngang chịu tác dụng các lực :

– Trọng lực $\vec{P}$, lực đẩy Acsimet $\vec{N}$, lực $\vec{F}$.

Chọn trục x theo phương ngang, cùng hướng với chuyển động của tàu. Chọn gốc là vị trí lúc khởi động. Phương trình vi phân (1-4) có dạng :

$$m\ddot{x} = F_x = A - B\dot{x}$$

với điều kiện đầu : $\begin{cases} \dot{x}(0) = v_o = 0 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Hoặc có thể viết ở dạng khác :

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{A}{m} - \dfrac{B}{m}v \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases}$$

với điều kiện đầu : $\begin{cases} v(0) = v_o = 0, \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Bây giờ ta sẽ giải phương trình vi phân vừa nhận được với điều kiện đầu cho.

Trước hết nhận xét rằng tàu khởi hành từ trạng thái đứng yên với gia tốc ban đầu là :

$$a(o) = \frac{A - Bv_o}{m} = \frac{A}{m} > 0 \quad (\text{vì } v_o = 0).$$

và tại thời điểm t bất kì thì

$$a = \frac{A - Bv}{m}$$

Rõ ràng là a giảm dần khi v tăng dần cho đến khi $v = v_\infty = \dfrac{A}{B}$ = const thì a = 0. Quá trình tiếp theo chất điểm chuyển động thẳng đều được gọi là chuyển động bình ổn với vận tốc không đổi $v_\infty = \dfrac{A}{B}$. Vậy suy ra rằng trong quá trình chuyển động luôn luôn có hệ thức $A - Bv > 0$. Do đó ta có thể tích phân phương trình bằng phương pháp phân li biến số:

$$\frac{dv}{\alpha - \beta v} = dt,$$

nó có thể được viết trong dạng $\dfrac{d(\alpha - \beta v)}{\alpha - \beta v} = -\beta dt$

trong đó $\alpha = \dfrac{A}{m}$, $\beta = \dfrac{B}{m}$.

Tích phân phương trình này ta nhận được

$$\ln \frac{1}{C_1}(\alpha - \beta v) = -\beta t$$

$$\frac{\alpha - \beta v}{\alpha} = C_1 e^{-\beta t}$$

Sử dụng điều kiện đầu cho ta tính được : $C_1 = 1$

Vậy :

$$v = \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) = \frac{A}{B}(1 - e^{-\beta t})$$

Khi $t \to \infty$ ta nhận được :

$$v(\infty) = v_\infty = \frac{A}{B}$$

Hàm $e^{-\beta t}$ giảm rất nhanh nên trên thực tế chỉ sau khoảng thời gian không lâu có thể xem chất điểm chuyển động đều với vận tốc giới hạn v_∞ được gọi là chuyển động bình ổn.

Để nhận được phương trình chuyển động của con tàu, ta tiếp tục tích phân phương trình đối với biểu thức của vận tốc, nó được viết trong dạng :

$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-\beta t})$$

hay $\quad dx = \dfrac{A}{B}(1 - e^{-\beta t})dt,$

Khi tích phân ta có

$$x = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B\beta}e^{-\beta t} + C_2$$

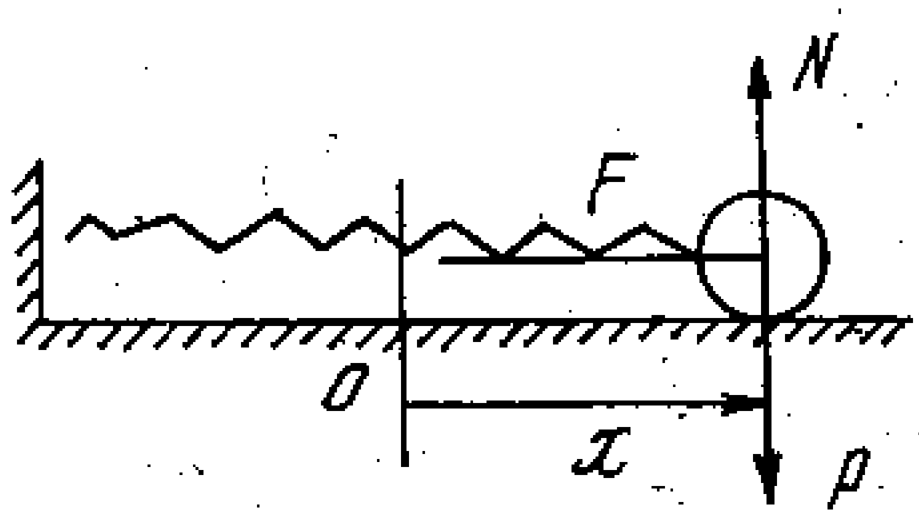
Sử dụng điều kiện đã cho, ta tính được

$$C_2 = -\frac{A}{B\beta} = -\frac{mA}{B^2}$$

Vậy phương trình chuyển động của con tàu sẽ là :

$$x = \frac{A}{B}t + \frac{mA}{B^2}(1 - e^{-\beta t})$$

Thí dụ 1-7. Một quả cầu nhỏ có khối lượng m được buộc vào đầu mút của một lò xo có độ cứng c, đầu kia của lò xo cố định. Kéo quả cầu khỏi vị trí cân bằng một đoạn là a và cho nó một vận tốc đầu v_o hướng theo phương ngang từ trái sang phải, sau đó quả cầu tự chuyển động theo mặt ngang nhẵn. Tìm phương trình chuyển động của quả cầu.



HÌNH 1 - 5

Bài giải. Khảo sát quả cầu như một chất điểm. Lực tác dụng lên chất điểm : trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{N}$, phản lực lò xo $\vec{F}$.

Chọn gốc tọa độ là vị trí cân bằng của lò xo (không co giãn) : x là tọa độ của quả cầu đồng thời cũng là độ giãn của lò xo ; Ox nằm ngang theo phương chuyển động.

Theo bài ra ta có : F = cx.

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dọc trục Ox nằm ngang có dạng :

$$m\ddot{x} = -cx$$

hoặc $$\ddot{x} = -\frac{c}{m}x.$$

Đặt $k^2 = \frac{c}{m}$ ta có

$$\ddot{x} + k^2x = 0$$

Với điều kiện đầu :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_o \\ x(0) = a. \end{cases}$$

Giải phương trình vi phân nhận được theo điều kiện đầu đã cho.

Ta biết nghiệm tổng quát của phương trình có dạng :

$$x = A\cos kt + B\sin kt,$$

trong đó A, B là những hằng số sẽ xác định theo điều kiện đầu. Khi thay chúng vào biểu thức của nghiệm và biểu thức của vận tốc :

$$\dot{x} = -Ak\sin kt + Bk\cos kt$$

ta có $\dot{x}(0) = v_o = +kB$. Rút ra $B = v_o/k$.

$x(0) = a = A$. Rút ra $A = a$.

Cuối cùng ta nhận được phương trình chuyển động của quả cầu :

$$x = a\cos kt + \frac{v_o}{k}\sin kt,$$

nó còn có thể viết dưới dạng :

$$x = \sqrt{a^2 + \frac{v_o^2}{k^2}}\sin(kt + \alpha), \text{ với } tg\alpha = \frac{ak}{v_o}$$

Quả cầu thực hiện dao động điều hòa với biên độ :

$$\sqrt{a^2 + \frac{v_o^2}{k^2}}$$

tần số k và góc lệch pha ban đầu α. Chú ý rằng nghiệm tổng quát của phương trình vi phân còn có thể viết trong dạng :

$$x = C\sin(kt + \alpha)$$

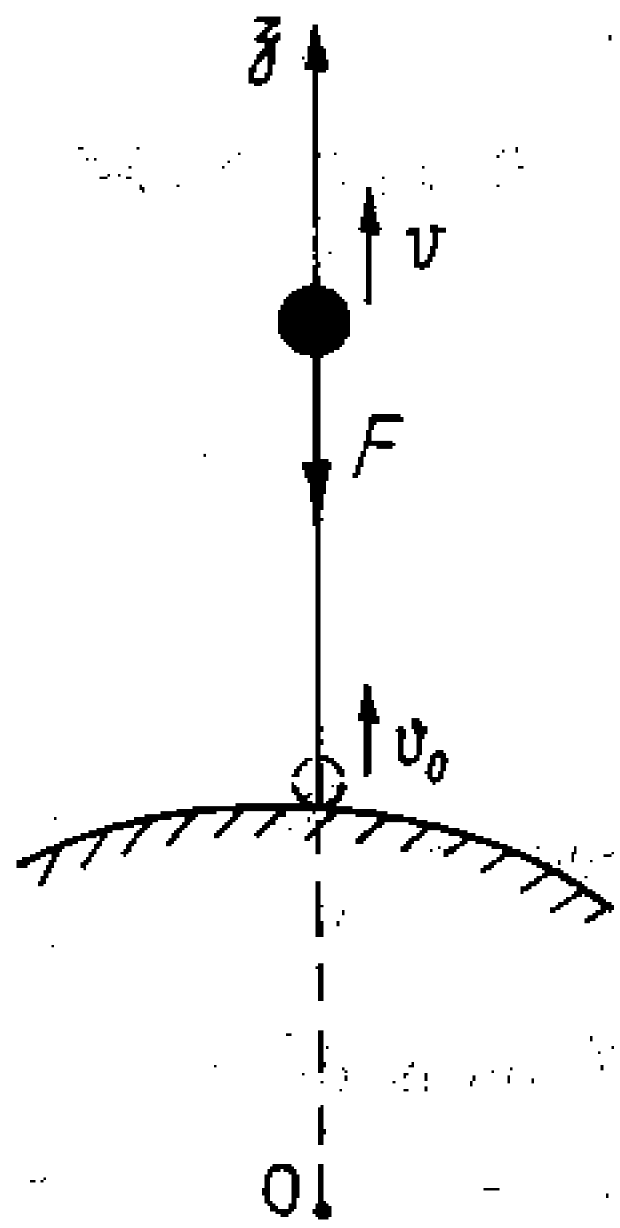
trong đó C và α là những hằng số tích phân được xác định từ điều kiện đầu, C được gọi là biên độ dao động, α góc lệch pha ban đầu.

Từ điều kiện đầu dễ dàng tìm được:

$$C = \sqrt{a^2 + \frac{v_o^2}{k^2}} \;; \quad tg\alpha = \frac{ak}{v_o}$$

Bằng cách đó ta nhận lại được kết quả đã tìm trên.

Thí dụ 1-8. Một vật nặng được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu v_o chịu tác dụng của lực hấp dẫn của quả đất $F = \frac{C}{z^2}$ trong đó C là hằng số hấp dẫn còn z là khoảng cách từ tâm quả đất đến vật nặng. Với giá trị nào của v_o thì vật nặng thoát khỏi được sức hút của quả đất ? Xem như quả đất đứng yên và bỏ qua sức cản của không khí.



HÌNH 1-6

Bài giải. Khảo sát vật nặng như một chất điểm, chịu tác dụng của lực hấp dẫn $\vec{F}$.

Bài toán được giải quyết qua hai bước : tìm độ cao cực đại vật nặng đạt được ứng với giá trị v_o cho trước, và tìm giá trị v_o để vật nặng thoát khỏi được sức hút của quả đất.

Lấy đường thẳng đứng - đường thẳng quỹ đạo định hướng lên trên - làm trục z. Chọn gốc tọa độ là tâm quả đất và gốc tính thời gian $t_o = 0$, là thời điểm lúc bắn vật lên (H.1-6).

Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm :

$$m\ddot{z} = -F$$

hay
$$m\ddot{z} = -\frac{C}{z^2} \qquad (a)$$

với điều kiện đầu :

$$\dot{z}(0) = v_o$$

$$z(0) = R. \text{ (R là bán kính của quả đất)} \qquad (b)$$

Trước hết ta xác định hằng số C.

Trên mặt đất, tức là khi z = R, lực hấp dẫn chính bằng trọng lượng của vật :

$$F(R) = P = mg.$$

Suy ra : $\dfrac{C}{R^2} = mg.$

Tức là : $C = mgR^2.$

Phương trình (a) trở thành :

$$\ddot{z} = \frac{-gR^2}{z^2} \tag{a'}$$

Để tích phân phương trình (a') ta chú ý rằng :

$$\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{d\dot{z}}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \dot{z}\,\frac{d\dot{z}}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\dot{z}^2}{2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Phương trình (a') trở thành :

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{gR^2}{z^2} \tag{a''}$$

Phân li biến số rồi tích phân với điều kiện đầu (b), ta có kết quả :

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{z} + C_1;\ C_1 = \frac{v_o^2}{2} - gR$$

Vậy :
$$v^2 = v_o^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{z^2} \tag{c}$$

Từ (c) ta suy ra độ cao cực đại của chất điểm ứng với v_o, ta có $v(z_{max}) = 0$. Suy ra :

$$z_{max} = \frac{2gR^2}{2gR - v_o^2} \tag{d}$$

Từ (c) hoặc từ (d) nếu cho $z_{max} = \infty$, ta tính được giá trị vận tốc ban đầu cần thiết để chất điểm thoát khỏi sức hút của quả đất mà ta kí hiệu là v_∞:

$$v_\infty = \sqrt{2gR}$$

Nếu lấy $g = 9{,}8 m/s^2$, $R = 6{,}4.10^6$ thì tính được $v_\infty = 11.000$ m/s = = 11 km/s, nó được gọi là vận tốc vũ trụ cấp hai.

Thay $v = \frac{dz}{dt}$ trong hệ thức (c) rồi giải ra thì sẽ nhận được phương trình vi phân sau :

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{\frac{a + bz}{z}} \qquad \text{(f)}$$

trong đó : $a = 2gR^2$; $b = v_o^2 - 2gR$

Ta phải tích phân phương trình (f) với điều kiện đầu :

$$z(0) = R \qquad \text{(g)}$$

Độc giả có thể tự tiến hành các phép tính cho đến kết quả cuối cùng.

Thí dụ 1-9. Vật A khối lượng m đặt trên lò xo có hệ số cứng c, chuyển động theo phương thẳng đứng dưới tác dụng lực là hàm điều hòa của thời gian, $S = H\cos\Omega t$, và lực cản nhớt tỉ lệ bậc nhất với vận tốc, $R = \beta v$ (c, H Ω, β là những hằng số). Tại thời điểm đầu vật nằm tại vị trí cân bằng tĩnh. Tìm phương trình chuyển động của vật A. Cho m = 0,196kg ; H = 15,7kN ; Ω = 60rad/s ; c = 19,6N/cm ; β = 25Ns/m (H.1-7).

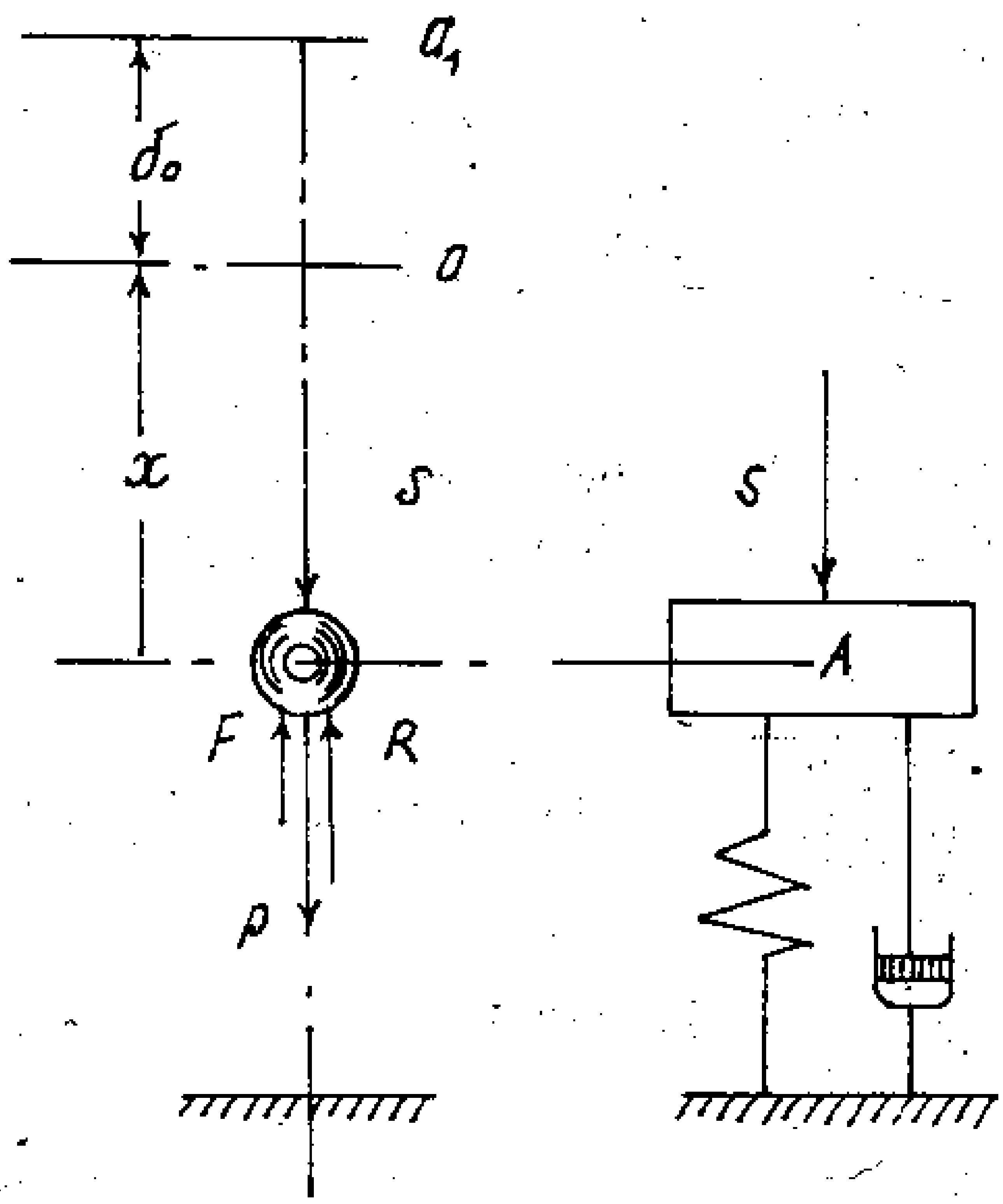
Bài giải. Khảo sát chuyển động của vật A (xem là chất điểm) theo phương thẳng đứng dưới tác dụng các lực gồm trọng lực $\vec{P}$, lực đàn hồi lò xo $\vec{F}$, lực cản $\vec{R}$ và lực kích động $\vec{S}$.

Chọn trục x hướng thẳng đứng xuống, gốc O ứng với vị trí cân bằng tĩnh (khi không gắn vật A, đầu mút lò xo ở vị trí O_1 ; $O_1O = \delta_o$ được gọi là độ giãn tĩnh của lò xo). Phương trình vi phân chuyển động dọc trục Ox của vật A là :

$$m\ddot{x} = P - c(x + \delta_o) - \beta\dot{x} + H\sin\Omega t$$

Trong trường hợp này có thể xem chất điểm A chịu tác dụng của hợp lực là hàm của thời gian, vận tốc và vị trí.

Vì tại vị trí cân bằng tĩnh trọng lực cân bằng với lực lò xo, tức $P = c\delta_o$ nên có thể viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm A trong dạng :



HÌNH 1 – 7

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + k^2x = \overline{H}\sin\Omega t$$

trong đó :

$h = \dfrac{\beta}{2m}$ gọi là hệ số đặc trưng cho môi trường cản.

$k^2 = \dfrac{c}{m}$ – tần số riêng của dao động.

$\overline{H} = \dfrac{H}{m}$

Như đã biết từ lí thuyết phương trình vi phân khi $h < k$ (trường hợp sức cản bé), nghiệm của phương trình vi phân chuyển động của vật A có dạng như sau :

$$x = e^{-ht}(C_1\cos k_1t + C_2\sin k_1t) + B\cos(\Omega t - \varphi)$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện đầu $x(t_o) = x_o$; $\dot{x}(t_o) = \dot{x}_o$ còn :

$$k_1 = \sqrt{k^2 - h^2} \;;$$

$$B = \frac{\overline{H}}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}} \,.$$

$$\varphi = \text{arctg}\, \frac{2h\Omega}{k^2 - \Omega^2} \,.$$

Dao động của vật A trong trường hợp này được gọi là dao động cưỡng bức có cản. Với các số liệu của bài toán, ta tính được.

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1960}{0{,}196}} = 100 \text{ rad/s} \;;$$

$$h = \frac{\beta}{2m} = \frac{25}{2 \times 0{,}196} = 64 \text{ rad/s}$$

$$\overline{H} = \frac{H}{m} = \frac{15{,}7}{0{,}196} = 80 \text{ N/kg} \;;$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - h^2} = \sqrt{(100)^2 - (64)^2} = 77 \text{ rad/s}$$

$$B = \frac{\overline{H}}{\sqrt{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}} =$$

$$= \frac{80}{\sqrt{(\overline{100}^2 - \overline{60}^2)^2 + 4 \,.\, \overline{64}^2 \,.\, \overline{60}^2}} = 8.10^{-3}\text{m}$$

$$\varphi = \text{arctg}\frac{2h\Omega}{k^2 - \Omega^2} = \text{arctg}\frac{2.64.60}{(100)^2 - (60)^2} = \text{arctg}1{,}2 = 0{,}87 \text{rad} \,.$$

Số hạng thứ nhất giảm nhanh theo thời gian, tức môi trường cản dập tắt nhanh thành phần dao động với tần số k_1 (dao động tắt dần). Vậy trong chế độ bình ổn vật A sẽ dao động theo luật :

$$x_{b/o} = B\cos(\Omega t - \varphi) = 8\cos(60t - 0{,}87)\ (mm)$$

tức sẽ dao động với tần số của lực kích động và chậm pha φ so với pha của lực kích động.

Trong trường hợp không kể đến sức cản môi trường ($h \equiv 0$), phương trình vi phân chuyển động của vật A có dạng :

$$\ddot{x} + k^2x = \overline{H}\cos\Omega t$$

Nghiệm của phương trình này sẽ là :

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + B_o\cos(\Omega t - \varphi)$$

trong đó : $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $B = \dfrac{\overline{H}}{\left| k^2 - \Omega^2 \right|}$

$\varphi = 0$ nếu $k > \Omega$ và $\varphi = \pi$ nếu $k < \Omega$, các hằng số tích phân C_1, C_2 được xác định từ điều kiện đầu.

Dao động của vật A trong trường hợp này được gọi là dao động cưỡng bức không cản, nó gồm hai thành phần : thành phần đầu là dao động với tần số dao động tự do, còn thành phần thứ hai – dao động với tần số dao động của lực kích động ; thành phần sau cũng được gọi là dao động cưỡng bức trong chế độ bình ổn.

Chú ý là những kết quả vừa nhận ở trên có thể có được bằng cách khảo sát trực tiếp phương trình vi phân của dao động cưỡng bức không cản hoặc từ các kết quả của dao động cưỡng bức có cản, trong đó lấy $h \equiv 0$ (khi đó $k_1 = k$; $\varphi = 0$ hoặc π)

B – BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG CONG

Có thể gặp các chuyển động của vật được coi như một chất điểm mà quỹ đạo của nó là một đường cong phẳng hoặc đường cong bất kỳ trong không gian. Nếu quỹ đạo là phẳng thì ta chọn ngay mặt phẳng đó làm mặt phẳng quy chiếu xy. Khi ấy phương trình vi phân chuyển động trong tọa độ Đềcác có dạng :

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} X_k \ ,$$

$$m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \ ,$$

với các điều kiện đầu :

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_o \ ; \ x(0) = x_o \ ;$$

$$\dot{y}(0) = \dot{y}_o \ ; \ y(0) = y_o \ ,$$

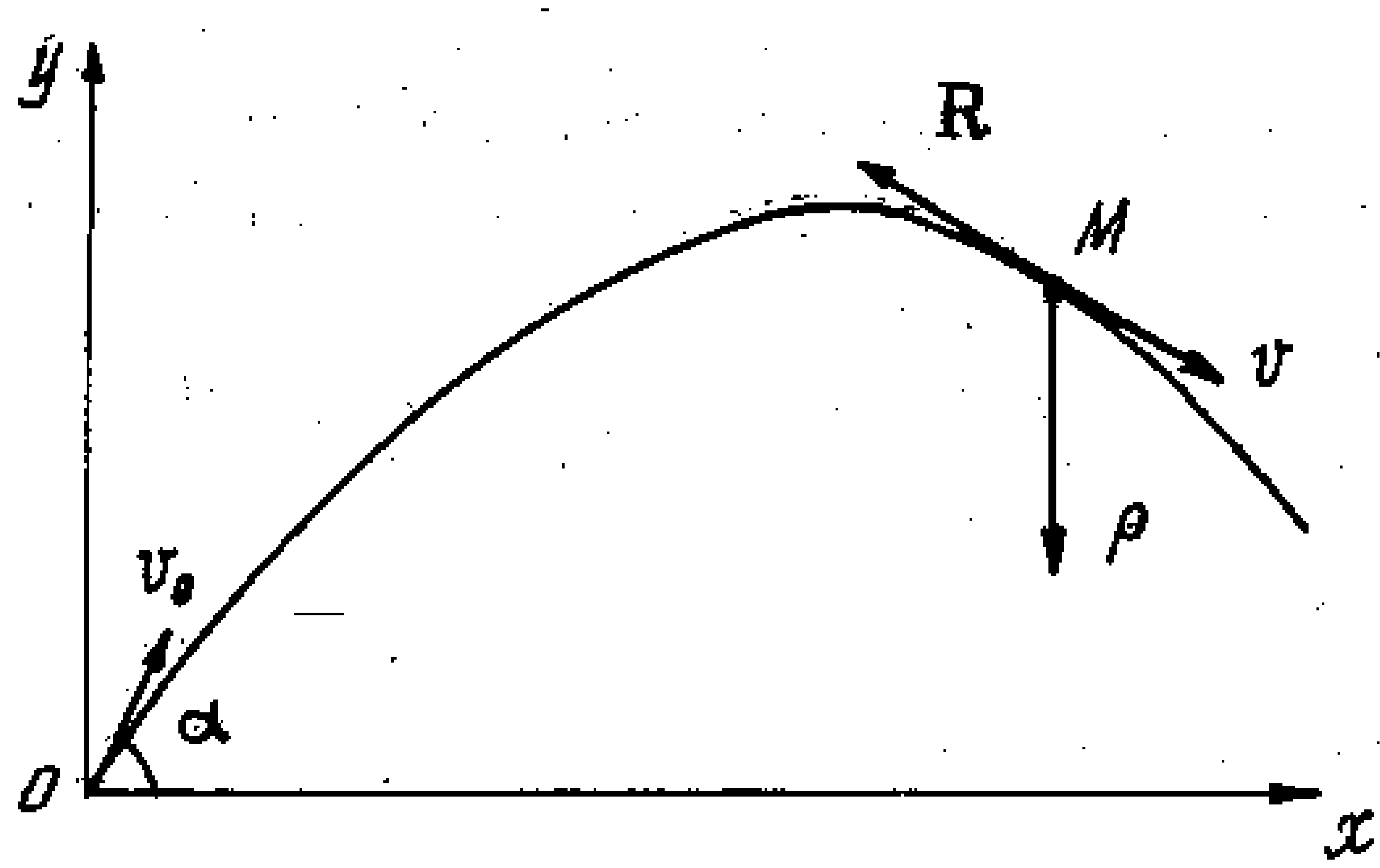
Nếu đường cong quỹ đạo không nằm trong một mặt phẳng thì phải viết cả ba phương trình vi phân chuyển động trong tọa độ Đềcác (hay trong tọa độ thích hợp khác), trong đó có chứa cả ba tọa độ và các đạo hàm của chúng. Nói chung, đó là hệ phương trình vi phân phi tuyến. Khi ấy phải tìm các nghiệm gần đúng. Tuy nhiên trong trường hợp chuyển động khảo sát là tổng hợp của ba chuyển động thẳng độc lập ta có thể giải từng phương trình và có thể nhận được nghiệm đúng của bài toán, theo các trường hợp đã khảo sát ở trên. Sau đây ta xét một số thí dụ.

Thí dụ 1-10. Một viên đạn được bắn đi trong trọng trường đều với vận tốc đầu v_o nghiêng với phương ngang một góc α. Khối lượng của viên đạn là m, gia tốc trọng trường là $\underline{g}$, lực cản của không khí tác dụng lên viên đạn là $\vec{R} = -mgk\vec{v}$, trong đó k là hằng số tỷ lệ đã biết.

Viết phương trình chuyển động của viên đạn.

Bài giải. Xem viên đạn như một chất điểm chuyển động dưới tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ và lực cản không khí $\vec{R} = -mgk\vec{v}$.

Chọn hệ trục tọa độ Đềcác như sau : gốc O trùng với miệng nòng súng, trục Oy hướng thẳng đứng lên, trục Ox nằm ngang và nằm trong mặt phẳng chứa vectơ vận tốc đầu $\vec{v}_o$ của viên



HÌNH 1 - 8

đạn và trục Oy ; trục Oz thẳng góc với các trục Ox và Oy, tức thẳng góc với vectơ $\vec{v}_o$, (H.1-8)

Viết phương trình vi phân chuyển động dạng vectơ.

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \qquad (a)$$

Chiếu đẳng thức vectơ (a) lên các trục tọa độ ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động :

$$m\ddot{x} = -mgkv_x = -mgk\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -P - mgkv_y = -mg - mgk\dot{y}$$

$$m\ddot{z} = -mgkv_z = -mgk\dot{z}$$

Sau khi rút gọn ta được :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -gk\dot{x} \\ \ddot{y} = -gk\left(\dfrac{1}{k} + \dot{y}\right) \\ \ddot{z} = -gk\dot{z} \end{cases} \qquad (b)$$

Chọn gốc thời gian là lúc viên đạn ra khỏi nòng súng, ta có các điều kiện đầu như sau :

$$\dot{x}(0) = v_0\cos\alpha \; ; \; \dot{y}(0) = v_0\sin\alpha \; ; \; \dot{z}(0) = 0$$

$$x(0) = 0 \; ; \; y(0) = 0 \; ; \; z(0) = 0. \qquad (c)$$

Hệ phương trình (b) gồm ba phương trình độc lập, vậy có thể tích phân riêng từng phương trình theo các điều kiện đầu tương ứng.

Trước hết ta tìm $x = x(t)$ nhờ tích phân phương trình $(b)_1$: $\ddot{x} = -gk\dot{x}$. Nhờ phương pháp hạ cấp rồi phân ly biến ta được :

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -gk\dot{x} \ ; \text{ hoặc } \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -gkdt.$$

Từ đó : $\dot{x} = C_1 e^{-gkt}$.

Khi thay điều kiện đầu $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, ta có

$$C_1 = \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha.$$

Do đó : $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x}(0)e^{-gkt} = v_0\cos\alpha \, . \, e^{-gkt}$.

Bây giờ tích phân phương trình vừa nhận được với điều kiện đầu $x(0) = 0$ ta có kết quả

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{gk}(1 - e^{-gkt}) + x(0) = \frac{v_0\cos\alpha}{gk}(1 - e^{-gkt}). \tag{d}$$

Nhận xét rằng các phương trình $(b)_1$ và $(b)_3$ có cùng dạng và chỉ khác nhau điều kiện đầu nên dễ dàng tìm được :

$$\dot{z} = \dot{z}(0)\, e^{-gkt} = 0 \ ; \ z = \frac{\dot{z}(0)}{gk}(1 - e^{-gkt}) + z(0) = 0. \tag{e}$$

Cũng bằng phương pháp tương tự, tích phân phương trình $(b)_2$: $\ddot{y} = -gk\left(\dfrac{1}{k} + \dot{y}\right)$ với điều kiện đầu : $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha$, $y(0) = 0$, ta có kết quả :

$$y = \frac{1}{gk}\left(\frac{1}{k} + v_0\sin\alpha\right)(1 - e^{-gkt}) - \frac{t}{k} \tag{f}$$

Vậy viên đạn chuyển động trong mặt phẳng đứng chứa nòng súng theo các phương trình

$$x = \frac{v_0\cos\alpha}{gk}(1 - e^{-gkt}) \tag{g}$$

$$y = \frac{1}{gk}\left(\frac{1}{k} + v_o \sin\alpha\right)(1 - e^{-gkt}) - \frac{t}{k}$$

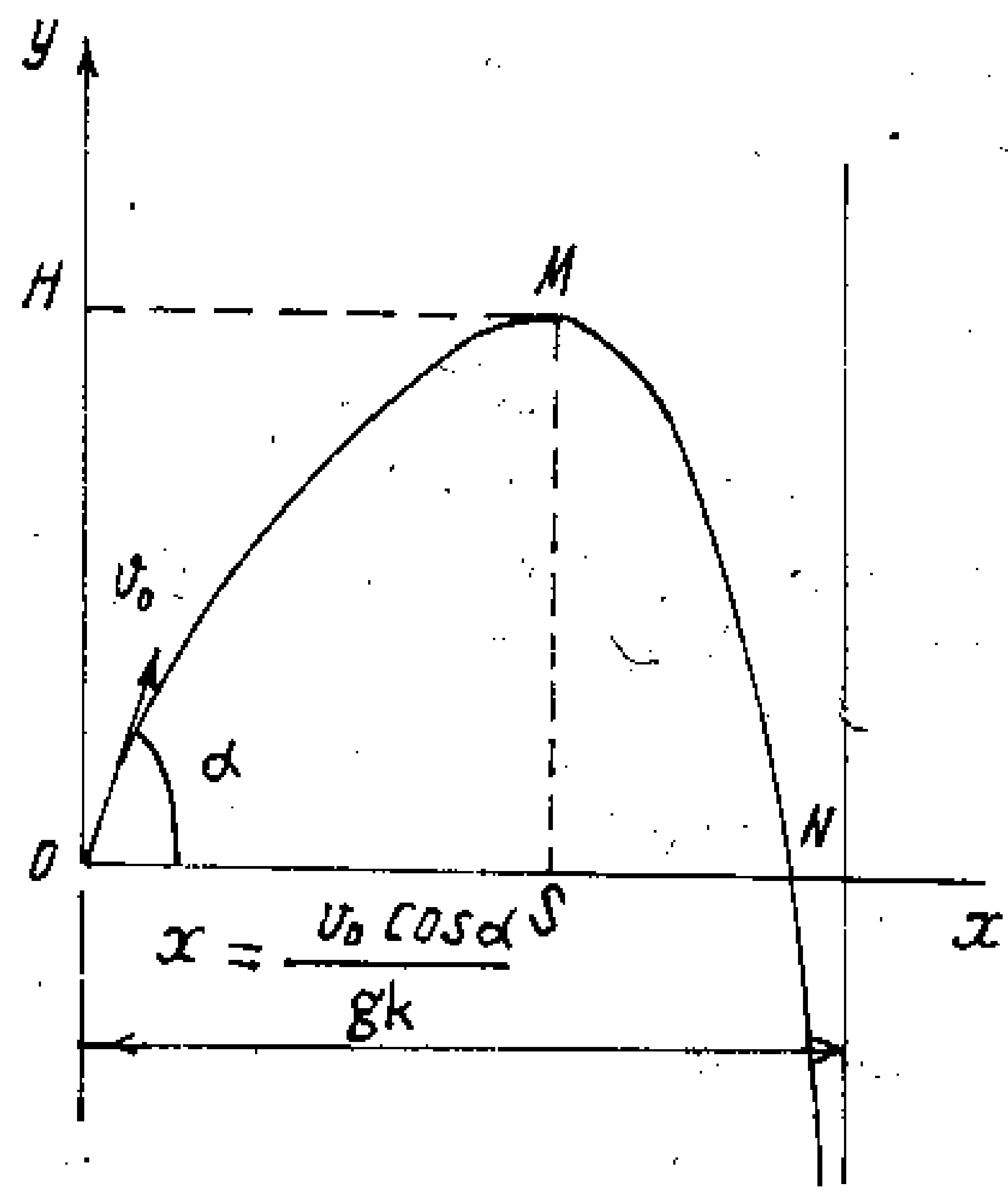
Nhận xét : Sau đây ta nhận xét thêm một vài đặc điểm của chuyển động đó. Khử t giữa hai phương trình trong (g) ta nhận được phương trình quỹ đạo :

$$y = \left(\frac{1}{k} + v_o\sin\alpha\right)\frac{1}{v_o\cos\alpha} + \frac{1}{gk^2}\ln\left|\frac{gk}{v_o\cos\alpha}x - 1\right|.$$

Chú ý rằng : $\lim\limits_{t\to\infty} x = \frac{v_o\cos\alpha}{gk}$, ta thấy quỹ đạo có đường tiệm cận đứng như trên hình 1-9. Nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ lớn, viên đạn gần như rơi thẳng đứng với vận tốc giới hạn.

$$v_1 = \lim_{t\to\infty} v_y = \frac{1}{k}$$

Độc giả có thể tự tìm độ cao cực đại viên đạn có thể đạt được $y_{max} = H$ và độ xa tương ứng $S = x\ (H)$.

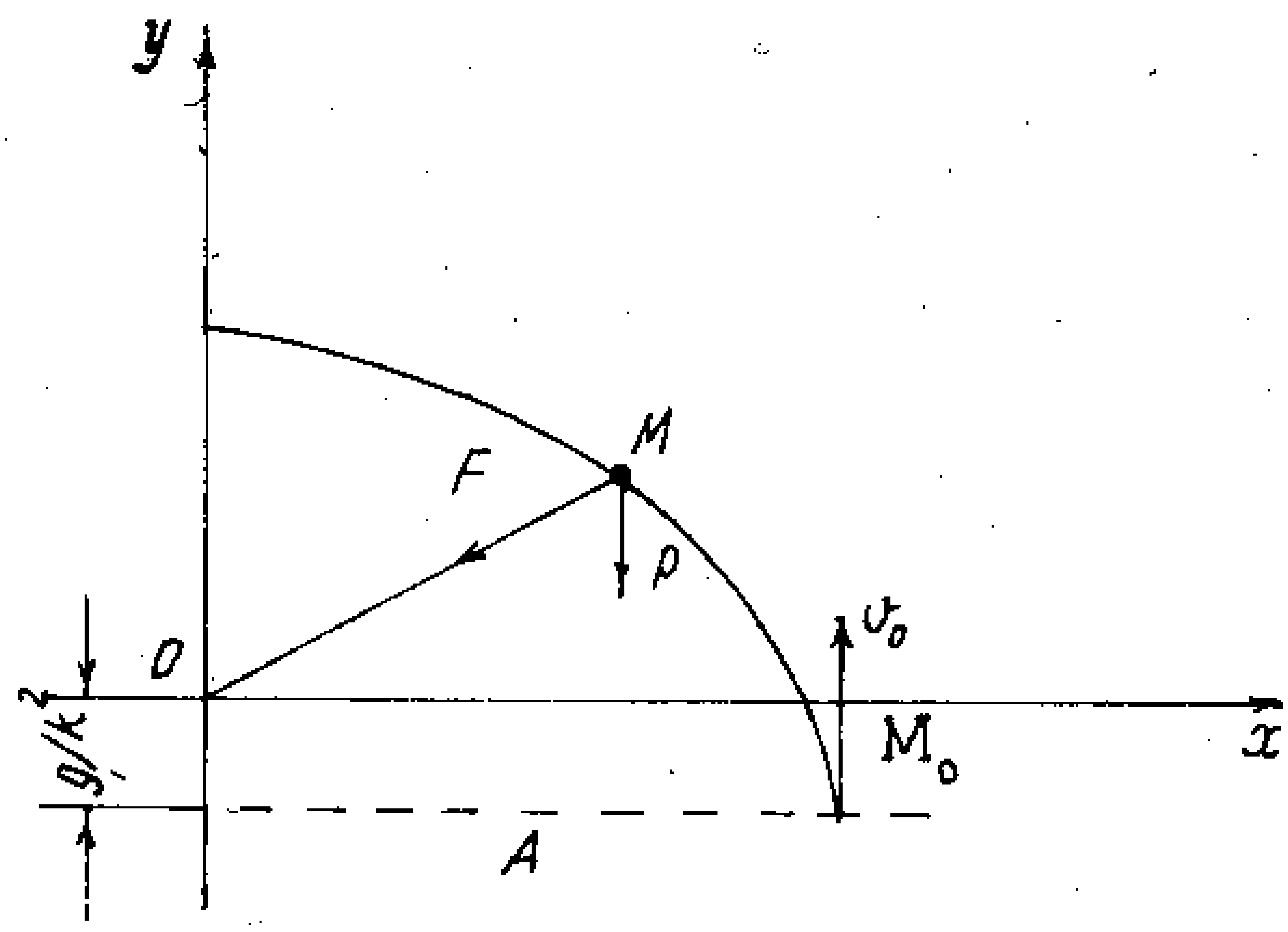


HÌNH 1-9

Thí dụ 1-11. Một chất điểm M chuyển động dưới tác dụng của một lực đàn hồi tỷ lệ thuận với khoảng cách từ M đến điểm cố định O, $\vec{F} = -k^2m\vec{r}$, trong đó $\vec{r}$ là bán kính vectơ của điểm M, m là khối lượng chất điểm, k^2 – hằng số tỷ lệ.

Hãy xác định quỹ đạo của chất điểm nếu thời điểm đầu nó có vị trí $M_o\left(A, -\frac{g}{k^2}\right)$ và có vận tốc $\vec{v}_o$ có phương thẳng đứng (xem H.1-10).

Bài giải. Khảo sát chất điểm điểm M chuyển động dưới tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ và lực đàn hồi $\vec{F}$ hướng về điểm O cố định.



HÌNH 1-10

Chọn hệ trục tọa độ Đềcác như sau : gốc hệ trục là điểm O cố định mà lực đàn hồi tác dụng lên chất điểm M hướng vào, trục Ox hướng nằm ngang từ trái sang phải, trục Oy hướng thẳng đứng lên trên.

Viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm M trong dạng vectơ

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

hoặc sau khi rút gọn và sắp xếp lại ta được :

$$\ddot{\vec{r}} + k^2 \vec{r} = -\vec{g}. \qquad \text{(a)}$$

Khi chiếu hai vế của (a) lên hai trục tọa độ Ox và Oy, ta có :

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad \text{(b)}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = -g \qquad \text{(c)}$$

Để tìm chuyển động của chất điểm ta tích phân các phương trình vi phân (b) và (c) với các điều kiện đầu :

$$t = 0 \quad \begin{cases} x(0) = A \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y(0) = -\dfrac{g}{k^2}\ ; \\ \dot{y}(0) = v_0 \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Phương trình (b) là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp hai với hệ số hằng số. Nghiệm tổng quát của nó có dạng :

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad \text{(e)}$$

Trong đó C_1, C_2 là hằng số tích phân. Để xác định C_1, C_2 ta tính :

$$\dot{x} = -C_1 k\sin kt + C_2 k\cos kt, \tag{f}$$

sau đó thay điều kiện đầu (d) vào (e) và (f) tìm được $C_1 = A$, $C_2 = 0$. Do đó ta có :

$$x = A\cos kt. \tag{g}$$

Phương trình vi phân (c) khác phương trình (b), vì (c) là phương trình không thuần nhất, nghiệm tổng quát của nó có dạng :

$$y = y_1 + y_2, \tag{h}$$

trong đó y_2 là nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất, còn y_1 là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng :

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \tag{j}$$

Nghiệm của phương trình này cũng có dạng :

$$y_1 = C_3\cos kt + C_4\sin kt. \tag{k}$$

Vế bên phải của phương trình (c) là không đổi, cho nên nghiệm riêng của nó có dạng $y_2 = C$, trong đó C là hằng số. Để tìm C ta thay y_2 vào (c) dễ dàng tìm được:

$$y_2 = -\frac{g}{k^2}. \tag{l}$$

Vậy nghiệm y của phương trình (c) có dạng :

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt - \frac{g}{k^2}. \tag{m}$$

Các hằng số C_3, C_4 được xác định bởi các điều kiện đầu (d). Tự như tìm C_1, C_2 ta có thể nhận được :

$$C_3 = 0,\ C_4 = \frac{v_o}{k}$$

Thay vào (m) ta có nghiệm

$$y = \frac{v_o}{k}\sin kt - \frac{g}{k^2} \tag{n}$$

Như vậy phương trình chuyển động của chất điểm M là :

$$x = A\cos kt \; ; \quad y = \frac{v_o}{k}\sin kt - \frac{g}{k^2}$$

Khi khử tham số t trong phương trình chuyển động ta nhận được phương trình quỹ đạo:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\left(y + \frac{g}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{v_o}{k}\right)^2} = 1.$$

Đây là phương trình êlip với tâm có tọa độ $\left(0, -\frac{g}{k^2}\right)$ và các bán trục A và $\frac{v_o}{k}$.

Chú thích : Có thể đưa phương trình (c) về dạng phương trình (b) nhờ phép biến đổi biến sau :

$$u = y + \frac{g}{k^2}$$

Thực vậy, từ phép biến đổi biến trên ta có :

$$\ddot{y} = \ddot{u} \; ; \; y = u - \frac{g}{k^2}$$

và khi thay chúng vào phương trình (c) ta nhận được phương trình vi phân đối với biến u :

$$\ddot{u} + k^2 u = 0$$

Tức có dạng phương trình (b).

1.4. BÀI TẬP

Các bài toán thuận

1-1. Bàn máy bào có khối lượng $m_1 = 700$kg, vật gia công có khối lượng $m_2 = 300$kg. Vận tốc bình ổn trong hành trình là v = 0,5m/s, thời gian lấy đà là T = 0,5s.

Xác định lực cần thiết để lấy đà (xem chuyển động của bàn trong khoảng thời gian này là nhanh dần đều) và lực để duy trì bàn máy chuyển động đều trong quá trình chuyển động bình ổn tiếp theo. Cho biết hệ số ma sát trượt lúc lấy đà là $f_1 = 0{,}14$ và lúc chuyển động đều là $f_2 = 0{,}07$.

Trả lời. $P_1 = 2374N$, $P_2 = 686{,}7N$.

1-2. Một xe goòng có khối lượng là 700 kg đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc 15^o.

Để giữ cho xe chạy đều ta dùng dây cáp song song với mặt dốc. Vận tốc chạy đều của xe là 1,6m/s. Xác định lực căng của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó bị hãm dừng lại trong 4 giây. Hệ số cản chuyển động tổng cộng là $f = 0{,}015$, và lúc hãm coi rằng xe chạy chậm dần đều.

Trả lời. $S_1 = 1682{,}4N$, $S_2 = 1963N$.

1-3. Một đoàn tàu hỏa không kể đầu máy có khối lượng là 200 tấn chạy nhanh dần trên đoạn ray thẳng nằm ngang. Sau 60 giây kể từ lúc bắt đầu chạy nó đạt tới vận tốc 54km/giờ. Tính lực kéo của đầu máy lên đoạn toa ở chỗ móc nối trong chuyển động đó, biết rằng lực cản chuyển động bằng 0,005 trọng lượng của đoàn tậu.

Trả lời. $F = 59840N$.

1-4. Một máy bay có khối lượng là 2000 kg bay thẳng ngang với gia tốc $5m/s^2$. Lực cản của không khí hướng ngược chiều với vận tốc và tỷ lệ với bình phương của vận tốc, có cường độ là 0,49N khi vận tốc có giá trị bằng 1m/s. Xác định lực kéo của cánh quạt máy bay lúc đó đạt tốc độ 200m/s, lực này tạo với hướng bay một góc 10^o.

Trả lời. $F = 30{,}215KN$.

1-5. Một ôtô chở hàng có khối lượng là 6 tấn chạy xuống một chiếc phà với tốc độ là 21,6km/giờ. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe phải chạy thêm một quãng là 10m, cho rằng khi ấy ôtô chuyển động chậm dần đều. Tính lực căng mỗi dây cáp (có hai dây cáp) buộc giữ phà, coi rằng dây cáp luôn luôn căng.

Trả lời. $T = 5395{,}5N$.

1-6. Hòm toa tàu điện cùng với tải trọng có khối lượng $m_1 = 10$ tấn. Khung dưới và các bánh xe có khối lượng là $m_2 = 1$ tấn. Xác định lực ép lớn nhất và bé nhất của toa lên các thanh ray khi tàu chạy trên đường thẳng nằm ngang đồng thời dao động điều hòa theo phương thẳng đứng trên các lò xo đỡ theo quy luật $y = 2\sin 10t$, trong đó y được tính bằng cm và t tính bằng giây.

Trả lời. $N_1 = 127{,}922KN$, $N_2 = 87{,}798KN$.

1-7. Pittông của một máy bơm nước chuyển động dao động ngang theo quy luật $x = r\,(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\,\omega t)$, trong đó r là chiều dài của tay quay và được tính ra mét, l là chiều dài của thanh truyền cũng được tính ra mét, ω là vận tốc góc không đổi của tay quay được tính ra s^{-1}. Khối lượng của pittông là m. Xác định giá trị lớn nhất của hợp lực tác dụng lên pittông theo phương x.

Trả lời. $F = mr\omega^2\,(1 + \frac{r}{l})$

1-8. Một cái sàng quặng thực hiện dao động điều hòa thẳng đứng với biên độ $a = 5cm$. Tìm tần số k nhỏ nhất của sàng để cho các hạt quặng bật được lên khỏi mặt sàng.

Trả lời. **$k = 14rad/s$.**

1-9. Một **đầu máy** tàu hỏa có khối lượng $m = 180$ tấn chạy qua một cái cầu với tốc độ 72km/giờ. Khi đầu máy chạy qua điểm chính giữa cầu thì độ võng của cầu là $h = 0{,}1$ mét. Hãy xác định áp lực phụ lên cầu tại thời điểm đó. Giả thiết coi cầu như là một dầm có tiết diện không đổi, có độ dài $L = 100m$, và hai đầu khớp cố định. Bỏ qua kích thước và trọng lượng đầu tàu.

Trả lời. $N = \dfrac{12mhv^2}{L^2} = 8{,}64KN$.

1–10. Một chiếc xe đạp đi trên một đường cong bán kính 10m với vận tốc 5m/s. Hãy tìm góc nghiêng α của mặt phẳng đối xứng dọc của xe đạp và phương thẳng đứng, đồng thời hệ số ma sát f nhỏ nhất giữa lốp xe và mặt đường để bảo đảm cho xe đạp chạy ổn định.

Trả lời. $\alpha = 14^{o}20'$, $f = 0{,}255$.

Các bài toán ngược

1–11. Một vật nặng rơi xuống giếng mỏ không vận tốc đầu. Sau thời gian 6,5 giây người ta nghe thấy tiếng va đập của vật vào đáy giếng. Cho biết vận tốc của tiếng động là 330m/s. Tìm chiều sâu của giếng mỏ.

Trả lời. 175m.

1–12. Một người lái tàu điện bằng cách mở dần điện trở làm tăng công suất động cơ sao cho lực kéo tăng tỷ lệ với thời gian từ giá trị bằng không và mỗi giây tăng được 1177N. Tìm quãng đường s mà toa tàu đi được trong các điều kiện cho sau đây : khối lượng toa tàu 10 tấn, lực ma sát không đổi và bằng $1{,}96.10^3$N. Vận tốc đầu bằng không.

Trả lời. Chuyển động bắt đầu sau 5,3 giây kể từ lúc đóng mạch điện, quãng đường chuyển động

$$s = 0{,}01962.(t - \frac{5}{3})^3 \text{ mét}$$

1–13. Một vật nặng chạy theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng về phía trên với vận tốc ban đầu $v_o = 15$m/s. Mặt phẳng nghiêng tạo với mặt phẳng ngang một góc α 30°. Cho hệ số ma sát $f = 0{,}1$. Tìm đoạn đường vật nặng đi được cho đến lúc dừng hẳn và tìm thời gian vật chạy trên quãng đường đó.

Trả lời. $$s = \frac{v_o^2}{2g(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 19{,}55\text{m};$$

$$T = \frac{v_o}{g(f\cos\alpha + \sin\alpha)} = 2{,}61\text{s}.$$

1–14. Tìm vận tốc rơi lớn nhất của một quả cầu có khối lượng bằng 10 kg, có bán kính bằng 8cm, chuyển động trong không khí chịu lực cản là $R = kSv^2$ (trong đó v là vận tốc rơi, S là diện tích của hình chiếu của vật rơi trên mặt phẳng thẳng góc với phương vận tốc chuyển động, k là hệ số tỷ lệ và trong trường hợp này thì $k = 0{,}2352\ Ns^2/m^4$.

Trả lời. $v_{max} = 144m/s$.

1–15. Một chiếc tàu thủy có trọng lượng là P chuyển động thẳng ngang từ trạng thái nghỉ. Lực đẩy của chân vịt không đổi, bằng Q và hướng theo hướng chuyển động của tàu. Lực cản của nước có giá trị là $R = \frac{P}{g}k^2v^2$, trong đó k^2 là hệ số tỷ lệ và v là vận tốc con tàu. Tìm giá trị của vận tốc giới hạn và tìm biểu thức vận tốc của con tàu hàm theo thời gian chuyển động.

Trả lời. $v_{gh} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{P}{Q}g}$;

$$v = v_{gh}\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}, \text{ trong đó } \alpha = 2k^2v_{gh}.$$

1–16. Một chiếc tàu lặn đang nằm yên, nhận được một trọng tải P thì lặn xuống sâu theo phương thẳng đứng, trong trường hợp này có thể xem như lực cản của nước có giá trị tỷ lệ với vận tốc lặn xuống của tàu $R = kSv$, trong đó k là hệ số tỷ lệ, S là diện tích hình chiếu bằng của con tàu và v là vận tốc lặn của tàu. Khối lượng của tàu là m. Tìm biểu thức vận tốc của con tàu hàm theo thời gian. Tìm khoảng thời gian T cần thiết để cho vận tốc lặn xuống đạt giá trị bằng 95% giá trị vận tốc giới hạn.

Trả lời. $v = \frac{P}{kS}\left(1 - e^{\frac{-ks}{m}t}\right)$; $T = \frac{m}{kS}\ln 20$.

1–17. Đoàn tàu hỏa sau khi đạt tốc độ v_o thì chuyển động dưới tác dụng của lực tổng hợp mà cường độ tính theo một đơn vị khối lượng của đoàn tàu đó có biểu thức

$$f(v) = a - bv + cv^2,$$

trong đó a, b, c là hằng số, còn v là vận tốc của đoàn tàu. Tìm biểu thức vận tốc của đoàn tàu hàm theo thời gian và tìm vận tốc giới hạn của nó.

Trả lời. $v = \dfrac{\alpha - \beta A e^{-c(\beta-\alpha)t}}{1 - Ae^{-c(\beta-\alpha)t}}$; $v_{gh} = \alpha$

trong đó $A = \dfrac{\alpha - v_o}{\beta - v_o}$; α, β lần lượt là nghiệm lớn và nghiệm bé của phương trình $f(v) = 0$.

1-18. Từ một độ cao h khá lớn, một vật nặng rơi không vận tốc đầu xuống mặt đất. Lực hút của quả đất đối với vật đó có độ lớn tỷ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ vật đó đến tâm quả đất. Tìm thời gian T cần thiết để vật rơi chạm mặt đất và vận tốc rơi lúc đó. Bán kính quả đất là R và gia tốc trọng trường ở ngay mặt đất là g.

Trả lời. $v = \sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$;

$$T = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R+h}{2g}}\left(\sqrt{Rh} + \frac{R+h}{2}\arccos\frac{R-h}{R+h}\right).$$

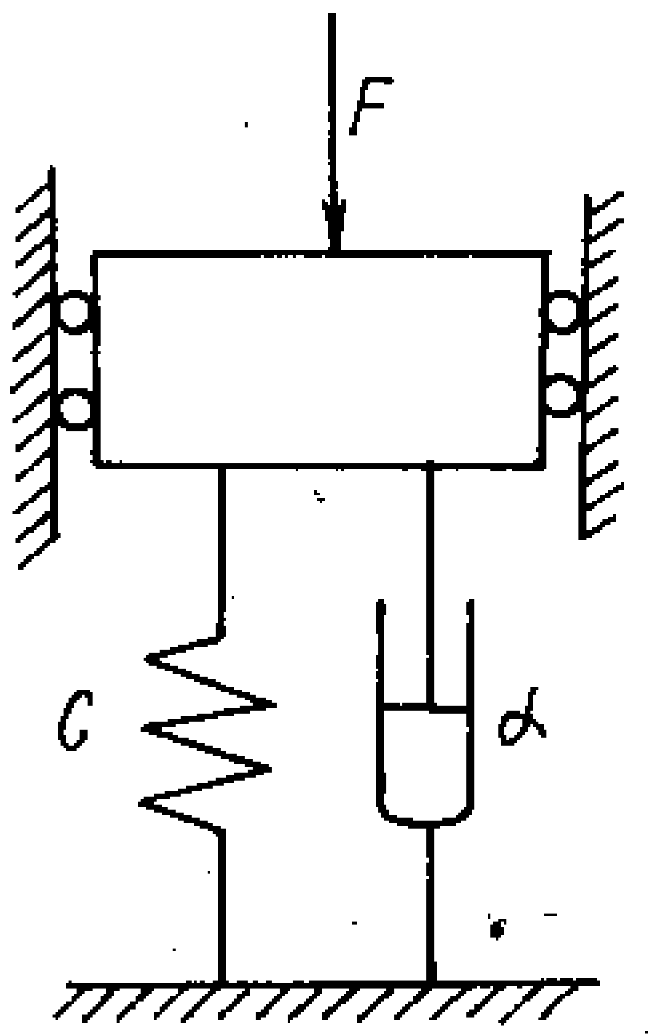
1-19. Vật A có khối lượng m = 0,4 kg gắn vào đầu một lò xo có độ cứng C = 4kN/m, chuyển động theo phương thẳng đứng dưới tác dụng của lực kích động là hàm điều hòa của thời gian, S = 40sin 50t (N) và lực cản của môi trường $\vec{R} = -\alpha\vec{v}$, trong đó $\vec{v}$ là vận tốc của vật ; α = 25Ns/m. Tại thời điểm đầu vật nằm yên tại vị trí cân bằng tĩnh. Tìm phương trình chuyển động của vật và xác định giá trị của tần số lực kích động để biên độ dao động cưỡng bức trong chế độ bình ổn là lớn nhất.

Trả lời :

1) $x = 0{,}647e^{-31{,}25t}\sin(95t - 46^\circ 55') + 1{,}23\sin(50t - 22^\circ 36')$ (cm)

2) Biên độ dao động cưỡng bức lớn nhất khi tần số lực kích động bằng 89,7 rad/s và bằng 1,684cm;

1-20. Để giảm lực truyền vào nền khi vật có khối lượng m chịu tác dụng lực $F = F_o \sin(\Omega t + \delta)$, người ta lắp hệ thống giảm chấn gồm lò xo có độ cứng C và thiết bị giảm chấn thủy lực có hệ số cản α (lực cản $\vec{R} = -\alpha\,\vec{v}$).



HÌNH 1-11

Xác định giá trị lớn nhất của áp lực động lực mà hệ thống dao động truyền vào nền trong chế độ bình ổn (H.1-11).

Trả lời :

$$N = F_o\sqrt{\frac{k^4 + 4h^2\Omega^2}{(k^2 - \Omega^2)^2 + 4h^2\Omega^2}}\ ;$$

trong đó: $k^2 = \dfrac{C}{m}$; $h = \dfrac{\alpha}{2m}$

1-21. Một máy bay đang bay thẳng ngang với tốc độ v_1, ở độ cao h. Từ nòng súng, đúng lúc máy bay ở vị trí trên đường thẳng đứng qua miệng súng, người ta bắn một viên đạn. Bỏ qua sức cản của không khí. Tìm :

1 – Vận tốc đầu v_o của viên đạn phải thỏa mãn điều kiện nào để nó có thể trúng máy bay.

2– Góc nghiêng α bao nhiêu để viên đạn trúng đích.

Trả lời. $v_o^2 \geq v_1^2 + 2gh$; $\cos\alpha = \dfrac{v_1}{v_o}$

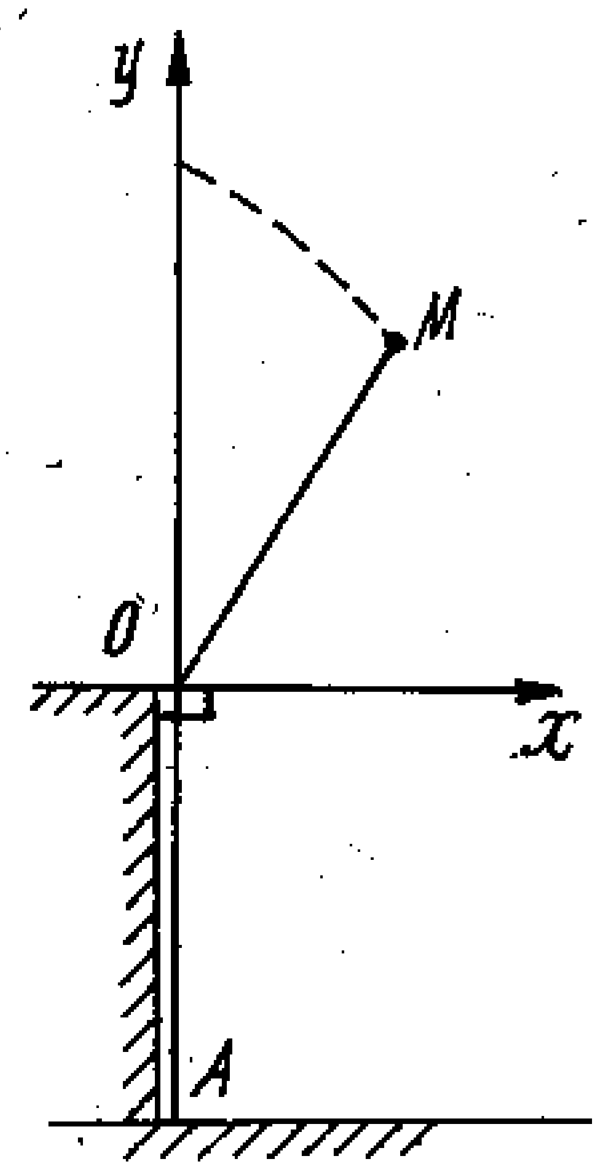
1-22. Từ một khẩu súng đại bác đặt tại điểm O người ta bắn một viên đạn với góc bắn α so với phương ngang và với vận tốc ban đầu $\bar{v}_o$. Đồng thời từ A cách O một khoảng cách bằng l theo đường ngang và mặt phẳng thẳng đứng qua OA cũng chứa v_o, người ta bắn lên một viên đạn khác theo đường thẳng đứng. Bỏ qua sức cản không khí, xác định vận tốc bắn v_1 của viên đạn thứ hai để nó chạm vào viên đạn thứ nhất.

Trả lời. $v_1 = v_o.\sin\alpha$, không phụ thuộc l.

1-23. Một chất điểm có khối lượng m, chuyển động dưới tác dụng của lực đẩy từ một tâm O cố định theo luật $\vec{F} = k^2 m\vec{r}$, trong đó k là hằng số và m là khối lượng của chất điểm, còn $\vec{r}$ là bán kính định vị của chất điểm tính từ O. Ở thời điểm đầu chất điểm ở M_o (a,0) có vận tốc $\vec{v}_o$ song song với trục y. Xác định quỹ đạo của chất điểm.

Trả lời. Quỹ đạo là hypecbôn $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{ky}{v_o}\right)^2 = 1.$

1-24. Một dây đàn hồi được giữ chặt ở điểm A vòng qua một vòng nhẫn cố định O. Ở đầu cuối tự do của nó lắp một quả cầu M khối lượng m kg. Chiều dài của dây lúc không giãn là l = AO. Để kéo giãn dây ra 1 cm cần một lực bằng k^2m Niutơn. Sau khi kéo dây giãn ra theo đường thẳng đứng dài gấp đôi, ta chuyền cho quả cầu vận tốc $\vec{v}_o$ vuông góc với phương thẳng đứng. Xác định quỹ đạo của quả cầu, bỏ qua tác dụng của trọng lực và xem như sức căng tỉ lệ với độ giãn dài của nó (H.1-12).



HÌNH 1 - 12

Trả lời. Êlíp $\frac{k^2x^2}{v_o^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1.$

CHƯƠNG 2

CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học thiết lập mối quan hệ giữa các đại lượng đặc trưng cho chuyển động và các đại lượng đặc trưng cho tác dụng của lực.

Các định lý này được xây dựng từ phương trình cơ bản của động lực học khi khảo sát chuyển động của chất điểm và cơ hệ tự do trong hệ quy chiếu quán tính (đối với các chất điểm và cơ hệ không tự do thì cần sử dụng tiên đề giải phóng liên kết để có chất điểm và cơ hệ tự do tương ứng.

2.1. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG

2.1.1. Cơ sở lý thuyết

a) Các định nghĩa

α) *Động lượng.* Động lượng của một chất điểm có khối lượng m chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ là đại lượng vectơ được kí hiệu $\vec{Q}$:

$$\vec{Q} = m\vec{v} \tag{2-1}$$

Trong hệ trục tọa độ Đềcac Oxyz, ta có :

$$\vec{Q}\begin{cases} Q_x = mv_x = m\dot{x} \\ Q_y = mv_y = m\dot{y} \\ Q_z = mv_z = m\dot{z} \end{cases} \tag{2-2}$$

Động lượng của cơ hệ gồm N chất điểm M_k $(k = 1, \overline{N})$, có khối lượng m_k và chuyển động với vận tốc $\vec{v}_k$, bằng tổng động lượng của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ :

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v_k} = M\vec{v_c} \qquad (2-3)$$

trong đó : $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ là khối lượng của cơ hệ, $\vec{v_c}$ - vận tốc khối tâm cơ hệ.

Trong hệ trục tọa độ Đềcác Oxyz ta có :

$$\vec{Q} \begin{cases} Q_x = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kx} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{x}_k = M\dot{x}_c \\ Q_y = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{ky} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{y}_k = M\dot{y}_c \\ Q_z = \sum_{k=1}^{N} m_k v_{kz} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{z}_k = M\dot{z}_c \end{cases} \qquad (2-4)$$

Đơn vị của động lượng là kgm/s

β) Xung lượng của lực (xung lực). Xung lượng nguyên tố của lực $\vec{F}$ là

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \qquad (2-5)$$

Xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 là :

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt \qquad (2-6)$$

Trong hệ trục tọa độ Đềcác ta có :

$$d\vec{S} \begin{cases} dS_x = F_x dt \\ dS_y = F_y dt \\ dS_z = F_z dt \end{cases} \qquad \vec{S} \begin{cases} S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \\ S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \end{cases} \qquad (2-7)$$

Nếu $\vec{F} = \overline{\text{const}}$ thì

$$\vec{S} = \vec{F}(t_2 - t_1) \tag{2-8}$$

Đơn vị của xung lực là Niutơn giây (Ns).

b) Các định lý

α) Đối với chất điểm :

Dạng vi phân : $$d(m\vec{v}) = d\vec{S} \tag{2-9}$$

Dạng hữu hạn : $$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{S} \tag{2-10}$$

β) Đối với cơ hệ :

Dạng vi phân:

$$d\vec{Q} = \sum_{k=1}^{N} d\vec{S}_k^e \quad \rightarrow \quad \begin{cases} dQ_x = \sum dS_{kx}^e \\ dQ_y = \sum dS_{ky}^e \\ dQ_z = \sum dS_{kz}^e \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e \end{cases} \tag{2-11}$$

Dạng hữu hạn:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^e \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Q_{2x} - Q_{1x} = \sum S_{kx}^e \\ Q_{2y} - Q_{1y} = \sum S_{ky}^e \\ Q_{2z} - Q_{1z} = \sum S_{kz}^e \end{cases} \tag{2-12}$$

trong đó : $\vec{Q}$ là động lượng của cơ hệ tại thời điểm t bất kì ($\vec{Q}_1$, $\vec{Q}_2$ lần lượt là động lượng của cơ hệ tại thời điểm t_1 và t_2),

$\vec{S}_k^e$ là xung lượng của ngoại lực $\vec{F}_k^e$ tác dụng lên chất điểm thứ k trong khoảng thời gian $(t_2 - t_1)$.

c) Các trường hợp bảo toàn động lượng

Nếu $\vec{F} = \vec{0}$ thì $m\vec{v} = \overline{const}$, tức động lượng chất điểm được bảo toàn.

Nếu $F_x = 0$ thì $m\dot{x} = const$, tức hình chiếu của động lượng trên trục cố định Ox được bảo toàn.

$$\text{Nếu } \sum_{k=1}^{N} \vec{S}_k^e = \vec{0} \text{ thì } \vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 = \vec{const} = \vec{Q}(t_o) \qquad (2\text{-}13)$$

tức động lượng cơ hệ được bảo toàn.

Nếu $\sum_{k=1}^{N} S_{kx}^e = 0$ thì $Q_{2x} = Q_{1x} = const = Q_x(t_o)$, tức hình chiếu động lượng cơ hệ trên trục cố định Ox được bảo toàn.

2.1.2. Hướng dẫn áp dụng

Định lý biến thiên động lượng đặc biệt được áp dụng trong các bài toán va chạm và bài toán về chuyển động của các chất lỏng.

Khi áp dụng định lý biến thiên động lượng của cơ hệ ta lần lượt theo thứ tự sau :

– Xác định cơ hệ khảo sát ;

– Đặt các ngoại lực tác dụng lên hệ (gồm cả các lực hoạt động và các lực liên kết). Chọn hệ trục tọa độ ;

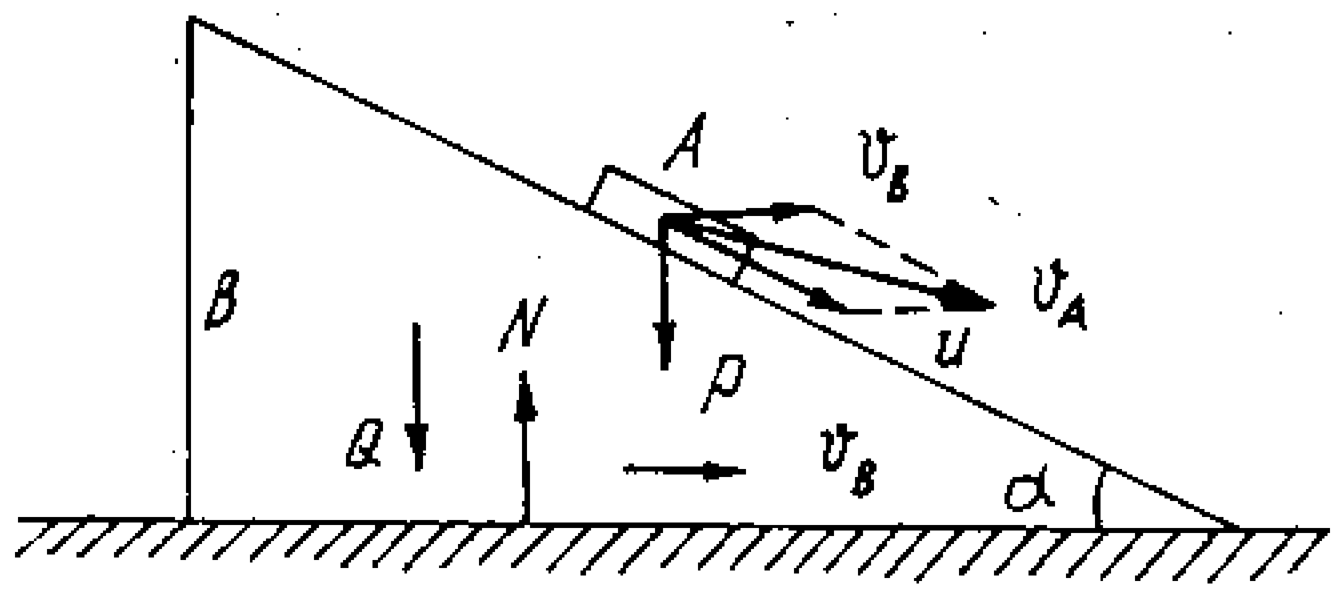
– Áp dụng định lý biến thiên động lượng dạng (2–11) hay (2–12).

– Giải phương trình nhận được, dựa vào các định nghĩa (2–3), (2–4) và (2–7) để xác định động lượng và xung lượng.

Tìm các đại lượng cần thiết theo yêu cầu đề ra.

2.1.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 2–1. Một vật A có trọng lượng P nằm trên mặt nghiêng của hình lăng trụ B có trọng lượng Q, góc nghiêng α.



HÌNH 2-1

Ban đầu hệ đứng yên, sau đó vật A bắt đầu trượt xuống. Xác định vận tốc của vật B nếu vận tốc tương đối của vật A đối với mặt nghiêng là u. Bỏ qua các lực ma sát, (H. 2-1).

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm các vật A và B. Các ngoại lực tác dụng $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}$. Chọn trục x theo phương ngang. Áp dụng định lý biến thiên động lượng (2-12) ta có :

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum S_{kx}^e \qquad \text{(a)}$$

Dễ thấy rằng $\sum S_{kx}^e = 0$ vì tất cả các ngoại lực tác dụng ở đây đều vuông góc với trục x. Do đó từ (a) ta có :

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0$$

Vì ban đầu cơ hệ đứng yên, nên :

$$Q_{1x} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Do đó :

$$Q_{2x} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Bây giờ ta cần tính động lượng của cơ hệ khi vật A trượt xuống trên mặt nghiêng với vận tốc u (vận tốc tương đối).

Gọi $\vec{v}_B$ là vận tốc vật B. Đó cũng là vận tốc theo của vật A và ta có

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{u}.$$

Vậy :

$$Q_{2x} = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} = \frac{P}{g}(v_{Bx} + u\cos\alpha) + \frac{Q}{g} v_{Bx} \qquad \text{(d)}$$

Thay (d) vào (c), ta rút ra :

$$v_{Bx} = -\frac{P}{P+Q} u\cos\alpha$$

Dấu trừ ở đây chứng tỏ vật B chuyển động ngược theo chiều của v_B đã giả thiết trên hình vẽ.

Thí dụ 2-2. Một dòng chất lỏng lý tưởng, đồng chất không nén được chảy qua một ống dẫn đổi hướng 60^o, (H. 2-2). Lưu lượng khối của dòng chảy là m kg/s, vận tốc của chất lỏng ở các tiết diện vào và ra v_1 và v_2.

Tìm áp lực của ống lên giá đỡ, không tính đến tác dụng của trọng lực và áp suất thủy tĩnh.

Bài giải

Khảo sát khối chất lỏng (bó dòng) tại thời điểm t_1 nó choán vị trí khối I và khối II. Sau một thời gian rất ngắn $\Delta t = t_2 - t_1$, tức là tại thời điểm $t_2 = t_1 + \Delta t$, khối chất lỏng từ vị trí khối I và khối II di chuyển sang vị trí II và III.

Áp lực của ống lên giá đỡ bằng hợp lực của hệ phản lực của bó dòng tác dụng lên thành ống, tức có cùng giá trị cùng phương nhưng ngược chiều với hợp lực của hệ phản lực do thành ống tác dụng lên bó dòng đang xét (lực mặt).

Giả sử hợp lực của hệ phản lực do thành ống tác dụng lên bó dòng đang xét có hai thành phần X và Y.

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho bó dòng đang xét (bỏ qua tác dụng của trọng lực) ta có :

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = (\vec{X} + \vec{Y})\Delta t \qquad (a)$$

trong đó $\vec{Q}_1$ và $\vec{Q}_2$ là động lượng của khối chất lỏng ở các thời điểm t_1 và t_2.

Nếu gọi $\vec{Q}_I$ là động lượng của khối chất lỏng I, $\vec{Q}_{II}$ – động lượng khối chất lỏng II, $\vec{Q}_{III}$ – động lượng của khối chất lỏng III, ta có :

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q}_I + \vec{Q}_{II}, \qquad \vec{Q}_2 = \vec{Q}_{II} + \vec{Q}_{III}$$

Thay vào (a) ta có:

$$\vec{Q}_{III} - \vec{Q}_I = (\vec{X} + \vec{Y})\Delta t \qquad (b)$$

Chiếu hai vế của (b) lên hai trục tọa độ x, y ta có :

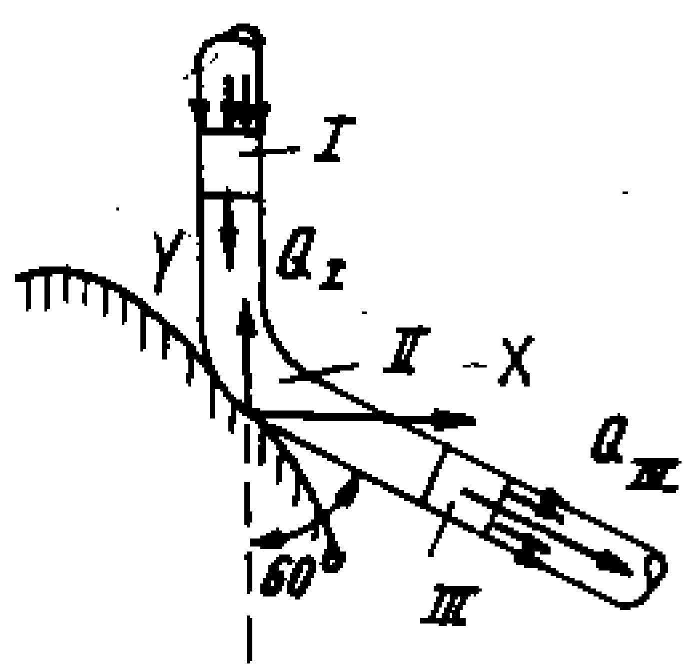
$$\begin{aligned} Q_{III}\cos 30^o &= X\Delta t \\ -Q_{III}\sin 30^o - Q_I &= Y\Delta t \end{aligned} \qquad (c)$$

Theo đề ra ta có :

$$Q_1 = mv_1\Delta t, \qquad Q_{III} = mv_2\Delta t.$$

Thay vào (c) ta có :

$$X = mv_2\cos30^o, \qquad Y = -m(v_2\sin30^o + v_1).$$



HÌNH 2-2

Từ kết quả này thấy rằng áp lực lên giá đỡ trên phương x có chiều ngược với vectơ $\vec{X}$ còn trên phương y có chiều trùng với vectơ $\vec{Y}$ trên hình vẽ.

Chú thích :

1- Nếu gọi diện tích ống tại tiết diện chảy vào và chảy ra lần lượt là σ_1 và σ_2 ; ρ - khối lượng riêng của chất lỏng, vì dòng chảy dừng, chất lỏng lý tưởng và đồng chất nên

$$m = \rho\sigma_1 v_1 = \rho\sigma_2 v_2.$$

Do đó :

$$X = \frac{m^2}{\rho\sigma_2}\cos30^o \; ; \qquad Y = -\frac{m^2}{\rho}\left[\frac{\sin30^o}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1}\right]$$

2- Nếu kể đến áp lực thủy tĩnh thì tại hai tiết diện vào và ra có hai áp lực $\vec{R}_1$ và $\vec{R}_2$ hướng vào và vuông góc với mặt cắt; $R_1 = P_1\sigma_1$, $R_2 = P_2\sigma_2$, trong đó P_1 và P_2 là các áp suất tại mặt cắt vào và ra. Khi đó

$$X = mv_2\cos30^o + R_1\cos30^o = mv_2\cos30^o + P_1\sigma_1\cos30^o$$

$$Y = -m(v_2\sin30^o + v_1) + R_2 - R_1\sin30^o$$

$$= -m(v_2\sin30^o + v_1) + P_2\sigma_2 - P_1\sigma_1\sin30^o$$

2.2. ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM CỦA CƠ HỆ

2.2.1. Cơ sở lý thuyết

a) Định nghĩa. Khối tâm của cơ hệ là một điểm hình học C mà các tọa độ của nó được xác định như sau :

$$x_C = \frac{\sum_k m_k x_k}{\sum_k m_k} \; ; \; y_C = \frac{\sum_k m_k y_k}{\sum_k m_k} \; ; \; z_C = \frac{\sum_k m_k z_k}{\sum_k m_k} \qquad (2\text{-}14)$$

trong đó m_k là khối lượng chất điểm (hoặc bộ phận) thứ k ; x_k, y_k, z_k là tọa độ Đềcác của chất điểm (hoặc của khối tâm bộ phận) thứ k.

b) Định lý chuyển động khối tâm

$$M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \qquad \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \sum X_k^e \\ M\ddot{y}_c &= \sum Y_k^e \\ M\ddot{z}_c &= \sum Z_k^e \end{aligned} \qquad (2\text{-}15)$$

trong đó $M = \sum_k m_k$ là khối lượng của cơ hệ, $\vec{a}_c$ ($\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{z}_c$) – gia tốc khối tâm C (hình chiếu của gia tốc khối tâm trên các trục tọa độ). Các $\vec{F}_k^e(X_k^e, Y_k^e, Z_k^e)$ – các ngoại lực (hình chiếu các ngoại lực lên các trục tọa độ) tác dụng lên cơ hệ.

c) Trường hợp bảo toàn chuyển động khối tâm

– Khi $\sum \vec{F}_k^e = \vec{0}$ thì $\vec{a}_c = \vec{0}$, tức

$$\vec{v}_c = \overrightarrow{const} \text{ hoặc } \vec{v}_c = \vec{0} \qquad (2\text{-}16)$$

tức khối tâm của cơ hệ chuyển động theo quán tính hoặc đứng yên (tùy điều kiện đầu).

– Khi $\sum X_k^e = 0$ thì $\ddot{x}_c = 0$, tức

$$\dot{x}_c = \text{const hoặc } \dot{x}_c = 0 \qquad (2\text{-}17)$$

tức hình chiếu khối tâm của cơ hệ trên trục x đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều (tùy điều kiện đầu).

2.2.2. Hướng dẫn áp dụng

Định lý chuyển động khối tâm thường được áp dụng vào các bài toán sau :

43

1– Biết $\sum X_k^e = 0$ tìm di chuyển hoặc vận tốc khối tâm của một bộ phận khi biết chuyển động của các bộ phận còn lại của cơ hệ : bài toán ngược.

2– Biết chuyển động của các bộ phận cơ hệ, tìm lực tác dụng lên cơ hệ (thường là tìm phản lực liên kết) : bài toán thuận.

Khi áp dụng định lý chuyển động khối tâm, cần theo các trình tự sau :

– Phân tích chuyển động của cơ hệ : phân tích các đặc điểm của chuyển động của các bộ phận cơ hệ.

– Phân tích các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ (gồm cả các lực hoạt động và các lực liên kết. Chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

Có các nhận xét sau :

– Nếu $\sum X_k^e = 0$ thì sử dụng (2–17) và chú ý đến (2–14) rút ra :

$$\sum m_k \dot{x}_k = \text{const} \qquad (2\text{–}18)_1$$

hoặc
$$\sum m_k x_k = \text{const} \qquad (2\text{–}18)_2$$

Giải $(2\text{–}18)_1$ hoặc $(2\text{–}18)_2$ ta nhận được lời giải.

– Nếu chuyển động của các bộ phận cơ hệ hoàn toàn được xác định và bài toán đòi hỏi phải xác định một số lực nào đó của hệ ngoại lực (thường là các phản lực liên kết) thì ta sử dụng (2–15). Muốn vậy, dựa vào (2–14) tính các tọa độ khối tâm hệ và tiếp theo tính các hình chiếu của gia tốc khối tâm lên các trục tọa độ (thực hiện các phép tính đạo hàm theo thời gian) rồi thay vào vế trái của (2–15) và giải.

2.2.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 2–3. Một chiếc ôtô có trọng lượng P chuyển động từ đầu phà đến cuối phà. Phà có trọng lượng Q và chiều dài l. Bỏ qua lực cản ngang của nước. Tính dịch chuyển của phà trong chuyển động đó. Lúc đầu phà đứng yên.

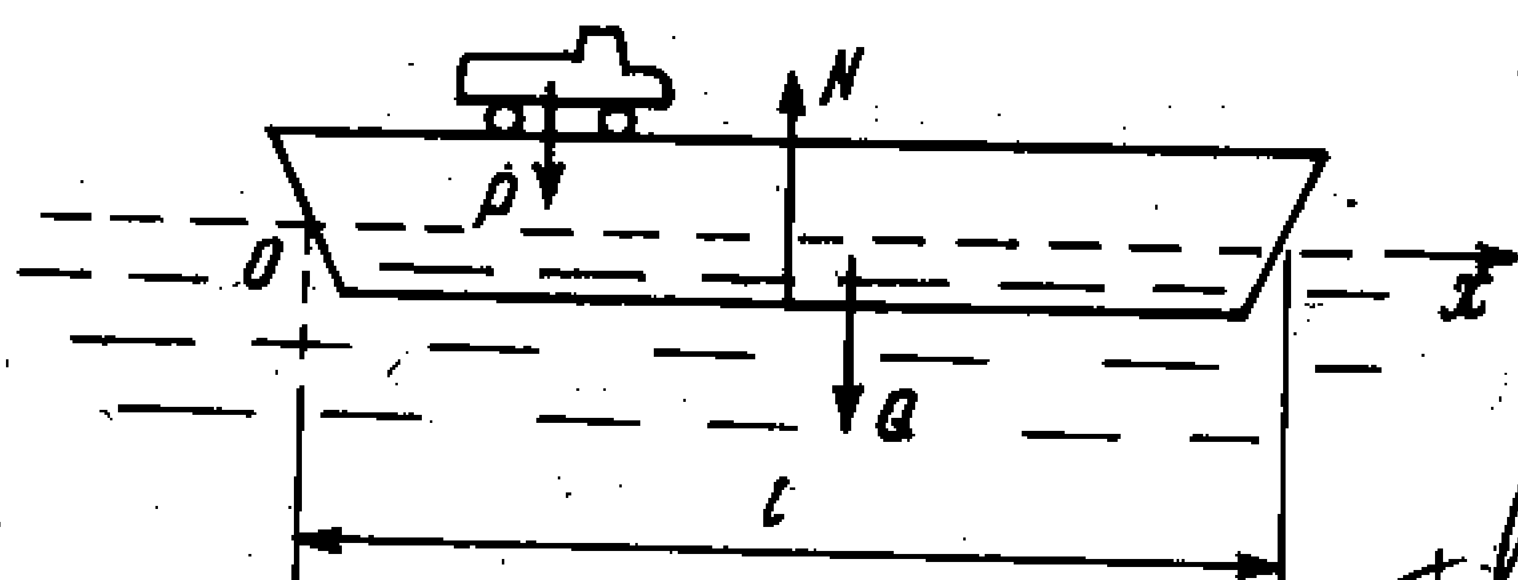
Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm ôtô và phà. Các ngoại lực tác dụng lên hệ $\vec{P}, \vec{Q}$ và lực đẩy thẳng đứng Acsimét $\vec{N}$. Chọn trục x nằm ngang hướng từ trái sang phải.

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm, ta có

$$M\vec{a}_c = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{N}, \tag{a}$$

trong đó M là khối lượng cơ hệ, $M = \dfrac{P+Q}{g}$; $\vec{a}$ - gia tốc khối tâm hệ.

Nhận xét rằng tất cả các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đều thẳng góc với trục x (H. 2-3) tức $\sum X_k^e = 0$ và vì ban đầu



thắng 29/11/2004
XD 703

HÌNH 2-3

khối tâm cơ hệ đứng yên (do cả cơ hệ đứng yên) nên dựa vào tính chất bảo toàn chuyển động của hình chiếu khối tâm cơ hệ dọc trục x, ta có : x_c = const, đặc biệt :

$$x_C^{(o)} = x_C^{(1)}, \tag{b}$$

trong đó $x_C^{(o)}$ là hoành độ khối tâm cơ hệ ứng với thời điểm đầu (khi ôtô đứng ở đầu phà) $x_C^{(1)}$ là hoành độ khối tâm hệ khi ôtô đã di chuyển đến cuối phà.

Ta chọn gốc tọa độ 0 là vị trí cuối về bên trái phà lúc bắt đầu chuyển động. Áp dụng định nghĩa khối tâm (2-14) ta tính được vị trí của khối tâm C lúc bắt đầu chuyển động.

$$x_C^{(o)} = \frac{\dfrac{P}{g}.0 + \dfrac{Q}{g}.\dfrac{l}{2}}{\dfrac{P}{g} + \dfrac{Q}{g}} = \frac{Ql}{2(P+Q)} \tag{c}$$

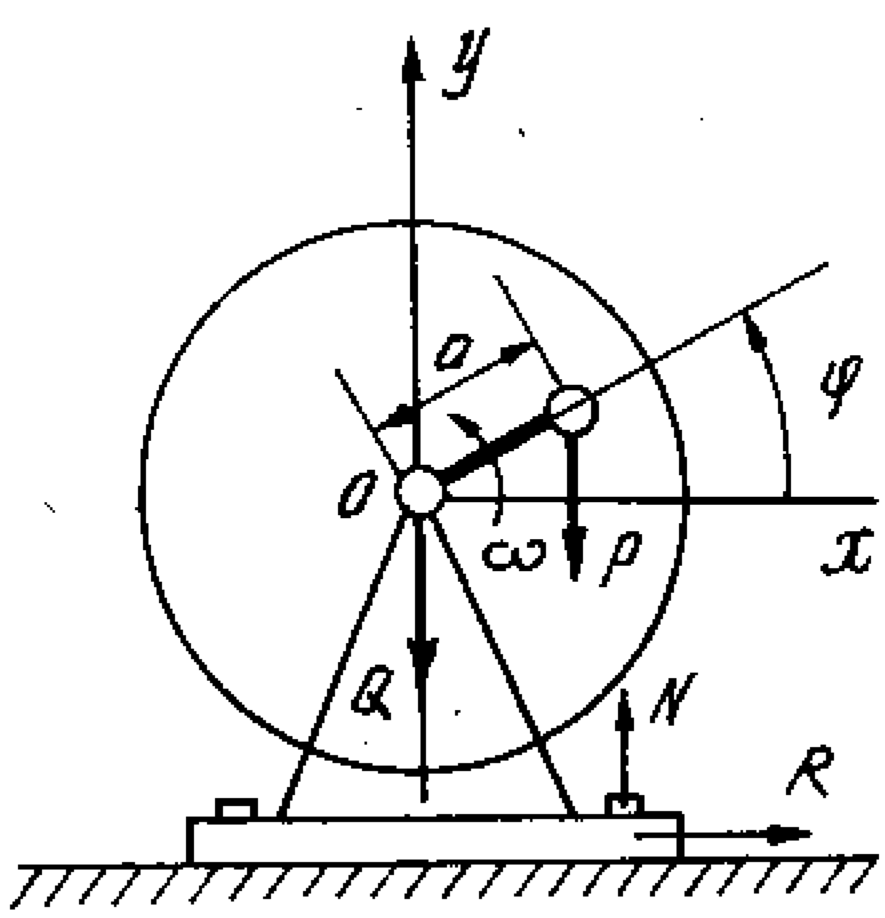
Gọi Δ là đoạn dịch chuyển của phà khi ôtô đi được đến cuối phà, ta có vị trí khối tâm lúc đó

$$x_C^1 = \frac{\frac{P}{g}(l-\Delta) + \frac{Q}{g}\left(\frac{l}{2}-\Delta\right)}{\frac{P}{g}+\frac{Q}{g}} = \frac{P(l-\Delta) + Q\left(\frac{l}{2}-\Delta\right)}{P+Q} \qquad \text{(d)}$$

Thay (c) và (d) vào (b) ta rút ra

$$\Delta = \frac{Pl}{P+Q}.$$

Thí dụ 2-4. Một động cơ được giữ cố định lên sàn bằng bu loong, (H. 2-4). Phần cố định của động cơ có trọng lượng Q, phần quay có trọng lượng P đặt cách trục quay một đoạn e. Tìm giá trị cực đại của lực cắt ngang bu loong nếu động cơ quay đều với vận tốc góc ω.



HÌNH 2-4

Bài giải. Khảo sát toàn bộ động cơ. Chọn hệ trục xOy như hình vẽ.

Các ngoại lực tác dụng lên hệ gồm $\vec{Q}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{N}$, trong đó $\vec{R}$ là tổng lực cắt ngang bu loong theo phương x mà ta cần xác định.

Áp dụng định lý chuyển động khối tâm (2-15)

$$M\vec{a}_C = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{N}, \qquad \text{(a)}$$

chiếu (a) lên phương x được

$$Ma_{cx} = R\ ; \qquad \text{(b)}$$

để xác định R ta cần tìm a_{cx} là hình chiếu của vectơ gia tốc khối tâm C lên trục x. Dựa vào công thức tính khối tâm (2-14) ta có :

$$x_C = \frac{Px_A + Qx_o}{P+Q} = \frac{Px_A}{P+Q}\ ;$$

bởi vì $x_o = 0$; $x_A = e\cos\varphi = e\cos\omega t$; $\ddot{x}_A = -e\omega^2\cos\omega t$, nên :

$$\ddot{x}_C = \frac{P\ddot{x}_A}{P+Q} = -\frac{Pe\omega^2\cos\omega t}{P+Q} = a_{Cx} \quad (c)$$

Thay (c) vào (b) ta có :

$$R = -\frac{Pe\omega^2\cos\omega t}{g} \quad (d)$$

R sẽ đạt cực trị khi $\cos\omega t = \pm 1$, rút ra

$$R_{max} = \frac{Pe\omega^2}{g}$$

Nhận xét : Nếu ω lớn, tức là tốc độ quay lớn thì R_{max} sẽ rất lớn. Tuy nhiên nếu e bé thì dù ω lớn, R_{max} cũng sẽ rất bé. Do đó, trong kỹ thuật cần cân bằng rôto để e = 0.

2.3. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

2.3.1. Cơ sở lý thuyết

a) Các định nghĩa

α) Mômen động lượng (mômen động) đối với một điểm

Mômen động đối với tâm O của một chất điểm có khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ là đại lượng vectơ, được ký hiệu $\vec{L}_o$:

$$\vec{L}_o = \vec{m}_o(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad (2\text{-}19)$$

trong đó $\vec{r}$ là bán kính vectơ của chất điểm đối với tâm 0. Mômen động đối với tâm 0 của cơ hệ gồm N chất điểm M_k $(k = \overline{1,N})$ có khối lượng m_k, chuyển động với vận tốc $\vec{v}_k$, bằng tổng mômen động của các chất điểm thuộc cơ hệ đối với tâm O :

$$\vec{L}_o = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(m_k\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k \quad (2\text{-}20)$$

β) Mômen động lượng (mômen động) đối với một trục

Mômen động đối với trục Δ của một chất điểm là đại lượng đại số, được kí hiệu $\overline{L}_\Delta$

$$\overline{L}_\Delta = \overline{m}_\Delta (m\ \vec{v}) \tag{2-21}$$

Mômen động đối với trục Δ của cơ hệ bằng tổng mômen động của các chất điểm thuộc cơ hệ đối với trục Δ :

$$\overline{L}_\Delta = \sum_{k=1}^{N} \overline{m}_\Delta (m_k \vec{v}_k) \tag{2-22}$$

γ) Áp dụng vào vật rắn

Vật rắn có khối lượng M chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\vec{v}_c$:

$$\vec{L}_o = \vec{m}_o (M\ \vec{v}_c)\ ;\quad \overline{L}_\Delta = \overline{m}_\Delta (M\ \vec{v}_c) \tag{2-23}$$

Vật rắn quay quanh trục Δ với vận tốc góc $\overline{\omega}$ và có mômen quán tính đối với trục Δ bằng J_Δ

$$\overline{L}_\Delta = J_\Delta\ \overline{\omega} \tag{2-24}$$

Đối với các vật rắn có chuyển động khác, có thể sử dụng công thức sau :

$$\vec{L}_o = \vec{L}_C^{(r)} + \vec{m}_o (M\ \vec{v}_c) \tag{2-25}$$

trong đó $\vec{L}_c^{(r)}$ là mômen động của vật rắn tính đối với hệ quy chiếu tịnh tiến cùng với khối tâm C.

Đơn vị của mômen động là kg m^2/s.

b) Các định lý

α) Đối với chất điểm :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{m}_o (\vec{F}) \tag{2-26}$$

$$\frac{d\overline{L}_\Delta}{dt} = \overline{m}_\Delta (\vec{F}) \tag{2-27}$$

β) Đối với cơ hệ :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o (\vec{F}_k^e) \qquad (2-28)$$

$$\frac{d\overline{L}_\Delta}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \overline{m}_\Delta (\vec{F}_k^e) \qquad (2-29)$$

c) Các trường hợp bảo toàn

Nếu $\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{0}$ thì $\vec{L}_o = \vec{m}_o(m\vec{v}) = \text{const}$

Nếu $\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$ thì $\overline{L}_\Delta = \overline{m}_\Delta(m\vec{v}) = \text{const}$ (2-30)

Nếu $\sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) = \vec{0}$ thì $\vec{L}_o = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(m_k\vec{v}_k) = \text{const}$

Nếu $\sum_{k=1}^{N} \overline{m}_\Delta(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\overline{L}_\Delta = \sum_{k=1}^{N} \overline{m}_\Delta(m_k\vec{v}_k) = \text{const}$

d) Phương trình vi phân chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định

$$J_\Delta\overline{\varepsilon} \equiv J_\Delta \frac{d\overline{\omega}}{dt} \equiv J_\Delta \frac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2} = \sum_{k=1} \overline{m}_\Delta (\vec{F}_k) \qquad (2-31)$$

trong đó J_Δ là mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay Δ; $\overline{\varphi}$, $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ lần lượt là góc quay, vận tốc góc và gia tốc góc của vật rắn, $\{\vec{F}_k\}$ – các ngoại lực tác dụng lên vật.

e) Các công thức tính mômen quán tính của vật rắn (H. 2-5)

– Momen quán tính của vật rắn đối với trục :

$$J_\Delta = \sum_{k=1}^{\infty} m_k h_k^2 = M\rho^2 \qquad (2-32)$$

trong đó m_k là khối lượng chất điểm thứ k, h_k – khoảng cách từ chất điểm thứ k đến trục Δ ; M – khối lượng của vật, còn ρ – bán kính quán tính.

– Mômen quán tính của vật đối với các trục tọa độ :

$$J_x = \sum m_k \ (y_k^2 + z_k^2) \ ;$$

$$J_y = \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) \ ; \qquad (2-33)$$

$$J_z = \sum m_k \ (x_k^2 + y_k^2)$$

– Mômen quán tính tích của vật rắn :

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k \ ;$$

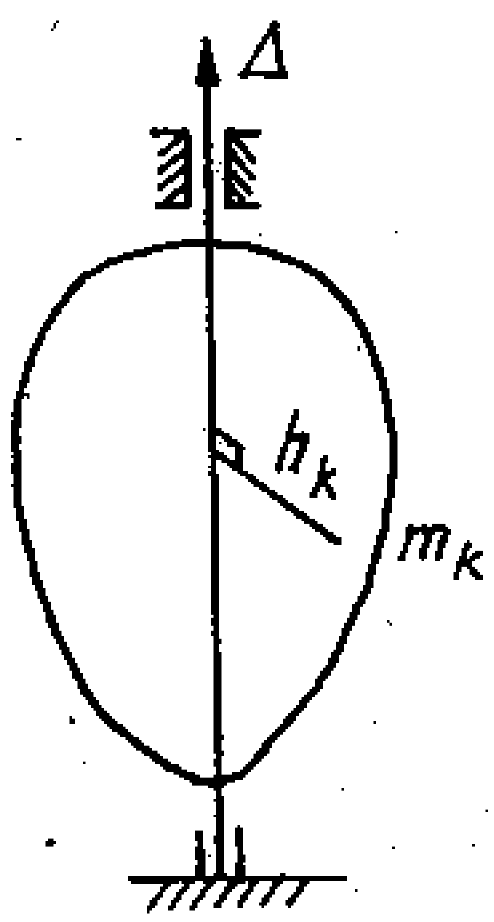
$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k \ ; \qquad (2-34)$$

$$J_{zx} = \sum m_k z_k x_k \ ;$$

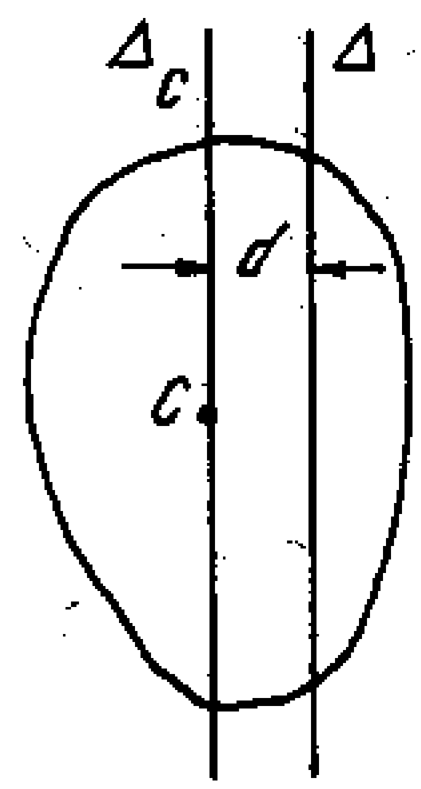
– Mômen quán tính của vật đối với các trục song song (H.2-6) – Định lý Stêne :

$$J_\Delta = J_{\Delta c} + Md^2 \qquad (2-35)$$

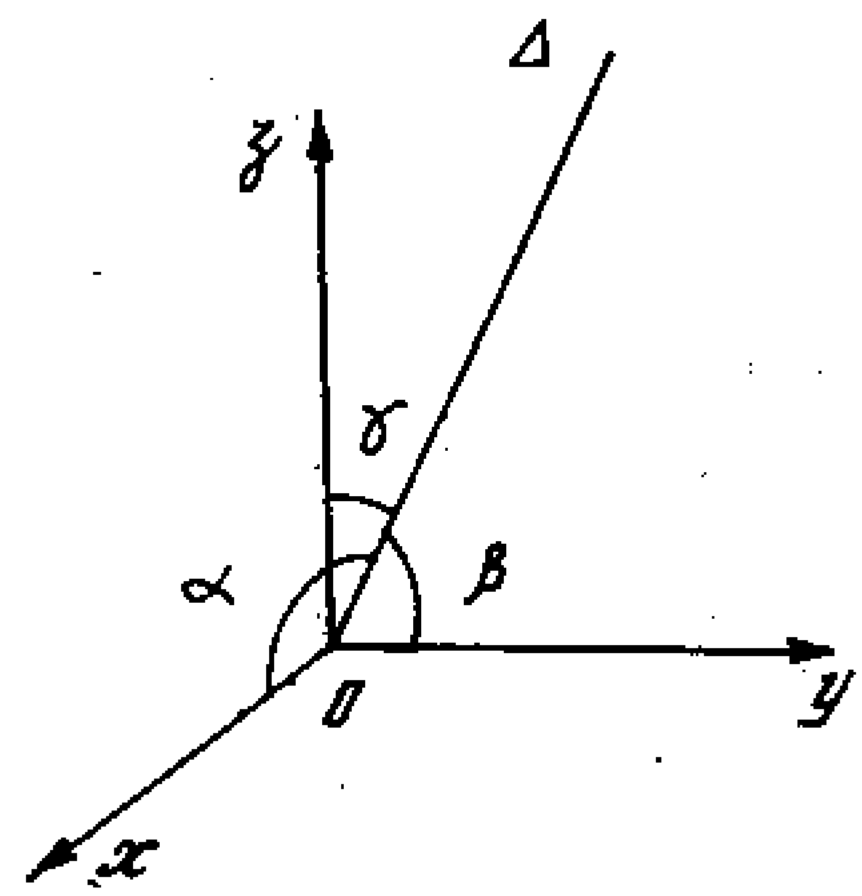
Δ và Δ_c là hai trục song song, trục Δ_c qua khối tâm C ; M – khối lượng của vật ; d – khoảng cách giữa hai trục (H. 2-6).



HÌNH 2-5



HÌNH 2-6



HÌNH 2-7

– Mômen quán tính của trục bất kỳ qua gốc tọa độ (H. 2-7) :

$$J = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy} \cos\alpha \cos\beta -$$
$$- 2J_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2J_{zx} \cos\gamma \cos\alpha. \qquad (2-36)$$

Nếu trục Oz là trục quán tính tại O ($J_{yz} = J_{zx} = 0$) thì :

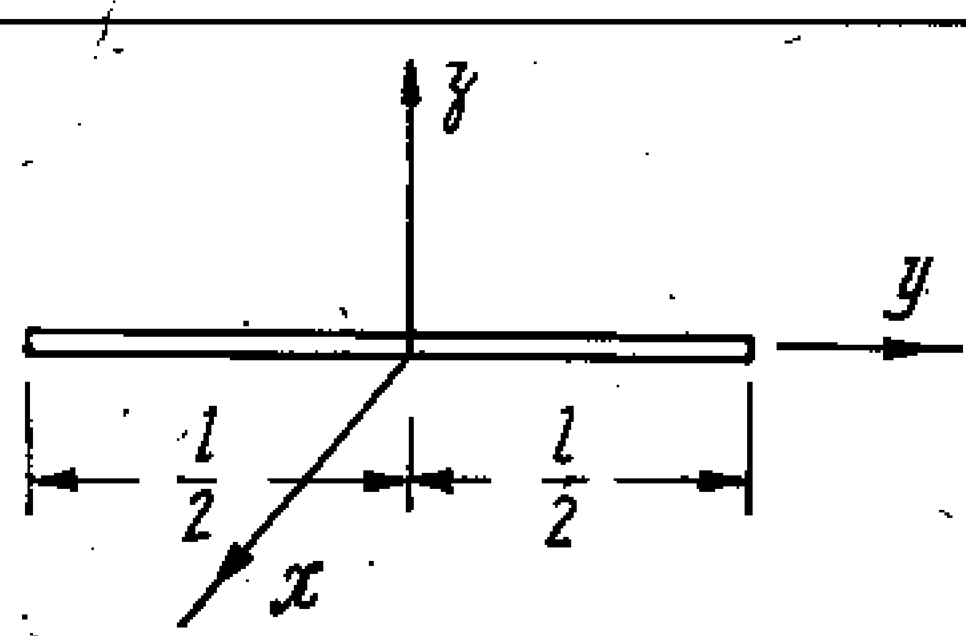
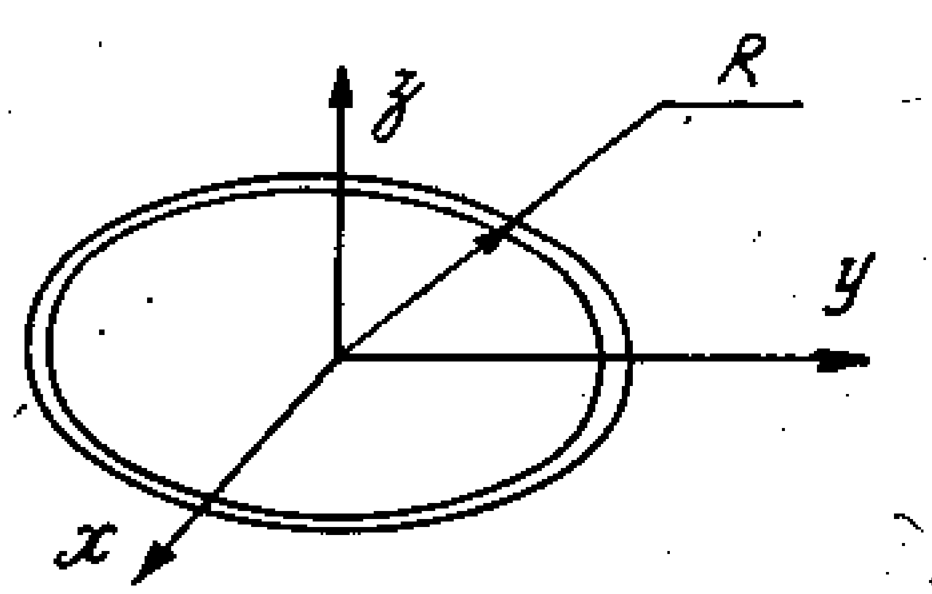
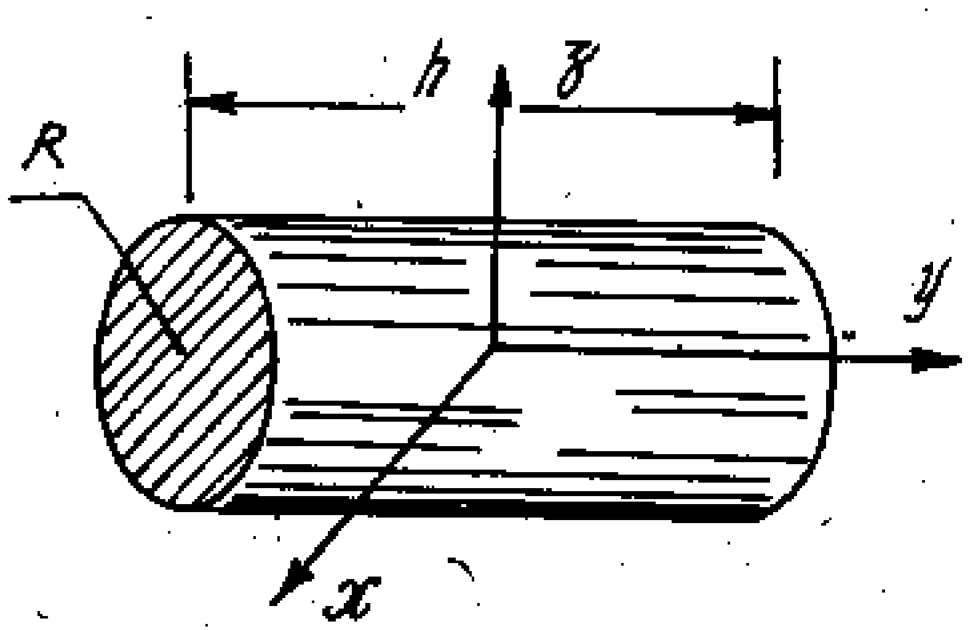
$$J_\Delta = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta \quad (2\text{-}37)$$

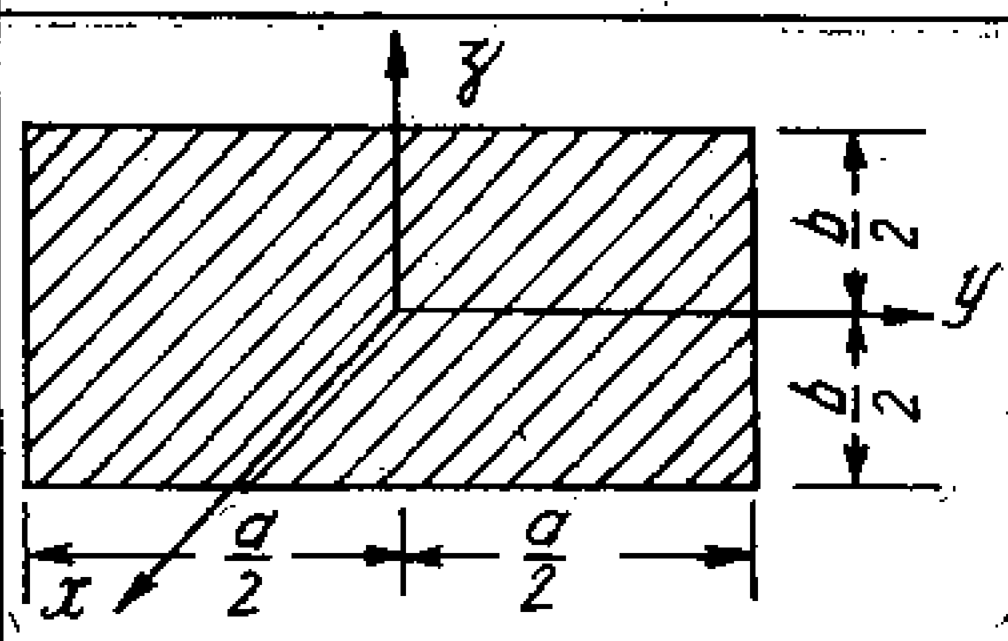
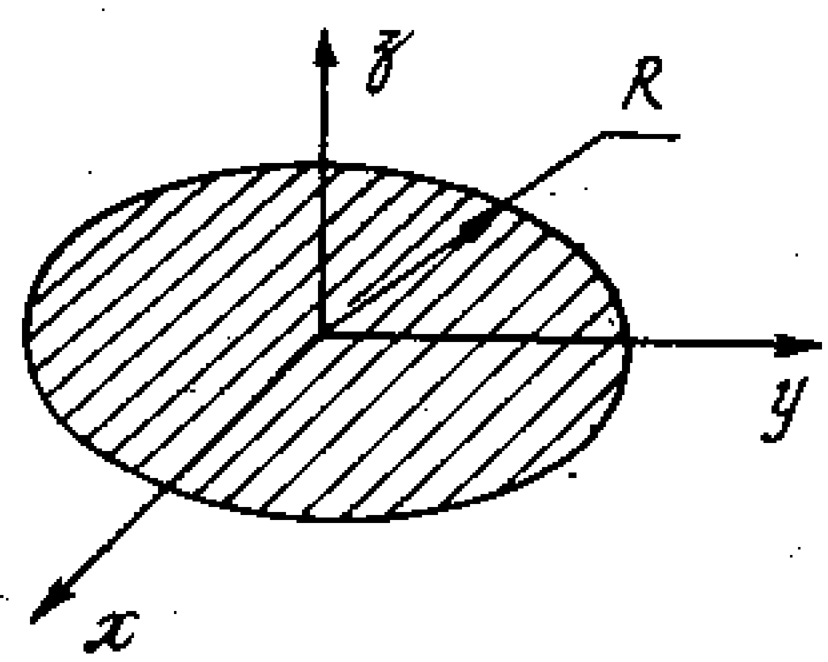
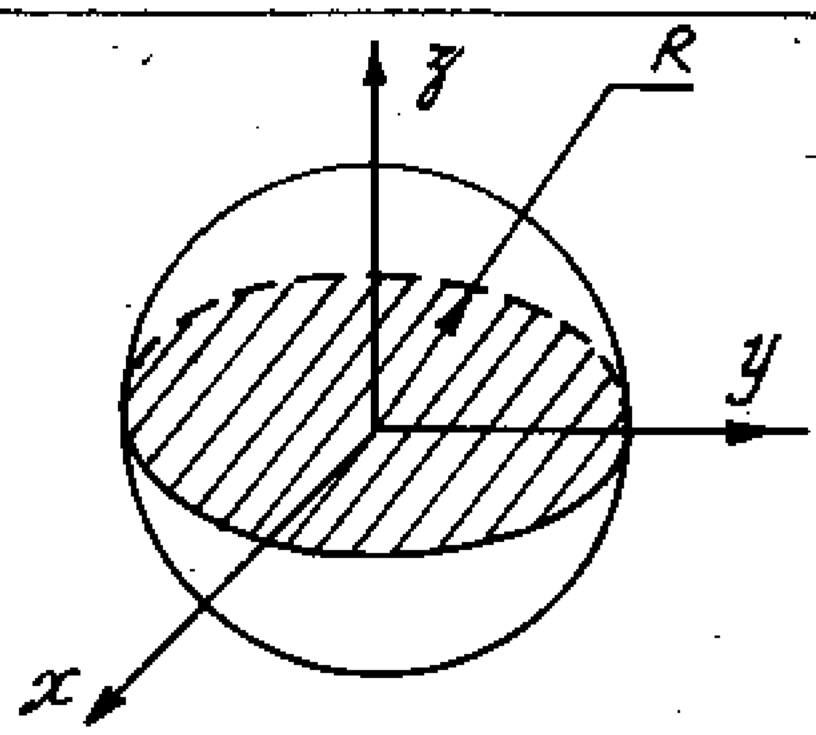
Nếu Oxyz là trục quán tính chính tại O ($J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$) thì :

$$J_\Delta = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma \quad (2\text{-}38)$$

– Mômen quán tính của một số vật rắn đồng chất :

BẢNG 2–1

Dạng	Vật đồng chất	Mômen quán tính đối với các trục
1	2	3
Thanh mảnh		$J_z = J_x = \frac{Ml^2}{12}$
Vành tròn		$J_x = J_y = \frac{MR^2}{2}$ $J_z = MR^2$
Trụ tròn		Trụ đặc : $J_y = \frac{MR^2}{2}$ $J_x = J_z = \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$ Trụ rỗng mỏng $J_y = MR^2$ $J_x = J_z = \frac{M}{2}\left(R^2 + \frac{h^2}{6}\right)$

1	2	3
Tấm phẳng		$J_z = M\,\dfrac{a^2}{12}$; $J_y = M\,\dfrac{b^2}{12}$
Mặt tròn		$J_x = J_y = M\,\dfrac{R^2}{4}$ $J_z = \dfrac{MR^2}{2}$
Quả cầu đặc		$J_x = J_y = J_z = \dfrac{2}{5}\,MR^2$

2.3.2. Hướng dẫn áp dụng

Định lý biến thiên mômen động lượng thường được áp dụng vào các bài toán sau :

1 – Xác định các yếu tố động học (gia tốc hoặc gia tốc góc) của cơ hệ một bậc tự do khi biết tổng mômen các ngoại lực đối với trục quay.

2 – Xác định chuyển động của cơ hệ trong điều kiện bảo toàn mômen động đối với một tâm $[\sum \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) = \vec{0}]$ hay đối với một trục cố định, $[\sum \overline{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0]$.

3 – Khảo sát chuyển động quay của một vật rắn quay quanh một trục cố định, quay quanh một tâm cố định.

Bài toán nói chung được giải theo trình tự sau :

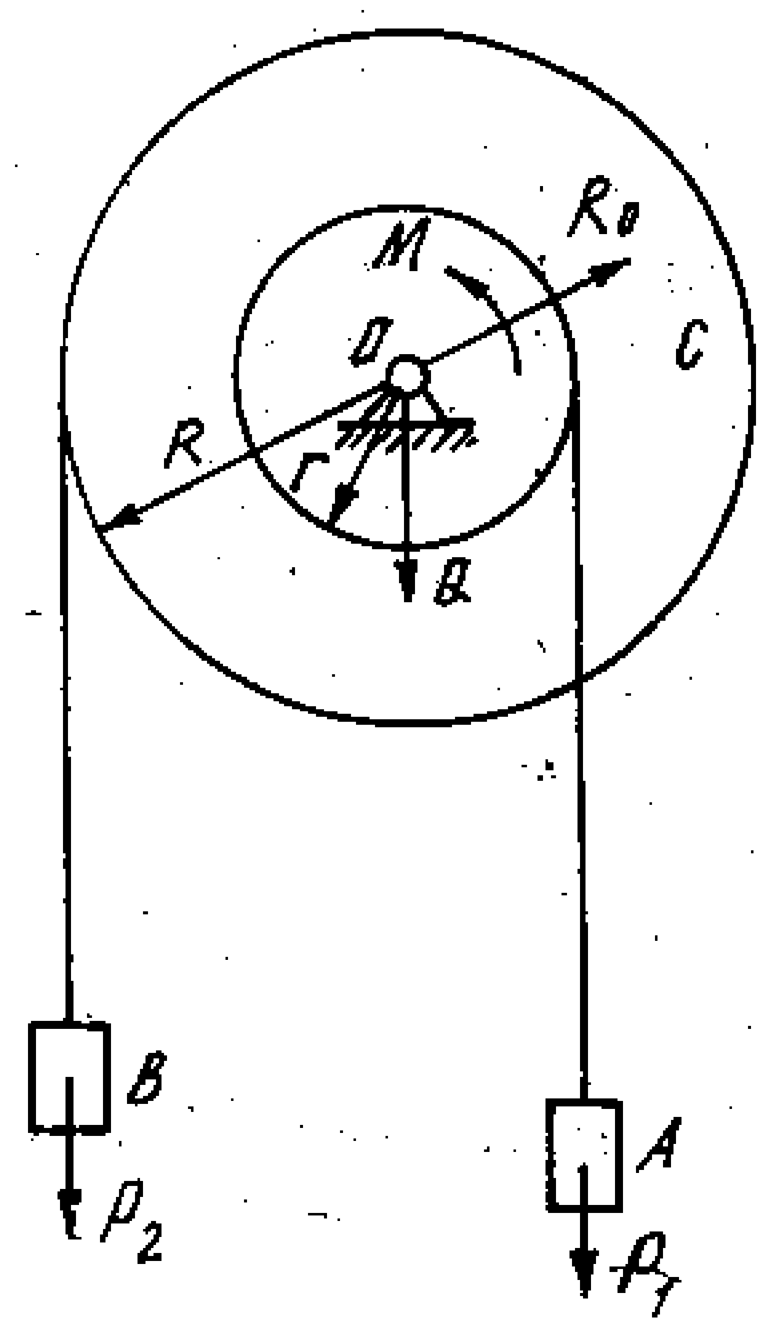
– Xác định cơ hệ khảo sát, phân tích đặc điểm chuyển động của từng vật thuộc cơ hệ, giả định các vận tốc, gia tốc đặc trưng cho chuyển động từng vật, chú ý đến các quan hệ động học giữa các vật thuộc cơ hệ.

– Phân tích các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ – Phát hiện các đặc điểm về tổng mômen các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ (có tính được hay không, có bằng không hay không).

– Xác định loại bài toán. Nếu bài toán phải giải quyết thuộc bài toán 1) thì áp dụng (2–29), nếu thuộc bài toán 2) thì sử dụng $(2–30)_3$, $(2–30)_4$, nếu thuộc bài toán loại 3) thì áp dụng (2–31), (2–28). Trong đó việc tính mômen động của vật đối với một tâm hay một trục cố định dựa vào các công thức (2–20), (2–22), (2–23), (2–24), (2–25).

2.3.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 2 – 5. Hai vật nặng P_1 và P_2 được buộc vào hai dây quấn vào hai tang của một tời bán kính là r và R. Để nâng vật nặng P_1 lên người ta còn tác dụng vào tời một mômen quay M. Tìm gia tốc góc của tời quay. Biết trọng lượng của tời là Q và bán kính quán tính đối với trục quay là ρ.



HÌNH 2–8

Bài giải. Xét cơ hệ gồm vật nặng A, B và tời C (H. 2–8).

Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{Q}$, mômen quay $\overline{M}$ và phản lực $\vec{R}_o$, trong đó phản lực $\vec{R}_o$ có mômen đối với trục quay O bằng không. Giả sử tời quay ngược chiều kim đồng hồ.

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với trục quay z đi qua O' của tời ta có :

$$\frac{d}{dt}\overline{L}_z = -P_1r + P_2R + M, \tag{a}$$

trong đó : $\overline{L}_z = \overline{L}_z(A) + \overline{L}_z(B) + \overline{L}_z(C).$

Mômen động lượng của vật A :

$$\overline{L}_z(A) = r \cdot \frac{P_1}{g} v_A = \frac{P_1}{g} r^2 \omega.$$

Mômen động lượng của vật B :

$$\overline{L}_z(B) = R \cdot \frac{P_2}{g} v_B = \frac{P_2}{g} R^2 \omega.$$

Mômen động lượng của tời C :

$$\overline{L}_z(C) = J_z\omega = \frac{Q}{g}\rho^2\omega.$$

Vậy mômen động của cơ hệ bằng :

$$\overline{L}_z = (P_1 r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2) \cdot \frac{\omega}{g} \tag{b}$$

Thay (b) vào (a) rút ra :

$$\frac{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}{g} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -P_1r + P_2R + M.$$

Từ đây ta có gia tốc góc quay của trục tời :

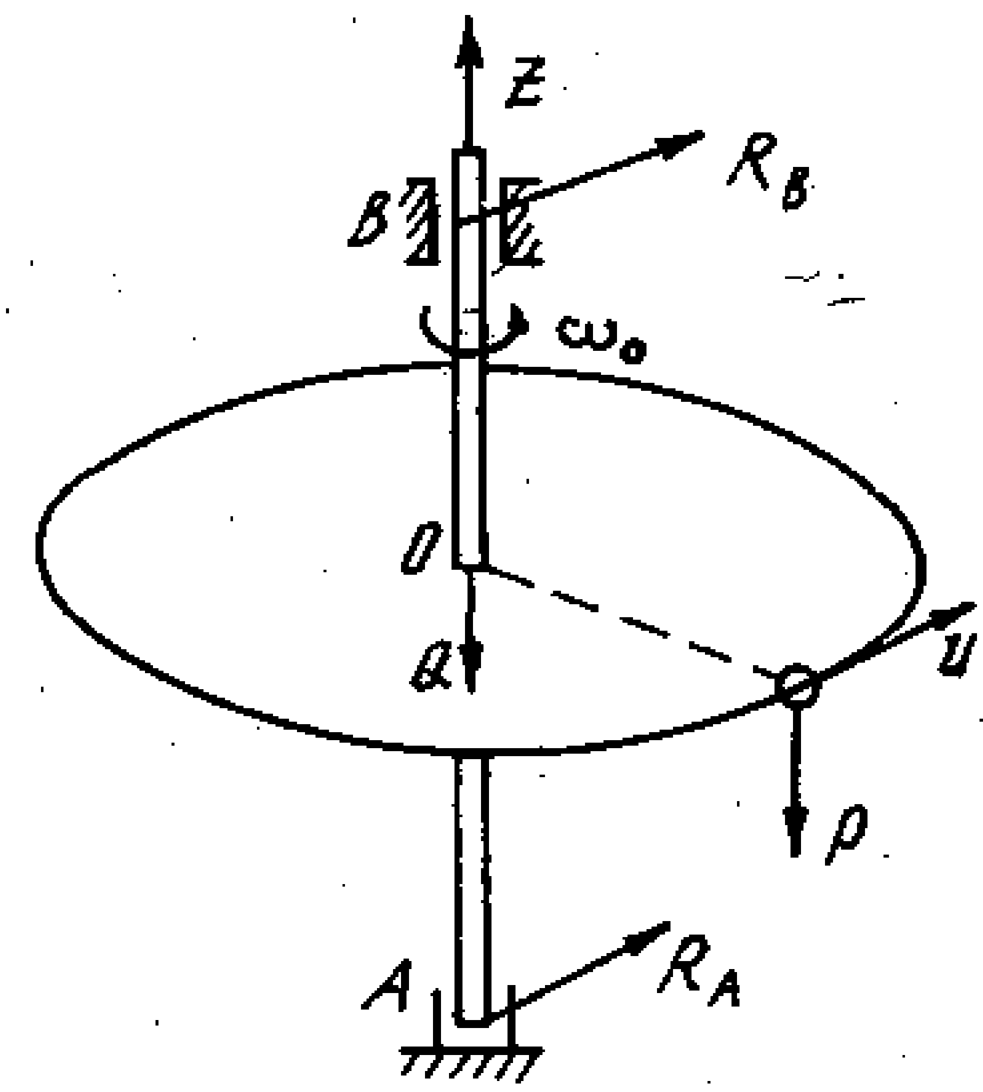
$$\varepsilon = \frac{M + P_2R - P_1r}{P_1r^2 + P_2R^2 + Q\rho^2}$$

Tời quay nhanh dần nếu :

$$M + P_2R - P_1r > 0.$$

Thí dụ 2-6. Một đĩa tròn đồng chất, trọng lượng là Q, bán kính là R quay được quanh một trục thẳng đứng AB đi qua tâm đĩa và vuông góc với đĩa. Trên vành đĩa có một chất điểm

M có trọng lượng P. Đĩa quay quanh trục với vận tốc góc ω_o. Tại một thời điểm nào đó chất điểm M chuyển động theo vành đĩa với vận tốc tương đối so với đĩa là u. Tìm vận tốc góc của đĩa lúc đó, (H.2-9).



HÌNH 2-9

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm đĩa và chất điểm M. Đĩa có thể quay quanh trục cố định z thẳng đứng, còn chất điểm M chuyển động trên mặt đĩa theo đường tròn tâm O, bán kính OM (chuyển động tương đối) với vận tốc u và cùng với đĩa quay quanh trục z (chuyển động theo).

Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{Q}$, $\vec{P}$ và các phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ tại các ổ trục A và B.

Vì hệ ngoại lực gồm các lực song song hoặc cắt trục z nên :

$$\sum \overline{m}_z\ (\vec{F}_{ek}) = 0.$$

Khi áp dụng định lý biến thiên mômen động đối với trục z ta có :

$$\frac{d\overline{L}_z}{dt} = \sum \overline{m}_z\ (\vec{F}_{ek}) = 0.$$

Từ đó rút ra :

$$\overline{L}_z = \text{const} = \overline{L}_z\ (0), \qquad \text{(a)}$$

tức là mômen động lượng của cơ hệ tại mọi thời điểm đều bằng giá trị của nó tại thời điểm ban đầu.

Giả sử tại thời điểm đầu chất điểm nằm yên trên đĩa và cùng với đĩa quay quanh trục z theo chiều dương với vận tốc góc ω_o, và khi chất điểm chuyển động đối với đĩa với vận tốc u (theo chiều dương quanh trục z) thì đĩa sẽ quay quanh trục z với vận tốc góc ω cùng theo chiều dương. Mômen động lượng của cơ hệ bằng :

$$\overline{L}_z = \overline{L}_z^{(1)} + \overline{L}_z^{(2)}$$

trong đó lần lượt là mômen động lượng của đĩa và chất điểm M đối với trục z :

$$\overline{L}_z^{(1)} = J_z \overline{\omega} = \frac{Q}{2g} R^2\omega \; ; \; \overline{L}_z^{(2)} = \frac{P}{g} (\omega R + u)R.$$

Vậy :

$$\overline{L}_z = \frac{Q}{2g} R^2\omega + \frac{P}{g} (\omega R + u)R = \frac{R^2\omega(Q + 2P) + 2PRu}{2g} \qquad \text{(b)}$$

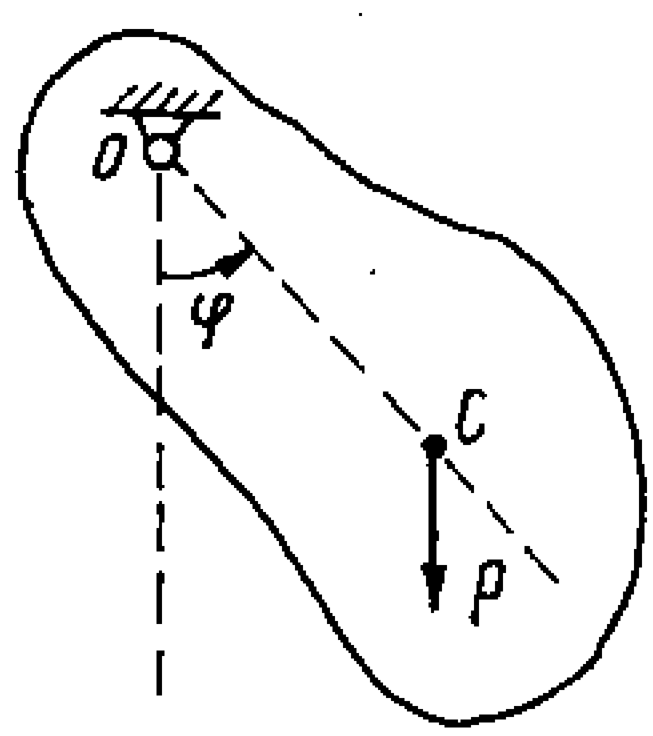
$$\overline{L}_z(0) = \frac{\omega_o R^2(Q + 2P)}{2g} \qquad \text{(c)}$$

Khi thay (b) và (c) vào (a) ta nhận được

$$\omega = \omega_o - \frac{2Pu}{(Q+2P)R}$$

Đĩa quay quanh trục z theo chiều dương hoặc âm tùy thuộc

$$\omega_o - \frac{2Pu}{(Q + 2P)R} > 0.$$



HÌNH 2-10

Thí dụ 2 – 7. Viết phương trình dao động bé của con lắc vật lý (H. 2-10).

Bài giải. Con lắc vật lý là một vật nặng có thể quay được quanh trục cố định qua O thẳng góc với mặt phẳng (O, $\vec{P}$) và dao động bé dưới tác dụng của trọng lực $\vec{P}$.

Hệ ngoại lực tác dụng lên vật gồm trọng lực $\vec{P}$ và phản lực ở trục $\vec{R}_o$.

Để viết phương trình vi phân chuyển động của con lắc vật lý ta sử dụng (2–31), nó có dạng sau :

$$J_o \frac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2} = - Pa\sin\overline{\varphi},$$

trong đó J_o là mômen quán tính của vật đối với trục qua O, a là khoảng cách từ khối tâm C của vật đến trục quay O ; $\overline{\varphi}$ là góc lệch giữa đường OC đối với đường thẳng đứng qua O.

Trong trường hợp dao động bé có thể coi : $\sin\overline{\varphi} \approx \overline{\varphi}$ nên phương trình vi phân chuyển động của con lắc vật lý được viết trong dạng :

$$\ddot{\overline{\varphi}} + k^2\overline{\varphi} = 0 \quad \left(\ddot{\overline{\varphi}} \equiv \frac{d^2\overline{\varphi}}{dt^2}\right) \tag{a}$$

trong đó $k = \sqrt{Pa/J_o}$ được gọi là tần số riêng.

Phương trình (a) được gọi là phương trình dao động bé của con lắc.

Gọi T là chu kỳ dao động của con lắc, ta có :

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Từ đó :
$$J_o = \frac{PaT^2}{4\pi^2} \tag{b}$$

Áp dụng công thức Stêne (2 – 35), ta có

$$J_o = J_c + \frac{P}{g} a^2. \tag{c}$$

Từ (b) và (c) rút ra :

$$J_c = P\,a\left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{a}{g}\right) \tag{d}$$

Bằng thực nghiệm có thể đo được chu kỳ T và do đó tính được mômen quán tính của vật rắn đối với khối tâm C và nhờ đó tính được bán kính quán tính của vật rắn đối với khối tâm C từ biểu thức :

$$J_C = \frac{P}{g}\rho^2.$$

2.4. ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

2.4.1. Cơ sở lý thuyết

a) Các định nghĩa

α) *Động năng :* Động năng của một chất điểm có khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ là đại lượng vô hướng, được kí hiệu là T:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2-39}$$

Động năng của cơ hệ gồm N chất điểm M_k ($k = \overline{1, N}$) có khối lượng m_k, chuyển động với vận tốc $\vec{v_k}$ là :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 \tag{2-40}$$

Các công thức tính động năng của vật rắn chuyển động : vật rắn có khối lượng M, chuyển động tịnh tiến có vận tốc khối tâm $\vec{v_c}$:

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^{\,2} \tag{2-41}$$

Vật rắn quay quanh trục Δ cố định với vận tốc góc $\overline{\omega}$ và có momen quán tính đối với trục quay Δ là J_Δ :

$$T = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \tag{2-42}$$

Vật rắn có khối lượng M chuyển động song phẳng có vận tốc khối tâm $\vec{v_c}$ và vận tốc góc $\overline{\omega}_S$.

$$T = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega_s^2 = \frac{1}{2}J_p\omega_S^2 \tag{2-43}$$

trong đó J_c và J_p lần lượt là mômen quán tính của vật rắn đối với trục vuông góc với mặt phẳng chuyển động song phẳng qua khối tâm C và tâm quay tức thời P.

Vật rắn quay quanh một điểm cố định O, có vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$:

$$T = \frac{1}{2}(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy}\overline{\omega}_x\overline{\omega}_y -$$

$$-2J_{yz}\overline{\omega}_y\overline{\omega}_z - 2J_{zx}\overline{\omega}_z\overline{\omega}_x) \qquad (2\text{–}44)$$

trong đó J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} là các mômen quán tính và các mômen quán tính tích đối với hệ trục tọa độ Đề các bất kỳ Oxyz ; $\overline{\omega}_x$, $\overline{\omega}_y$, $\overline{\omega}_z$ hình chiếu của vectơ vận tốc góc $\vec{\omega}$ trên các trục tọa độ.

Nếu Oxyz là hệ trục quán tính chính thì :

$$T = \frac{1}{2}(J_x \overline{\omega}_x^2 + J_y \overline{\omega}_y^2 + J_z \overline{\omega}_z^2) \qquad (2\text{–}45)$$

Vật rắn chuyển động tự do :

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T^{(r)} \qquad (2\text{–}46)$$

trong đó M là khối lượng vật rắn, $\vec{v}_c$ – vận tốc khối tâm C của nó, $T^{(r)}$ – động năng của vật rắn được tính trong chuyển động của nó đối với hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến cùng khối tâm C.

Trong trường hợp cơ hệ gồm các vật rắn thì động năng cơ hệ bằng tổng động năng các vật rắn. Nếu vật thể có dạng dây, băng tải (vật biến dạng) thì cần xem vật thể gồm vô số các chất điểm và sử dụng công thức (2–40).

β) – Công của lực. Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ (tức là công của lực trong khoảng thời gian vô cùng bé dt) là đại lượng vô hướng :

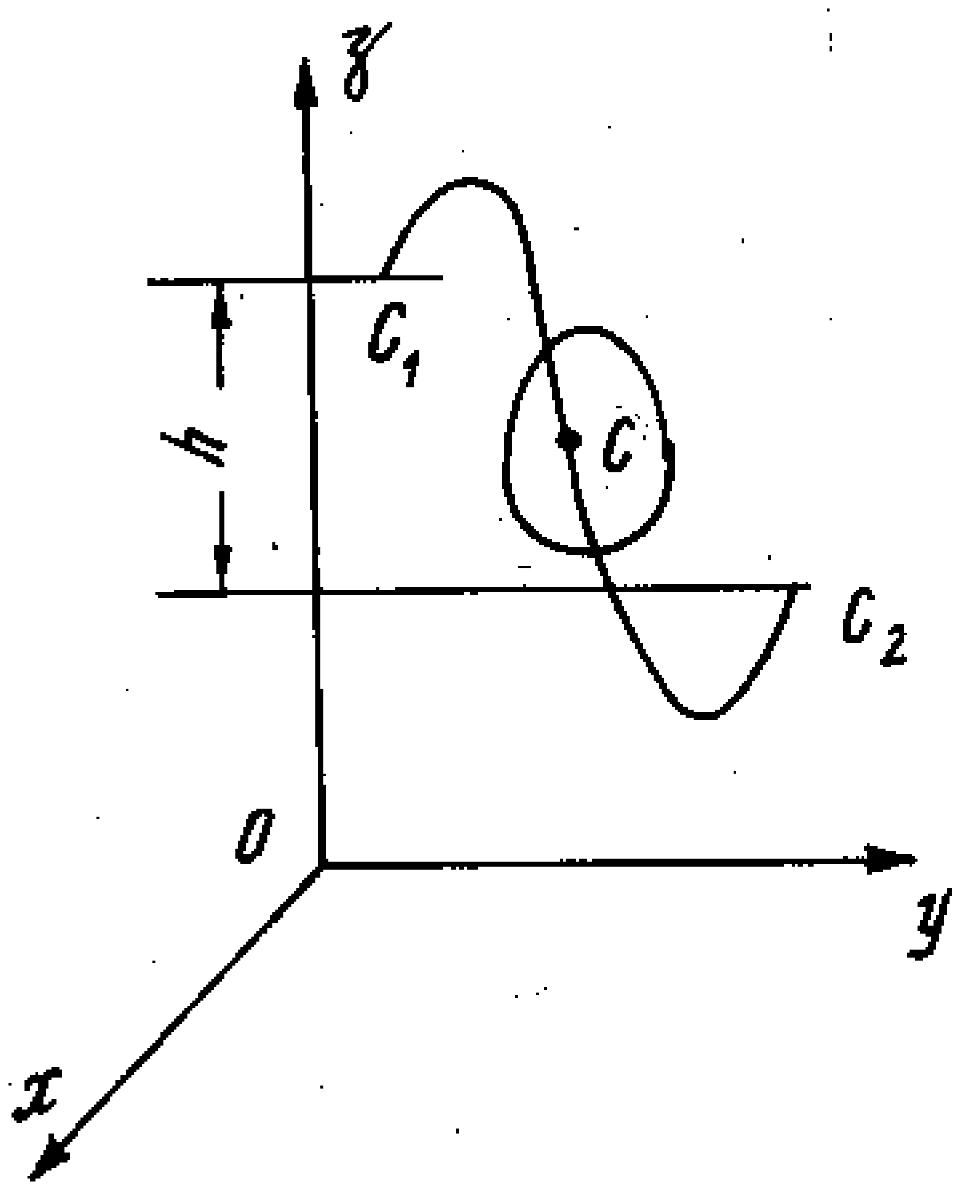
$$dA = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}.\vec{v}\,dt = F\cos\alpha\,ds =$$

$$= F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \qquad (2\text{–}47)$$

trong đó α là góc giữa lực và phương tiếp tuyến của quỹ đạo ; F_x, F_y, F_z – hình chiếu của lực trên các trục tọa độ của hệ trục tọa độ Đề các Oxyz ; x, y, z các tọa độ của điểm đặt lực trong hệ trục tọa độ đó.

Công hữu hạn của lực khi điểm đặt lực di chuyển trên đường cong từ vị trí M_o đến vị trí M

$$A = \int_{M_o}^{M} \vec{F}.\vec{dr} = \int_{M_o}^{M} F\cos\alpha ds = \int_{M_o}^{M} F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (2-48)$$



HÌNH 2-11

Đơn vị của công là Niutơn mét (Nm) hoặc Jun (J).

Công thức tính công của một số lực thường gặp :

Công của trọng lực $\vec{P}$, (H. 2-11)

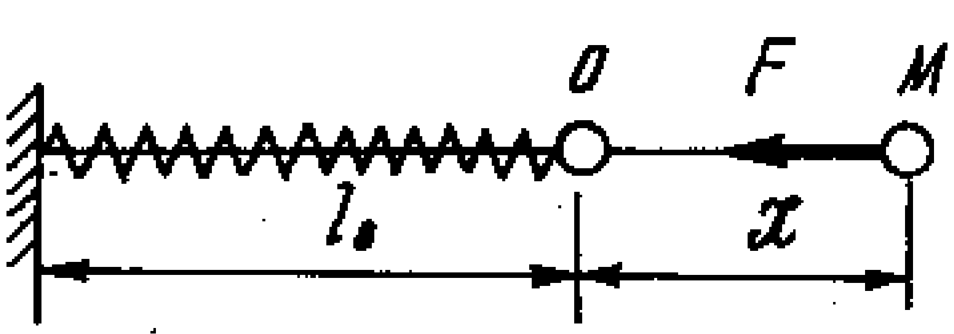
$$A = \pm Ph \qquad (2-49)$$

trong đó h – là cao độ di chuyển của điểm đặt trọng lực, lấy dấu + hoặc – tùy thuộc điểm đặt của trọng lực được hạ xuống hoặc nâng lên.

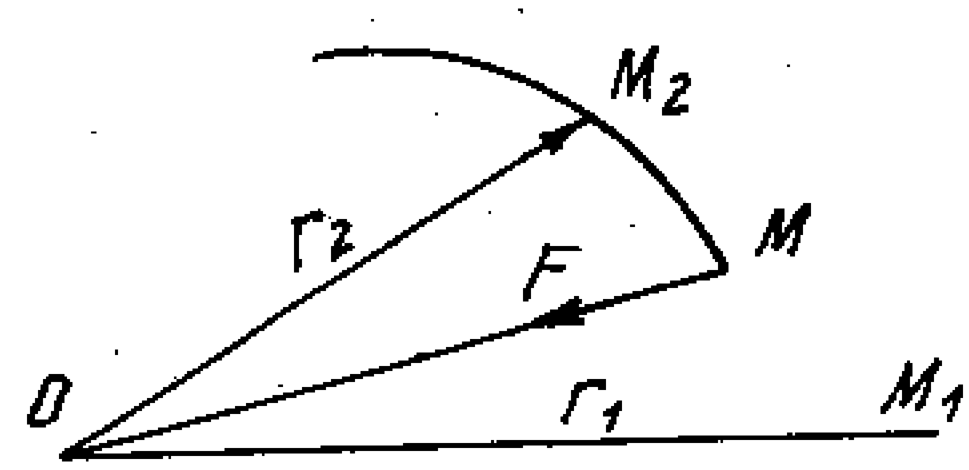
Công của lực đàn hồi khi điểm đặt lực di chuyển theo phương tác dụng lực (H. 2-12)

$$A = \frac{1}{2} c\ (x_1^2 - x_2^2) \qquad (2-50)$$

còn khi điểm đặt lực di chuyển theo đường cong thì công bằng (H. 2-13) :



HÌNH 2-12



HÌNH 2-13

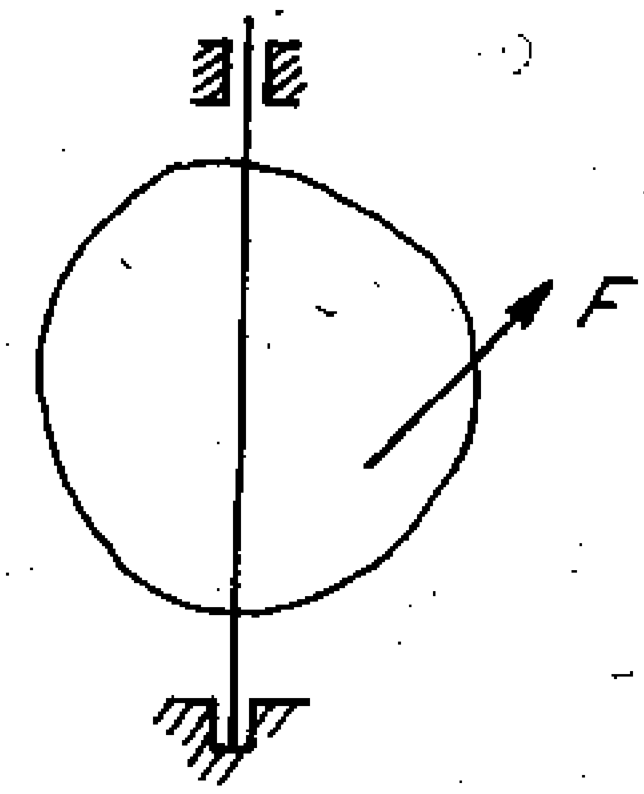
$$A = \frac{1}{2} c \, (r_1^2 - r_2^2) \qquad (2\text{-}51)$$

Công của lực tác dụng lên vật rắn quay quanh một trục cố định (H. 2-14) :

$$dA = \overline{m}_\Delta (\vec{F}) \, d\varphi \; ; \qquad (2\text{-}52)$$

$$A = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \overline{m}_\Delta (\vec{F}) \, d\varphi;$$

trong đó $\overline{m}_\Delta (\vec{F})$ là mômen của lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật đối với trục quay Δ.



HÌNH 2-14

Công của ngẫu lực có vectơ mômen $\vec{M}$ tác dụng lên vật quay quanh trục Δ, (H. 2-15) :

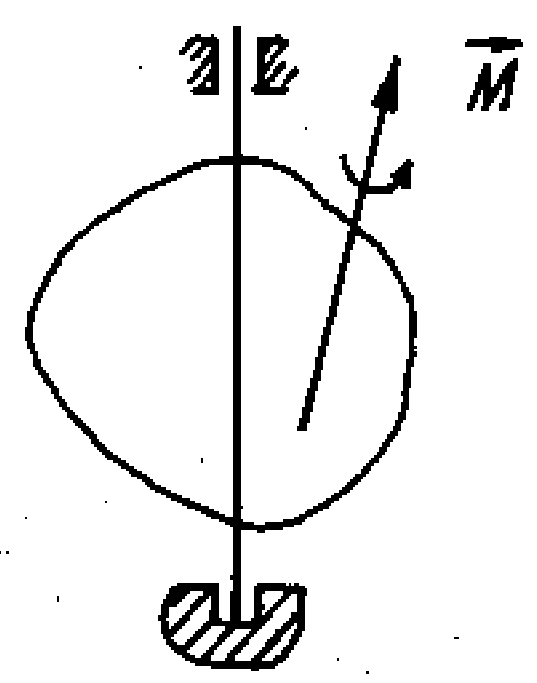
$$dA = \overline{M}_\Delta \, d\varphi \; ; \; A = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \overline{M}_\Delta \, d\varphi \qquad (2\text{-}53)$$

trong đó $\overline{M}_\Delta$ là hình chiếu của vectơ mômen ngẫu lực $\vec{M}$ trên trục quay Δ.

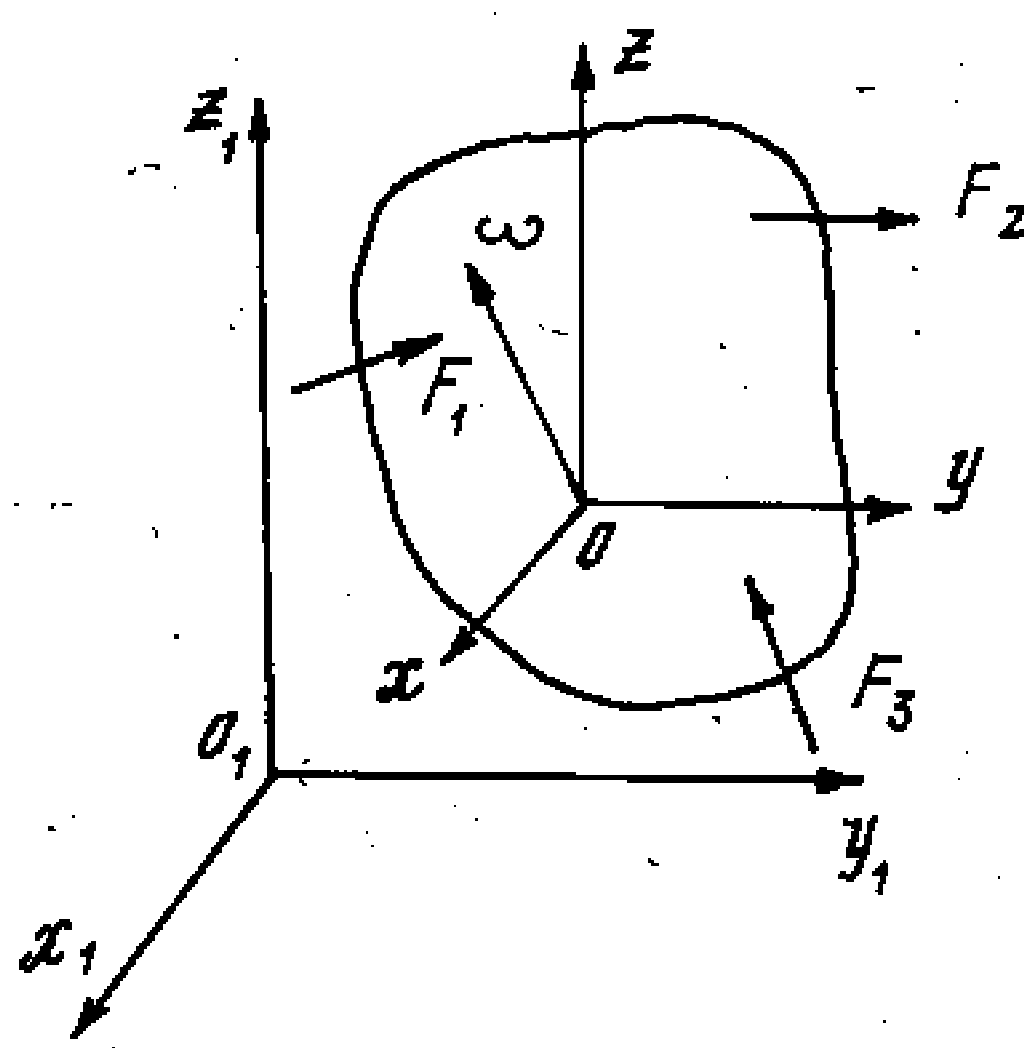
Nếu $\overline{M}_\Delta$ = const thì $A = \overline{M}_\Delta (\varphi - \varphi_o)$ (2-54)

Nếu $\overline{M}_\Delta = -c\varphi$ (trường hợp ngẫu lực đàn hồi ; c = const) thì

$$A = \frac{1}{2} c \, (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)$$



HÌNH 2-15



HÌNH 2-16

Có thể dễ dàng suy ra các công thức tính công của lực tác dụng lên vật chuyển động song phẳng (xem hình phẳng quay tức thời quanh trục đi qua tâm vận tốc) và vật chuyển động quay quanh một điểm cố định (xem vật quay quanh trục quay tức thời đi qua điểm cố định).

Công của hệ lực tác dụng lên vật rắn

$$d'A = \vec{R}'_o d\vec{r}_o + \vec{M}_o \vec{\omega}\, dt, \qquad (2\text{-}55)$$

Trong đó $\vec{R}'_o$ và $\vec{M}_o$ là lực và ngẫu lực có được khi thu gọn hệ lực về tâm O (được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn và mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn) ; $\vec{\omega}$ – vận tốc góc tức thời của vật (H. 2-16).

Từ đây suy ra trực tiếp công thức tính công cho hệ lực tác dụng lên vật rắn chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay quanh một trục cố định, chuyển động song phẳng,...

+ Vật rắn lăn không trượt : công của lực ma sát trượt bằng không còn công ngẫu lực ma sát lăn được tính theo công thức tính công ngẫu lực.

γ) *Công suất* là công sinh ra trong một đơn vị thời gian

$$W = \frac{d'A}{dt} = \sum \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = \sum F_{kx}\dot{x}_k + F_{ky}\dot{y}_k + F_{kz}\dot{z}_k \qquad (2\text{-}56)$$

Trường hợp nếu vật rắn quay quanh trục cố định Δ, chịu tác dụng ngẫu lực **M** thì :

$$W = \overline{M}\,\overline{\omega}. \qquad (2\text{-}57)$$

Công suất trung bình

$$W = \frac{A}{t} \qquad (2\text{-}58)$$

Đơn vị công suất là Oát (W) hoặc Niutơn mét/giây (Nm/s).

θ) *Thế năng cơ hệ.* Trước hết cần biết các định nghĩa :

– Lực có thế là lực có đặc điểm sau :

$$d\,A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\,d\Pi\,(M). \qquad (2\text{-}59)$$

trong đó Π được gọi là hàm thế hoặc là thế năng của cơ hệ ; chỉ phụ thuộc vị trí cơ hệ ở thời điểm đang xét.

– Nếu cơ hệ chịu tác dụng của nhiều lực có thế thì

$$\sum \vec{F}_k \, d\vec{r}_k = - d\, \Pi\ (M). \qquad (2\text{–}60)$$

– Thế năng của cơ hệ ở vị trí đang xét đối với một vị trí chuẩn đã chọn là tổng công của các lực có thế tác dụng lên cơ hệ khi cơ hệ di chuyển từ vị trí đang xét về vị trí chuẩn đã chọn :

$$\Pi\ (M) = \sum_k \int_{M_k}^{M_k^o} \vec{F}_k \, d\vec{r}_k = \sum A_{\widehat{M_k M_k^o}} \qquad (2\text{–}61)$$

Chú ý rằng biểu thức thế năng được xác định sai kém một hằng số.

Nếu ký hiệu thế năng của cơ hệ tại hai vị trí qua Π (M) và $\Pi(M_o)$ thì :

$$\Pi\ (M) - \Pi\ (M_o) = A_{\widehat{MM_o}} \qquad (2\text{–}62)$$

trong đó $A_{\widehat{MM_o}}$ là tổng công của các lực ứng với chuyển dời của cơ hệ từ vị trí "M" đến vị trí "M_o".

Công thức tính thế năng đối với một số lực thế thường gặp :

– Khi lực thế là trọng lực :

$$\Pi = \pm\ Mg\ z_c + \text{const}, \qquad (2\text{–}63)$$

trong đó M là khối lượng cơ hệ, z_c là cao độ của khối tâm, lấy dấu + hoặc – tùy thuộc khối tâm C nằm cao hơn hoặc thấp hơn vị trí chuẩn.

– Khi lực thế là lực đàn hồi : $\vec{F} = -c\vec{r}$:

$$\Pi = \frac{1}{2}\ cr^2 + \text{const} \qquad (2\text{–}64)$$

(ví dụ trường hợp lò xo thẳng : $\Pi = \frac{1}{2}\ cx^2 + \text{const}$)

– Khi lực thế là ngẫu lực đàn hồi : $M = -c\,\varphi$ (ví dụ trường hợp lò xo xoắn):

$$\Pi = \frac{1}{2}\ c\varphi^2 + \text{const}. \qquad (2\text{–}65)$$

b) Các định lý biến thiên động năng

α) Đối với chất điểm

Dạng vi phân :

$$dT = \vec{F} \, . \, d\vec{r} \tag{2-66}$$

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \, . \, \vec{v} \tag{2-67}$$

Dạng hữu hạn :

$$T - T_o = \int_{M_o}^{M} \vec{F} \, . \, d\vec{r} = \int_{M_o}^{M} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{2-68}$$

trong đó T là động năng chất điểm tại thời điểm T (ứng với vị trí M); T_o – động năng chất điểm tại thời đầu t_o (ứng với vị trí M_o) ; $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ – lực tác dụng lên chất điểm.

Trong trường hợp chất điểm chịu tác dụng nhiều lực thì trong các công thức trên, lực $\vec{F}$ cần được thay bằng hợp lực của các lực tác dụng lên chất điểm.

β) Đối với cơ hệ

Dạng vi phân

$$dT = \sum dA_k^i + \sum dA_k^e \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i \, d\vec{r}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \, d\vec{r}_k \tag{2-69}$$

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k^i + \sum W_k^e \equiv \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^i \, . \, \vec{v}_k + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e \, . \, \vec{v}_k \tag{2-70}$$

trong đó T là động năng cơ hệ tại thời điểm t bất kỳ, $\{\vec{F}_k^i\}$, $\{\vec{F}_k^e\}$ lần lượt là hệ nội lực và hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ, $\sum dA_k^i$, $\sum dA_k^e$ – tổng công nguyên tố của các nội lực và ngoại lực ; $\sum W_k^i$, $\sum W_k^e$ – tổng công suất của các nội lực và ngoại lực.

Dạng hữu hạn :

$$T - T_o = \sum A_k^i + \sum A_k^e \tag{2-71}$$

trong đó T_o và T là động năng cơ hệ tại thời điểm đầu t_o và thời điểm t đang xét ; $\sum A_k^i$, $\sum A_k^e$ là tổng công hữu hạn của các nội lực và ngoại lực sinh ra trong khoảng thời gian $(t - t_o)$.

Trong trường hợp tất cả các lực tác dụng lên cơ hệ (bao gồm cả nội lực và ngoại lực hoặc lực hoạt động và lực liên kết) là những lực có thế và Π là thế năng của cơ hệ tại vị trí cơ hệ ứng với thời điểm đang xét, Π_o – thế năng cơ hệ tại vị trí đầu, ta có :

$$T - T_o = \Pi_o - \Pi$$

γ) Các trường hợp bảo toàn

Nếu tổng công nguyên tố của tất cả các lực tác dụng lên cơ hệ (bao gồm cả nội lực và ngoại lực hoặc cả lực hoạt động và lực liên kết) triệt tiêu thì động năng của cơ hệ được bảo toàn.

Nếu tất cả các lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế (bao gồm cả nội lực và ngoại lực hoặc cả lực hoạt động và lực liên kết) thì cơ năng (bằng tổng động năng và thế năng) của cơ hệ được bảo toàn.

2.4.2. Hướng dẫn áp dụng

Định lý biến thiên động năng thường được áp dụng để giải các bài toán về chuyển động của cơ hệ một bậc tự do. Các bài toán thường gặp là :

+ Xác định công suất khi biết chuyển động của cơ hệ (bài toán thuận).

+ Xác định chuyển động của cơ hệ khi biết đặc trưng sinh công của hệ lực tác dụng lên cơ hệ (bài toán ngược).

Khi áp dụng định lý biến thiên động năng để giải các bài toán nêu trên cần tiến hành theo các bước sau đây :

– Phân tích chuyển động của các vật hợp thành của cơ hệ : dạng chuyển động của các vật hợp thành (tịnh tiến, quay quanh một trục cố định...). Xác nhận cơ hệ khảo sát có một bậc tự do, tức các yếu tố động học của các vật hợp thành đều có thể quy đổi theo một yếu tố động học của một vật nào đó.

– Phân tích hệ lực tác dụng lên cơ hệ : phân tích khả năng sinh công của từng lực. Các lực được phân thành những lực sinh công và những lực không sinh công (không cần thiết phân thành ngoại lực và nội lực).

– Tính động năng của toàn cơ hệ bằng tổng động năng các vật hợp thành cơ hệ. Tìm các quan hệ động học (vận tốc) giữa các bộ phận và biểu diễn biểu thức động năng của cơ hệ là hàm của một yếu tố động học của một bộ phận nào đó thuộc vật. Thường động năng của cơ hệ được viết dưới dạng sau :

$$T = \frac{1}{2} m_{thg} v^2 \text{ hoặc } T = \frac{1}{2} J_{thg} \omega^2,$$

trong đó m_{thg} được gọi là khối lượng thu gọn của cơ hệ về khâu tịnh tiến có vận tốc v ; J_{thg} – momen quán tính thu gọn của cơ hệ về khâu quay có vận tốc góc ω.

– Tính tổng công nguyên tố của tất cả các lực tác dụng và dựa vào các quan hệ động học biểu diễn biểu thức công nguyên tố của các lực phụ thuộc vào một di chuyển nguyên tố (di chuyển dài hoặc góc) của một bộ phận nào đó của cơ hệ, chẳng hạn :

$$\sum d'A_k = F_{thg} ds \text{ hoặc } \sum d'A_k = m_{thg}\, d\varphi,$$

trong đó F_{thg} được gọi là lực thu gọn về khâu tịnh tiến có di chuyển ds, m_{thg} – ngẫu lực thu gọn về khâu quay có di chuyển quay $d\varphi$.

Cần tiếp tục phân tích khả năng tính công hữu hạn của các lực.

– Nếu bài toán tính công suất thì áp dụng các công thức (2–56), (2–58) và (2–69).

– Nếu bài toán tính gia tốc (gia tốc dài hoặc gia tốc góc) của một bộ phận nào đó của cơ hệ hoặc thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ thì sử dụng định lý biến thiên động năng dạng vi phân (2–69) hoặc dạng đạo hàm (2–70).

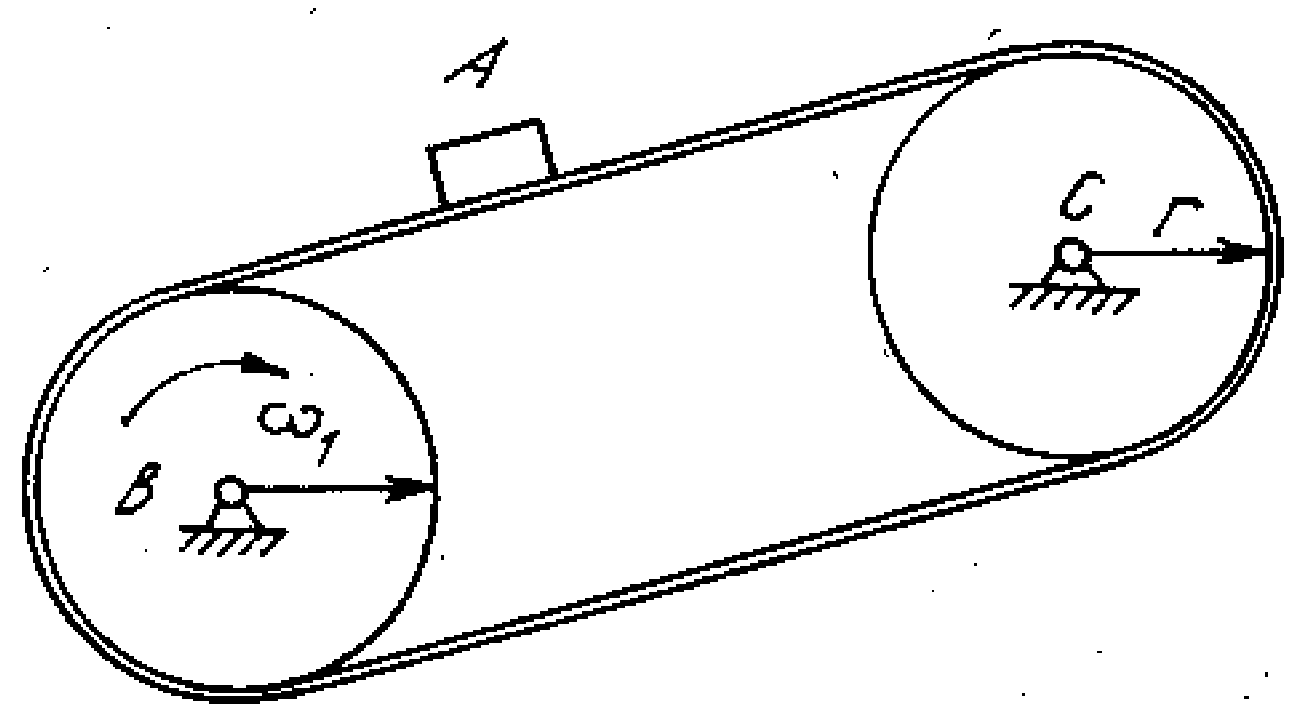
– Đối với bài toán tính vận tốc (vận tốc dài hoặc góc) của một bộ phận của cơ hệ theo di chuyển (dài hoặc góc) của một bộ phận nào đó của cơ hệ thì cần phân biệt :

+ Trong trường hợp tính được công hữu hạn thì sử dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn (2-71).

+ Trong trường hợp không tính được công hữu hạn thì sử dụng định lý biến thiên động năng dạng vi phân (2-69) hoặc dạng đạo hàm (2-70). Lúc đó sẽ tính được gia tốc (dài hoặc góc) là hàm của thời gian. Tiếp tục tích phân để tìm vận tốc (dài hoặc góc), quãng đường (dài hoặc góc) là hàm của thời gian và sau khi khử thông số t chúng ta nhận được lời giải cần tìm.

2.4.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 2-8. Một băng tải vật liệu đang hoạt động. Cho biết vật được tải A có khối lượng m_1, các trục quay B và C là các trục đồng chất có cùng bán kính r và khối lượng m_2. Băng tải là dây không giãn, đồng chất có chiều dài là l và khối lượng m_3 được phân bố đều. Bỏ qua sự trượt giữa vật A và băng, giữa ròng rọc và băng. Tính biểu thức động năng của cơ hệ theo vận tốc góc của trục dẫn gắn với ròng rọc B.



HÌNH 2-17

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm các vật sau : vật A chuyển động tịnh tiến thẳng, hai ròng rọc B và C chuyển động quay quanh các trục cố định và băng tải (H. 2-17).

Động năng cơ hệ được tính như sau :

$$T = T_A + T_B + T_C + T_{băng},$$

trong đó T_A, T_B, T_C, $T_{băng}$ lần lượt là động năng của các vật A, B, C và băng tải. Theo các công thức (2-41), (2-42) ta có

$$T_A = \frac{1}{2}m_1v_A^2 \; ; \; T_B = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 \; ; \; T_C = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2.$$

Băng tải là vật biến dạng, để tính động năng của nó ta chia băng tải thành nhiều phần tử, mỗi phần tử xem như là một chất điểm có khối lượng m_k và có cùng vận tốc v_A (vì dây không giãn và giữa vật A và băng tải không xảy ra hiện tượng trượt) nên :

$$T_{băng} = \frac{1}{2}\sum m_k v_A^2 = \frac{1}{2} v_A^2 \sum m_k = \frac{1}{2} m_k v_A^2.$$

Chú ý rằng cơ hệ có một bậc tự do và quan hệ động học giữa các bộ phận được biểu diễn qua các hệ thức sau :

$$\omega_1 r = \omega_2 r = v_A.$$

Ngoài ra J_1 và J_2 là mômen quán tính của các trục B và C đối với trục quay riêng của chúng được tính theo công thức :

$$J_1 = J_2 = m_2 \frac{r^2}{2}.$$

Vậy biểu thức động năng của cơ hệ có thể viết trong dạng sau :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\, r^2 \omega_1^2.$$

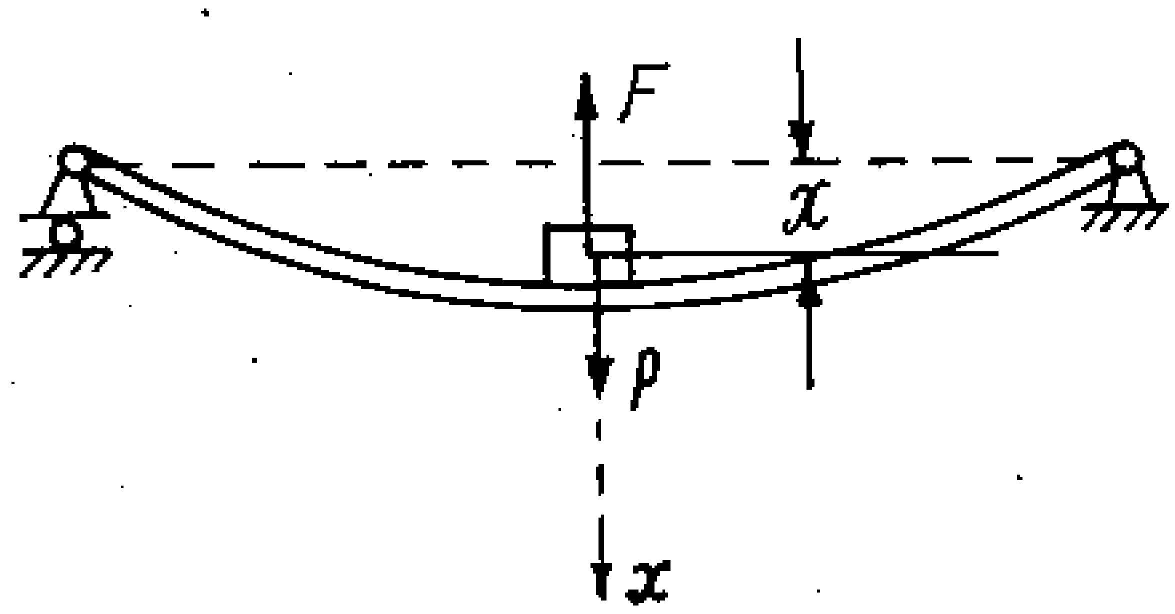
Đại lượng $(m_1 + m_2 + m_3)r^2$ được gọi là mômen quán tính thu về trục dẫn.

Chú ý rằng biểu thức động năng của cơ hệ cũng có thể viết trong dạng :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) v_A^2.$$

khi đó $(m_1 + m_2 + m_3)$ được gọi là khối lượng thu gọn về khâu A.

Thí dụ 2-9. Một vật có trọng lượng P đặt ở giữa dầm đàn hồi. Khi vật ở trạng thái tĩnh dầm võng xuống một đoạn f (được gọi là độ võng tĩnh). Tính thế năng của vật khi nó



HÌNH 2-18

lệch khỏi vị trí cân bằng tĩnh một đoạn bằng x. (H. 2-18) cho biết hệ số cứng của dầm bằng c (lực đàn hồi tỉ lệ với độ võng kể từ trạng thái không biến dạng).

Bài giải. Xem vật chịu tác dụng của hai lực có thế : trọng lực $\vec{P}$ và lực đàn hồi $\vec{F}$.

Lấy vị trí cân bằng tĩnh làm gốc tọa độ và định hướng trục x hướng xuống, (H. 2-19).

$$\Pi_{\text{hệ}} = \Pi_{\text{trọng lực}} + \Pi_{\text{đàn hồi}}$$

(thế năng cơ hệ được xác định sai kém hằng số).

Vì $F = -c(x + f_o)$ nên thế năng của cơ hệ ứng với lực đàn hồi bằng

$$\Pi_{\text{đàn hồi}} = \frac{1}{2}c(x + f_o)^2.$$

Thế năng của cơ hệ trong trọng trường bằng :

$$\Pi_{\text{trọng lực}} = -Px + \text{const}.$$

Vậy thế năng tổng cộng bằng :

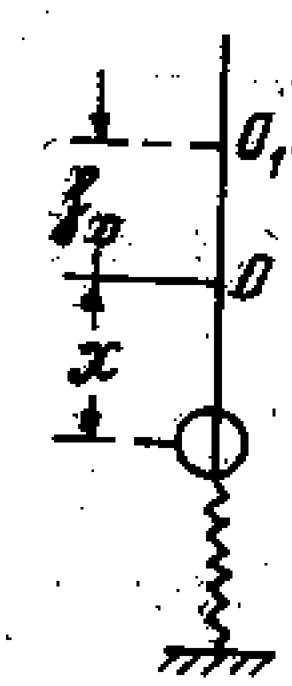
$$\Pi = \frac{1}{2}c(x+f_o)^2 - Px + \text{const} =$$

$$= \frac{1}{2}cx^2 + (cf_o - P)x + \text{const}.$$

Tại vị trí cân bằng tĩnh có sự cân bằng giữa trọng lực và lực đàn hồi ứng với vị trí đó, tức là $P = cf_o$. Do đó có kết quả cuối cùng

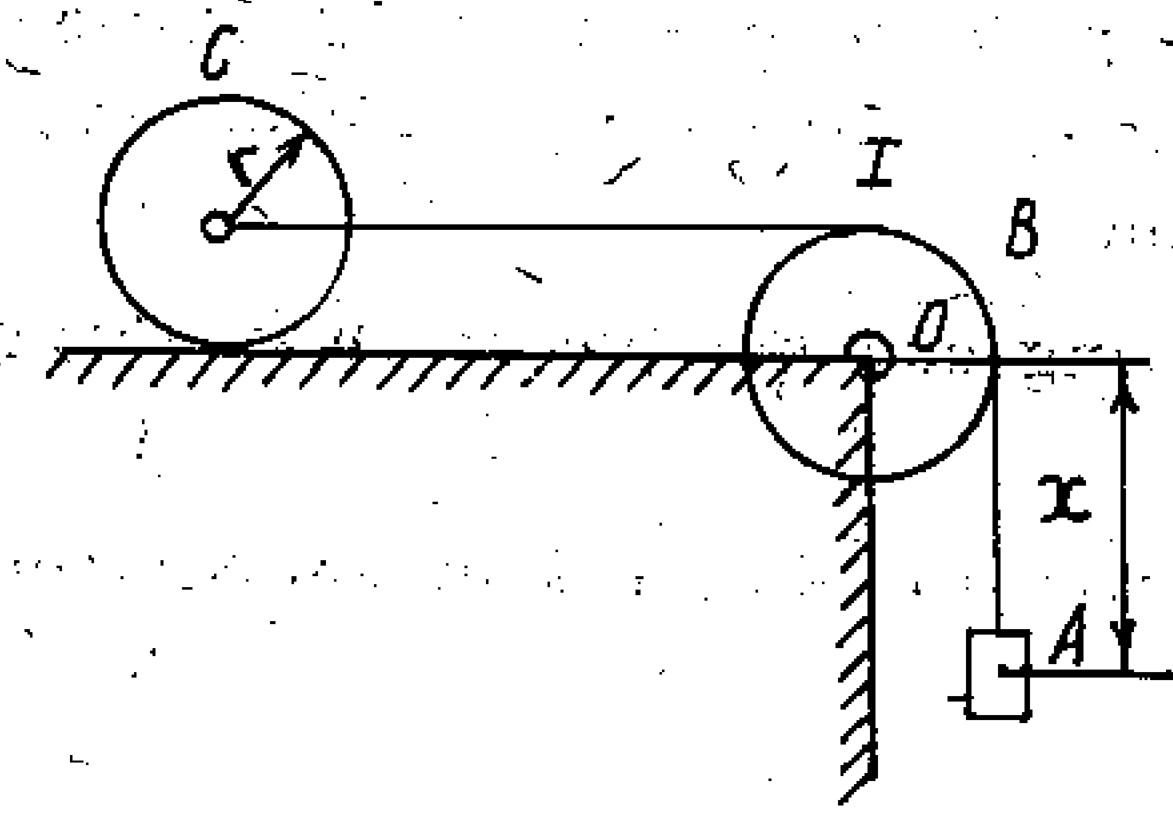
$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2 + \text{const}$$

Chú ý rằng kết quả này vẫn còn đúng cho trường hợp vật gắn trên lò xo có độ cứng c, (H. 2-19).



HÌNH 2-19

Thí dụ 2-10. Một vật có trọng lượng P_1 được treo vào đầu một dây đồng chất không giãn có chiều dài L và có trọng lượng Q. Dây vắt qua



HÌNH 2–20

ròng rọc. B quay quanh trục O vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ. Đầu kia của dây buộc vào trục của con lăn C, lăn không trượt trên mặt ngang cố định. Ròng rọc và con lăn là những đĩa đồng chất có trọng lượng P_2 và bán kính r. Tính thế năng của cơ hệ khi vật A cách mặt ngang một đoạn bằng x, (H. 2–20).

Bài giải. Ở đây lực có thế là các trọng lực. Chọn I làm gốc thế năng và quy ước thế năng của cơ hệ tại đó bằng không.

Ký hiệu thế năng của các vật A, B, C và của dây trong trọng trường lần lượt là Π_1 Π_2 Π_3 Π_4. Ta có

$$\Pi_1 = -P_1(x + r) \; ; \; \Pi_2 = P_2 r; \; \Pi_3 = 0.$$

Để tính thế năng Π_4 của dây ta xem dây là hệ chất điểm và tính thế năng của nó theo công thức (2–63). Muốn thế ta chia dây thành hai đoạn : một đoạn nằm ngang có cao độ trọng tâm bằng không, đoạn buông thõng có trọng lượng bằng $\frac{Q}{L}(x + r)$ và có cao độ trọng tâm bằng $\frac{x + r}{2}$. Vậy cao độ trọng tâm C của dây sẽ là :

$$z_C = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2}{Q} = \frac{Q_1 . 0 + \frac{Q}{L}(x + r)\frac{(x + r)}{2}}{Q} = \frac{1}{2}\frac{(x + r)^2}{L}.$$

Do đó thế năng Π_4 của dây bằng :

$$\Pi_4 = -Qz_C = -\frac{Q}{2L}(x + r)^2$$

Thế năng của cơ hệ bằng

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = -P_1(x + r) - P_2 r - \frac{Q}{2L}(x + r)^2.$$

Thí dụ 2-11. Tìm công suất trung bình có ích của một máy hơi nước, nếu áp suất trung bình của hơi lên pittông trong cả hành trình là $50N/cm^2$; Diện tích bề mặt của pittông là 300 cm^2, độ dài hành trình là l = 40 cm, số hành trình trong một phút là n = 120 và hệ số tác dụng hữu ích là η = 0,9.

Bài giải. Áp lực toàn phần của hơi nước lên pittông là :

$$F = 50 \times 300 = 15.000 \text{ Niutơn.}$$

Do đó công thực hiện trong một phút là :

$$A = 15.000 \times 40 \times 120 = 720.000 \text{ Jun.}$$

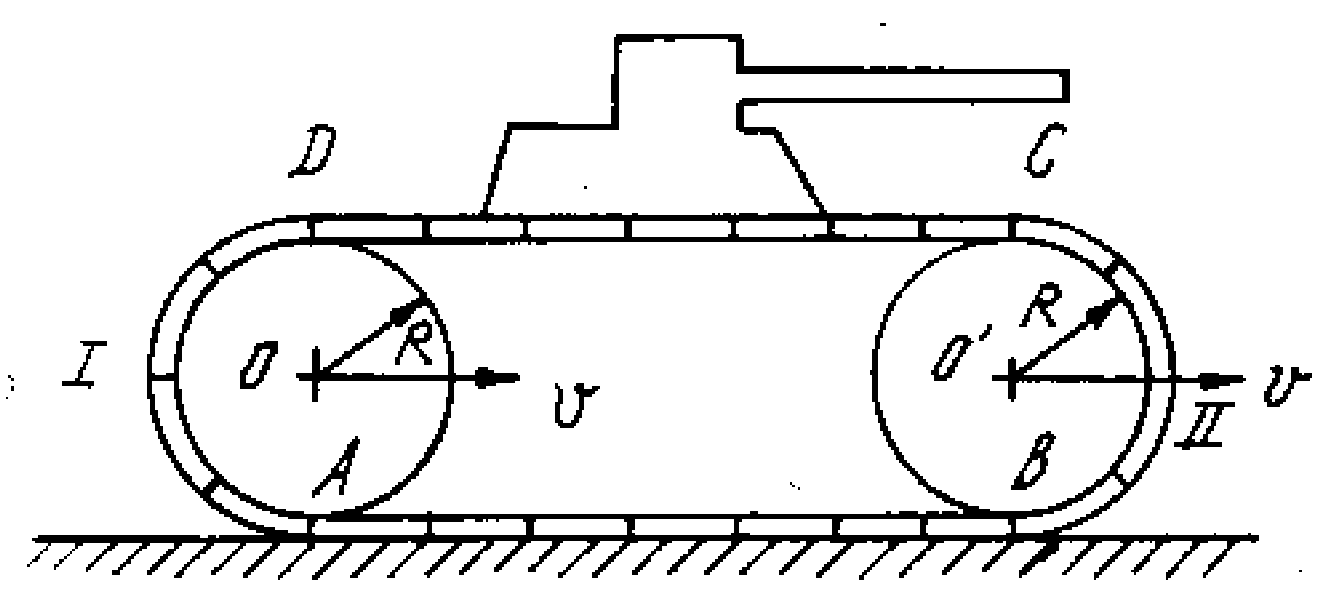
Số công hữu ích là :

$$A_h = 0,9 \times 720.000 \text{ Jun.}$$

Áp dụng công thức tính công suất (2-58)

$$W = \frac{A}{t} = \frac{0,9 \times 720.000}{60} = 10.800 \text{ J/s} = 10,8 \text{ kW.}$$

Thí dụ 2-12. Một chiếc xe tăng được khởi động nhờ một động cơ làm quay 4 bánh xe (mỗi bên hai bánh) kéo theo xích chuyển động. Sau 8 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động xe đạt được vận tốc 36 km/giờ. Hãy xác định công suất trung bình của động cơ, nếu trọng lượng hòm xe là P_1 = 50.000 N, trọng lượng mỗi bánh P_2 = 2000 N, trọng lượng mỗi xích P_3 = 5000 N. Bánh xe coi như đĩa tròn đồng chất, (H. 2-21).



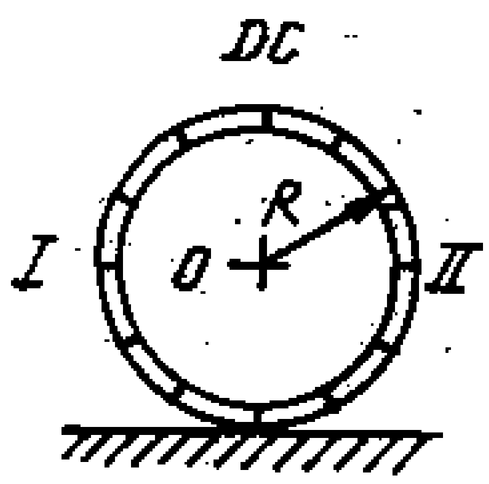
HÌNH 2-21

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm :

- Thân xe chuyển động tịnh tiến ;
- Bánh xe chuyển động song phẳng (4 bánh) ;
- Xích xe chia làm 3 phần :

Đoạn AB không chuyển động có vận tốc bằng không.

Đoạn CD chuyển động tịnh tiến với vận tốc bằng hai lần vận tốc xe tăng. Đoạn ba gồm hai nửa vành tròn kết hợp AID và BIIC chuyển động song phẳng, (H. 2-22).



HÌNH 2-22

Để xác định công suất trung bình của động cơ ta áp dụng công thức (2-58) :

$$W = \frac{\sum A_k}{t}, \qquad \text{(a)}$$

Trong đó $\sum A_k$ là tổng công của các lực thực hiện được khi xe tăng đi được một quãng đường nào đó trong thời gian t.

Mặt khác theo định lý động năng (2-71).

$$T - T_o = \sum A_k, \qquad \text{(b)}$$

mà $T_o = 0$ vì ban đầu xe đứng yên, nên từ (a), (b) rút ra :

$$W = \frac{T}{t} \qquad \text{(c)}$$

Bây giờ ta chỉ cần tính động năng T của xe khi nó chuyển động với vận tốc v = 36 km/giờ. Theo phân tích chuyển động trên ta có:

$$T = T_{\text{hòm xe}} + T_{4\text{ bánh xe}} + T_{2\text{ xích}} \qquad \text{(d)}$$

$$T_{\text{hòm xe}} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v^2 \qquad \text{(e)}$$

$$T_{4\text{ bánh xe}} = 4.J_z\frac{\omega^2}{2} + 4.\frac{P_2}{g}\frac{v^2}{2} =$$

$$= 4\frac{P_2R^2}{2g}\frac{\omega^2}{2} + 4\frac{P_2v^2}{2g} = \frac{3P_2}{g}v^2$$

$$T_{2\text{ xích}} = 2T(DC) + 2T\text{ (vành tròn)},$$

$$T(CD) = m(DC)\,.\,\frac{v_c^2}{2} = \frac{P_3 l}{g(2l + 2\pi R)}\frac{(2v)^2}{2} = \frac{P_3 l v^2}{g(l + \pi R)}$$

$$T(\text{vành tròn}) = \frac{P_3 \,.\, 2\pi R}{2l + 2\pi R}R^2 \cdot \frac{\omega^2}{2g} + \frac{P_3 2\pi R}{2l + 2\pi R}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{P_3 \pi R}{g(l + \pi R)}v^2.$$

Vậy :

$$T_{2\ \text{xích}} = \frac{2P_3 v^2}{g} \tag{g}$$

Khi thay các biểu thức (e), (f), (g) vào (d) ta có :

$$T = \frac{P_1}{g}\frac{v^2}{2} + \frac{3P_2}{g}v^2 + \frac{2P_3}{g}v^2 = \left(\frac{P_1}{2} + 3P_2 + 2P_3\right)\frac{v^2}{g} \tag{h}$$

Thay (h) vào (c) ta được công suất động cơ :

$$W = \left(\frac{P_1}{2} + 3P_2 + 2P_3\right)\frac{v^2}{gt} \tag{i}$$

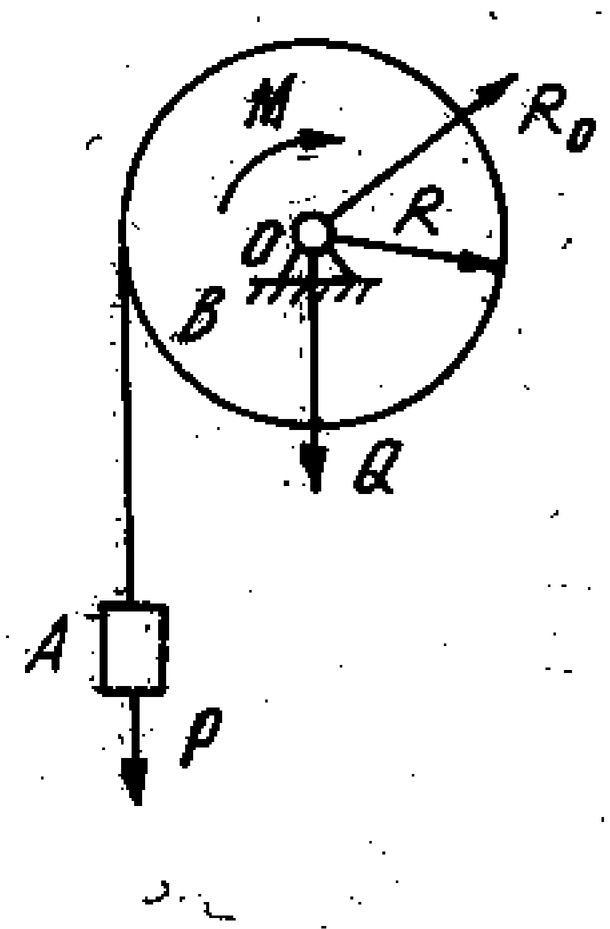
Với các giá trị số cho : $t = 8$ giây, $v = 10$ m/giây ta nhận được kết quả :

$$W = 51{,}250 \text{ kW}.$$

Thí dụ 2–13. Một vật A có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời B là đĩa tròn đồng chất có bán kính R, trọng lượng Q và chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M không đổi, (H. 2–23).

– Tìm vận tốc vật A khi nó được kéo lên một đoạn bằng h ;

– Tìm gia tốc vật A.



HÌNH 2–23

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm vật A chuyển động tịnh tiến ; tời B quay quanh một trục cố định. Cơ hệ có một bậc tự do. Các lực tác dụng lên cơ hệ gồm các trọng lực $\vec{P}$, $\vec{Q}$, ngẫu lực $\overline{M}$, phản lực $\vec{R}_o$ và các nội lực.

Nhận xét : Trong hệ lực tác dụng chỉ có ngẫu lực $\overline{M}$ và trọng lực $\vec{P}$ sinh công ; còn phản lực $\vec{R}_o$ và trọng lực $\vec{Q}$ không sinh công vì các điểm đặt của chúng cố định ; các nội lực cũng không sinh công.

Vì có thể tính công hữu hạn của ngẫu lực $\overline{M}$ và trọng lực $\vec{P}$ nên để tìm vận tốc $\vec{v}_A$ của vật A ta áp dụng định lý biến thiên động năng dạng (2-68)

$$T - T_o = A(\vec{P}) + A(\overline{M}), \qquad \text{(a)}$$

trong đó T_o là động năng cơ hệ tại thời điểm đầu ($T_o = 0$, vì ban đầu cơ hệ đứng yên) còn T là động năng cơ hệ :

$$T = T_A + T_B$$

Vật A chuyển động tịnh tiến nên $T_A = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2$.

Vật B quay quanh trục cố định nên $T_B = \frac{1}{2}J_o\omega^2$, ở đó J_o là momen quán tính của vật B đối với trục cố định thẳng góc với mặt phẳng hình vẽ và qua O :

$$J_o = \frac{1}{2}\frac{P}{g}R^2.$$

Ngoài ra

$$\omega = \frac{v_A}{R}$$

Vậy động năng cơ hệ bằng :

$$T = \frac{(2P + Q)}{2g}\frac{v_A^2}{2}. \qquad \text{(b)}$$

Gọi $\sum A_k$ là tổng công của các lực, ta có :

$$\sum A_k = A(\overline{M}) + A(\vec{P}) = M\varphi - Ph,$$

trong đó φ là góc quay của tời khi vật A được nâng một đoạn h. Dễ dàng nhận được : $h = R\varphi$.

Vậy :

$$\sum A_k = M\varphi - Ph = \left(\frac{M}{R} - P\right)h. \qquad (c)$$

Thay (b) và (c) vào (a) ta nhận được :

$$\left(\frac{2P+Q}{2g}\right)\frac{v_A^2}{2} = \left(\frac{M}{R} - P\right)h.$$

Từ đây rút ra :

$$v_A = \sqrt{4g\,\frac{(M - PR)}{R(2P + Q)}\,h}\,.$$

Để tìm gia tốc $\vec{a}_A$ của vật A ta sử dụng định lý biến thiên động năng dạng (2–70), nó được viết như sau :

$$\frac{(2P + Q)}{2g} v_A \cdot a_A = \left(\frac{M}{R} - P\right) v_A.$$

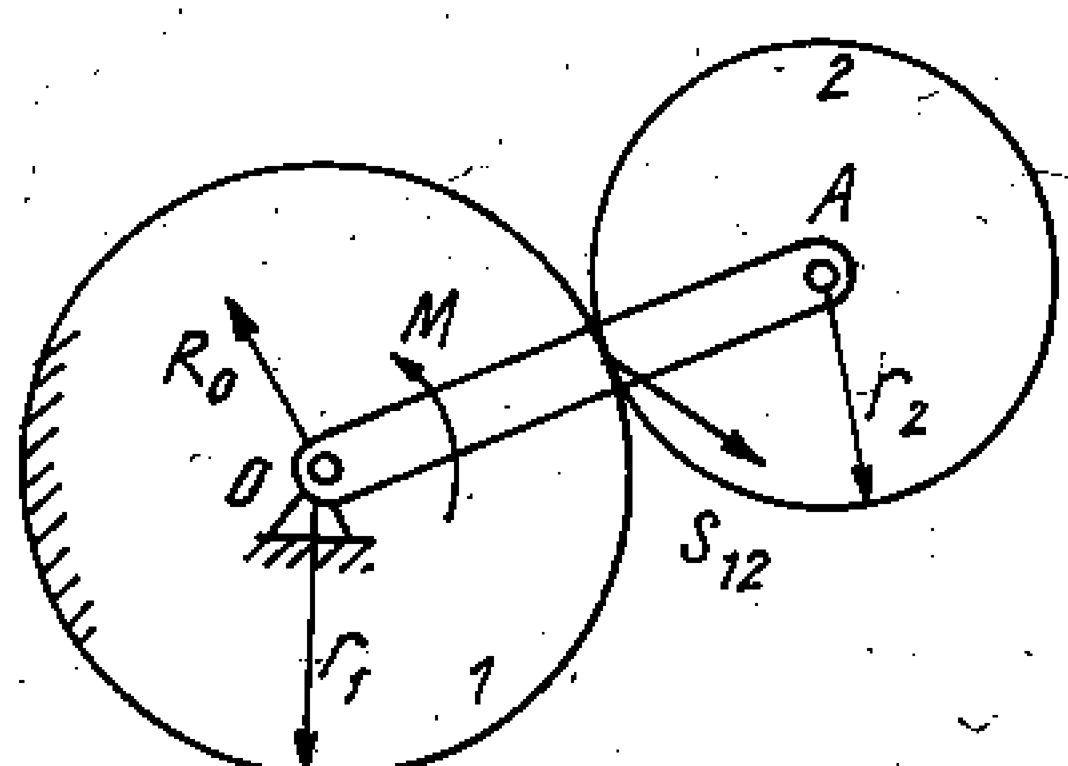
Vì cơ hệ chuyển động nên $v_A \neq 0$, nên sau khi rút gọn cho v_A ở hai vế, ta được :

$$a_A = 2g\,\frac{M - PR}{R(2P + Q)} = \text{const}.$$

Như vậy vật A chuyển động biến đổi đều.

Thí dụ 2–14. Một cơ cấu hành tinh đặt trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động từ trạng thái đứng yên nhờ một ngẫu lực có momen không đổi M đặt vào tay quay OA. Tay quay OA quay quanh trục cố định qua O làm cho bánh 2, là một đĩa tròn đồng chất có bán kính r_2 và trọng lượng P, lăn không trượt đối với bánh 1 có bán kính r_1 và cố định. Xem tay quay OA là thanh đồng chất, có trọng lượng Q. Bỏ qua các lực cản, (H. 2–24).

Xác định gia tốc góc của tay quay .



HÌNH 2–24

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm :

- Tay quay OA quay quanh trục cố định qua O.
- Bánh 2 chuyển động song phẳng. Cơ hệ có một bậc tự do :

Hệ lực tác dụng gồm ngẫu lực có momen M, các trọng lực các khâu, các phản lực tại O, A và tại điểm tiếp xúc giữa bánh 1 và 2 (lực ăn khớp).

Dễ dàng thấy rằng chỉ có ngẫu lực sinh công. Các trọng lực không sinh công vì cơ cấu đặt trong mặt phẳng ngang. Phản lực $\vec{R}_o$ không sinh công vì điểm đặt O cố định, phản lực $\vec{R}_A$ không sinh công vì tại A phản lực xuất hiện đôi một ngược chiều nhau và các điểm đặt của chúng có cùng di chuyển, lực ăn khớp không sinh công vì bánh 2 lăn không trượt theo bánh 1 cố định (điểm đặt của lực ăn khớp có vận tốc bằng không).

Để tìm gia tốc góc của tay quay ta áp dụng định lý động năng dạng (2–70)

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k$$

trong đó $\sum W_k$ là tổng công suất của tất cả các lực tác dụng liên hệ.

Đầu tiên tính biểu thức động năng cơ hệ bằng tổng động năng tay quay và bánh 2 :

$$T = T_{OA} + T_2.$$

Tay quay quay quanh trục cố định với vận tốc góc ω nên :

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_o \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} \frac{(r_1 + r_2)^2}{3} \omega^2$$

Bánh 2 chuyển động song phẳng với vận tốc góc ω_2 và vận tốc khối tâm v_A nên :

$$T_2 = \frac{1}{2} J_A \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_A^2 = \frac{P}{4g} r_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_A^2$$

Biểu thức động năng toàn hệ là

$$T = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\frac{(r_1 + r_2)^2}{3}\omega^2 + \frac{P}{4g}r_2^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_A^2$$

Vì cơ hệ có một bậc tự do nên có thể tính các yếu tố vận tốc theo một yếu tố vận tốc chọn trước. Để tìm gia tốc của tay quay, ta tính các yếu tố vận tốc theo vận tốc góc quay. Nếu xem điểm A nằm trên tay quay OA thì :

$$v_A = \omega (r_1 + r_2).$$

Mặt khác có thể xem điểm A thuộc bánh song phẳng 2, có tâm vận tốc là điểm tiếp xúc :

$$v_A = \omega_2 r_2$$

Từ đó rút ra :

$$\omega_2 = \omega\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)$$

Thay các đại lượng vừa tính được vào biểu thức động năng cơ hệ và sau khi rút gọn, ta được :

$$T = \frac{1}{2}\frac{2Q + 9P}{6g}(r_1 + r_2)^2\omega^2$$

Dễ dàng tính được :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2Q + 9P}{6g}(r_1 + r_2)^2\overline{\omega}\frac{d\overline{\omega}}{dt}.$$

Bây giờ ta chuyển sang tính tổng công suất của tất cả các lực tác dụng lên hệ. Vì chỉ có ngẫu lực M sinh công nên theo (2–57) ta có :

$$\sum W_k = M\overline{\omega}$$

Vậy định lý biến thiên động năng cho ta :

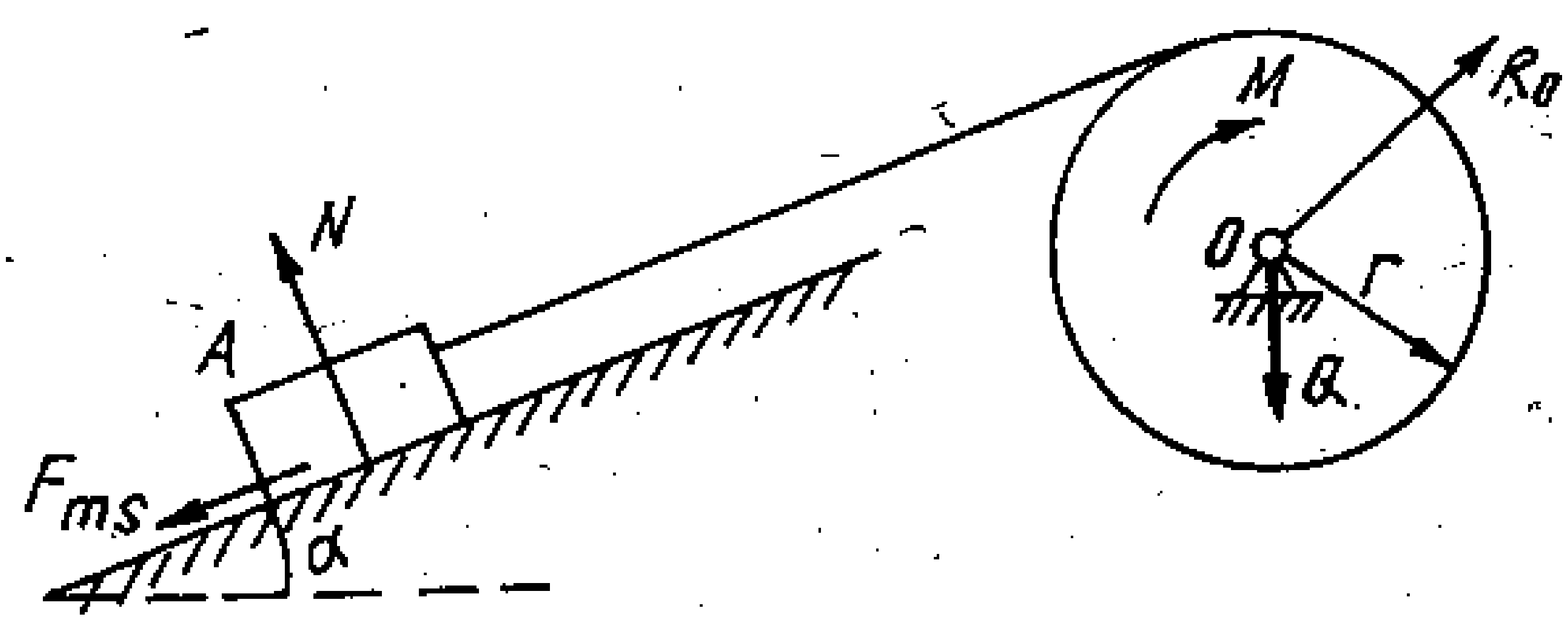
$$\frac{2Q + 9P}{6g}(r_1 + r_2)^2\overline{\omega}\frac{d\overline{\omega}}{dt} = M\overline{\omega}.$$

Vì cơ hệ chuyển động nên $\overline{\omega} \neq 0$. Do đó :

$$\overline{\varepsilon} \equiv \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{6Mg}{(2Q + 9P)(r_1 + r_2)^2} = \text{const}$$

Vậy tay quày OA quay nhanh dần đều.

Thí dụ 2-15. Một vật có trọng lượng P được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng với mặt ngang góc α, nhờ tời có bán kính r, trọng lượng Q quay quanh trục cố định O. Tời chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_o - \beta\,\omega$, trong đó M_o, β là các hằng số, ω – vận tốc góc của tời. Cho biết bán kính quán tính của tời đối với trục quay O là ρ, hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là f. Bỏ qua khối lượng dây cáp và ma sát tại trục quay O. Tìm vận tốc vật A theo quãng đường đi (H.2-25).



HÌNH 2-25

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm : vật A chuyển động tịnh tiến và tời quay quanh trục cố định O. Cơ hệ có một bậc tự do.

Hệ lực tác dụng gồm các trọng lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$, ngẫu lực có mômen $\overline{M}$, phản lực $\vec{R}_o$, phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt giữa vật và mặt phẳng nghiêng. Dễ dàng nhận thấy rằng chỉ có ngẫu lực sinh công dương, trọng lực P và lực ma sát trượt sinh công âm. Các lực khác không sinh công. Vì ngẫu lực là một đại lượng biến đổi, không tính được công hữu hạn của nó nên chúng ta áp dụng định lý biến thiên động năng dạng vi phân :

$$dT = \sum dA_k$$

Đầu tiên chúng ta tính biểu thức động năng T của cơ hệ :

$$T = T_A + T_{tời}.$$

Vật A chuyển động tịnh tiến với vận tốc v nên theo (2–41) có :

$$T_A = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2.$$

Trục tời quay quanh trục cố định qua O với vận tốc góc ω nên theo (2–42)

$$T_{tời} = \frac{1}{2}J_o\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\rho^2\omega^2.$$

Nhận xét rằng do dây không giãn nên vận tốc mọi điểm trên dây bằng nhau và

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Vậy động năng của cơ hệ bằng :

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 + \frac{1}{2}\frac{Q}{g}\rho^2\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{Pr^2 + Q\rho^2}{gr^2}v^2 = \frac{1}{2}m.v^2.$$

trong đó ta đặt

$$m = \frac{Pr^2 + Q\rho^2}{gr^2}$$

được gọi là khối lượng thu gọn về khâu tịnh tiến A.

Bây giờ ta chuyển sang tính tổng công nguyên tố của các lực :

$$\sum d'A(\vec{F}) = d'A(\overline{M}) + d'A(\vec{P}) + d'A(\vec{F}_{ms}).$$

Đầu tiên nhận xét rằng :

$$F_{ms} = fN = fP\cos\alpha.$$

Để tính công nguyên tố của ngẫu lực tác dụng lên vật rắn ta sử dụng công thức $(2-53)_1$

$$d'A(M) = Md\varphi = (M_o - \beta\,\omega)d\varphi.$$

Dựa vào (2–47) dễ dàng tính công nguyên tố của trọng lực $\vec{P}$ và lực ma sát $\vec{F}_{ms}$:

$$d'A(P) = -P\sin\alpha\, ds \ ; \ d'A\,(\vec{F}_{ms})\, ds = -f\, P\cos\alpha\, ds.$$

Vậy :

$$\sum d'(\vec{F}) = (M_o - \beta\omega)\, d\varphi - P\,\sin\alpha\, ds - fP\cos\alpha ds.$$

Từ mối quan hệ động học trên ta tìm được

$$d\varphi = \frac{ds}{r}$$

Vậy biểu thức tổng công nguyên tố của các lực có thể viết trong dạng :

$$\sum d'A(\vec{F}) = \left[\frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{\beta}{r^2}v\right] ds = F_{thg} ds,$$

trong đó $$F_{thg} = \frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{\beta}{r^2}\,v.$$

được gọi là lực thu gọn về khâu tịnh tiến A.

Định lý biến thiên động năng của cơ hệ dạng vi phân cho ta

$$mvdv = F_{thg} \cdot ds = F_{thg}\, vdt$$

Vì hệ chuyển động nên $v \neq 0$ sau khi rút gọn hai vế cho v ta nhận được :

$$m\frac{dv}{dt} = F_{thg} = \frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{\beta}{r^2}\,v \qquad \text{(a)}$$

nó mô tả chuyển động của cơ hệ và được gọi là phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Từ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ ta thấy rằng muốn cho cơ hệ khởi động được từ trạng thái nghỉ phải có điều kiện $F_{thg}\,(0) > 0$ tức :

$$\frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) > 0.$$

Điều kiện đó được thỏa mãn, ta có $a(0) \equiv \frac{dv}{dt}(0) > 0$ và ban đầu cơ hệ chuyển động nhanh dần, vận tốc v tăng lên và lực thu gọn giảm đến giá trị không, lúc đó cơ hệ sẽ dẫn đến trạng thái chuyển động với a = 0 và v = const, được gọi là trạng thái giới hạn (trạng thái bình ổn) và vận tốc ứng với trạng thái đó được gọi là vận tốc giới hạn (vận tốc bình ổn).

Vận tốc giới hạn được tính từ điều kiện $F_{thg} = 0$, tức là :

$$\frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{\beta}{r^2} v_{gh} = 0$$

Từ đó

$$v_{gh} = \frac{[M_o - Pr(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\, r}{\beta} \qquad \text{(b)}$$

Ta cũng suy ra rằng trong suốt quá trình chuyển động nhanh dần từ trạng thái nghỉ ta luôn luôn có $v \leqslant v_{gh}$ tức là

$$F_{thg} = \frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha) - \frac{\beta}{r^2} v \geqslant 0 \qquad \text{(c)}$$

Để tích phân phương trình vi phân chuyển động (a) ta đặt

$$A = \frac{1}{m}\left[\frac{M_o}{r} - P(\sin\alpha + f\cos\alpha)\right] > 0,$$

$$B = -\frac{\beta}{mr^2}\ ;\ A - Bv > 0$$

và phân ly biến, ta nhận được

$$\frac{dv}{A-Bv} = dt \qquad \text{(d)}$$

Khi tích phân phương trình (d) chú ý đến điều kiện đầu v(0) = 0 ta tìm được :

$$\frac{A - Bv}{A} = e^{-\beta t}$$

Từ đó suy ra :

$$v = \frac{A}{B}(1 - e^{-\beta t}) \tag{e}$$

Từ (e) ta có :

$$\lim_{t \to \infty} v = \frac{A}{B} = v_{gh}$$

Vậy vận tốc giới hạn là vận tốc khi $t \to \infty$. Trong thực tế sau một khoảng thời gian không lớn lắm (thời gian mở máy) có thể coi như cơ hệ đạt được trạng thái chuyển động giới hạn. Đó là trạng thái chuyển động bình ổn của cơ hệ.

Bây giờ để tìm quãng đường đi của vật A là hàm của thời gian ta tích phân phương trình (e). Muốn thế viết nó trong dạng :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{A}{B}(1 - e^{-\beta t}).$$

và giả sử điều kiện đầu s(0) = 0, ta có :

$$s = -\frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-\beta t} - 1) \tag{g}$$

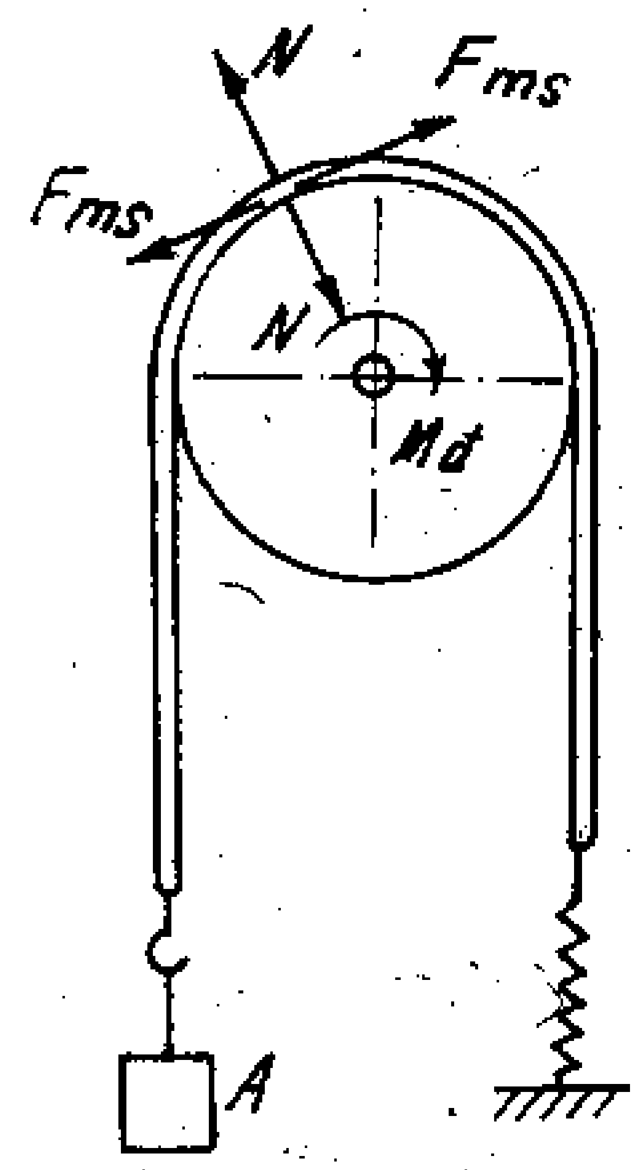
Sau khi khử t trong phương trình (e) và (g) chúng ta nhận được :

$$s = -\frac{A}{B\beta}\ln\left(1 - \frac{B}{A}v\right) - \frac{1}{B}v$$

cho chúng ta biểu thức xác lập mối quan hệ giữa vận tốc và quãng đường đi.

Thí dụ 2-16. Để đo công suất động cơ người ta mắc lên puli của động cơ một đai truyền có đệm ma sát. Nhánh phải của đai được nối với một lực kế lò xo, còn ở đầu nhánh kia ta treo một vật nặng có khối lượng m. Khi động cơ quay đều với n = 120 vòng/phút thì lực kế chỉ 39,2 Niutơn. Cho m = 1 kg, đường kính của puli là d = 63,6 cm. Tính công suất của động cơ. Bỏ qua ma sát ở trục quay của động cơ.

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm rôto động cơ cùng với puli mắc trên nó và đai truyền có đệm ma sát.



HÌNH 2-26

Hệ lực tác dụng gồm ngẫu lực tạo mômen quay động cơ M_d, các phản lực do đai truyền tác dụng lên puli và ngược lại (tại mỗi điểm tiếp xúc có hai lực trực đối nhau), phản lực tại O, trọng lực vật A, và lực liên kết lò xo.

Dễ dàng chỉ ra rằng các lực sinh công chỉ gồm ngẫu lực tạo mômen quay động cơ, hệ các lực ma sát do đai truyền tác dụng lên puli ; còn các trọng lực, phản lực tại O, hệ phản lực do puli tác dụng lên đai truyền không sinh công vì điểm đặt của chúng đứng yên. Như vậy trong trường hợp này hệ nội lực sinh công.

Vì puli và rôto động cơ quay đều, còn các bộ phận khác thuộc cơ hệ đứng yên nên động năng của hệ cơ không đổi. Dựa vào định lý biến thiên động năng dạng đạo hàm (2 – 70):

$$\frac{dT}{dt} = (M_d - M_c) \qquad \text{(a)}$$

trong đó $M_c = \sum m_o(\vec{F}_{ms})$ là tổng mômen đối với điểm O của các lực ma sát do đai truyền tác dụng lên puli.

Từ đó rút ra công suất động cơ W_d

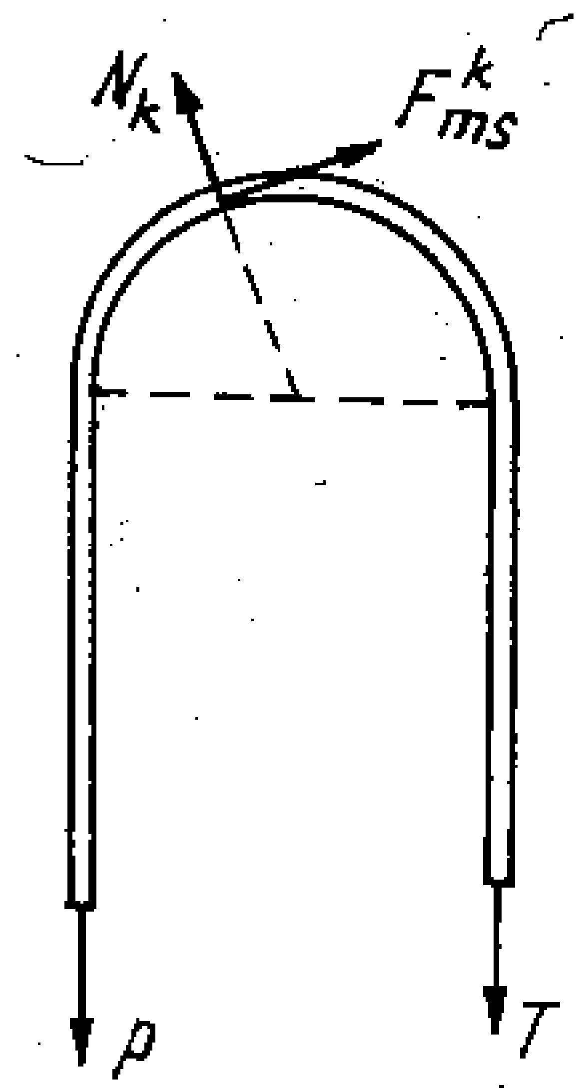
$$W_d = M_d\omega = M_c\,\omega \qquad \text{(b)}$$

Để tính M_c ta xét sự cân bằng của đai truyền xem như một vật rắn cân bằng chịu tác dụng của hệ lực sau (H.2–27)

$$(\vec{T}, \vec{P}, \text{các } \vec{N}_k, \text{các } \vec{F}^k_{ms}) \equiv 0.$$

Từ đó suy ra :

$$\sum \overline{m}_o(\vec{F}^k_{ms}) - TR + PR = 0.$$



HÌNH 2-27

Vậy :

$$M_c = \sum \overline{m}_o(\overrightarrow{F}^k_{ms}) = (T - P)\ R. \quad (c)$$

Khi thay (c) vào (b) ta nhận được :

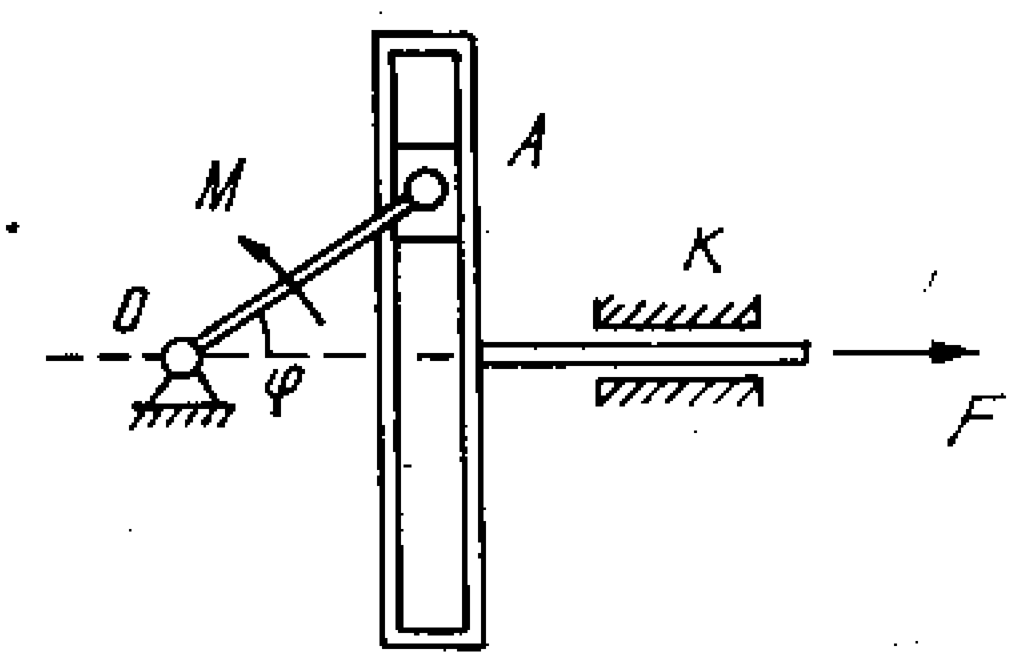
$$W_d = (T - P)\ R\ \omega = (T - P)\ R\ \frac{\pi n}{30}.$$

Thay số liệu vào, ta có :

$$W_d = (39{,}2 - 9{,}81)\ \frac{63{,}6}{2}\ \frac{3{,}14.120}{30}$$

$$= 117W\ (\text{oát}).$$

Thí dụ 2-17. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ cấu culít nếu mômen quán tính của tay quay OA đối với trục qua O bằng J_O, độ dài tay quay bằng a, khối lượng máng trượt bằng m. Bỏ qua khối lượng con trượt A và ma sát. Trọng tâm của tay quay OA do được cân bằng nên nằm tại trục quay O. Tay quay chịu tác dụng ngẫu lực M còn máng trượt chịu tác dụng lực F nằm ngang, (H.2-28).



HÌNH 2-28

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm :

– Tay quay OA quay với vận tốc góc ω quanh trục qua O;

– Máng trượt chuyển động tịnh tiến theo phương ngang với vận tốc v. Cơ hệ có một bậc tự do.

Hệ lực tác dụng gồm ngẫu lực M tác dụng lên tay quay, lực $\overrightarrow{F}$ tác dụng lên máng động, các trọng lực, phản lực tại O. Phản lực tại rãnh K, phản lực giữa con trượt A và máng trượt.

Dễ dàng chỉ ra rằng chỉ có ngẫu lực $\overline{M}$ và lực $\overrightarrow{F}$ sinh công. Để thành lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ ta sử dụng định lý biến thiên động năng dạng đạo hàm :

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k \qquad (a)$$

Đầu tiên ta tính động năng T của cơ hệ :

$$T = T_{OA} + T_{máng},$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} J_o \omega^2 ; \; T_{máng} = \frac{1}{2} mv^2.$$

Vậy :

$$T = \frac{1}{2} J_o \omega^2 + \frac{1}{2} mv^2.$$

Vì hệ có một bậc tự do, nên dễ dàng tính được :

$$v = \frac{d}{dt}(a\cos\varphi) = -a\sin\varphi\dot{\varphi}$$

(có thể tính v dựa vào định lý hợp vận tốc trong hợp chuyển động đối với con trượt A : $v_a = a\omega$; $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$, $v_e = v_a\sin\varphi = a\sin\varphi\dot{\varphi}$).

Biểu thức động năng của hệ cơ bằng :

$$T = \frac{1}{2}(J_o + ma^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}^2 \qquad (b)$$

Bây giờ chuyển sang tính tổng công suất của các lực tác dụng :

$$\sum W_k = W(\vec{M}) + W(\vec{F}) = M\omega - Fv =$$

$$= (M - F a\sin\varphi)\dot{\varphi}. \qquad (c)$$

Khi thay (b), (c) vào (a) ta nhận được :

$$(J_o + ma^2\sin^2\varphi)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + ma^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^3 = (M - Fa\sin\varphi)\dot{\varphi}.$$

Vì hệ chuyển động nên $\dot{\varphi} \neq 0$. Do đó, ta có :

$$(J_o + ma^2\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}ma^2\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + Fa\sin\varphi - M = 0 ;$$

nó mô tả chuyển động của cơ cấu culit và được gọi là phương trình vi phân chuyển động của cơ cấu.

2.5. BÀI TẬP

Định lý biến thiên động lượng và định lý chuyển động khối tâm của cơ hệ

2-1. Một đầu đạn có khối lượng là $m = 0,020$ kg bay ra khỏi nòng súng với vận tốc $v = 650$ m/s. Thời gian đầu đạn chạy trong nòng súng là $t = 0,000955$s. Tiết diện ngang của nòng súng là $\delta = 150 \ mm^2$. Tìm áp suất trung bình của hơi nổ trong nòng súng. Bỏ qua tác dụng của trọng lực và của áp suất khí quyển.

Trả lời : $P \approx 9,12.10^4 \ N/mm^2$.

2-2. Một quả lựu pháo khối lượng 12 kG đang bay với vận tốc 15m/s thì nổ và vỡ làm hai mảnh : vận tốc của mảnh thứ nhất có khối lượng 8 kG bay về hướng chuyển động với vận tốc là 25m/s. Xác định vận tốc của mảnh thứ hai.

Trả lời : 5m/s về hướng ngược chiều chuyển động của mảnh thứ nhất.

2-3. Nòng súng đại bác đặt nằm ngang khối lượng 11.10^3 kG. Khối lượng viên đạn bằng 54 kG. Vận tốc viên đạn lúc ra khỏi miệng súng $v_o = 900$m/s. Xác định vận tốc giật lùi của nòng súng ở thời điểm viên đạn bay ra.

Trả lời : Vận tốc giật lùi của nòng súng bằng 4,42m/s và hướng ngược chiều chuyển động của viên đạn.

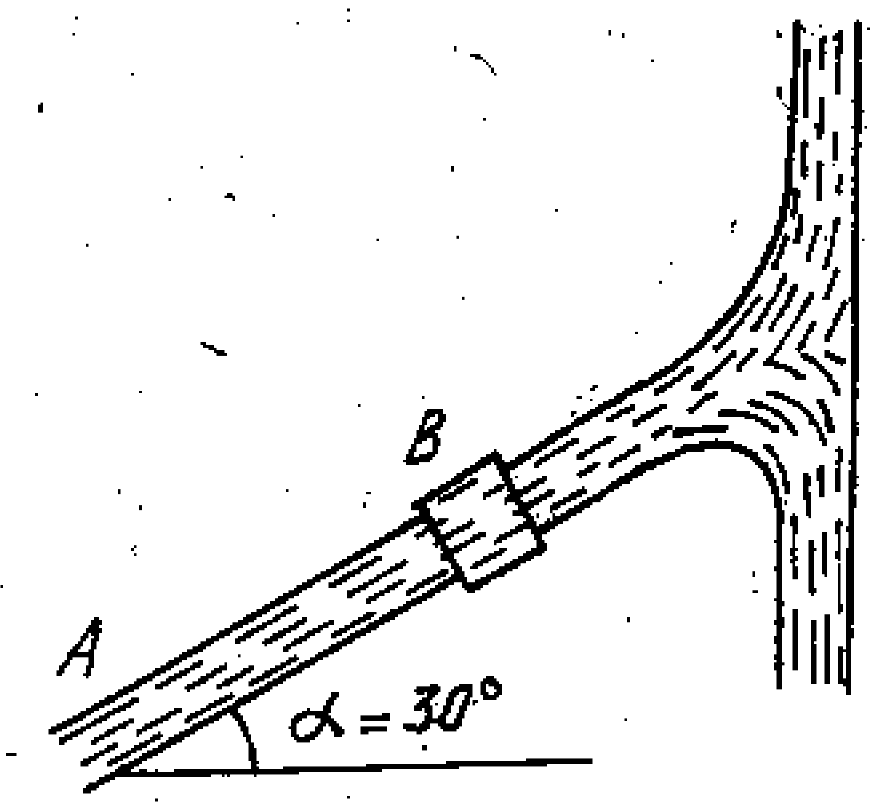
2-4. Một chiếc xe con có khối lượng là 240 kG chuyển động thẳng đều với vận tốc 3,6 km/giờ. Một người khối lượng 50 kg nhảy lên bậc xuống theo phương vuông góc với hướng chuyển động của xe. Xác định vận tốc của xe và người sau lúc đó.

Trả lời : $v = 2,98$ m/s.

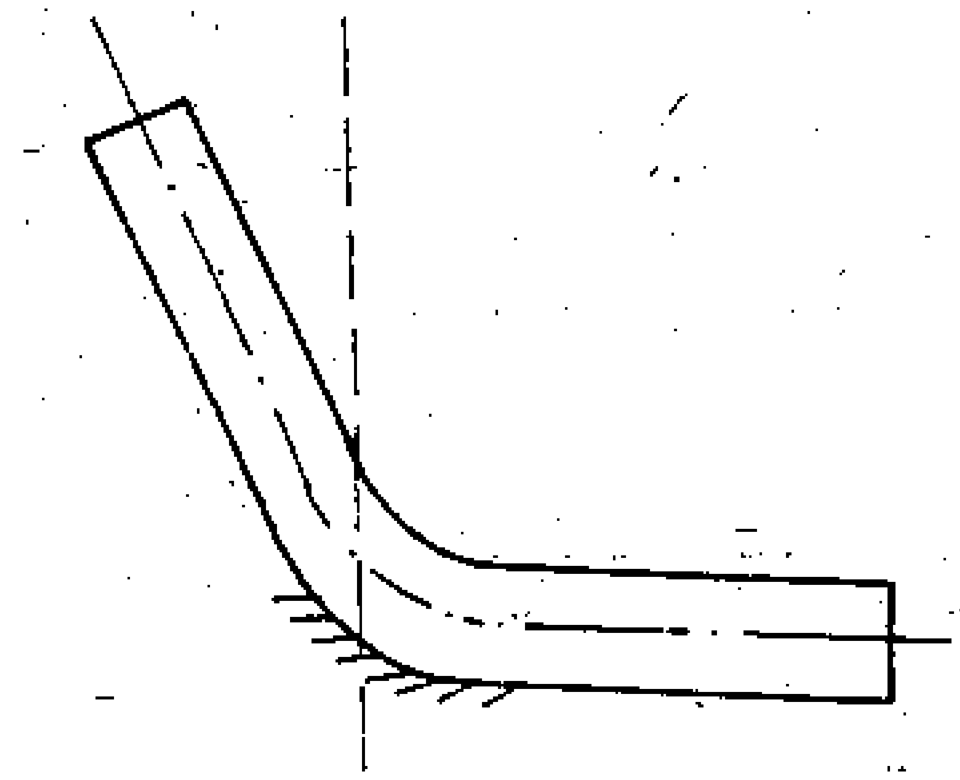
2-5. Một dòng nước được phóng ra với vận tốc bằng $v = 8$ m/s và nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^o$, từ một vòi có tiết diện bằng $S = 16 \ cm^2$ như hình vẽ.

Xác định áp lực tổng cộng của chất lỏng lên mặt tường thẳng đứng. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực và coi rằng sau khi gặp mặt tường các hạt lỏng chuyển động theo mặt tường, (H. 2-29).

Trả lời : $N = 88,8$ N.



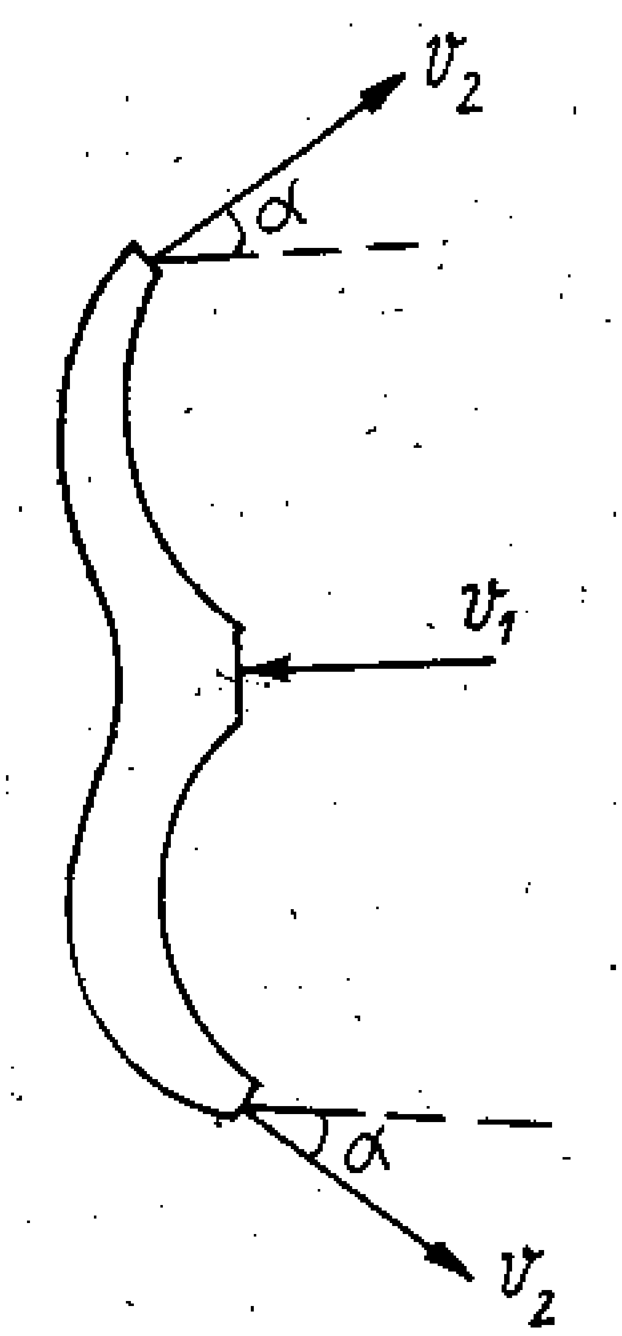
HÌNH 2-29



HÌNH 2-30

2-6. Xác định áp lực tổng hợp động lực lên gối đỡ của dòng chất lỏng chảy trong một đoạn ống cống đặt trong mặt phẳng ngang như hình vẽ. Tiết diện đường ống có đường kính d = 20 cm. Hai nhánh của đường ống tạo với nhau một góc $\alpha = 120^{o}$. Vận tốc chất lỏng chảy trong ống là v = 127 m/s. Bỏ qua tác dụng của trọng lực (H. 2-30).

Trả lời : N = 502 N.

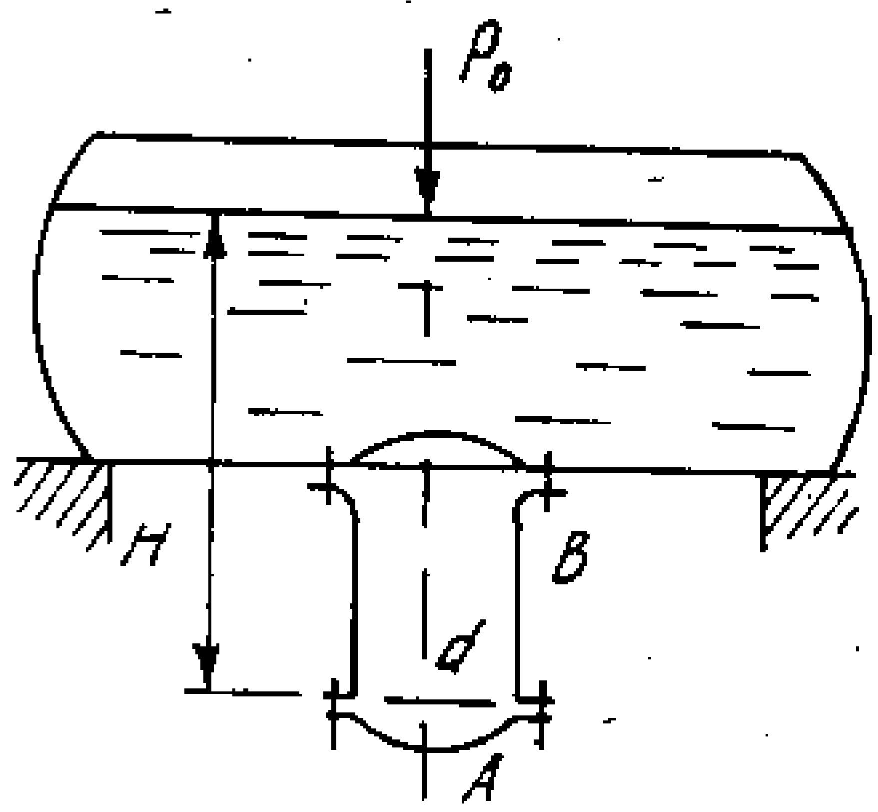


HÌNH 2-31

2-7. Xác định thành phần áp lực của nước song song với trục đối xứng của cánh cố định của rôto tuabin. Cho biết lưu lượng thể tích của nước là Q và khối lượng riêng của nó là γ. Vận tốc của nước lúc va vào cánh tuabin là v_1 hướng song song với trục đối xứng, vận tốc lúc ra khỏi cánh là v_2 hợp với mặt phẳng đối xứng góc α xem hình vẽ (H. 2-31).

Trả lời : $N = \gamma Q(v_1 + v_2\cos\alpha)$

2-8. Một nồi súp-de đầu máy trọng lượng 103,5kN đổ đầy nước trọng lượng 150kN với áp suất lên mặt trên tự do là P_o = 10 at, theo áp kế. Tại một thời điểm nào đó xẩy ra đứt gãy các vít giữ nắp A với ống nối B, (H.2-32) do đó nước nóng ở trong nồi súp-de chảy ra ngoài. Cho H = 1m, d = 0,4m, trọng lượng riêng của nước nóng là γ = 0,9. Bỏ qua lực cản



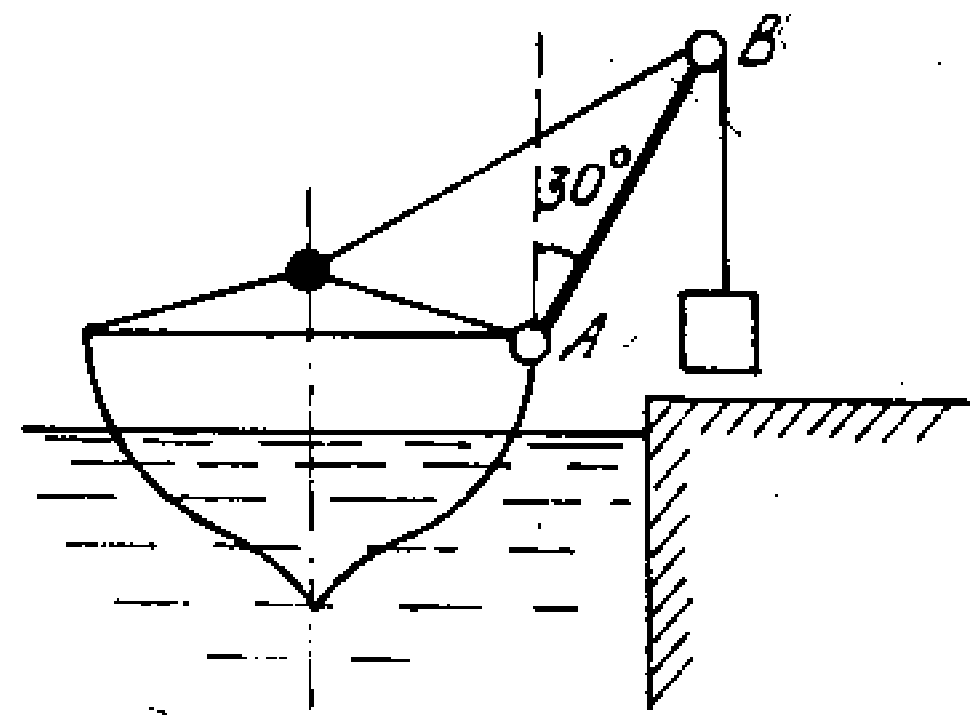
HÌNH 2-32

thủy lực, vận tốc của các hạt nước trong nồi và hiện tượng bốc hơi của nước khi ra khỏi ống B. Hãy tính áp lực của nồi súp-de lên giá đỡ khi nắp A bị bung. Vận tốc của nước chảy ra ngoài sau khi bật nắp được tính theo công thức :

$$v = \sqrt{2g\left(H + \frac{P_o}{\gamma}\right)}$$

Trả lời : Áp lực lên giá đỡ bằng không.

2-9. Xác định di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu khi cần AB mang vật nặng có khối lượng bằng 2 tấn cất thẳng đứng lên từ vị trí ban đầu nghiêng góc 30° như hình vẽ : Khối lượng của tàu và cần cẩu bằng 20 tấn, chiều dài AB bằng 8 m. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB, (H. 2-33).



HÌNH 2-33

Trả lời : Tàu di chuyển ngang ngược chiều với di chuyển ngang của vật nặng một đoạn bằng 0,36m.

2-10. Đoàn tàu hỏa đang chuyển động trên một quãng đường thẳng ngang với vận tốc 54 km/giờ. Tàu hãm máy làm xuất hiện lực cản bằng $\frac{1}{10}$ trọng lượng tổng cộng của đoàn tàu. Tìm thời gian T và quãng đường s đoàn tàu còn chạy thêm được cho đến khi nó dừng hẳn (lấy $g = 9{,}81\ m/s^2$).

Trả lời : T = 8 giây ; s = 121 m.

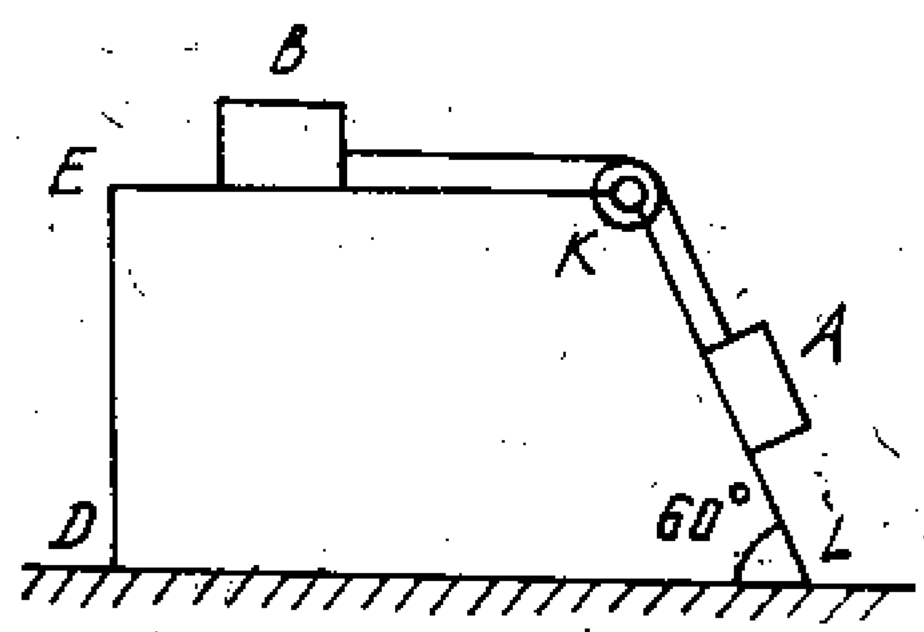
2-11. Một tàu thủy có khối lượng 200 tấn, tốc độ chuyển động trung bình 10m/s theo đường thẳng ngang trên mặt nước yên tĩnh. Pittông của máy hơi nước chuyển động theo đường thẳng song song với trục dọc của tàu, có khối lượng bằng 100 kg, có độ dài hành trình bằng 1m và thực hiện 240 hành trình trong một phút. Xem chuyển động của pittông như là dao động điều hòa. Xác định biểu thức vận tốc của con tàu nếu sức đẩy của chân vịt luôn luôn cân bằng với lực cản của nước.

Trả lời : v = (10 − 0,00314 cos 4 Πt) m/s.

2-12. Một toa tàu dao động điều hòa thẳng đứng trên các lò xo với biên độ 2,5 cm và với chu kỳ T = 0,5 giây. Khối lượng của hòm xe và tải trọng là 10 tấn, của các bánh xe là tấn. Xác định áp lực tổng hợp của các bánh xe lên các đường ray.

Trả lời : Áp lực thay đổi từ 68,67 KN đến 15 KN.

2-13. Hai vật nặng A và B có khối lượng là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây mềm, nhẹ và không giãn và được đặt trên các mặt KL và KE của lăng trụ DEKL. Lăng trụ có khối lượng m_3 được đặt trên nền ngang nhẵn và cứng. Tìm di chuyển của lăng trụ khi vật nặng A trượt xuống theo mặt nghiêng KL một đoạn dài S. (H.2-34).



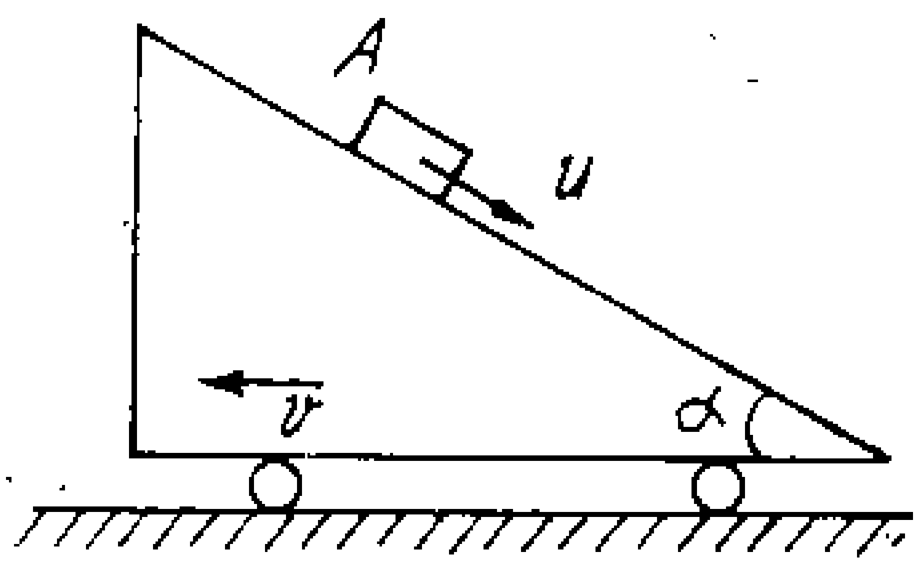
HÌNH 2-34

Ban đầu hệ đứng yên.

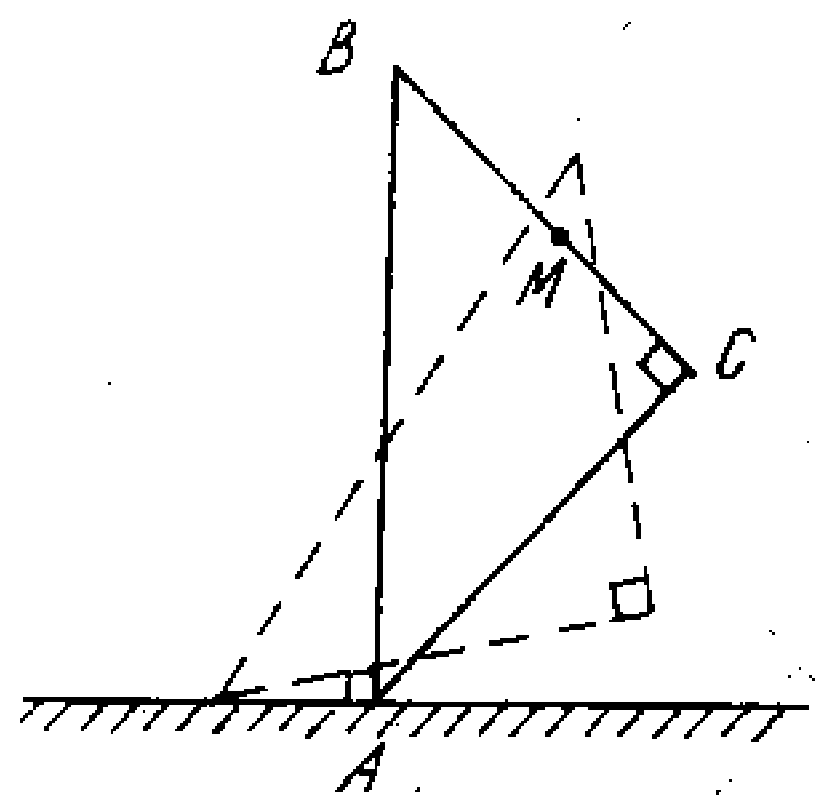
Trả lời : $$\Delta = \frac{(m_1\cos 60^0 + m_2)}{M_1 + m_2 + m_3} s$$

2-14. Cho cơ hệ gồm vật nặng A có trọng lượng P_1 đặt trên mặt nghiêng của một lăng trụ có trọng lượng P_2. Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt ngang là α. Lăng trụ được đặt trên một mặt ngang nhẵn như trên hình vẽ. Ban đầu vật nặng nằm yên tương đối trên mặt lăng trụ, còn chính lăng trụ thì trượt ngang sang phải với vận tốc v_0. Sau đó cho vật A trượt xuống theo mặt nghiêng của lăng trụ với vận tốc tương đối $u = at$. Tìm vận tốc của lăng trụ (H.2-35).

Trả lời : $v = v_0 - \frac{P_1}{P_1 + P_2} u\cos\alpha$.



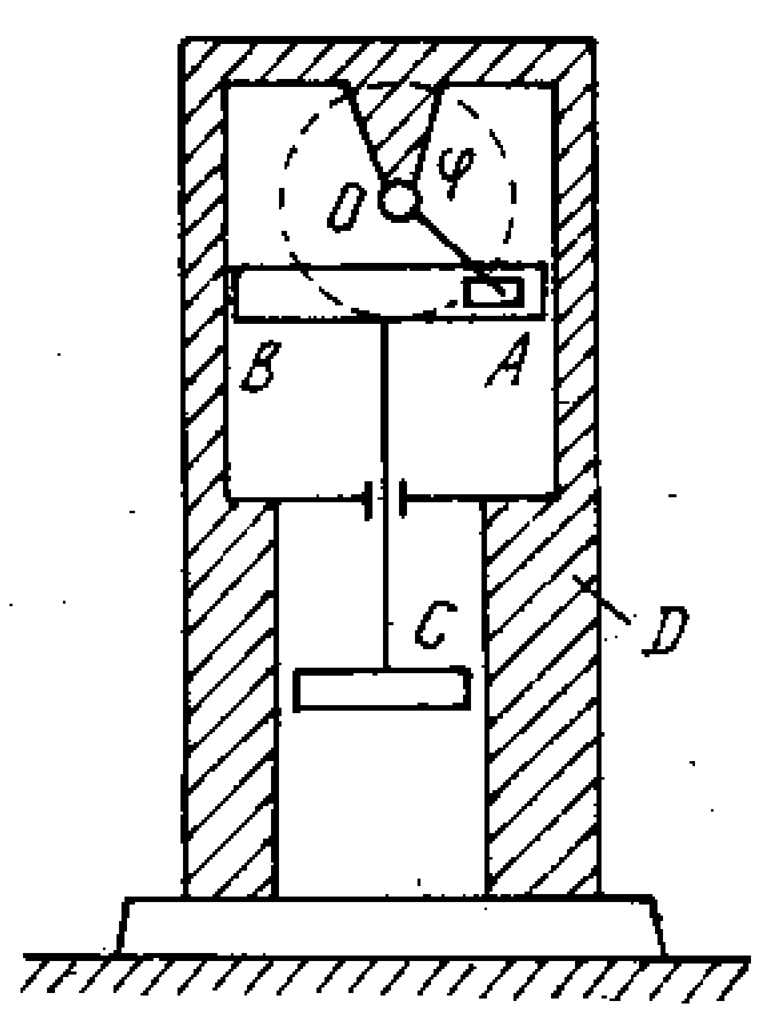
HÌNH 2-35



HÌNH 2-36

2-15. Một tấm đồng chất ABC có hình dạng là một tam giác vuông cân, cạnh huyền AB dài 12cm được đặt thẳng đứng tựa đỉnh A trên mặt phẳng ngang nhẵn không ma sát. Người ta thả cho tấm phẳng đổ xuống dưới tác dụng của trọng lực. Hãy xác định quỹ đạo của điểm M nằm chính giữa cạnh bên BC.

Chú ý : Trong suốt thời gian chuyển động đỉnh A luôn luôn nằm trên mặt ngang, (H.2-36).



HÌNH 2-37

Trả lời : Cung của elip :

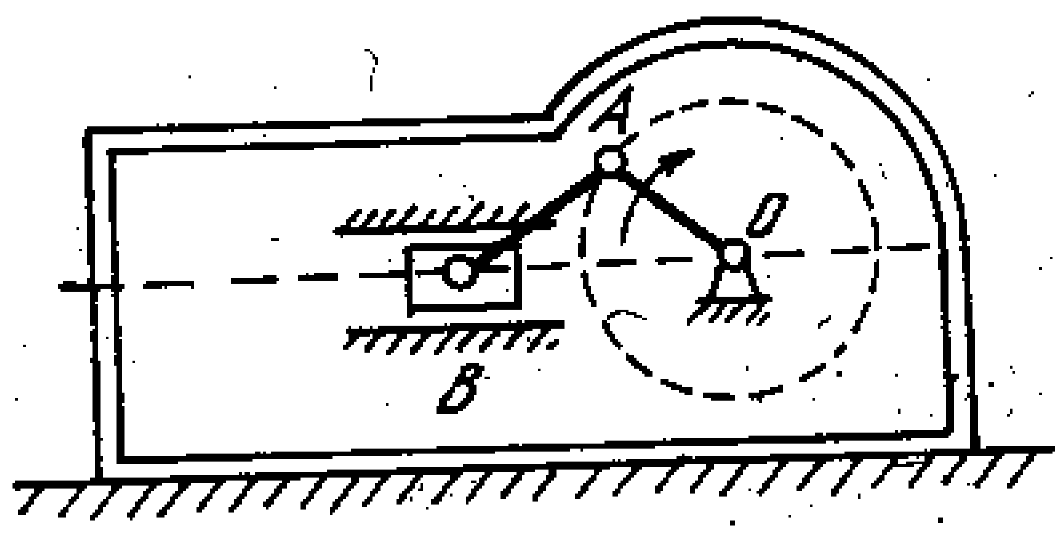
$$9(x - 2)^2 + y^2 = 90.$$

2-16. Xác định áp lực lên nền đất của một máy bơm nước lúc chạy không. Trọng lượng của phần cố định gồm vỏ D và móng E bằng P_1, tay quay OA dài là a và có trọng lượng bằng P_2. Trọng lượng của máng trượt B cùng với pittông C là P_3. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω. Xem như các vật khảo sát đều là những vật đồng chất và có cấu tạo đối xứng. (Xem hình 2–37).

Trả lời : $N = P_1 + P_2 + P_3 + \dfrac{a\omega^3}{2g}(P_2 + 2P_3)\cos\omega t$

2–17. Một động cơ hơi nước đặt nằm ngang trên mặt móng nhẵn trơn. Tay quay OA có chiều dài là r và quay đều với tốc độ góc là ω. Thanh truyền dài bằng tay quay : OA = OB. Coi khối lượng của các bộ phận chuyển động được thu gọn về thành hai khối lượng m_1 và m_2 tập trung ở đầu tay quay và ở trọng tâm của pittông. Khối lượng của vỏ động cơ là m_3. Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ. Cho biết ban đầu pittông ở vị trí xa nhất về bên trái.

Nếu động cơ được bắt vít chặt xuống nền, tìm áp lực của động cơ lên nền và cắt ngang bulông. Bỏ qua lực căng ban đầu của bulông (H.2–38).

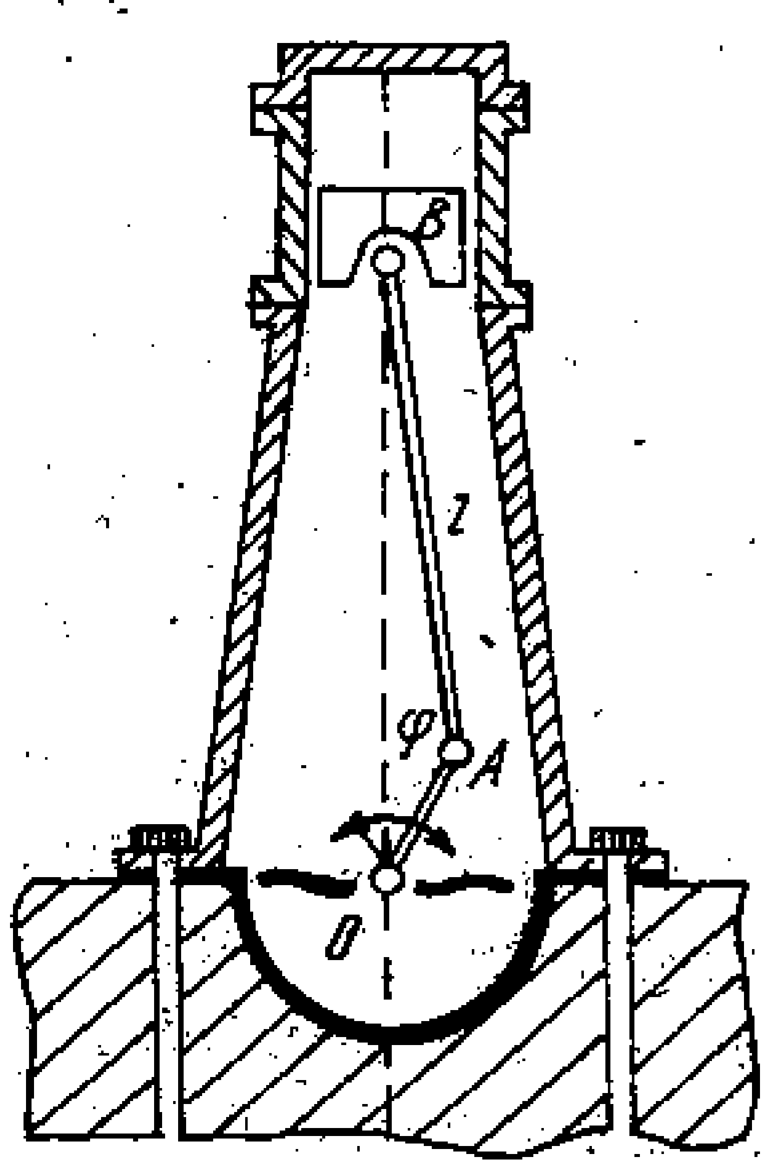


HÌNH 2–38

Trả lời : $x = \dfrac{(m_1 + 2m_2)r}{m_1 + m_2 + m_3}(\cos\omega t - 1)$;

$N = (m_1+m_2+m_3)g - m_1 r\omega^2 \sin\omega t$;

$T = (m_1 + 2m_2)r\omega^2\cos\omega t$.



HÌNH 2–39

2–18. Một động cơ nổ đặt thẳng đứng trên móng nằm ngang. Khối lượng xi lanh khung và các ổ đỡ là 10 tấn, khối lượng của các pittông là 981 kg và trọng tâm của nó trùng với điểm B. Hành trình của pittông là 60 cm, số vòng quay khi chuyển động ổn định là 300 vòng phút. Tỷ số $\dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{6}$. Bỏ quá khối lượng tay quay và thanh truyền.

Nếu động cơ được vít chặt với móng máy bằng bulông, tìm độ tăng lớn nhất của lực căng mà bulông phải chịu (H.2–39).

Trả lời : $\Delta T = 230$ KN.

Định lý biến thiên mômen động lượng

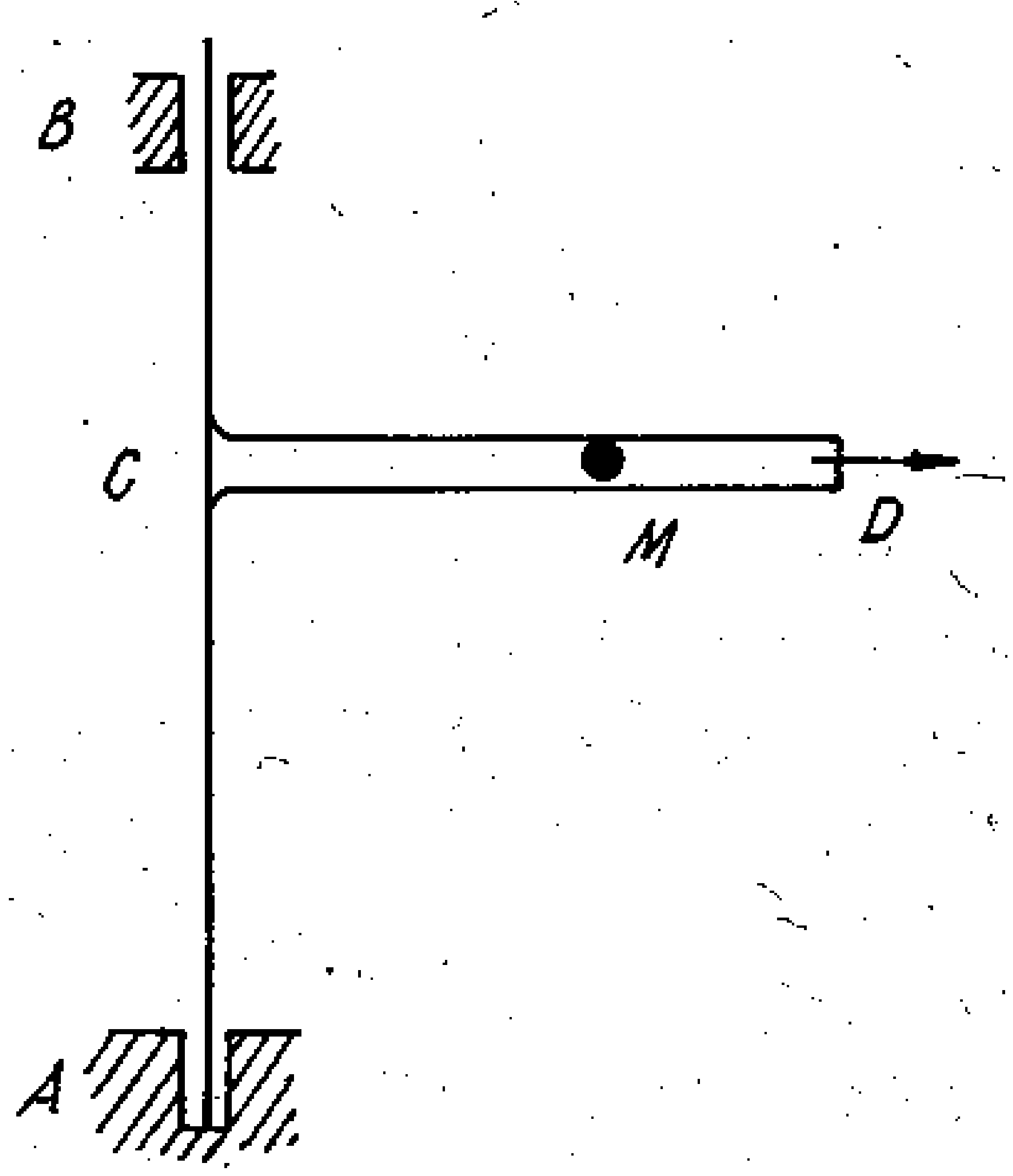
2–19. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và bán kính r, quay quanh trục cố định AB với vận tốc góc ω_0. Vào một thời điểm nào đó một chất điểm M có khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài vành theo một đường bán kính với vận tốc không đổi u. Xác định vận tốc góc ω của đĩa, hàm theo thời gian, kể từ lúc chất điểm M chuyển động. Bỏ qua lực ma sát ở ổ trục quay.

Trả lời : $$\omega = \frac{m_1 r^2 \omega_0}{m_1 r^2 + 2m_2 u^2 t^2}$$

2–20. Một đĩa tròn đồng chất bán kính r, khối lượng m_1 nằm ngang và quay được quanh một trục thẳng đứng đi qua tâm đĩa. Một chất điểm m trên vành đĩa khối lượng m_2 chuyển động theo vành với quy luật $\widehat{M_0M} = \frac{at^2}{2}$. Xác định vận tốc góc, gia tốc của đĩa. Bỏ qua ma sát và biết ban đầu hệ đứng yên.

Trả lời : $$\overline{\omega} = \frac{2am_2t}{r(2m_2 + m_1)};$$

$$\varepsilon = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{2am_2}{r(2m_2 + m_1)}.$$



HÌNH 2–40

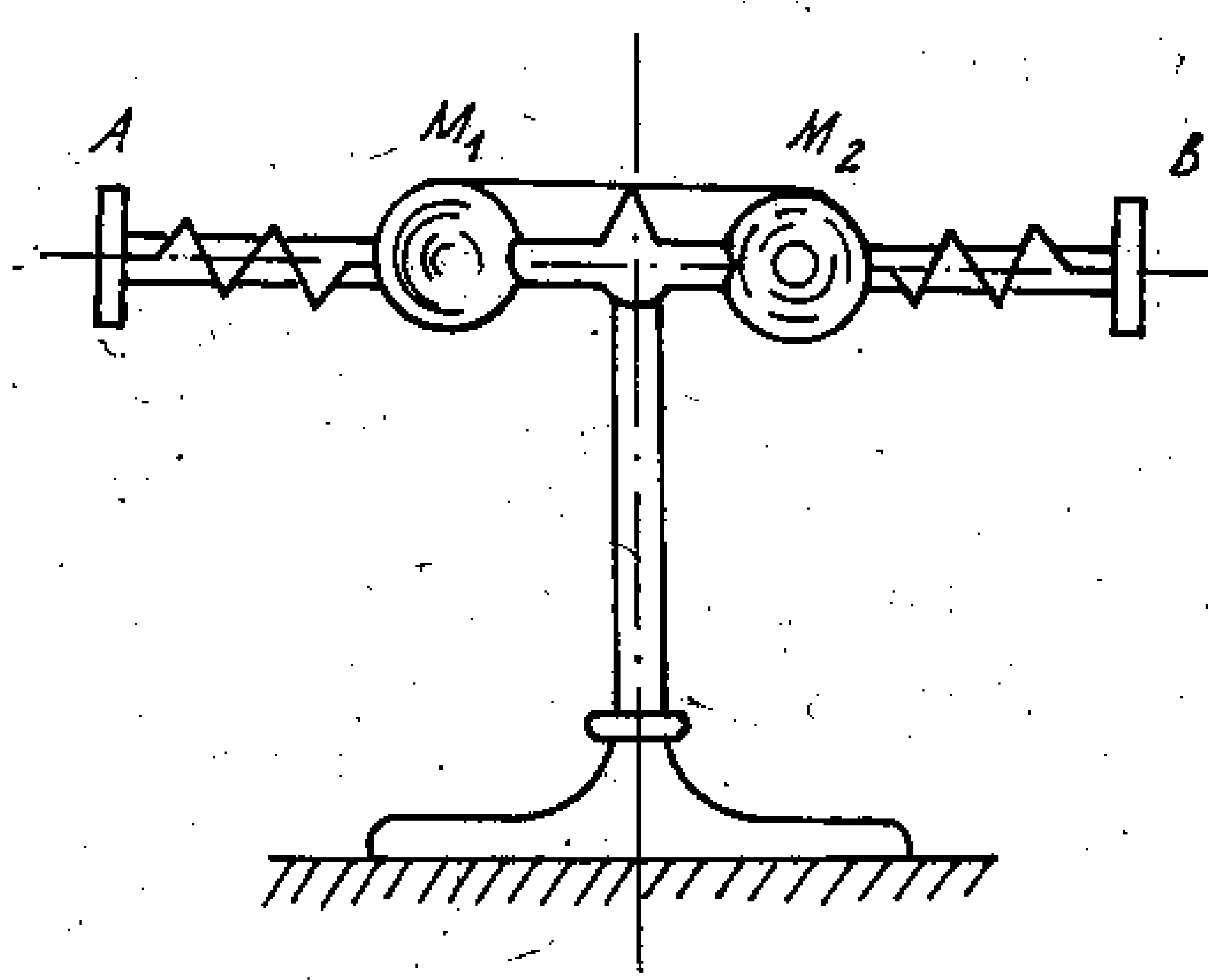
2–21. Một ống nằm ngang CD có thể quay tự do quanh trục thẳng đứng A. Bên trong ống có quả cầu (xem như chất điểm), có khối lượng m và nằm cách trục quay một khoảng

MC = a. Tại một thời điểm nào đó ống được truyền vận tốc góc ω_0. Xác định vận tốc góc ω của ống tại thời điểm khi quả cầu vừa rời khỏi ống CD. Cho biết mômen quán tính của ống đối với trục quay bằng J, chiều dài CD của ống bằng L. Bỏ qua ma sát, (H.2-40).

Trả lời : $\omega = \dfrac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$

2-22. Thanh đồng chất AB dài 2l = 180 cm, có khối lượng m_1 = 2 kg, đặt trên một mũi nhọn ở vị trí cân bằng ổn định nằm ngang. hai quả cầu M_1, M_2 có cùng khối lượng m_2 = 5 kg. Có thể di chuyển dọc thanh và chúng được gắn vào hai đầu thanh bằng hai lò xo giống hệt nhau. Thanh quay quanh trục thẳng đứng với n_1 = 64 vòng/phút lúc đó các quả cầu nằm đối xứng đối với trục quay và tâm của chúng được giữ cách nhau khoảng $2l_1$ = 72 cm nhờ một sợi dây. Sau đó dây bị đứt và các quả cầu sau khi dao động một số lần nào đó, dưới tác dụng của lò xo và ma sát chúng dừng lại ở vị trí cân bằng mới cũng đối xứng qua trục quay và cách nhau một khoảng $2l_2$ = 108cm. Coi các quả cầu là những chất điểm và bỏ qua khối lượng của các lò xo. Xác định vận tốc góc của thanh ở trạng thái ổn định mới đó (H.2-41).

Trả lời : $n_2 = \dfrac{6M_2l_1^2 + M_1L^2}{6M_2l_2^2 + M_1L^2}$; n_1 = 34 vòng/phút

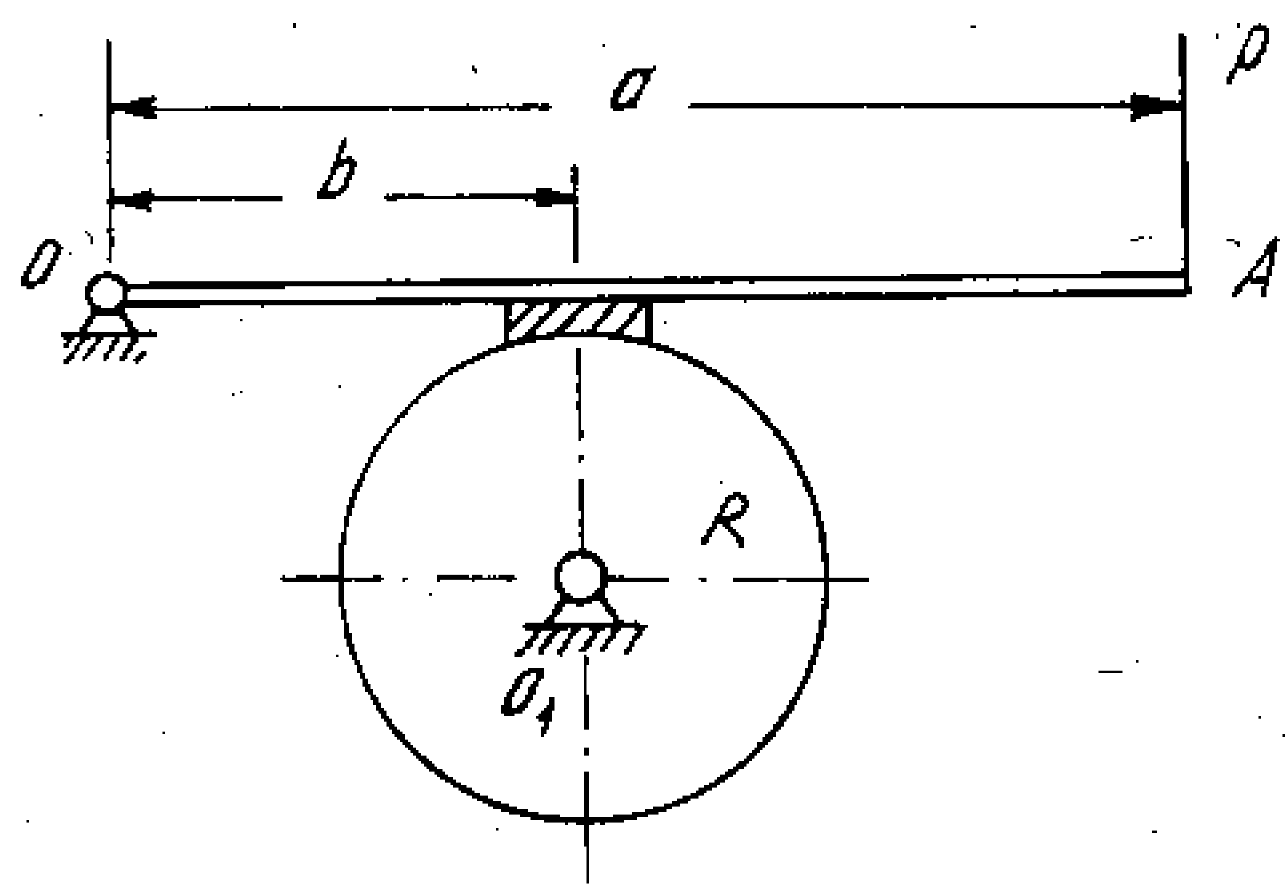


HÌNH 2-41

2-23. Một mô tơ điện chịu tác dụng của một ngẫu lực tổng hợp (phát động và cản) có mômen quay là $M = a - b\omega$, trong đó a, b là các hằng số dương còn ω là vận tốc góc mô tơ. Mômen quán tính của rôto đối với trục quay hình học là J. Tìm biểu thức vận tốc góc ω trong quá trình mở máy từ trạng thái đứng yên.

Trả lời : $\omega = \frac{a}{b}(1 - e^{-\frac{b}{J}t})$

2-24. Người ta dùng hãm tay để hãm một bánh xe đang quay với vận tốc góc ω_0 như hình vẽ. Tìm lực P cần thiết phải tác dụng ở đầu tay hãm để bánh xe dừng hẳn sau thời gian T cho trước. Tìm xem trong thời gian đó bánh xe còn quay được thêm bao nhiêu vòng nữa. (H.2-42).



HÌNH 2-42

Trả lời : $P = \frac{J\omega_0 b}{afRT}$; $N = \frac{\omega_0 T}{4\pi}$.

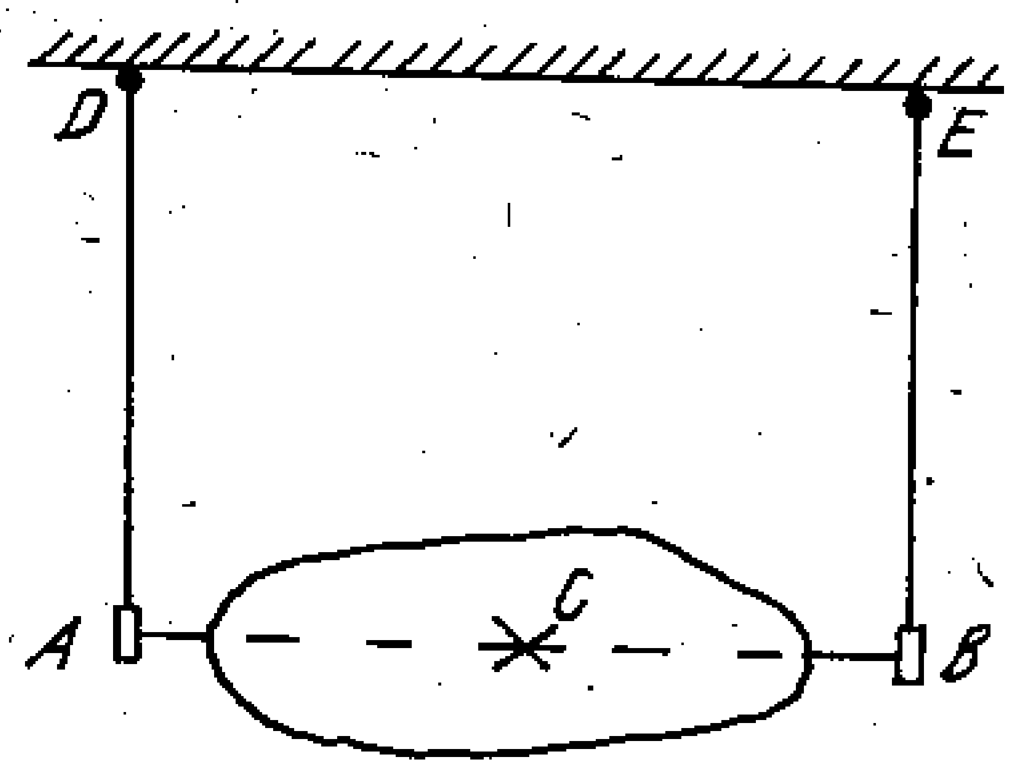
2-25. Một vật rắn quay quanh một trục cố định khởi động từ trạng thái đứng yên, chịu tác dụng của mômen quay không đổi M và của mômen cản $M_1 = \alpha\omega^2$, trong đó α là hằng số và ω là vận tốc góc của vật. Mômen quán tính của vật đối với trục quay là J. Tìm luật biến thiên của vận tốc góc theo thời gian và tìm giá trị vận tốc góc giới hạn của vật.

Trả lời : $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \times \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t} + 1}$, trong đó

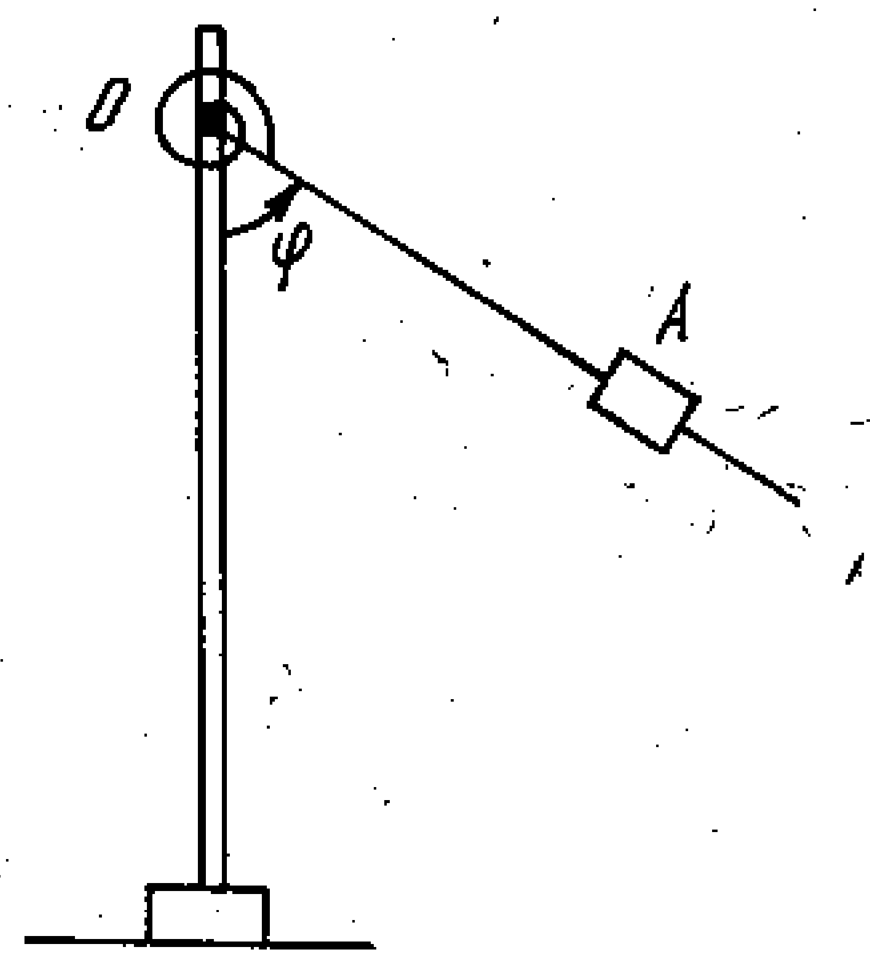
$$\beta = \frac{2}{J}\sqrt{\alpha M} \; ; \; \omega_{gh} = \lim_{t \to \infty} \omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}}$$

2–26. Để xác định mômen quán tính của một vật đã cho đối với một trục AB qua khối tâm C của vật, người ta treo vật bằng hai thanh AO và BE gắn cứng vào vật, sao cho AB song song với DE và cùng nằm ngang. Hai thanh AD và BE quay được tự do quanh trục DE cố định (xem hình vẽ). Sau đó cho vật dao động và đo nửa chu kỳ T của dao động. Cho biết trọng lượng của vật là p và khoảng cách giữa AB và DE bằng h. Bỏ qua trọng lượng của hai thanh treo và bỏ qua ma sát ở các khớp quay. Tính mômen quán tính của vật đối với trục AB, (H.2–43).

Trả lời : $J = hp\left(\frac{T^2}{\Pi^2} - \frac{h}{g}\right)$.



HÌNH 2–43



HÌNH 2–44

2–27. a) Bộ phận chính của dao động kế để ghi chấn động ngang của móng máy là một con lắc như trên hình vẽ. Ở vị trí thẳng đứng OA, lò xo xoắn không làm việc. Mômen tĩnh của con lắc đối với O khi OA nằm ngang bằng 43,6Ncm, mômen quán tính của con lắc đối với trục quay là J = 0,003 kgm^2, hệ số cứng của lò xo xoắn là C = 0,98 N/cm. Bỏ qua mọi lực cản. Xác định chu kỳ của dao động nhỏ tự do của con lắc quanh vị trí cân bằng thẳng đứng (H.2–44).

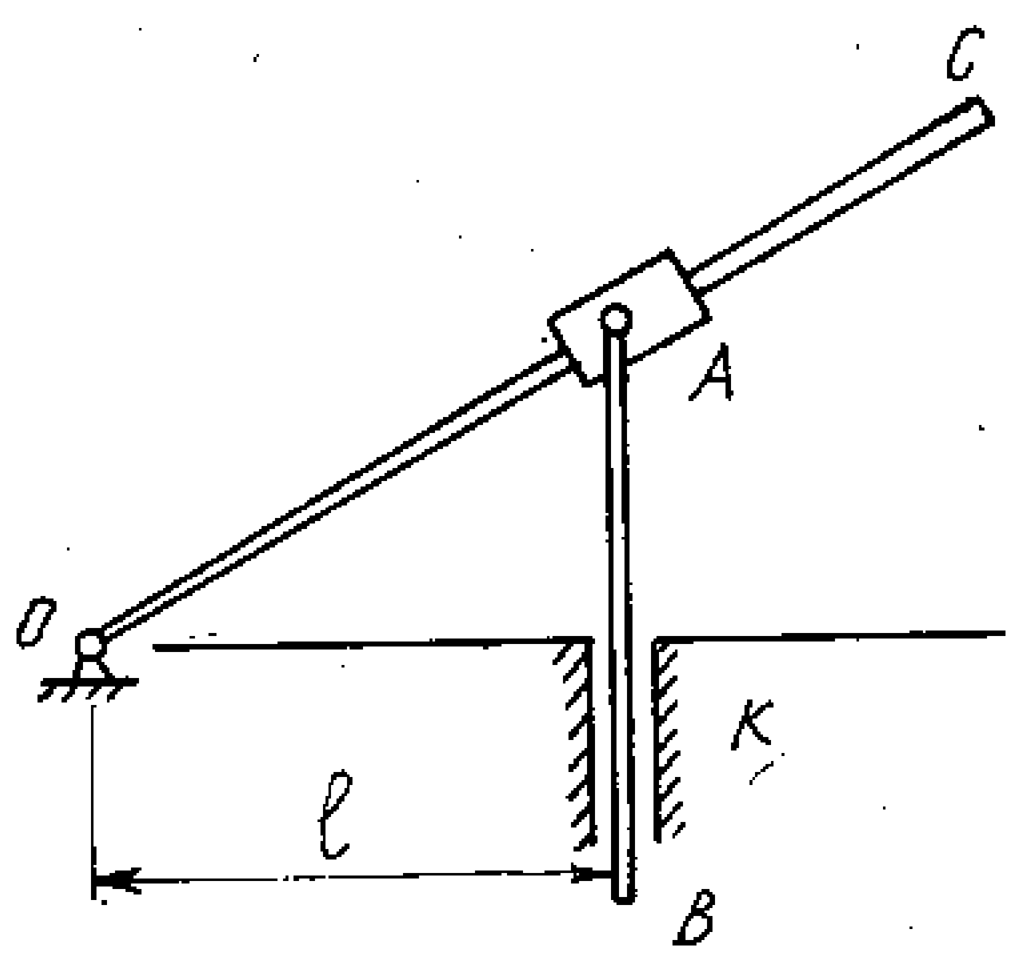
Trả lời : T = 0,5 s.

b) Gắn dao động kế ấy vào một móng máy, giả thiết rằng móng máy dao động điều hòa theo phương ngang theo luật $x = a\sin 60\,t$ cm, cho biết biên độ dao động cưỡng bức của con lắc của dao động kế là 6^o. Xác định biên độ a của dao động móng máy.

Trả lời : a = 9,1 mm.

Định lý biến thiên động năng

2-28. Cho cơ cấu culít như hình vẽ. Cần lắc OC lắc quanh trục O kéo thanh AB chuyển động lên xuống theo máng trượt thẳng đứng K.



HÌNH 2-45

Cần OC được coi là thanh đồng chất có chiều dài bằng R và khối lượng m_1. Con chạy A có khối lượng m_2. Thanh AB có khối lượng m_3. Khoảng cách giữa trục O và máng trượt K là l. Xem con chạy A như một chất điểm, tìm biểu thức động năng của cơ cấu hàm theo vận tốc góc và góc quay của tay quay, (H.2-45).

Trả lời : $T = \dfrac{\omega^2}{6\cos^4\varphi}\,[m_1 R^2 \cos^4\varphi + 3l^2 (m_2 + m_3)]$

2-29. Tay quay của một cơ cấu tay quay thanh truyền được coi là một thanh đồng chất có chiều dài bằng r, có khối lượng bằng m_1 đang quay với vận tốc ω. Con chạy có khối lượng bằng m_2, thanh truyền dài là l, coi rằng tỷ số $\dfrac{r}{l}$ là bé.

a) Bỏ qua khối lượng thanh truyền, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc và góc quay của tay quay.

b) Kể đến khối lượng của thanh truyền là m_3. Tính động năng của cơ hệ ở vị trí tay quay OA vuông góc với đường trượt của con chạy.

Trả lời :

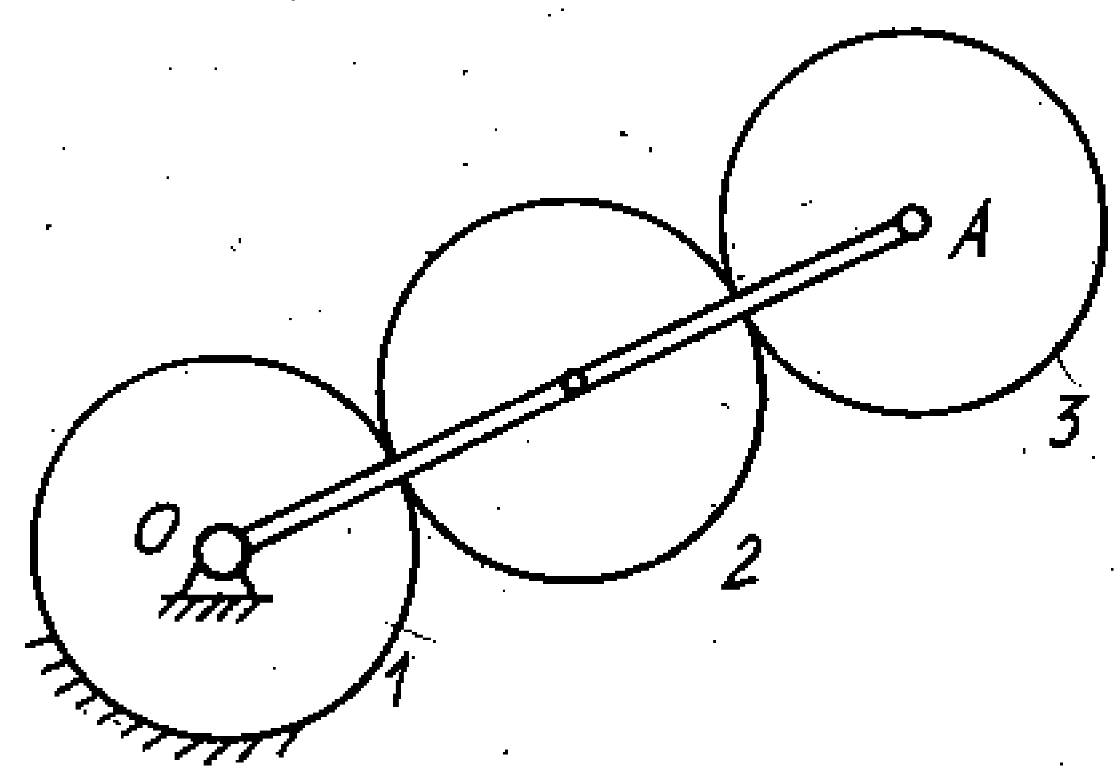
$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}m_1 + m_2\left[\sin\varphi + \frac{r}{2l}\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(\frac{r}{l})^2\sin^2\varphi}}\right]^2\right\} r^2\omega^2.$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3\right) r^2\omega^2$$

2–30. Cho cơ cấu hành tinh như hình vẽ.

Các bánh 1, 2, 3 là các đĩa tròn đồng chất, cùng bán kính r, cùng khối lượng m. Tay quay OA được xem là một thanh đồng chất có khối lượng m_1.

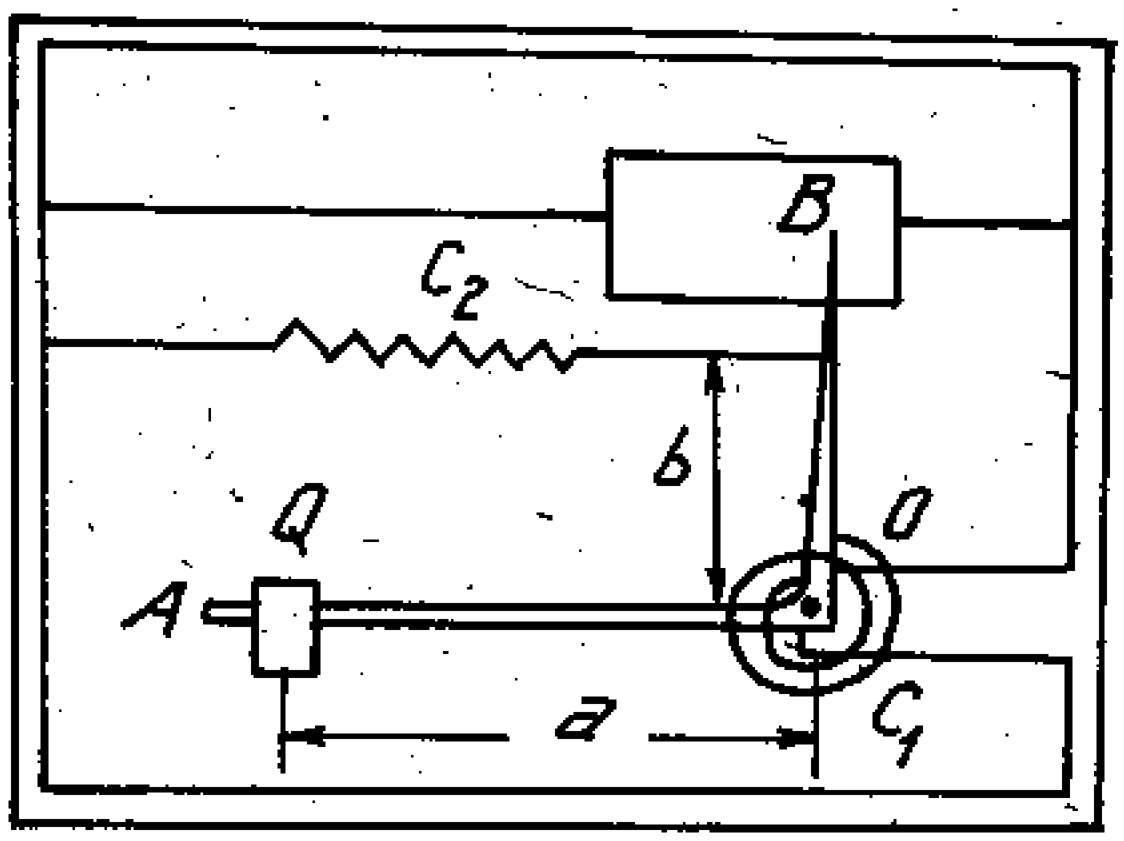
Tính động năng của cơ cấu hàm của vận tốc góc tay quay (H.2–46).



HÌNH 2–46

Trả lời : $T = (33m + 8m_1)\dfrac{r^2\omega^2}{3}$.

2–31. Bộ phận chính của máy ghi chấn động thẳng đứng của nền máy là một thanh gẫy khúc AOB có trọng tâm đặt tại O và có mômen quán tính đối với trục O và vuông góc với hình vẽ bằng J, mang vật nặng có trọng lượng bằng Q ở đầu A. Thanh được giữ ở vị trí cân bằng ổn định (lúc đó AO nằm ngang và OB thẳng đứng) nhờ lò xo xoắn có hệ số cứng bằng c_1 (khi lò xo xoắn một góc θ kể từ trạng thái không biến dạng của nó thì sẽ gây ngẫu lực đàn hồi có mômen $M = c_1\theta$) và một lò xo giãn có độ cứng c_2 nối vào thanh gãy OAB như trên hình vẽ. Giả thiết rằng ở vị trí cân bằng nói trên lò xo giãn không làm việc. Các kích thước cho như trên hình vẽ và xem vật nặng Q như một chất điểm.



HÌNH 2–47

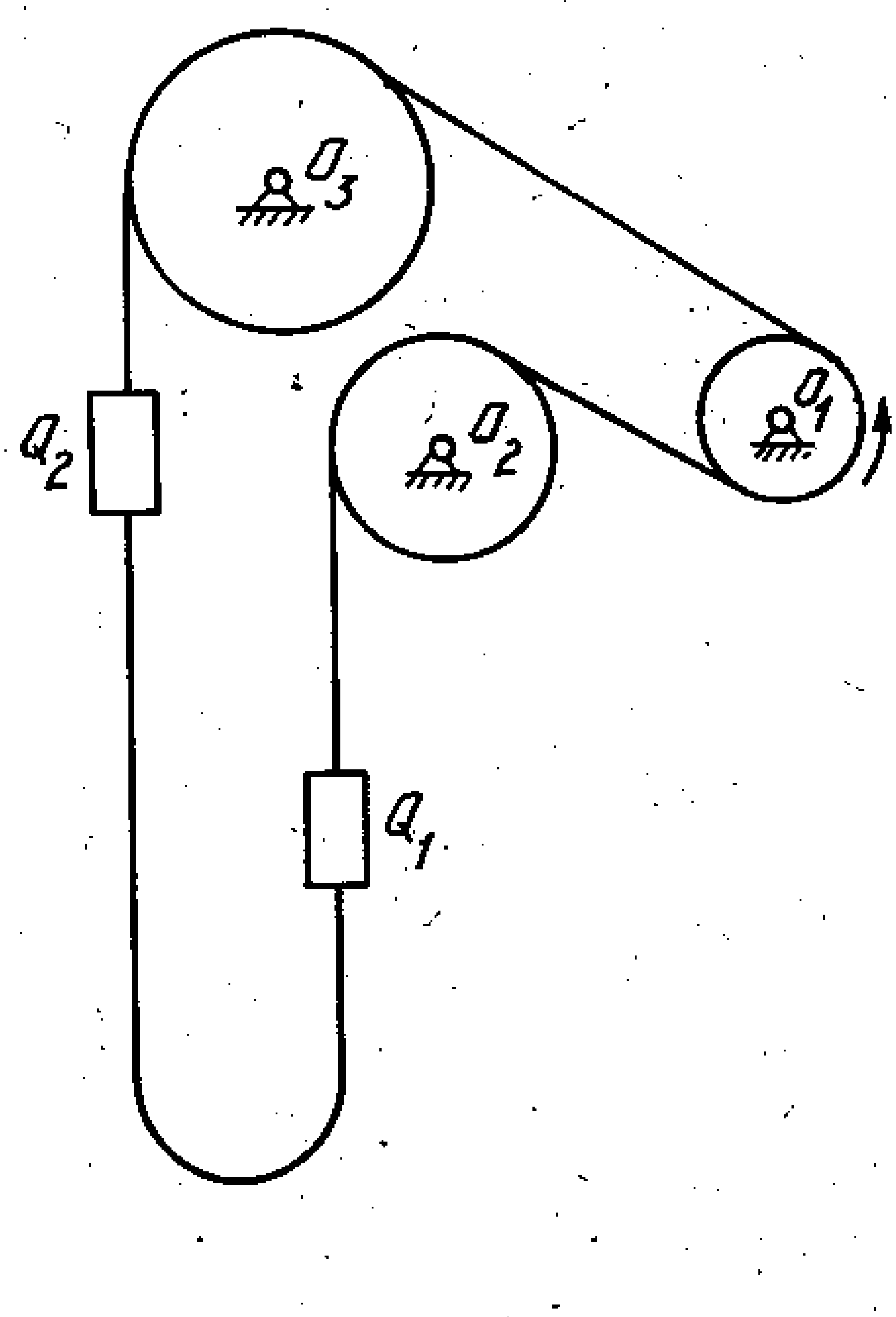
Tính thế năng và động năng của cơ hệ khi thanh OA lệch với đường nằm ngang về phía trên một góc φ khi đặt máy trên nền ngang cố định (H. 2–47).

Trả lời :

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_1 + c_2b^2)\varphi^2 ;$$

$$T = \frac{1}{2}(J + ma^2)\varphi^2.$$

2–32. Một động cơ điện kéo một hệ thống truyền động dùng xích như trên hình vẽ. Hệ thống đó làm việc như sau : lúc mở máy xích bắt đầu chuyển động với gia tốc a, và khi đã đạt được v_{max} thì giữ nguyên tốc độ đó. Đường kính của trục chính gắn với động cơ bằng $2r_1$, đường kính của hai ròng rọc khác là $2r_2$ và $2r_3$. Đối với trục quay của chúng mômen quán tính của trục quay chính là J_1, mômen quán tính của các ròng rọc là J_2 và J_3. Trọng lượng của hòm được kéo lên là Q_1, của hòm được thả xuống là Q_2. Mỗi đơn vị dài của dây xích nặng là q và xích có độ dài l. Tính công suất của động cơ



HÌNH 2–48

trong quá trình mở máy và trong quá trình bình ổn $v = v_{max}$, (H. 2–48)

Trả lời : $W = \left[\left(\frac{Q_1 + Q_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2}\right) a + (Q_1 - Q_2)\right] v$

$$W_{bình\ ổn} = (Q_1 - Q_2)\, v_{max}.$$

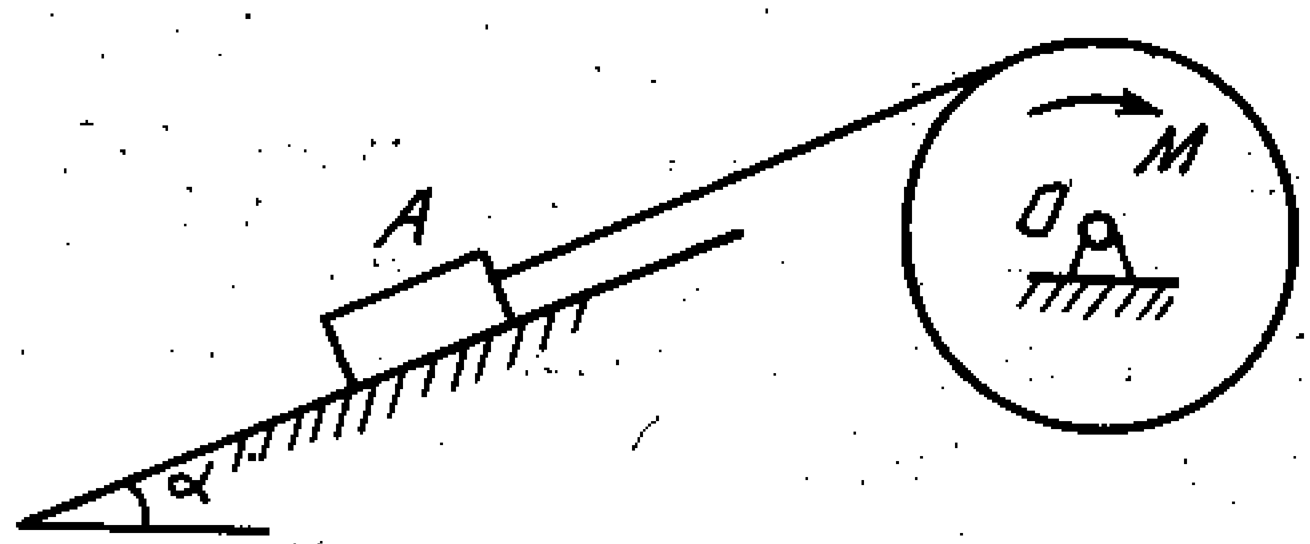
2–33. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn xoay đường kính bằng 60cm và có khối lượng bằng 392 kg, chuyển động lăn không trượt trên mặt phẳng ngang do một người đẩy. Lực đẩy P có phương chiều không đổi và hướng theo thanh đẩy AO. Thanh AO dài là 1,5 m, độ cao của A so với nền ngang là 1,2 m. Bỏ qua ma sát ở ổ trục và ma sát lăn của mặt nền. Xác định cường độ P sao cho khi người đẩy đi được 2 m thì trục con lăn đạt vận tốc 0,8 m/s.

Nếu kể đến ma sát cản lăn của nền với hệ số k = 0,5 cm thì lực P phải có cường độ bằng bao nhiêu, lấy $g = 9{,}8\ m/s^2$.

Sau khi đạt vận tốc cần thiết như trên, muốn giữ chuyển động đều của trục bánh xe, cần giảm cường độ của lực P đi bao nhiêu.

Trả lời : P_1 = 117,6 N ; P_2 = 199,9 N. Giảm P một lượng là 118,9 N.

2–34. Một ngẫu lực có mômen quay M không đổi tác dụng lên tang của một trục tời có bán kính bằng R và có trọng lượng là P_1 : quấn vào tang tời một sợi dây mềm nhẹ và không giãn rồi buộc vào đầu mút tự do của dây vật nặng A có trọng lượng P_2 để kéo nó lên theo mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α so với mặt phẳng ngang. Hệ số ma sát trượt động giữa mặt phẳng và mặt phẳng nghiêng là f. Tang tời được xem là một trục tròn

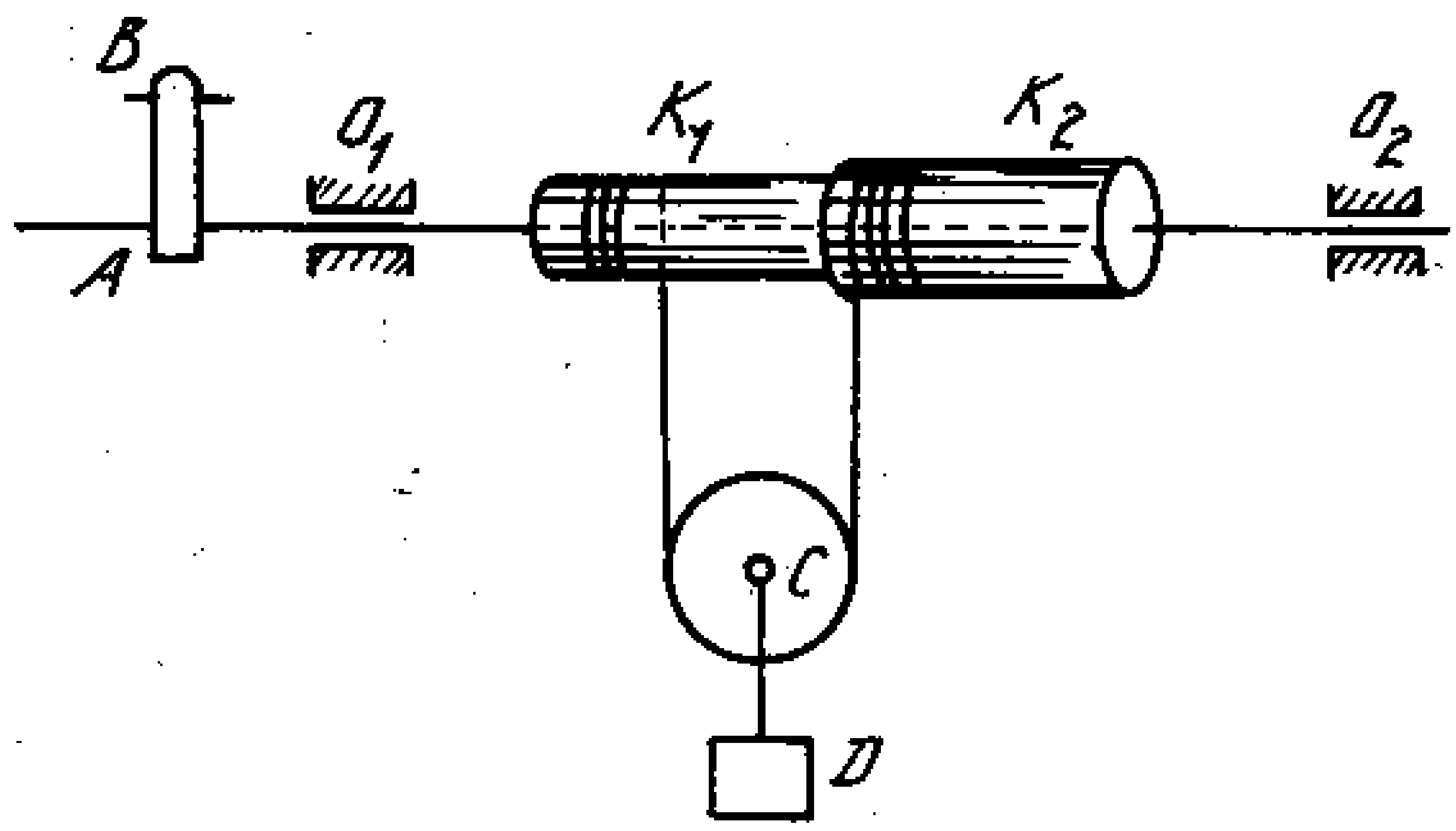


HÌNH 2–49

đồng chất. Tìm biểu thức vận tốc góc của tời hàm theo góc quay của nó, (H. 2-49).

$$Trả\ lời: \omega = \frac{2}{R}\sqrt{g\frac{M - P_2R(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{P_1 + 2P_2}\varphi}.$$

2-35. Một tời kéo gồm hai trống K_1 và K_2 có bán kính R_1 và R_2 ghép cứng với nhau và với trục quay nằm ngang O_1O_2, có mômen quán tính đối với trục đó bằng J_1 và J_2. Tác dụng vào tay quay AB của trục tời một ngẫu lực có mômen M không đổi để kéo vật nặng D trọng lượng P lên cao.



HÌNH 2-50

Khi trống K_2 quấn dây thì trống K_1 thả dây. Bỏ qua ma sát và trọng lượng dây. Biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm vận tốc góc của tay quay AB khi vật D đã được kéo lên một đoạn bằng h (H. 2-50).

$$Trả\ lời: \omega = 2\sqrt{2gh\frac{2M - P(R_2 - R_1)}{(R_2 - R_1)\,[P(R_2 - R_1)^2 + 4g(J_1+J_2)]}}$$

2-36. Một vật nặng P được treo vào đầu một sợi dây mềm không giãn chiều dài l và mỗi đơn vị dài của có có trọng lượng p. Dây này được quấn vào tang của một trục tời có bán kính bằng R và có mômen quán tính đối với trục quay bằng J. Vật nặng rơi xuống làm quay trục tời. Lúc ban đầu đoạn dây treo buông dài một đoạn x_0 và cơ hệ đứng yên. Bỏ qua ma sát của các ổ trục quay và chiều dài của dây cũng như sự thay đổi thế năng của phần dây quấn.

Xác định vận tốc rơi của vật nặng hàm theo độ dài x của đoạn dây treo.

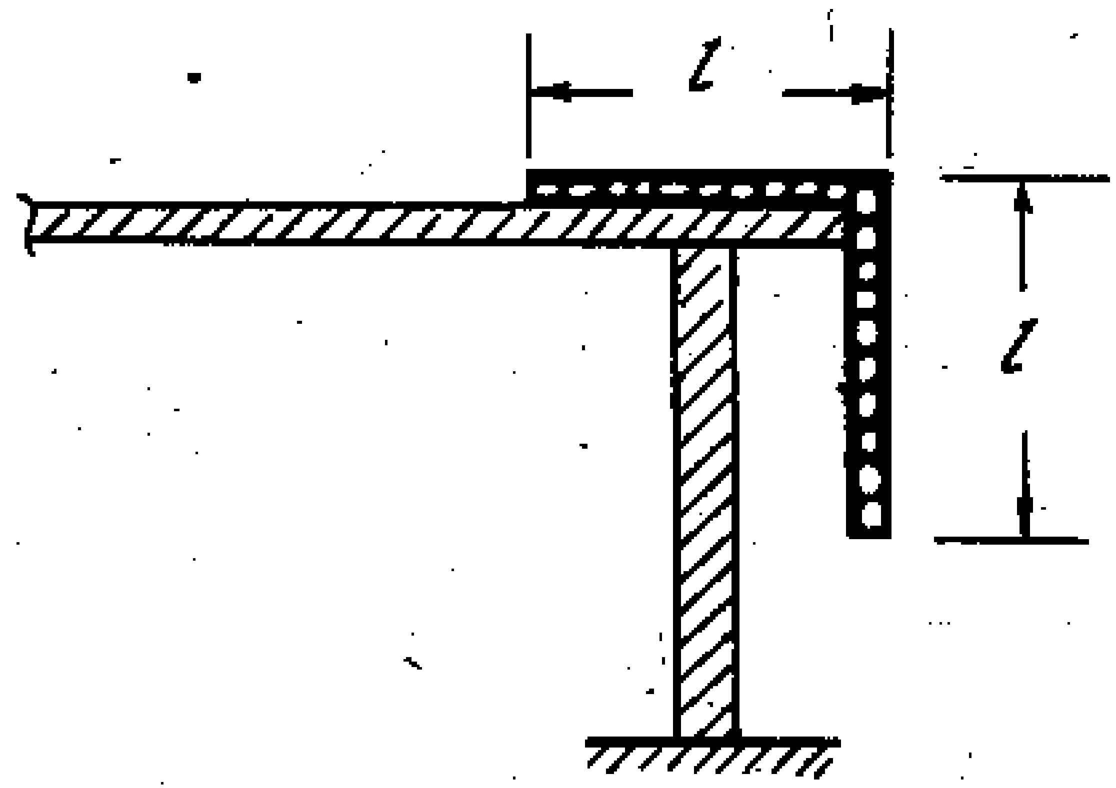
Trả lời : $v = R\sqrt{g\dfrac{[2P + p(x + x_o)(x - x_o)]}{gJ + (P + pl)R^2}}$.

2-37. Giải bài tập 3 - 34 nếu có tính đến khối lượng của dây cấp dùng để kéo vật nặng. Chiều dài của dây bằng l, trọng lượng của một đơn vị dài của dây bằng p. Ở thời điểm đầu đoạn dây buông khỏi tang tời là a. Bỏ qua sự thay đổi về thế năng của phần dây quấn vào tang.

Trả lời : $\omega = \dfrac{1}{R}\sqrt{2g\dfrac{2M - 2P_2r(\sin\alpha + f\cos\alpha) - pr(2a - r\varphi)\sin\alpha}{P_1 + 2P_2 + 2pl}\varphi}$.

2-38. Một dây đồng chất dài là L có một phần nằm trên mặt bàn ngang nhẵn một phần buông tự do.

Xác định khoảng thời gian T để dây rời khỏi mặt bàn, biết rằng tại thời điểm đầu chiều dài của phần dây thả buông dài là l và vận tốc đầu bằng không, (H. 2-51).

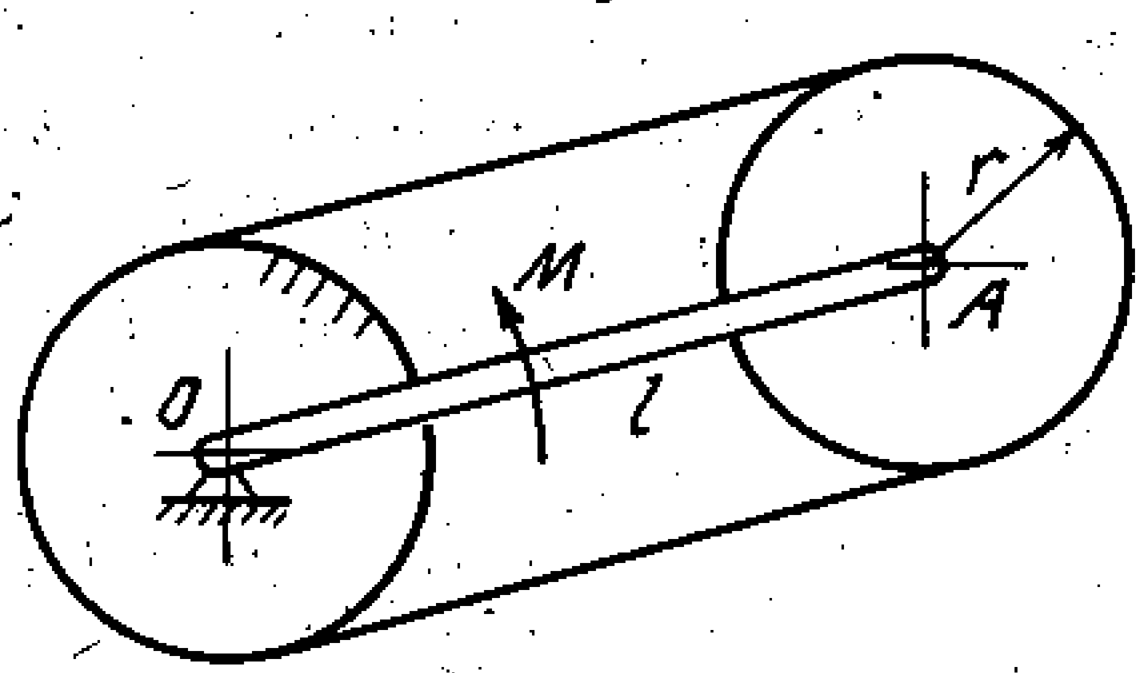


HÌNH 2-51

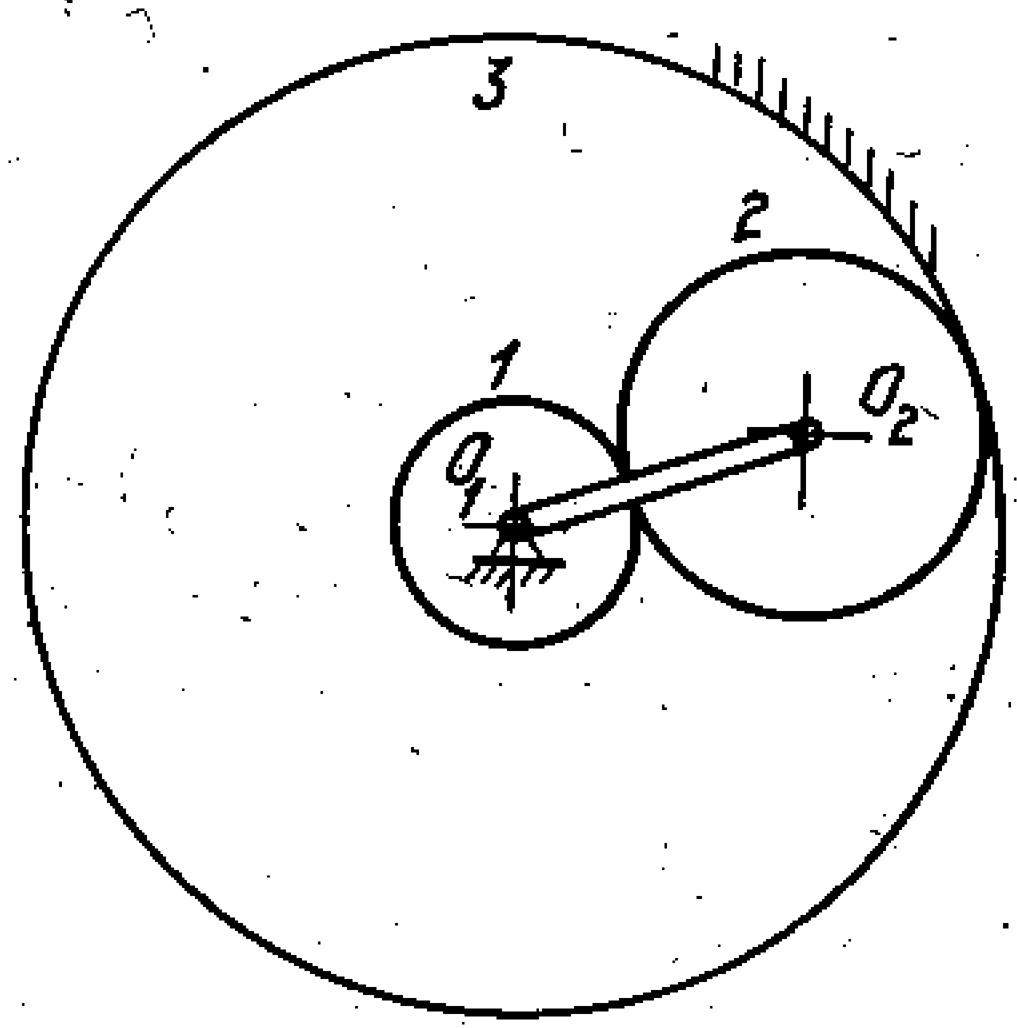
Trả lời : $T = \sqrt{\dfrac{L}{g}}\ln\left(\dfrac{L + \sqrt{L^2 - l^2}}{l}\right)$

2-39. Khảo sát chuyển động của cơ cấu biểu diễn trên hình vẽ. Cơ cấu chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang. Tay quay OA được xem là một thanh đồng chất dài l nặng P. Hai ròng rọc động và cố định có cùng bán kính r, ròng rọc động có trọng lượng Q và được xem là những đĩa đồng chất. Tác dụng lên tay quay một ngẫu lực có mômen không đổi M. Tìm gia tốc góc của tay quay. Bỏ qua sự trượt giữa đai truyền và hai ròng rọc, (H. 2-52).

Trả lời : $\varepsilon = \dfrac{3gM}{(p + 3Q)\, l^2}$.



HÌNH 2-52



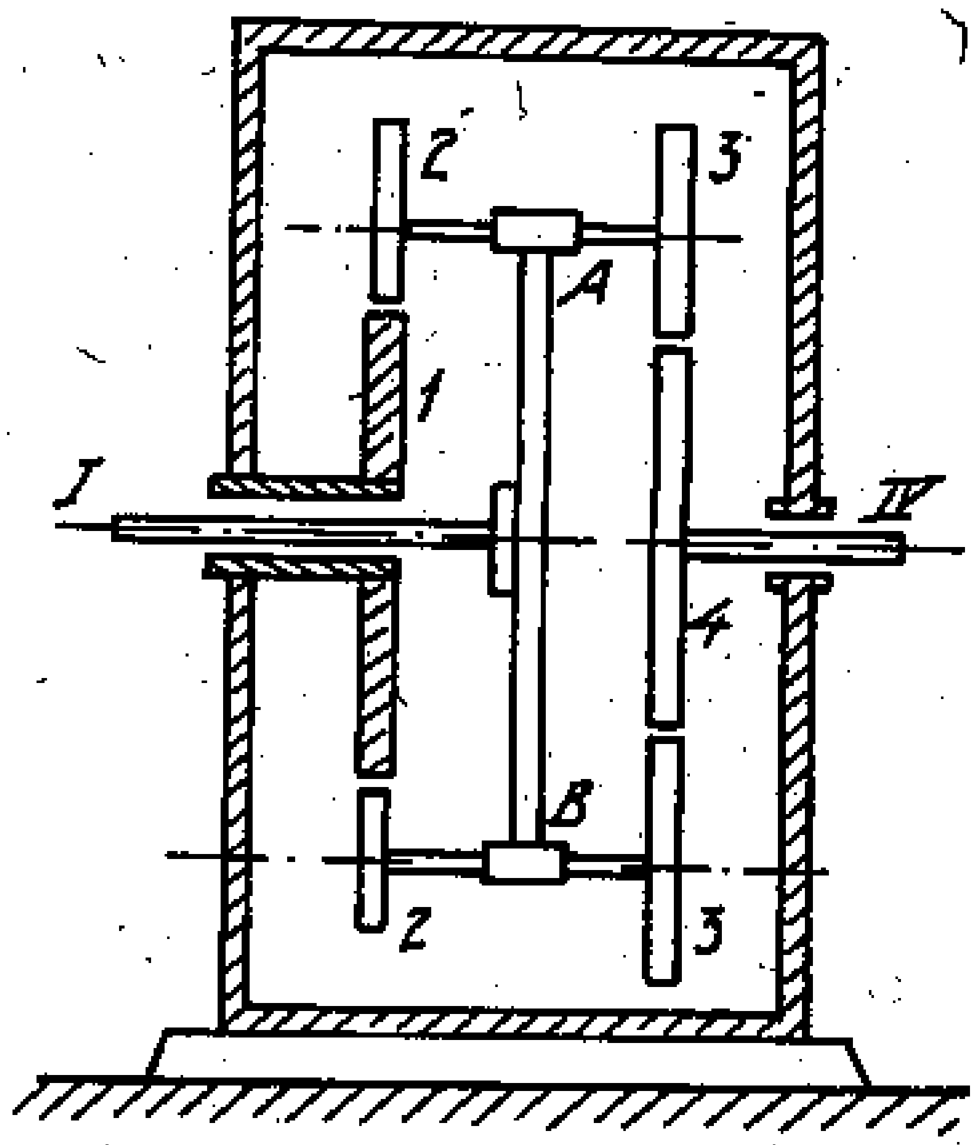
HÌNH 2-53

2-40. Khảo sát cơ cấu hành tinh như trên hình vẽ, chuyển động trong mặt phẳng ngang. Bánh răng 3 cố định, các bánh răng động 1 và 2 được coi là những đĩa tròn đồng chất cùng bề dày và cùng vật liệu. Cho biết bánh răng 1 quay nhanh gấp 10 lần tay quay. Bỏ qua khối lượng của tay quay. Mômen quán tính của bánh răng 1 đối với trục O_1 là J.

Bánh răng 1 chịu tác dụng của ngẫu lực cản có mômen là M_1 không đổi và tay quay chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có mômen M không đổi. Tìm gia tốc góc của tay quay, (H. 2-53)

Trả lời : $\varepsilon = \dfrac{M - 10M_1}{1300J}$.

2-41. Khảo sát chuyển động của hộp tốc độ biểu diễn trên hình vẽ. Trục dẫn và trục bị dẫn liên hệ với nhau bằng các cặp bánh răng hành tinh kép. Trục dẫn I mang tay quay AB, trục bị dẫn IV mang bánh răng 4 ; các ổ trục đặt trên hai đầu tay quay mang trục các cặp bánh răng hành tinh 2 - 3. Cho biết các bán kính r_1, r_2, r_3, r_4 của các bánh răng, mômen quán tính của trục dẫn với các chi tiết gắn trên nó đối với trục quay hình học của nó bằng J_1. Cặp bánh răng hành tinh 2 – 3 có khối lượng m_2 và có trọng tâm nằm trên trục đối xứng hình học của nó và có mômen quán tính đối với trục đó là J_2. Mômen quán tính đối với trục bị dẫn và các chi tiết lắp với nó đối với trục quay hình học của nó là J_4. Trục dẫn chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có mômen M_1, trục bị dẫn chịu tác dụng ngẫu lực cản có mômen M_4, giả thiết M_1 và M_4 đều không đổi ; bỏ qua ma sát. Tìm gia tốc góc của trục I, (H. 2–54).



HÌNH 2–54

Trả lời : $$\varepsilon_1 = \frac{M_1 - M_4\left(1 - \dfrac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)}{J_1 + 2m_2(r_1+r_2)^2 + 2J_2\left(1 + \dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 + J_4\left(1 - \dfrac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2}$$

2– 42. Giải bài toán trên đây với giả thiết rằng M_1 = const; $M_4 = a\omega_4^2$ và giữ nguyên các giả thiết khác. Đặt

$$J = J_1 + 2m_2(r_1 + r_2)^2 + 2J_2\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + J_1\left(1 - \frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2.$$

Tìm giá trị của vận tốc góc ω_1^0 trong chế độ bình ổn và tìm biểu thức $\omega_1 = \omega_1(t)$. Ban đầu cơ hệ đứng yên.

Trả lời : $$\omega_1^o = \sqrt{\frac{M_1}{ak^3}}\ ;\ \omega_1(t) = \omega_1^o\,\frac{1 - e^{\frac{2}{J}\sqrt{k^3aM_1}\,t}}{1 - e^{\frac{2}{J}\sqrt{ak^3M_1}\,t}}$$

$$\text{trong đó } k = \frac{\omega_4}{\omega_1} = 1 - \frac{r_1r_3}{r_2r_4}$$

2–43. Một hình nón tròn xoay đồng chất chuyển động lăn không trượt trên một mặt phẳng không nhẵn và nghiêng với mặt phẳng ngang một góc α. Chiều dài đoạn đường sinh bằng a và góc mở bằng 2β. Lập phương trình vi phân chuyển động của hình nón.

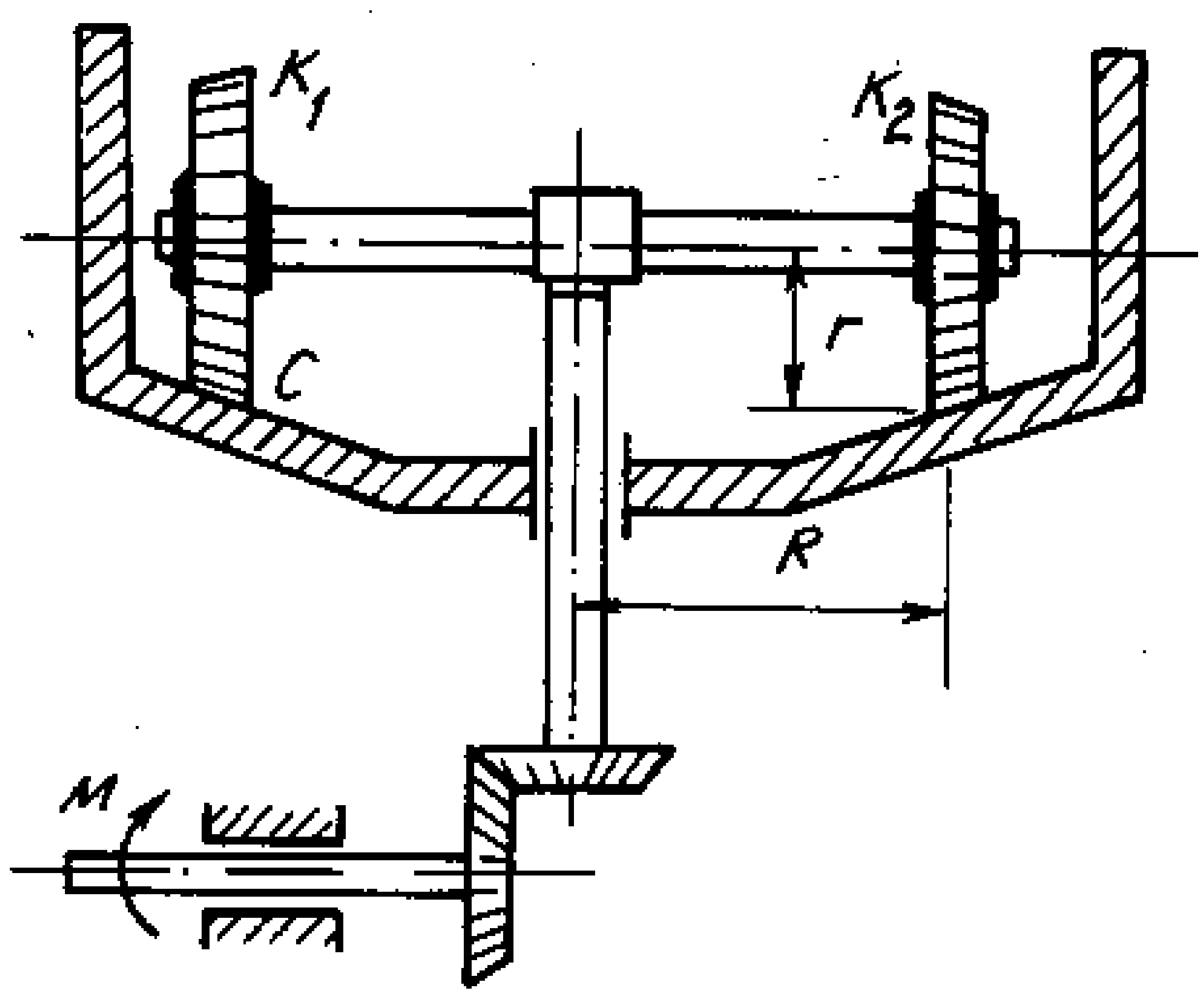
Chỉ dẫn : Lấy thông số định vị của hình nón trên mặt phẳng nghiêng là góc θ giữa đường sinh tiếp xúc với đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng.

Trả lời : $\ddot{\theta} + \dfrac{g\sin\alpha}{a\left(\cos^2\beta + \dfrac{1}{5}\right)}\sin\theta = 0.$

2–44. Các thớt K_1 và K_2 của máy nghiền được động cơ kéo chuyển động nhờ một hệ thống truyền động như hình vẽ. Khối lượng của mỗi thớt nghiền là m = 3 tấn, được xem là những đĩa tròn đồng chất có bán kính trung bình là r = 0,5 m và có bán kính tay quay là R = 1 m. Xem như trục quay tức thời của thớt qua tiếp điểm C giữa đường tròn trung bình của đĩa với mặt nón cố định. Tỷ số truyền động giữa trục động cơ và trục thẳng đứng của máy nghiền bằng 2/3. Bỏ qua khối lượng của các chi tiết khác và tác dụng của ma sát.

Tính mômen không đổi của ngẫu lực M cần tác dụng ở trục động cơ phát động máy nghiền sao cho sau 10 giây nó đạt được tốc độ góc 120 vòng/phút (H. 2–55).

Trả lời : M = 3136 Nm



HÌNH 2 – 55

2–45. Cho cơ cấu tay quay thanh truyền gồm có pittông A có khối lượng m_1, thanh truyền dài là l và có khối lượng là

m_2, tay quay OB có độ dài bằng r. Mômen quán tính của thanh truyền đối với trục quay A bằng J_2, của tay quay OB cùng với vô lăng đối với trục quay O bằng J_3. Pitông có diện tích chịu ép bằng S và chịu áp suất coi như đều và bằng p. Khoảng cách giữa điểm A và trọng tâm của thanh truyền là a. Mômen của ngẫu lực cản tác dụng vào tay quay có độ lớn bằng M. Cho rằng trong quá trình chuyển động góc φ giữa AB và OA khá bé để coi được $\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$. Lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Trả lời : Lấy góc φ giữa OB và OA làm tọa độ định vị cơ hệ.

$$\left[(m_1 + m_2)\, r^2\sin^2\varphi + (J_2+ma^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2\varphi + J_3\right] \ddot{\varphi} +$$

$$+ \left[(m_1 + m_2)r^2 - (J_2 + ma^2)\left(\frac{r}{l}\right)^2\right] \cos\varphi\sin\varphi \,.\, \dot{\varphi}^2 =$$

$$= -M + pSr\sin\varphi.$$

2–46. Cho cơ hệ trên hình vẽ. Vật nặng A có khối lượng m_1 rơi xuống thẳng đứng, kéo vật nặng B khối lượng m_2 trượt lên theo cột thẳng đứng CD.

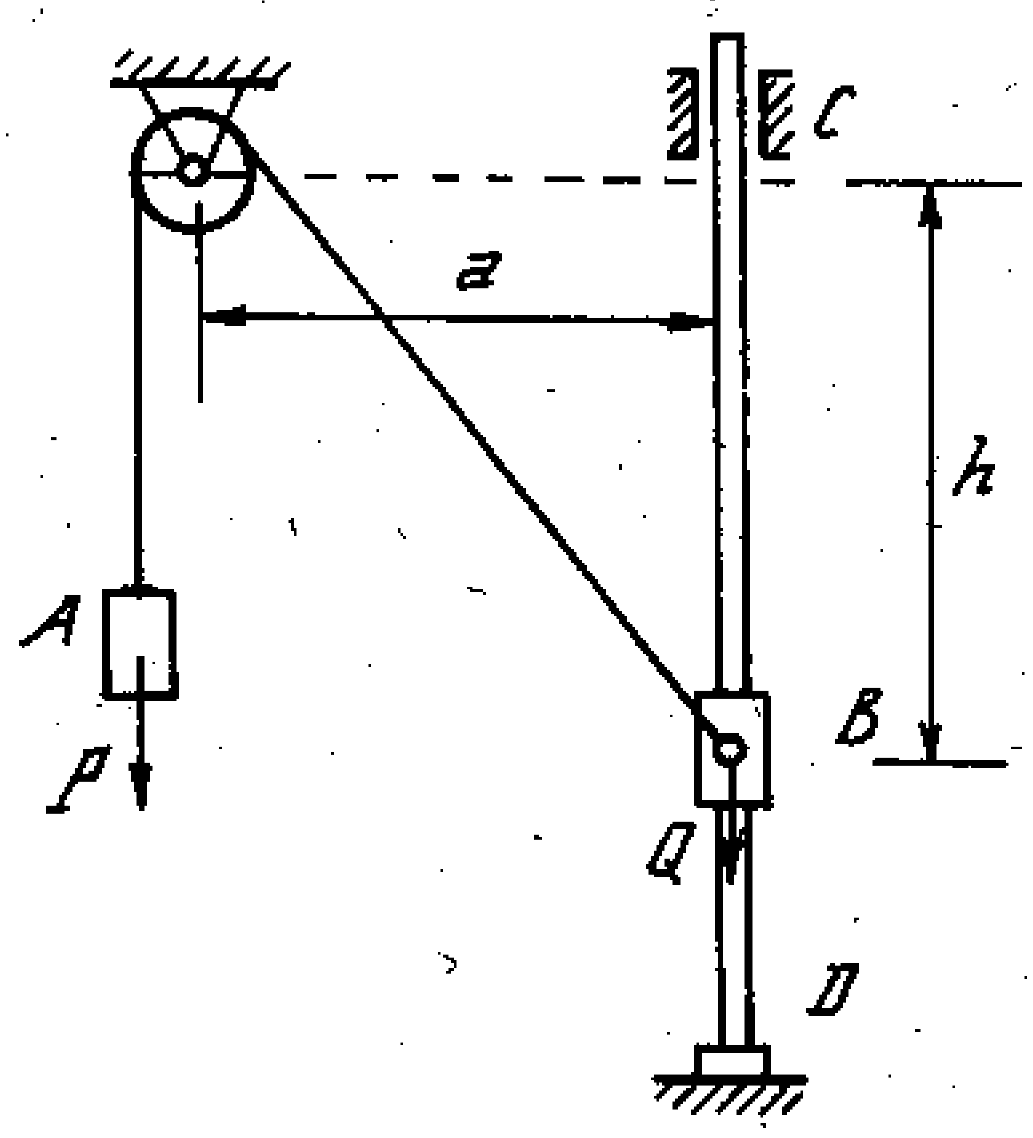
Bỏ qua ma sát. Lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ, (H. 2–56).

Trả lời :

$$(a^2 + h^2)[m_1h^2 + m_2(a^2 + h^2)]\ddot{h} +$$

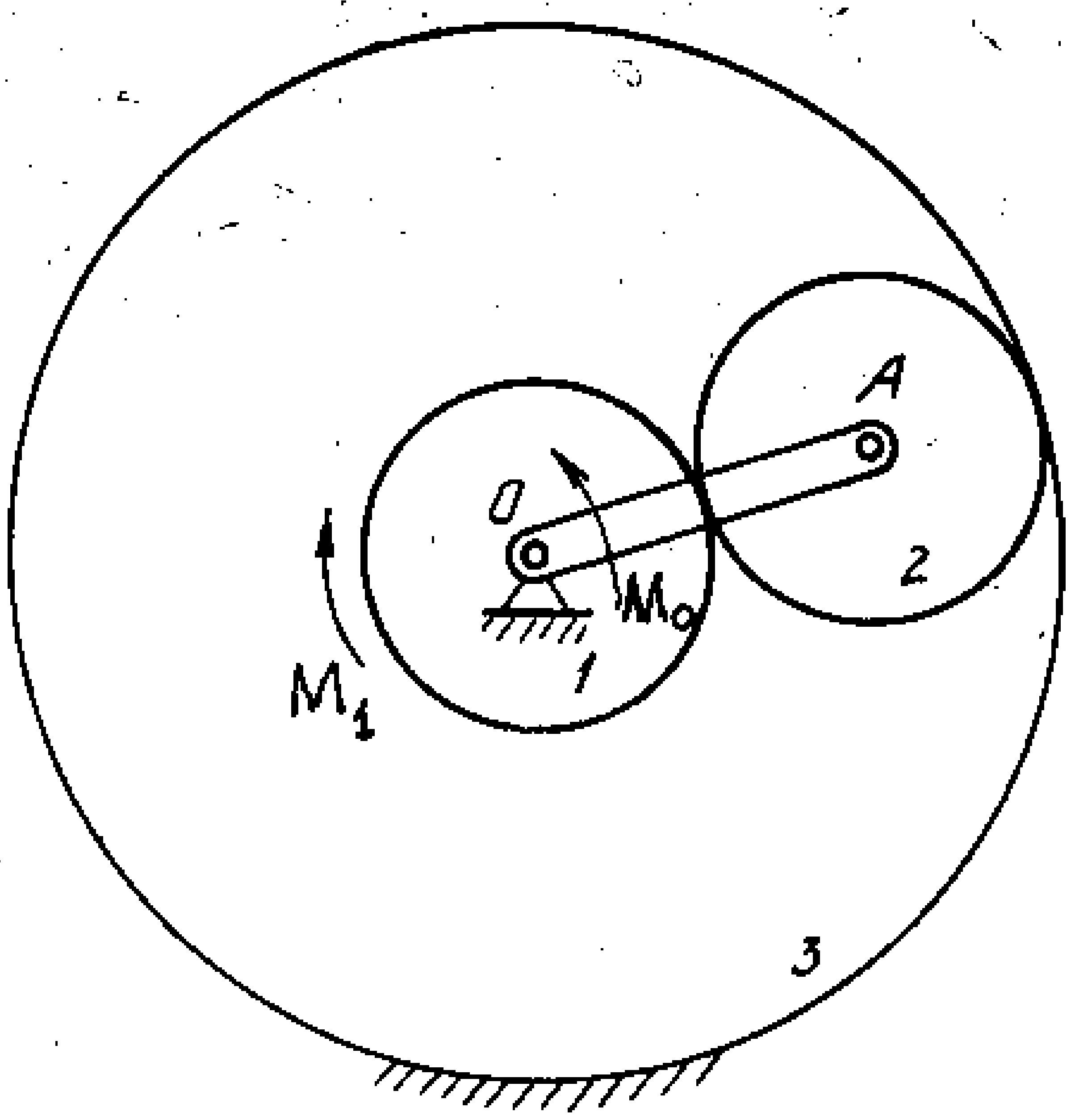
$$+ m_1a^2h\dot{h}^2 + Q(a^2 + h^2)^2 -$$

$$- Ph(a^2 + h^2)^{3/2} = 0.$$



HÌNH 2–56

2–47. Cho cơ cấu hành tinh chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang như hình vẽ. Tay quay OA quay quanh trục qua O dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen Mo không đổi làm



HÌNH 2-57

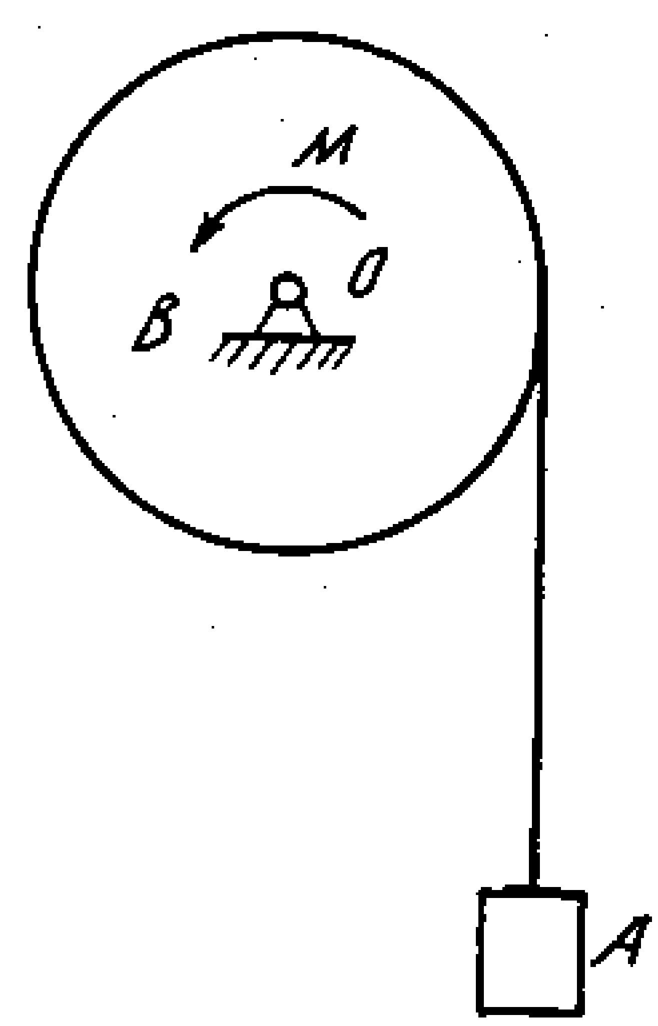
cho bánh 2 lăn không trượt đối với bánh 3 cố định và truyền chuyển động cho bánh 1 quay quanh trục qua O chịu tác dụng ngẫu lực cản $M_1 = \alpha\omega_1$, trong đó α là hằng số, ω_1 là vận tốc góc bánh 1. Cho biết bánh 1 có bán kính r_1 và mômen quán tính đối với trục qua O bằng J_1, bánh 2 có bán kính r_2, khối lượng m_2 và mômen quán tính đối với khối tâm A bằng J_2, tay quay có mômen quán tính đối với trục qua O là J_o. Tìm vận tốc góc của bánh 1 trong chế độ ổn bình (vận tốc góc giới hạn) và trong quá trình mở máy $\omega = \omega$ (t) từ trạng thái đầu yên nghỉ (H. 2-57).

Trả lời : $\omega_{gh} = \dfrac{A}{B}$; $\omega = \omega_{gh}(1 - e^{-Bt})$, trong đó :

$$A = \frac{M_o r_1}{2l(r_1 + r_2)} \; ; B = \frac{\alpha}{J} \; ;$$

$$J = \frac{1}{4}\left[4J_1 + J_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + J_o\left(\frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)^2 + m_2 r_2^2\right].$$

2-48. Một vật A có trọng lượng P được kéo lên từ trạng thái đứng yên nhờ tời B có bán kính R, trọng lượng Q và chịu tác dụng ngẫu lực có mômen $M = M_o - \alpha\omega^2$ trong đó M_o và α là các hằng số, ω là vận tốc của góc tời. Cho biết bán kính quán tính của tời đối với trục quay O bằng ρ. Tìm vận tốc góc giới hạn của tời quay và vận tốc góc của quá trình chuyển tiếp của nó từ trạng thái yên nghỉ, (H. 2-58).

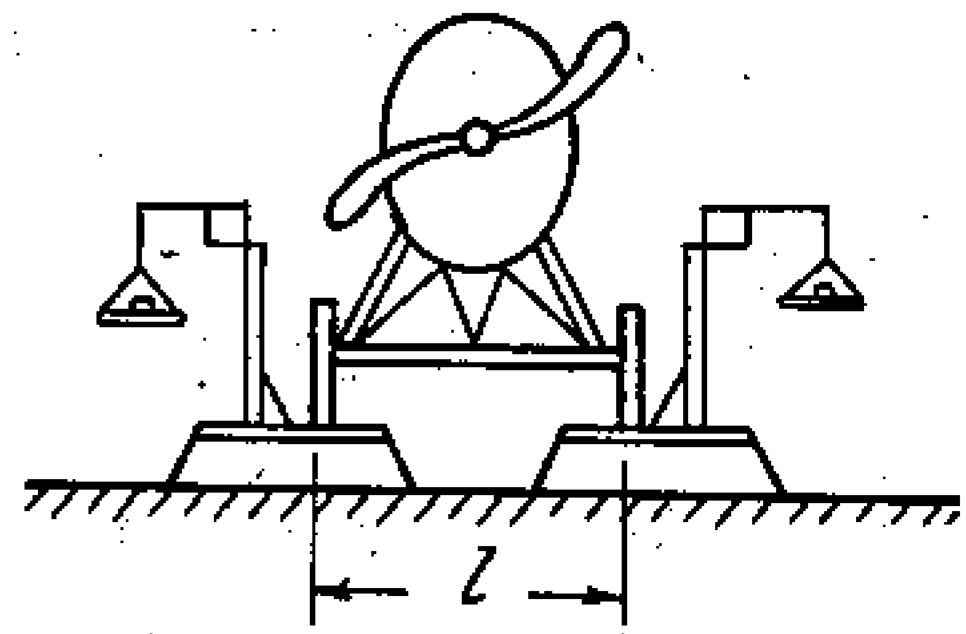


HÌNH 2-58

Trả lời : $\omega_{gh} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$; $\omega = \omega_{gh} \dfrac{e^{\sqrt{ABt}} - e^{-\sqrt{ABt}}}{e^{\sqrt{ABt}} + e^{-\sqrt{ABt}}}$,

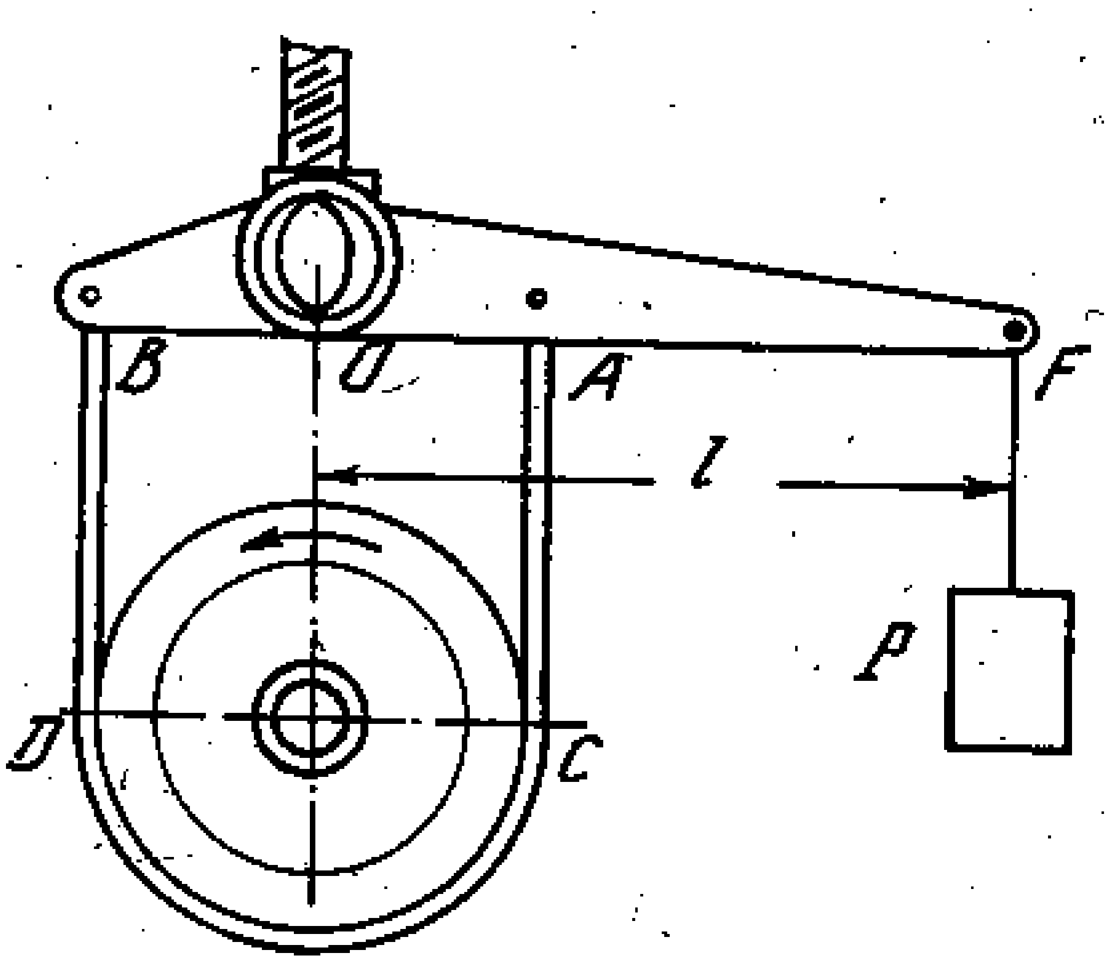
trong đó : $A = g\dfrac{M_0 - PR}{PR^2 + Q\rho^2}$, $B = g\dfrac{\alpha}{PR^2 + Q\rho^2}$

2-49. Một máy bay có khối lượng m = 3000 kg được đặt trên ba điểm trong đó phần đuôi chiếm 10% khối lượng toàn máy bay. Khi chong chóng của máy bay quay n = 1432 vòng/phút các lực kế đặt dưới các bánh trước của máy bay chỉ N_1 = 10,78 kN, N_2 = 15,68 kN. Xác định công suất của động cơ máy bay nếu cho biết hiệu suất của chong chóng η = 0,8 và khoảng cách giữa hai bánh trước l = 2m (H. 2-59).



HÌNH 2-59

Trả lời : W = 919,16 kw



HÌNH 2-60

2-50. Để đo công suất của mô tơ người ta sử dụng thiết bị gồm dây đai có các nhánh thẳng đứng AC và DB và phần ôm chặt vào nửa dưới của ròng rọc E gắn chặt vào trục quay của môtơ và một đòn BF với trục qua O, nhờ nó có thể thay đổi sức căng trong các nhánh dây. Để giữ thăng bằng của đòn BF ở vị trí nằm ngang người ta treo vật P tại F. Xác định công suất của động cơ khi nó quay n = 240 vòng/phút và cho biết khi đòn cân bằng thì P = 29,4 N, l = 50 cm (H. 2-60).

Trả lời : W = 369,3 w.

CHƯƠNG 3

CÂN BẰNG CỦA CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

3.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

3.1.1. Các khái niệm về cơ hệ không tự do

a) Liên kết và phương trình liên kết. Cơ hệ không tự do là tập hợp các chất điểm mà chuyển động của chúng bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước, độc lập với điều kiện đầu chuyển động và các lực tác dụng, được gọi là các liên kết.

Về mặt toán học các liên kết được biểu thị bởi những phương trình và bất phương trình được gọi là những phương trình liên kết

$$f_\alpha\ (\ t,\ x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k\ )\ \geqslant\ 0, \tag{3-1}$$

trong đó x_k, y_k, z_k là các tọa độ Đề các của chất điểm M_k thuộc cơ hệ, $\dot{x}_k$, $\dot{y}_k$, $\dot{z}_k$ – các hình chiếu của vận tốc của chất điểm M_k lên các trục tọa độ còn t – thời gian, $\alpha = 1, 2, ..., s < 3N$ là số phương trình liên kết.

Liên kết giữ và liên kết không giữ. Nếu phương trình liên kết có dạng

$$f_\alpha\ (\ t,\ x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k)\ =\ 0 \tag{3-2}$$

thì liên kết được gọi là giữ hoặc hai phía, còn nếu phương trình liên kết có dạng (3-1) thì liên kết được gọi là không giữ hoặc liên kết một phía.

Liên kết dừng và liên kết không dừng. Nếu phương trình liên kết không chứa rõ thời gian t :

$$f_\alpha\,(x_k,\ y_k,\ z_k,\ \dot{x}_k,\ \dot{y}_k,\ \dot{z}_k\,) = 0, \qquad (3\text{–}3)$$

thì liên kết được gọi là dừng, còn nếu phương trình liên kết chứa rõ thời gian t, liên kết được gọi là không dừng (3–2).

Liên kết hôlônôm và không hôlônôm. Nếu phương trình liên kết không chứa các yếu tố vận tốc hoặc chứa những yếu tố ấy nhưng nhờ các phương pháp tích phân có thể nhận được những phương trình liên kết tương đương không chứa các yếu tố vận tốc thì liên kết được gọi là hôlônôm:

$$f_\alpha\,(\,x_k,\ y_k,\ z_k) = 0, \quad \alpha = 1, \quad s < 3N. \qquad (3\text{–}4)$$

Ngược lại nếu phương trình liên kết chứa các yếu tố vận tốc mà bằng các phương pháp tích phân không loại trừ được các yếu tố đó khỏi các phương trình liên kết thì liên kết được gọi là không hôlônôm. Cơ hệ với liên kết hôlônôm được gọi là cơ hệ hôlônôm, còn nếu trong các liên kết có liên kết không hôlônôm thì cơ hệ được gọi là cơ hệ không hôlônôm.

b) Di chuyển khả dĩ và số bậc tự do của cơ hệ. Di chuyển khả dĩ của cơ hệ là tập hợp các di chuyển vô cùng bé của các chất điểm thuộc cơ hệ từ vị trí đang xét sang vị trí lân cận mà các liên kết đặt lên cơ hệ cho phép.

Điều kiện để $\{\delta\vec{r}_k\}$ $(k = \overline{1,N})$ là một di chuyển khả dĩ của cơ hệ hôlônôm (3–4) là

$$\sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_k}\,\delta\vec{r}_k = 0, \qquad (3\text{–}5)$$

hoặc trong dạng :

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k}\,\delta x_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k}\,\delta y_k + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k}\,\delta z_k\right) = 0 \qquad (3\text{–}5)'$$

Số bậc tự do của cơ hệ là số tối đa các di chuyển khả dĩ độc lập tuyến tính của cơ hệ, nghĩa là bằng số biến phân độc lập của các tọa độ.

Số bậc tự do của cơ hệ chịu liên kết hôlônôm bằng

$$m = 3N - s \tag{3-6}$$

trong đó N số chất điểm của cơ hệ và s là số phương trình liên kết.

*c) **Tọa độ suy rộng*** là tập hợp những thông số đủ để xác định vị trí cơ hệ, chúng được ký hiệu qua $\{q_j\}$ ($j = \overline{1,r}$). Các tọa độ Đề các của các chất điểm đều có thể được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng :

$$\begin{aligned} x_k &= x_k (t, q_1, \ldots, q_r), \\ y_k &= y_k (t, q_1, \ldots, q_r), \\ z_k &= z_k (t, q_1, \ldots, q_r) \end{aligned} \tag{3-7}$$

hoặc trong dạng viết ngắn gọn :

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k (t, q_1, \ldots, q_r). \tag{3-7'}$$

Từ (3 – 7) và (3 – 7') ta có :

$$\begin{aligned} \delta x_k &= \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j ; \\ \delta y_k &= \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \delta q_j ; \\ \delta z_k &= \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned} \tag{3-8}$$

hay trong dạng viết ngắn gọn

$$\delta \vec{r} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j ; \tag{3-8'}$$

Tọa độ suy rộng đủ là tập hợp các tọa độ suy rộng độc lập với nhau $\{q_j\}$ ($j = \overline{1,n}$).

Tọa độ suy rộng thừa là tập hợp các tọa độ suy rộng lớn hơn số tọa độ suy rộng đủ. Giữa các tọa độ suy rộng thừa có mối ràng buộc đối với nhau.

Đối với cơ hệ hôlônôm thì giữa các tọa độ suy rộng thừa $\{q_j\}$ ($j = \overline{1,r} > n$) sẽ tồn tại các hệ thức

$$f_\beta (t, q_1, q_2, \ldots, q_r) = 0 \; ; \; \beta = \overline{1,s} \qquad (3-9)$$

Điều kiện để $\{\delta q_j\}$ ($j = \overline{1,r}$) là di chuyển khả dĩ của cơ hệ :

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_\beta}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \; ; \; \beta = \overline{1,s} \qquad (3-10)$$

Số bậc tự do của cơ hệ (3 – 9) bằng :

$$m = r - s$$

Nếu $\{q_j\}$ ($j = \overline{1, n}$) là các tọa độ suy rộng đủ thì không tồn tại các hệ thức (3 – 9), tức $s = 0$. Vậy

$$m = n$$

tức số bậc tự do của cơ hệ hôlônôm bằng số tọa độ suy rộng đủ.

d) Lực suy rộng

α – Công khả dĩ của các lực :

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx} \delta x_k + F_{yk} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) \qquad (3-11)$$

hoặc

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \sum_{i=1}^{r} Q_i \delta q_i \qquad (3-12)$$

trọng đó :

$$Q_i = \sum_{k=i}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{N} \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) \qquad (3-13)$$

được gọi là lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng q_i. Chú ý rằng đối với cơ hệ hôlônôm và các tọa độ suy rộng là đủ thì $\{\delta q_j\}$ ($j = \overline{1,n}$) trong (3 – 12) độc lập đối với nhau. Còn trong trường hợp tọa độ suy rộng thừa thì giữa các $\{\delta q_j\}$ ($j = \overline{1,r} > n$) có quan hệ phụ thuộc (3 –10).

Trong trường hợp cơ hệ là bảo toàn và hàm thế năng có dạng

$$\Pi = \Pi (q_1, \ldots, q_n), \qquad (3-14)$$

thì $$Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, r} \; ; \tag{3-15}$$

thứ nguyên của lực suy rộng

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}.$$

Vì vậy nếu chọn tọa độ suy rộng là độ dài thì lực suy rộng có thứ nguyên của lực thông thường, nếu chọn tọa độ suy rộng là góc thì lực suy rộng có thứ nguyên của ngẫu lực.

β – Các phương pháp tính suy rộng :

Phương pháp 1. Tính lực suy rộng theo định nghĩa (3–13). Muốn vậy ta tìm hình chiếu các lực trên các trục tọa độ Đề các cùng biểu thức của tọa độ điểm đặt lực theo tọa độ suy rộng từ (3–7) và tính các đạo hàm của các tọa độ Đềcác theo các tọa độ suy rộng rồi thay các đại lượng tính được vào (3–13).

Phương pháp 2. Tính tổng công khả dĩ của các lực trong tọa độ Đềcác, sau đó biểu diễn các di chuyển khả dĩ qua các biến phân của tọa độ suy rộng theo (3–8). Nhờ đó viết biểu thức công khả dĩ trong dạng (3–12). Các hệ số đứng trước các biến phân của các tọa độ suy rộng sẽ là các lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng.

Phương pháp 3. Trong trường hợp các tọa độ suy rộng đủ có thể tính riêng từng lực suy rộng bằng cách chọn những di chuyển khả dĩ đặc biệt. Ví dụ để tính lực suy rộng Q_1 ta chọn một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau :

$$\delta q_1 = 0 \; ; \; \delta q_2 = 0 \; ; \; ... \; ; \; \delta q_{i-1} = 0 \; ;$$
$$\delta q_i \neq 0 \; ; \; \delta q_{i+1} = 0 \; ; \; ... \; ; \; \delta q_n = 0,$$

tức cho hệ một di chuyển khả dĩ trong đó chỉ có tọa q_i thay đổi, còn các tọa độ khác không đổi. Tính tổng công khả dĩ của các lực trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này, ký hiệu là $\sum \delta A_F(\delta q_i)$. Khi đó lực suy rộng Q_i sẽ bằng

$$Q_i = \frac{\sum \delta A_F(\delta q_i)}{\delta q_i}$$

Chú thích : Khi tính công khả dĩ của các lực có thể áp dụng các công thức tính công nguyên tố của lực đã biết (xem § 2-4), trong đó các vi phân tọa độ được thay bằng các biến phân tọa độ. Thí dụ, trong trường hợp vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định ta có

$$\sum \delta A_F = [\sum \overline{m}_z (\vec{F}_k)]\ \delta\varphi, \qquad (3\text{-}16)$$

còn trong trường hợp vật rắn chuyển động song phẳng thì

$$\sum \delta A_F = [\sum \overline{m}_P (\vec{F}_k)]\ \delta\varphi_s \qquad (3\text{-}17)$$

trong đó P là tâm quay tức thời của hình phẳng.

e) Liên kết lý tưởng

α – Phân loại lực tác dụng lên cơ hệ không tự do. Các lực tác dụng lên cơ hệ không tự do được phân thành các lực liên kết và các lực hoạt động. Các lực liên kết là thể hiện tác dụng về mặt động lực của các liên kết cơ hệ. Các lực tác dụng lên cơ hệ không tự do không phải là các lực liên kết được gọi là các lực hoạt động. Một tính chất rất quan trọng của lực liên kết là nó phụ thuộc vào các lực hoạt động và do đó phụ thuộc vào chuyển động cơ hệ.

β – Liên kết lý tưởng. Nếu tổng công nguyên tố của các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không thì liên kết đặt lên hệ được gọi là lý tưởng :

$$\sum \delta A (\vec{R}_k) = \sum \vec{R}_k\ \delta\vec{r}_k = 0. \qquad (3\text{-}18)$$

Các cơ hệ chịu liên kết lý tưởng thường gặp là :

– Vật rắn tự do (H. 3-1).

– Vật rắn tựa trên một mặt tựa rắn và nhẵn (H. 3-2).

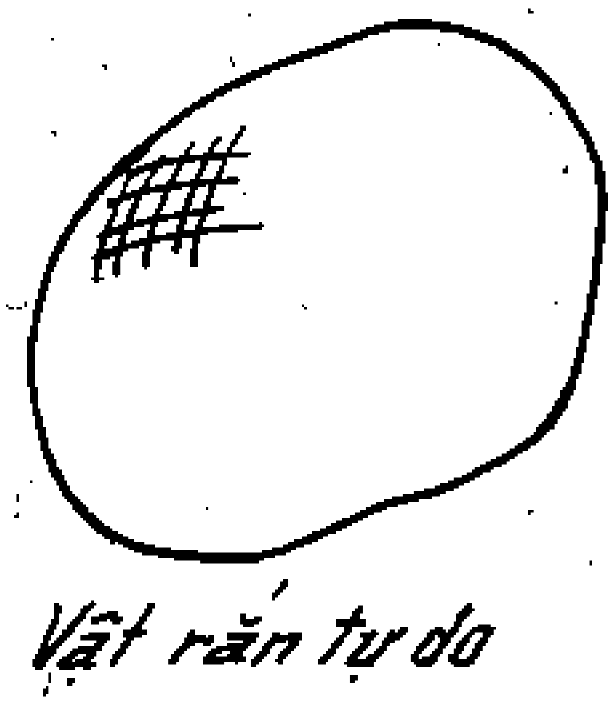
– Vật rắn lăn không trượt trên mặt tựa rắn (H. 3-3).

– Khớp nối bản lề trơn giữ hai vật (H. 3-4).

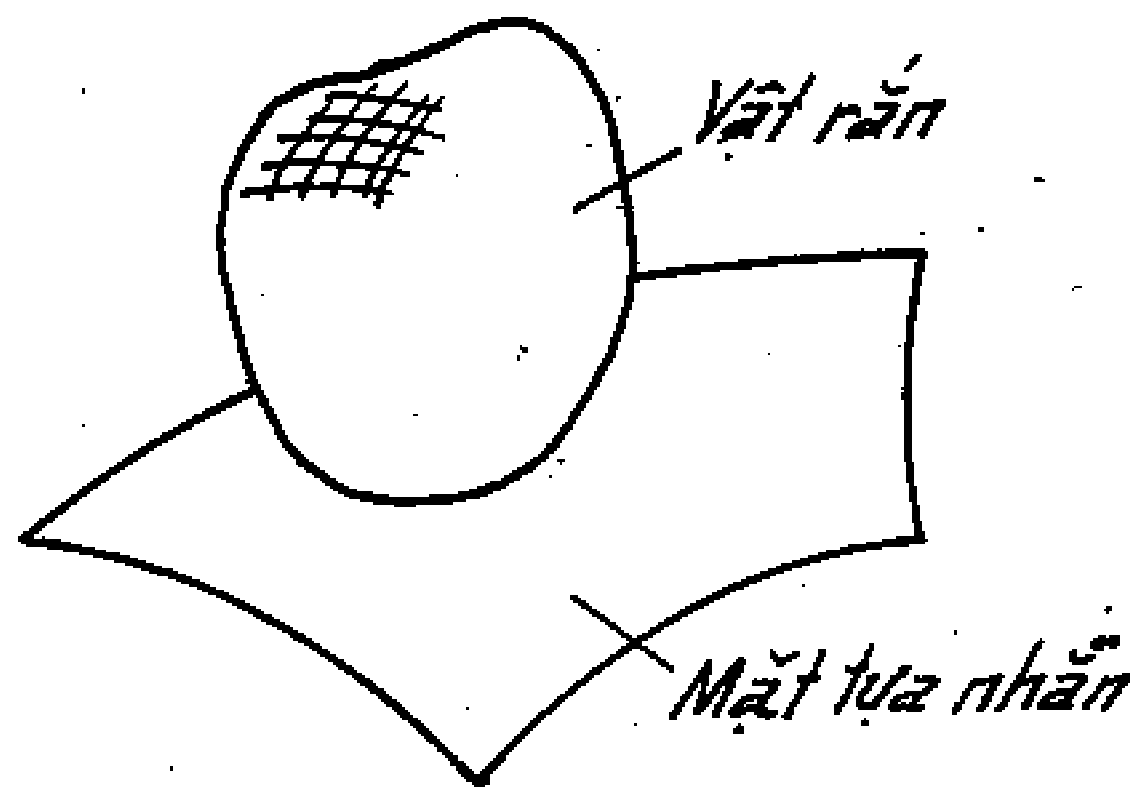
– Liên kết dây (H. 3-5).

– Dây mềm vắt qua ròng rọc cố định không ma sát (H. 3-5).

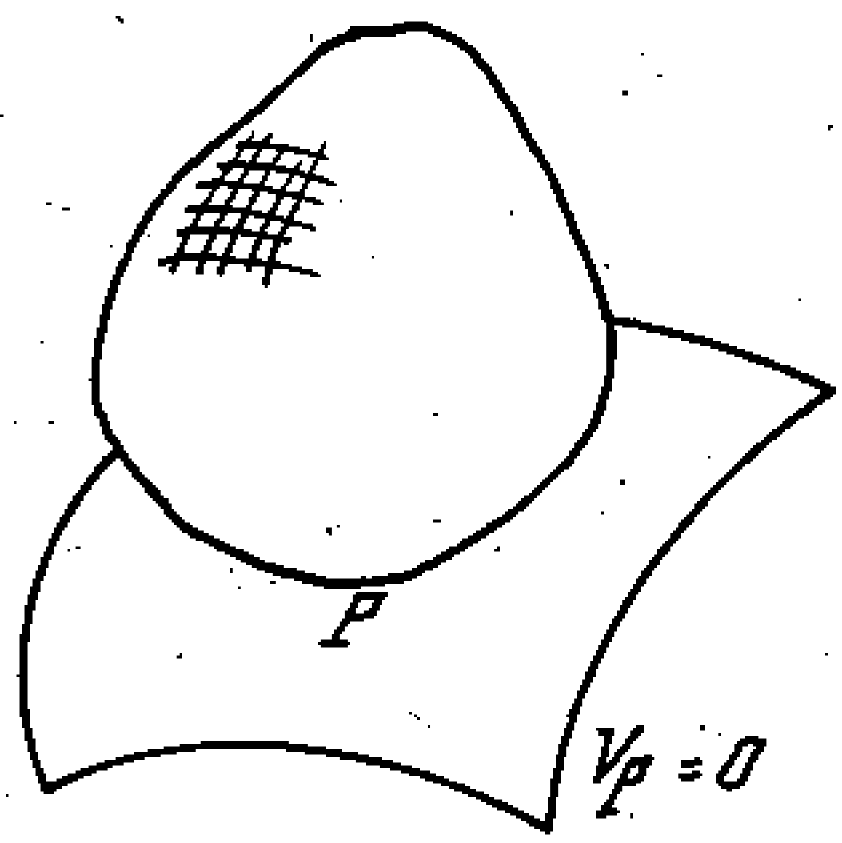
– Dây mềm vắt qua ròng rọc động và bỏ qua sự trượt giữa dây và ròng rọc (H. 3-6).



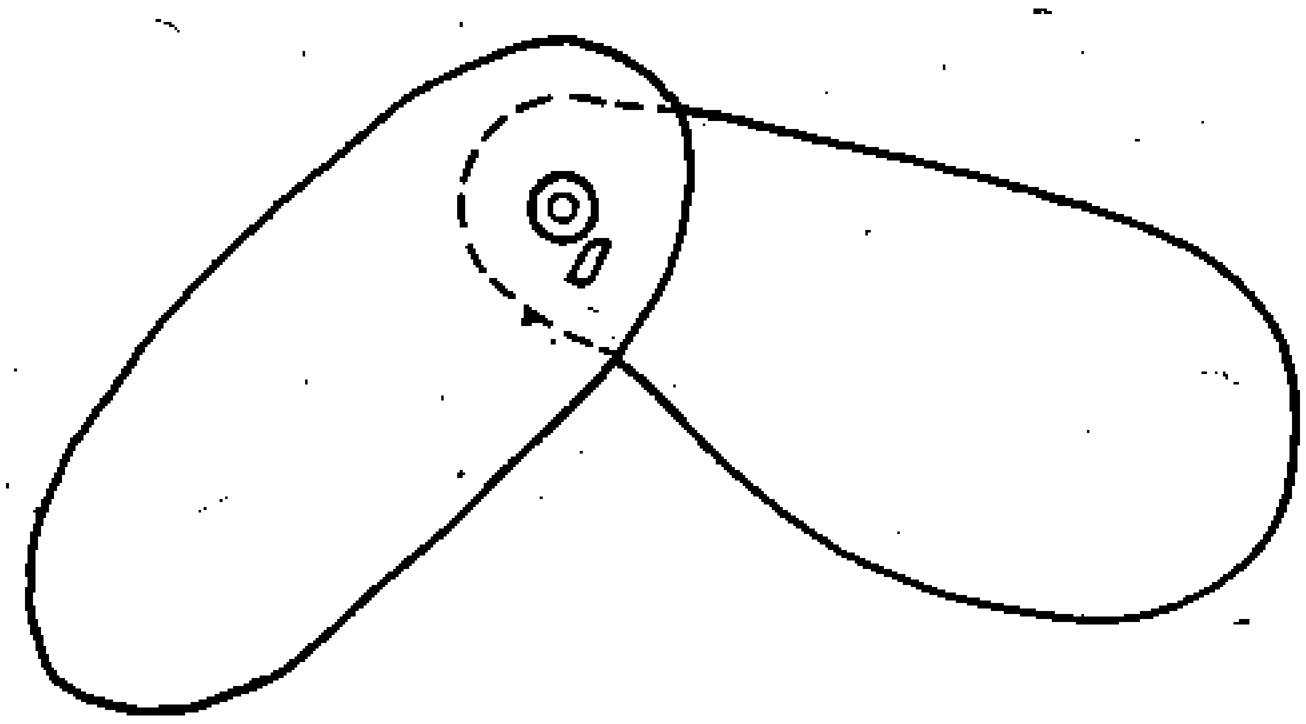
HÌNH 3-1



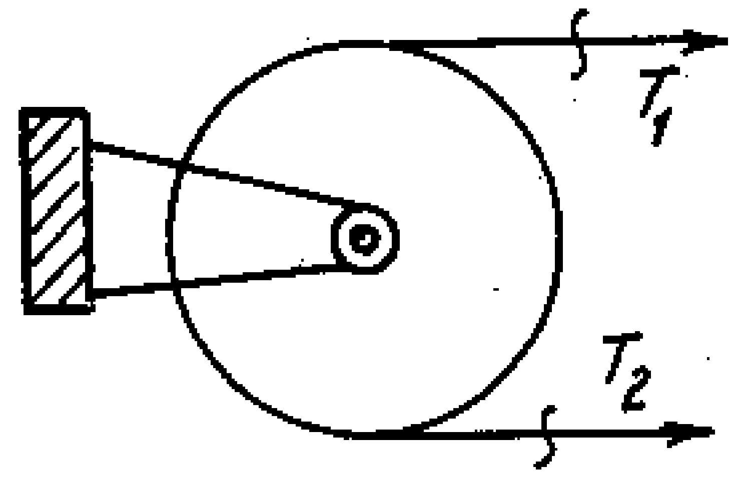
HÌNH 3-2



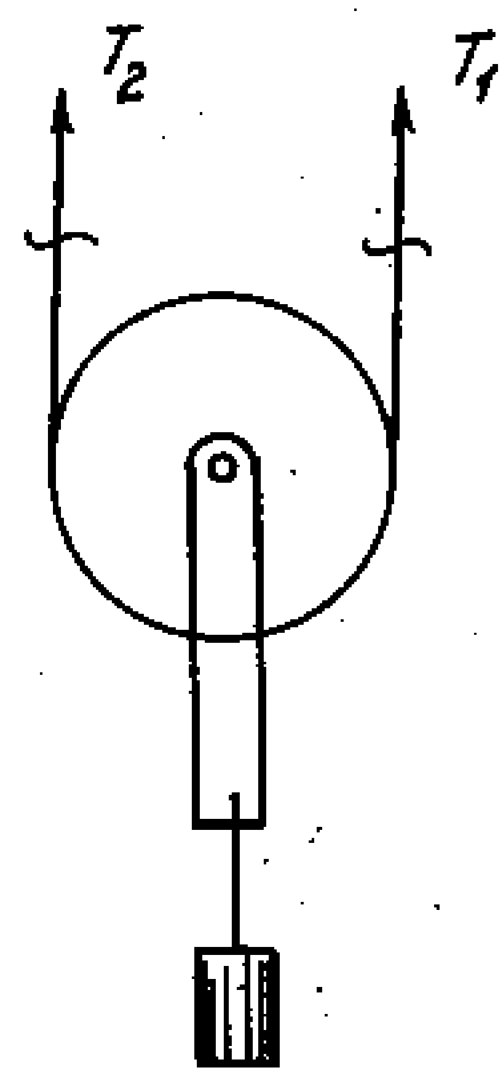
HÌNH 3-3



HÌNH 3-4

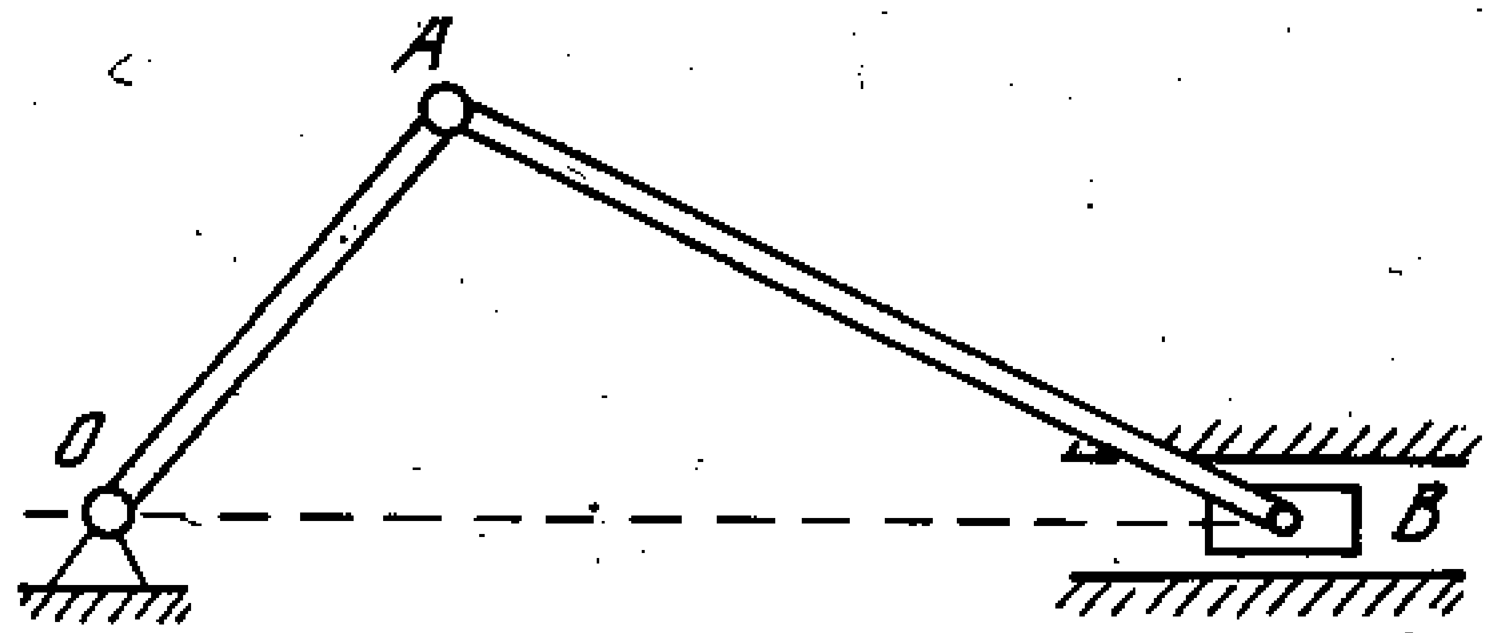


HÌNH 3-5



HÌNH 3-6

– Các cơ hệ phức tạp được cấu thành do nhiều cơ hệ đơn giản trên (H. 3–7).



HÌNH 3 –7

Chú ý rằng đối với những liên kết có ma sát thì trong nhiều trường hợp các lực ma sát được xếp vào loại lực hoạt động như lực ma sát trượt trong trường hợp chuyển động trượt hoặc lăn có trượt, ngẫu lực ma sát lăn, lực đàn hồi,...

3.1.2. Điều kiện cân bằng tổng quát của cơ hệ

Nguyên lí di chuyển khả dĩ :

Đối với cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng ở vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trong mọi di chuyển khả dĩ từ vị trí đang xét đều bằng không

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \, \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (3\text{–}19)$$

3.1.3. Điều kiện cân bằng của cơ hệ hôlônôm

Đối với cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng ở vị trí đang xét là các lực suy rộng của các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ ứng với các tọa độ suy rộng đủ tính đối với vị trí đang xét đều bằng không

$$Q_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (3\text{–}20)$$

Trong trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ là các lực có thế và giả sử hàm thế năng Π có dạng

$$\Pi = \Pi\,(q_1, \dots q_n).$$

thì điều kiện cân bằng của cơ hệ có dạng sau :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \qquad i = \overline{1, n} \tag{3-21}$$

3.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Các bài toán thường gặp :

1. Tìm điều kiện cân bằng của cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do (điều kiện về lực hoạt động, về vị trí cân bằng) khi giải loại bài toán này đầu tiên cần xác định số bậc tự do của cơ hệ, sau đó chọn các tọa độ suy rộng đủ và tính các lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với các tọa độ suy rộng đủ và cuối cùng viết điều kiện cân bằng (3-20). Đối với trường hợp khi các lực hoạt động là các lực có thế thì thay cho việc tính lực suy rộng chúng ta tính hàm thế năng và sử dụng điều kiện dạng (3-21).

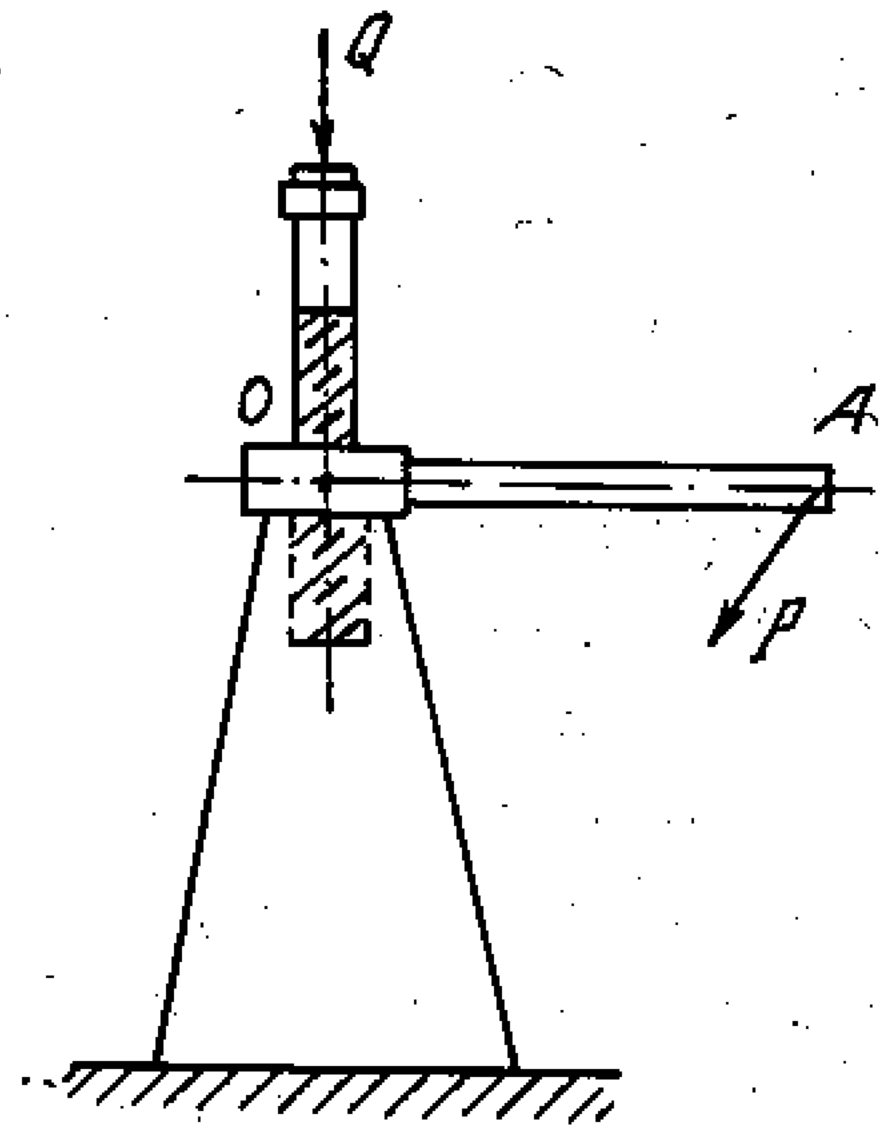
2. Xác định các phản lực liên kết của các hệ cơ học tĩnh định (số bậc tự do bằng không). Đối với loại bài toán này, đầu tiên cần thay thế cơ hệ đang khảo sát bằng cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do nhờ tiên đề giải phóng liên kết. Nói cách khác, ta cần phải phá vỡ các liên kết mà các phản lực của chúng cần phải xác định và thay thế các liên kết bị phá vỡ bằng những phản lực liên kết. Khi đó số bậc tự do cơ hệ bằng số thành phần (ẩn) của các liên kết bị phá vỡ. Bằng cách đó chúng ta đưa bài toán về bài toán đã nói ở mục 1.

Chú thích : a – Khi chọn các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ có thể từ việc phân tích khả năng chuyển động cơ hệ để biết số bậc tự do cơ hệ và nhờ đó chọn các tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ.

b – Khi tính công các lực trong di chuyển khả dĩ có thể áp dụng mọi công thức tính công đã biết (xem §2-4).

3.3. BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 3-1. Dùng kích (H. 3-8) để nâng vật có khối lượng m = 5020 kg. Tay quay OA có độ dài là a = 0,6 m và bước của trục vít là h = 12mm. Tác dụng vào đầu mút A của tay quay một lực $\vec{P}$ hướng vuông góc với chính tay quay và với đường tâm của thanh vít. Tìm cường độ của lực $\vec{P}$ khi cơ hệ cân bằng. Bỏ qua ma sát.



HÌNH 3-8

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm toàn bộ kích. Cơ hệ có một bậc tự do với liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng.

Chọn tọa độ suy rộng $q = \varphi$; φ là góc quay của tay quay OA. Hệ các lực hoạt động gồm lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$, ở đó $\vec{Q}$ là trọng lượng vật được nâng.

Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ ứng với $\{\delta\varphi, \delta h\}$, trong đó δh là di chuyển khả dĩ của vật được nâng ứng với di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$ của tay quay OA. Biết rằng khi tay quay quay được góc 2π thì vật được nâng một đoạn là h.

Từ đó ta có :
$$\delta h = \frac{h}{2\pi}\delta\varphi.$$

Tổng công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ bằng

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = P.a\delta\varphi - Q\delta h = \left(P.a - \frac{Qh}{2\pi}\right)\delta\varphi.$$

Vậy lực suy rộng của các lực hoạt động với tọa độ suy rộng φ bằng

$$Q_\varphi = P.a - \frac{Qh}{2\pi}.$$

Từ điều kiện cân bằng cơ hệ

$$Q_\varphi = 0.$$

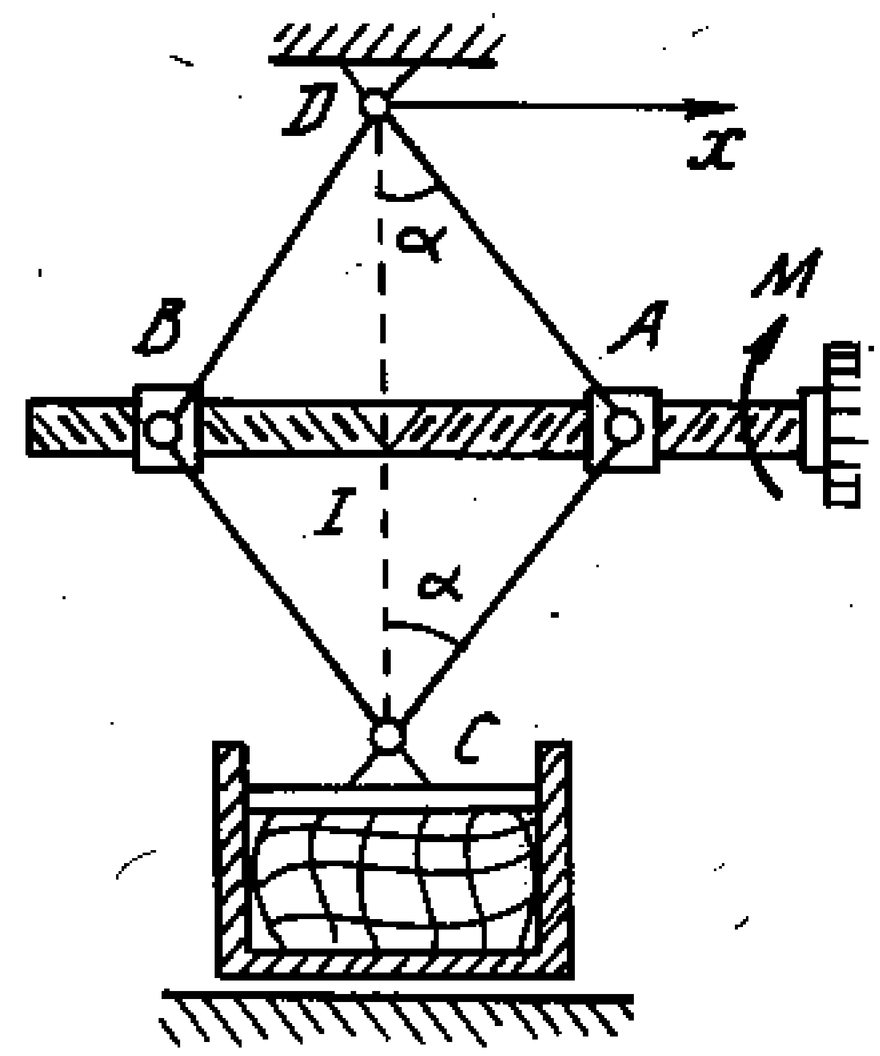
ta có
$$P = \frac{Qh}{2\pi a}$$

Khi thay số ta nhận được

$$P = \frac{5020 \times 9{,}81 \times 0{,}012}{2 \times 3{,}14 \times 0{,}6} = 157 \text{ N}$$

Thí dụ 3-2. Máy ép có khuỷu được cấu tạo như hình trên hình 3–9.

Khung ép gồm bốn thanh mảnh cứng nhẹ và cùng chiều dài a nối với nhau bằng bản lề ở bốn đỉnh : đỉnh trên cùng cố định ; đỉnh dưới cùng mắc vào bàn ép nằm ngang, hai đỉnh hai bên được mắc vào hai con chạy có tiện ren ốc. Hai ốc ren này được mắc vào một trục vít có các ren ở hai đầu thanh xoắn ngược chiều nhau ; với cùng bước ren là h. Ở đầu cùng thanh vít có gắn một vô lăng nhỏ. Vào lúc góc mở của khung ở hai đỉnh trên và dưới là 2α, ta tác dụng vào vô lăng một ngẫu lực có mômen quay M. Tìm lực ép của bàn ép tác dụng xuống vật chịu ép. Bỏ qua ma sát ở các khớp nối và những chỗ tiếp xúc.



HÌNH 3–9

Bài giải. Cơ hệ khảo sát là cơ cấu máy ép không kể vật chịu ép. Vị trí của cơ cấu được hoàn toàn xác định bằng góc α làm bởi thanh DA và đường thẳng đứng. Vậy cơ hệ có một bậc tự do.

Chọn tọa độ suy rộng đủ là góc định vị của vô lăng $q = \varphi$.

Khi bỏ qua ma sát, liên kết của cơ hệ là liên kết lý tưởng.

Để tìm lực ép của bàn ép ta tìm phản lực $\vec{N}$. Nhằm mục đích này ta phá vỡ liên kết và xem phản lực $\vec{N}$ thuộc vào các lực hoạt động cùng với ngẫu lực M tác dụng lên vô lăng.

Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ bằng cách cho vô lăng một di chuyển khả dĩ $\delta\varphi$, khi đó A có di chuyển δx_A và bàn ép di chuyển xuống một đoạn δy_c.

Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động sẽ bằng

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = M\delta\varphi - N\delta y_c.$$

Vì rằng

$$y_A = a\cos\alpha \text{ và } y_C = 2y_A = 2a\cos\alpha$$

nên $$\delta y_C = -2a\sin\alpha.\,\delta\alpha.$$

Ngoài ra ta có mối liên hệ giữa góc quay của trục vít và di chuyển tịnh tiến của con chạy A

$$\delta x_A = -\frac{h\delta\varphi}{2\pi}.$$

Mặt khác $x_A = a\sin\alpha$; $\delta x_A = a\cos\alpha.\delta\alpha$

Vậy $$a\cos\alpha\delta\alpha = -\frac{h\delta\varphi}{2\pi}.$$

Từ đó $$\delta\alpha = -\frac{h}{2a\cos\alpha\,\pi}\delta\varphi$$

và $$\delta y_c = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha = \frac{h}{\pi}\mathrm{tg}\alpha\,\delta\varphi$$

Biểu thức tổng công khả dĩ của các lực có thể viết trong dạng sau :

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = \left(M - \frac{Nh}{\pi}\mathrm{tg}\alpha\right)\delta\varphi.$$

Lực suy rộng của các lực hoạt động với tọa độ suy rộng đủ φ bằng

$$Q_\varphi = M - \frac{Nh}{\pi}\mathrm{tg}\alpha.$$

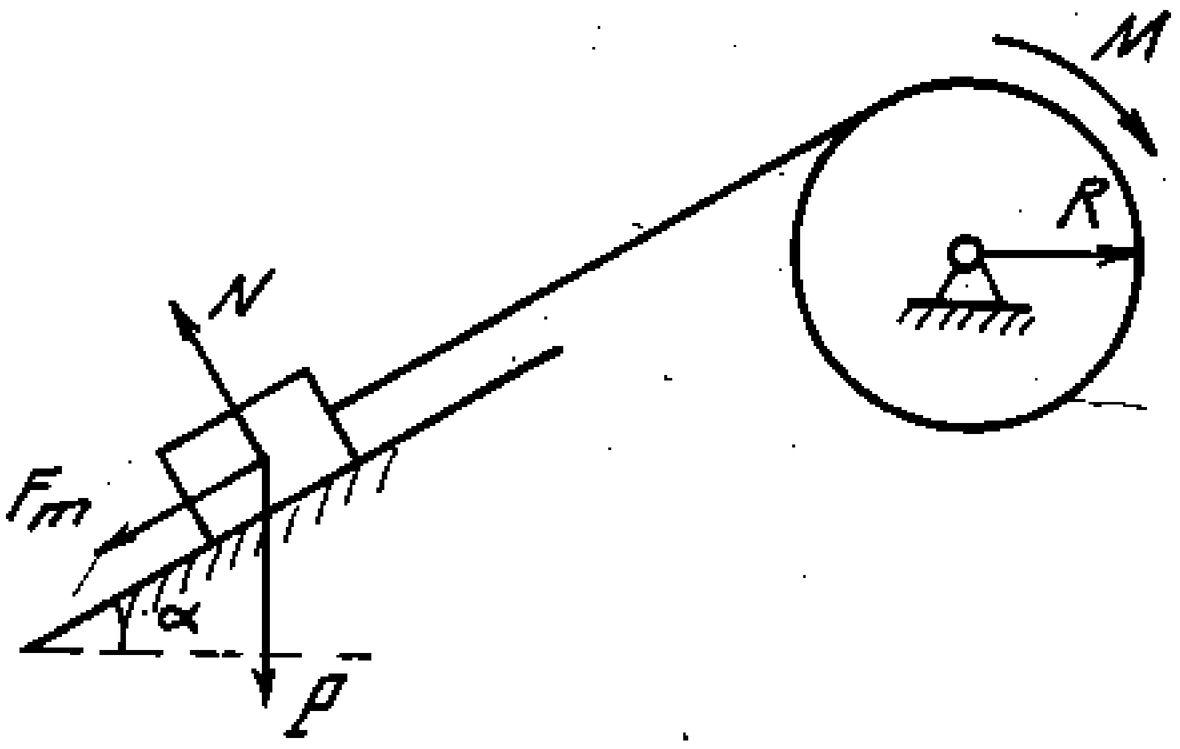
Từ điều kiện cân bằng của hệ :

$$Q\varphi = 0,$$

ta nhận được $$N = \frac{M}{h}\pi\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Đó cũng chính là giá trị của lực ép đang cần tìm.

Thí dụ 3-3. Dùng tời kéo vật A lên dốc với góc nghiêng α so với phương ngang. Vật A có trọng lượng P. Hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là f. Tác dụng lên trục tời ngẫu lực phát động có mômen M. Bán kính trục tời là R. Tìm điều kiện để kéo được vật lên từ trạng thái nghỉ (H. 3-10). Bỏ qua ma sát ở ổ trục kéo và trọng lượng dây.



HÌNH 3 – 10

Bài giải. Cơ hệ đang xét có một bậc tự do và chịu liên kết lý tưởng, nếu coi lực ma sát trượt của mặt dốc tác dụng lên vật A là lực hoạt động cùng với các trọng lực và ngẫu lực phát động. Chọn tọa độ suy rộng là góc quay của tời, q = φ.

Để tìm điều kiện cân bằng của vật A chúng ta xét hai trường hợp : vật A sắp trượt lên và vật A sắp trượt xuống.

Giả sử vật A sắp trượt lên. Lúc đó lực ma sát hướng xuống.

Cho hệ di chuyển khả dĩ ứng với tời quay một góc $\delta\varphi$ thuận kim đồng hồ và vật A di chuyển lên dọc mặt phẳng nghiêng một đoạn δs. Rõ ràng, ta có :

$$\delta s = R\delta\varphi.$$

Khi chú ý rằng

$$F_{ms} = fN = f\,P\cos\alpha,$$

ta có

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = [\,M - P\,(\,\sin\alpha + f\cos\alpha\,)\,R\,]\,\delta\varphi.$$

Vậy lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng φ là :

$$Q_\varphi = M - P\,(\,\sin\alpha + f\cos\alpha\,)\,R.$$

Khi vật A sắp trượt lên nhưng vẫn còn cân bằng ta có :

$$Q_\varphi = M - P\,(\,\sin\alpha + f\cos\alpha\,)\,R = 0.$$

Vậy để vật không trượt lên cần phải có :

$$M \leqslant P\ (\sin\alpha + f\cos\alpha)R.$$

Bây giờ xét trường hợp vật A sắp trượt xuống. Lúc đó lực ma sát sẽ hướng lên. Lặp lại lý luận như trên ta nhận được điều kiện cân bằng của vật A khi nó có khuynh hướng trượt xuống

$$M - P\ (\sin\alpha - f\cos\alpha)\ R = 0.$$

Để vật không trượt xuống cần phải thực hiện điều kiện :

$$M \geqslant P\ (\sin\alpha - f\cos\alpha)\ R,$$

Như vậy vật A cân bằng (nghĩa là không trượt lên cũng không trượt xuống), thì điều kiện sau cần được thỏa mãn :

$$PR\ (\sin\alpha - f\cos\alpha) \leqslant M \leqslant PR\ (\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

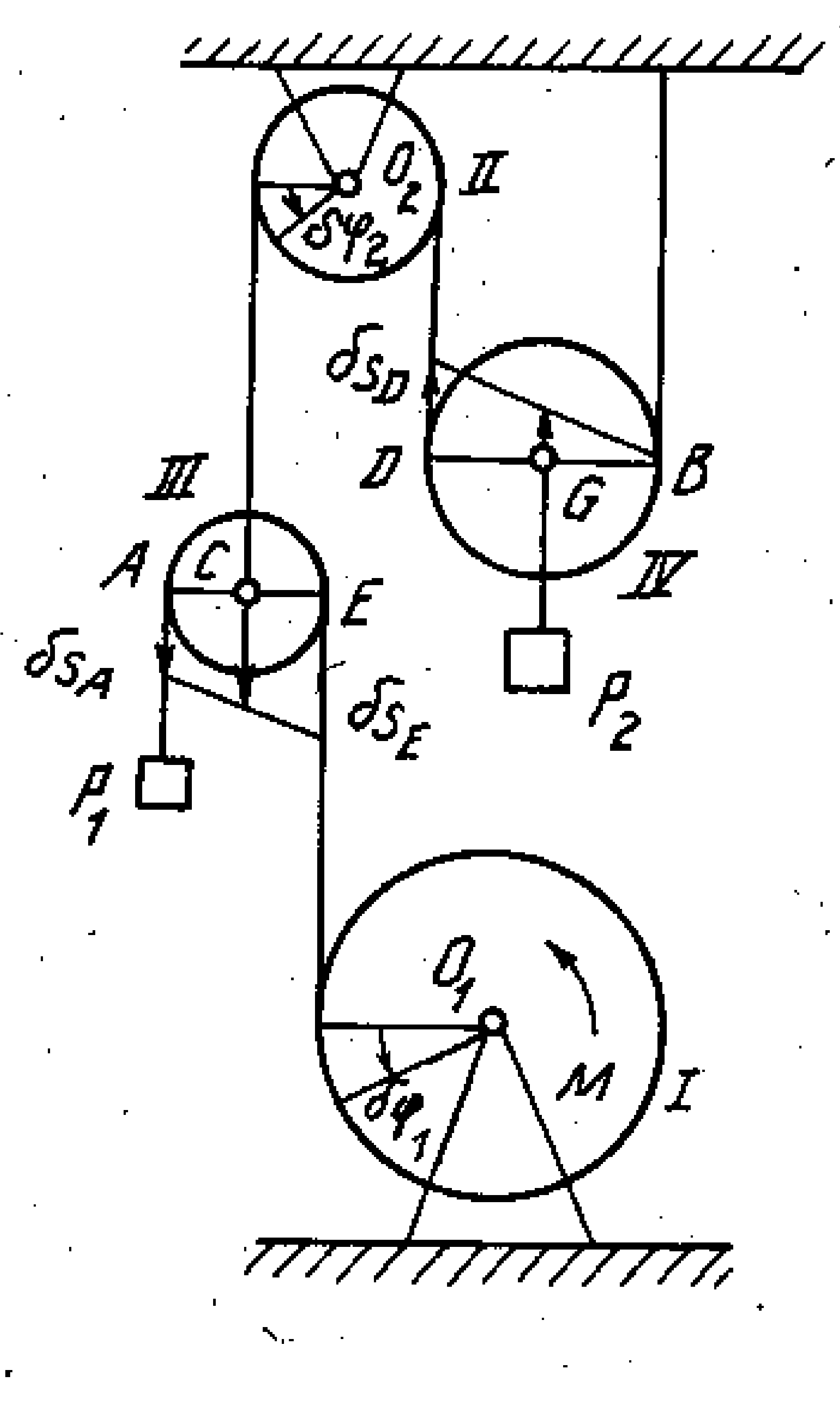
Nếu một trong hai điều kiện đó bị phá vỡ thì A sẽ không cân bằng tức bị kéo lên hoặc bị trượt xuống.

Thí dụ 3-4. Cho cơ hệ như trên hình vẽ (H. 3-11). Xác định mômen M của ngẫu lực cần đặt vào trục kéo I và tỉ số trọng lượng của hai vật để cho cơ hệ cân bằng. Cho bán kính của trục tời là R. Bỏ qua trọng lượng của ròng rọc và ma sát ở các ổ trục quay :

Bài giải. Hệ khảo sát gồm có trục kéo I, các ròng rọc II, III, IV cùng dây vắt qua chúng và hai vật có trọng lượng lần lượt P_1, P_2. Cơ hệ có hai bậc tự do.

Có thể chọn $q_1 = \varphi_1$; $q_2 = \varphi_2$, ở đó φ_1 và φ_2 là hai góc định vị của trục I và của ròng rọc II tương ứng làm các tọa độ suy rộng đủ.

Các lực hoạt động gồm có các trọng lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ và ngẫu lực M.



HÌNH 3-11

Để tính các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng đủ ta cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ bất kì ứng với góc quay vô cùng bé $\delta\varphi_1$ và $\delta\varphi_2$ của trục I và ròng rọc II. Quy ước rằng các di chuyển thẳng đứng là dương nếu chúng hướng lên và là âm khi chúng hướng xuống, các di chuyển góc là dương khi chúng ngược với chiều quay của kim đồng hồ và là âm trong trường hợp trái lại. Gọi δs_1, δs_2 là di chuyển khả dĩ của các điểm đặt của các lực $\vec{P}_I$ và $\vec{P}_2$. Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động bằng :

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = M\delta\varphi_1 - P_1\delta s_1 - P_2\delta s_2.$$

Để biểu diễn các biến phân δs_1, δs_2 theo $\delta\varphi_1$ và $\delta\varphi_2$ chúng ta chú ý rằng ròng rọc IV có tâm vận tốc tức thời là B, nên

$$\delta s_2 = \delta s_D \text{ và } \delta s_D = \frac{r\delta\varphi_2}{2}.$$

Ngoài ra ròng rọc III chuyển động song phẳng nên ta có

$$\delta s_c = \frac{\delta s_A + \delta s_E}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\delta s_1 = \delta s_A = 2\delta s_C - \delta s_E.$$

Nhưng

$$\delta s_C = -r\delta\varphi_2, \quad \delta s_E = -R\delta\varphi_1,$$

nên

$$\delta s_1 = -2r\delta\varphi_2 + R\delta\varphi_1,$$

Thay các giá trị đó của δs_1 và δs_2 vào biểu thức tổng công khả dĩ ta có :

$$\sum\delta A(\vec{F}_k) = M\delta\varphi_1 - P_1(R\delta\varphi_1 - 2r\delta\varphi_2) - P_2\frac{r\delta\varphi_2}{2} =$$

$$= (M - P_1R)\,\delta\varphi_1 + r\left(2P_1 - \frac{P_2}{2}\right)\delta\varphi_2.$$

Vậy các lực suy rộng Q_1 và Q_2 ứng với các tốc độ suy rộng đủ φ_1 và φ_2 là

$$Q_1 = M - P_1R \ ; \qquad Q_2 = r\left(2P_1 - \frac{P_2}{2}\right).$$

Điều kiện cân bằng của cơ hệ sẽ là

$$M - P_1R = 0 \ ; \quad 2P_1 - \frac{P_2}{2} = 0$$

Từ đó ta nhận được

$$M = P_1R \ ; \qquad P_2 = 4P_1.$$

Chú thích : Để tìm các lực suy rộng Q_1, Q_2 có thể sử dụng phương pháp 3 đã nêu ở phần cơ sở lý thuyết. Thí dụ, để tính lực suy rộng Q_1 ứng với tọa độ suy rộng φ_1 ta cho hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta\varphi_1 \neq 0$, $\delta\varphi_2 = 0$ và tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này.

Chú ý là trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này chỉ có ngẫu lực M và lực $\vec{P}_1$ sinh công (lực $\vec{P}_2$ không sinh công vì trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này ròng rọc IV đứng yên). Vậy tổng công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đặc biệt trên bằng :

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = M\delta\varphi_1 - P_1\delta s_A.$$

Vì trong di chuyển khả dĩ đặc biệt đã chọn ròng rọc III quay quanh tâm của mình. Do đó.

$$\delta s_A = \delta s_D = R\delta\varphi_1.$$

Thay giá trị của δs_A vào biểu thức của tổng công khả dĩ của các lực hoạt động, ta có :

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = (M - P_1R)\,\delta\varphi_1.$$

Từ đó

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A(\vec{F}_k)}{\delta\varphi_1} = M - P_1R$$

Bằng cách hoàn toàn tương tự, để tính lực suy rộng Q_2 ứng với tọa độ suy rộng φ_2 ta cho hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta\varphi_1 = 0$, $\delta\varphi_2 \neq 0$.

Chú ý rằng trong di chuyển khả dĩ đã chọn, ròng rọc I đứng yên (và do đó ngẫu lực M không sinh công) còn ròng rọc III và IV chuyển động song phẳng quanh những tâm vận tốc D và B tương ứng. Ta có

$$\delta s_A = 2\delta s_C \ ; \ \delta s_G = \frac{1}{2}\,\delta s_D \ ,$$

C và G là tâm ròng rọc III và IV tương ứng.

Vì :

$$\delta s_C = \delta s_D = r\delta\varphi_2 \ ,$$

nên

$$\delta s_A = 2r\delta\varphi_2 \ ; \ \delta s_G = \frac{r\delta\varphi_2}{2}.$$

Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đặc biệt đã chọn bằng :

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = P_1\delta s_A - P_2\delta s_G = 2P_1 r\delta\varphi_2 - P_2\,\frac{r}{2}\,\delta\varphi_2$$

Vậy

$$Q_2 = \frac{\sum \delta A(\vec{F}_A)}{\delta\varphi_2} = \left(2P_1 - \frac{P_2}{2}\right) r.$$

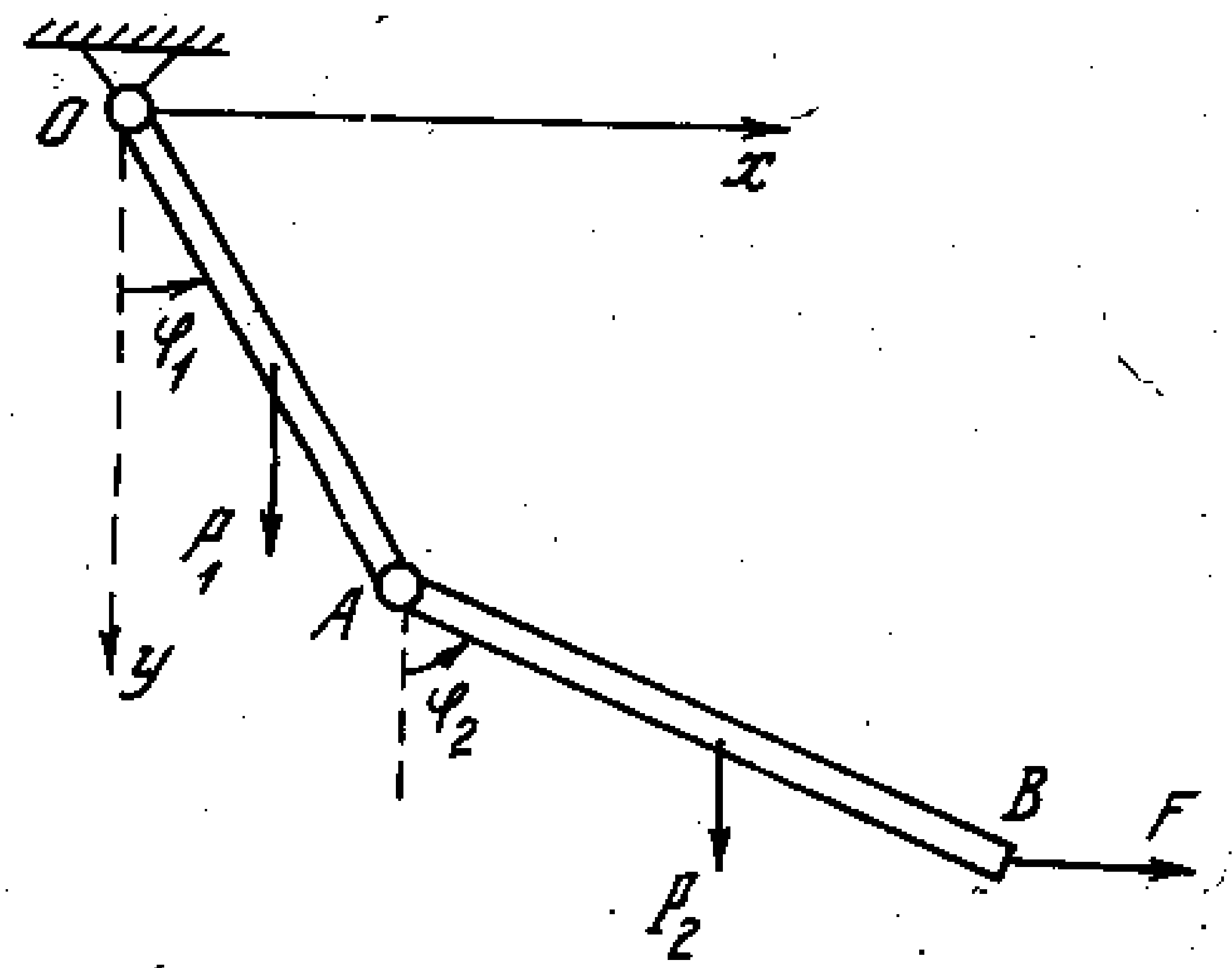
Chúng ta nhận được kết quả đã tìm ở trên.

Thí dụ 3–5. Hai thanh đồng chất OA và AB nối với nhau bằng bản lề A được treo vào tường nhờ bản lề O. Tại điểm B có lực $\vec{F}$ tác dụng theo phương ngang hướng từ trái sang phải. Cho $OA = 2l_1$; $AB = 2l_2$, trọng lượng của các thanh OA và AB lần lượt là P_1 và P_2. Cho biết cơ hệ ở trạng thái cân bằng. Tìm các góc lệch φ_1 và φ_2 của thanh OA và AB làm với phương thẳng đứng (H. 3–12).

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm hai thanh OA và AB. Chọn các tọa độ suy rộng là các góc lệch φ_1 và φ_2

$$q_1 = \varphi_1 \; ; \; q_2 = \varphi_2.$$

Rõ ràng các tọa độ này độc lập với nhau và đủ để xác định vị trí của cơ hệ, do đó cơ hệ có hai bậc tự do.



HÌNH 3-12

Hệ gồm các vật rắn liên kết với nhau bằng các bản lề không ma sát nên cơ hệ có liên kết lý tưởng. Các lực hoạt động gồm $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ và $\vec{F}$.

Để tính các lực suy rộng chúng ta sử dụng phương pháp thứ hai đã trình bày ở trên

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) = \sum\,(F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k).$$

Cho hệ trục Oxy như hình vẽ (hình 3-12).

Các lực hoạt động $\vec{P}_1$ (P_{1x}, P_{1y}) ; $\vec{P}_2$ (P_{2x}, P_{2y}), $\vec{F}$ (F_x, F_y) có các hình chiếu bằng :

$$P_{1x} = 0, \qquad P_{1y} = P_1, \qquad P_{2x} = 0,$$
$$P_{2y} = P_2, \qquad F_x = F, \qquad F_y = 0.$$

Điểm đặt của các lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ và $\vec{F}$ có các tọa độ :

$$x_1 = l_1\sin\varphi_1 \; ; \; y_1 = l_1\cos\varphi_1,$$
$$x_2 = 2l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \; ; \qquad y_2 = 2l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2,$$
$$x_3 = 2l_1\sin\varphi_1 + 2l_2\sin\varphi_2 \; ; \qquad y_3 = 2l_1\cos\varphi_1 + 2l_2\cos\varphi_2.$$

Từ đó suy ra :

$$\delta y_1 = -\,l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1$$
$$\delta y_2 = -\,2l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\delta\varphi_2,$$
$$\delta x_3 = 2l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + 2l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2.$$

Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động bằng :

$$\sum\delta A(\vec{F}_k) = P_{1x}\delta x_1 + P_{1y}\delta y_1 + P_{2x}\delta x_2 + P_{2y}\delta y_2 + F_x\delta x_3 + F_y\delta y_3 =$$

$$= -P_1 l_1 \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 + P_2\ (-2l_1\sin\varphi_1\delta\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\ \delta\varphi_2) +$$

$$+ F(2l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + 2l_2\cos\ \varphi_2\delta\varphi_2) =$$

$$= (-\ P_1 l_1\sin\varphi_1 - 2P_2 l_1\sin\varphi_1 + 2Fl_1\cos\varphi_1)\delta\varphi_1 +$$

$$+ (-\ P_2 l_2\sin\varphi_2 + 2Fl_2\cos\varphi_2)\ \delta\varphi_2.$$

Các hệ số của $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ trong biểu thức trên chính là các lực suy rộng Q_1, Q_2, ứng với các tọa độ suy rộng φ_1 , φ_2.

Vậy $$Q_1 = l_1\ [\ 2F\cos\varphi_1 - P_1 + 2P_2)\ \sin\ \varphi_1];$$

$$Q_2 = l_2\ (2F\cos\varphi_2 - P_2\sin\varphi_2).$$

Điều kiện cân bằng của cơ hệ : $Q_1 = 0$; $Q_2 = 0$ trở thành

$$2F\cos\varphi_1 - (P_1 + 2P_2)\ \sin\varphi_1 = 0,$$

$$2F\cos\varphi_2 - P_2\sin\varphi_2 = 0.$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được:

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{2F}{P_1+2P_2}\ ;\ \mathrm{tg}\varphi_2 = \frac{2F}{P_2}.$$

Sau đây chúng ta sẽ trình bày một phương pháp khác tính các lực suy rộng Q_1 và Q_2.

Vì các lực $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ là các lực có thế với hàm thế năng :

$$\Pi = -\ P_1 y_1 - P_2 y_2 + C =$$

$$= -\ P_1 l_1\ \cos\varphi_1 - P_2(2l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) + C,$$

ở đó C là hằng số, còn lực $\vec{F}$ là lực không thế nên

$$Q_j = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_j} + Q_j^*, \qquad j = 1,2$$

Q_j^* là lực suy rộng của lực không thế $\vec{F}$ nó được tính nhờ biểu thức

$$\sum\ \delta A(\vec{F}) = F_x\delta x_3 + F_y\delta y_3 = F\ (2l_1\cos\varphi_1\delta\varphi_1 + 2l_2\cos\varphi_2\delta\varphi_2).$$

Vậy : $Q_1^* = 2Fl_1\cos\varphi_1$; $Q_2^* = 2Fl_2\cos\varphi_2$.

Các lực suy rộng Q_1, Q_2 sẽ bằng :

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} + Q_1^* = l_1[2F\cos\varphi_1 - (P_1 + 2P_2)\sin\varphi_1],$$

$$Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} + Q_2^* = l_2(2F\cos\varphi_2 - P_2\sin\varphi_2).$$

Từ đó dễ dàng nhận được kết quả đã tìm thấy ở trên.

Thí dụ 3-6. Cho hệ dầm gồm hai thanh AB và BC nối với nhau bằng bản lề B, liên kết với tường nhờ ngàm A và với mặt nằm ngang nhờ gối tựa có con lăn C. Trên dầm AB có tải trọng phân bố đều với cường độ q_o N/m, tại điểm giữa của dầm OC có tác dụng lực tập trung P. Chiều dài của dầm AB bằng 2a và chiều dài của BC bằng 4a.

Tìm phản lực tại gối C và ngàm A. Bỏ qua ma sát (H. 3-13a).

Bài giải. Khảo sát hệ dầm đã cho. Đầu tiên ta tìm phản lực ở gối C.

Phá vỡ liên kết tại C và thay thế tác dụng của nó bằng phản lực $\vec{N}_c$ hướng thẳng đứng lên (H. 3-13b). Ta có cơ hệ một bậc tự do cân bằng dưới tác dụng các lực hoạt động $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và $\vec{N}_c$, trong đó $Q = 2aq_o$.

Cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt bằng cách cho dầm BC xoay quanh điểm B một góc vô cùng bé $\delta\varphi$ (H. 3-13b).

Điều đó có nghĩa là ta chọn tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ là góc định vị của dầm BC quay quanh B, $q = \varphi$.

Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động bằng.

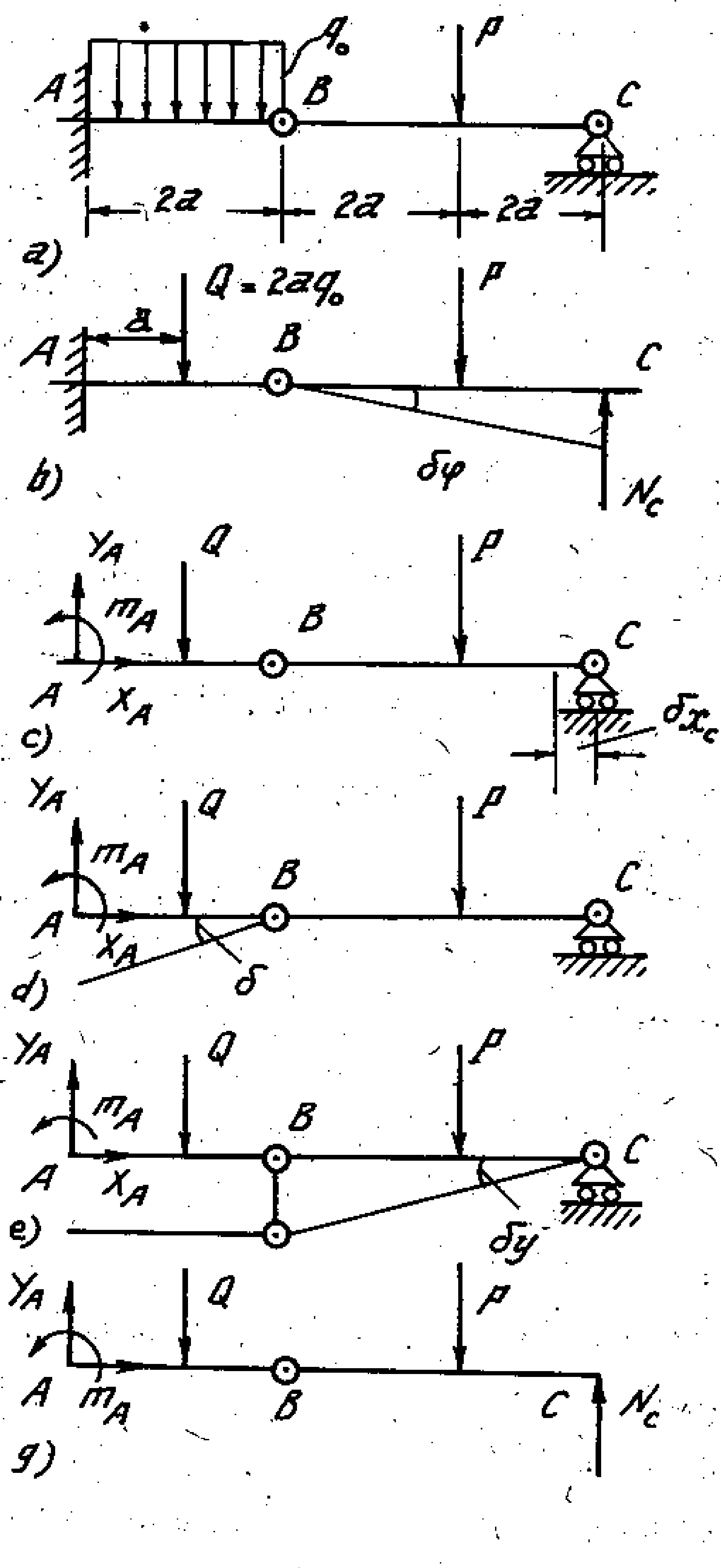
$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = [\overline{m}_B(\vec{P}) + \overline{m}_B(\vec{N}_C)]\,\delta\varphi =$$
$$= 2aP\delta\varphi - 4aN_C\delta\varphi.$$

Vậy các lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng φ bằng.

$$Q_\varphi = \frac{\sum \delta A(\vec{F}_k)}{\delta\varphi} = 2aP - 4aN_C$$

Khi sử dụng điều kiện cân bằng của hệ, $Q_\varphi = 0$, ta nhận được :

$$N_C = \frac{P}{2}$$



HÌNH 3–13

Bây giờ chuyển sang tìm phản lực của liên kết ngàm A : Muốn vậy ta phá vỡ liên kết ngàm A và thay thế tác dụng của nó bằng các lực $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ và ngẫu lực $\overline{m}_A$ (H. 3–13c).

Bằng cách như vậy ta có cơ hệ ba bậc tự do chịu tác dụng các lực hoạt động gồm các lực $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\overline{m}_A$

Chọn các tọa độ suy rộng đủ như sau : $q_1 = x_c$; $q_2 = \varphi$; $q_3 = \theta$, ở đó x_C là hoành độ của điểm C, φ và θ là các góc định vị của dầm BC và dầm AB quay tương ứng quanh C và B so với đường nằm ngang. Ta lần lượt tính các lực Q_{x_c}, Q_φ và Q_θ ứng với các tọa độ suy rộng x_C, φ và θ.

Để tính lực suy rộng Q_{x_c} ứng với tọa độ suy rộng x_C ta cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta x_C \neq 0$; $\delta\varphi = \delta\theta = 0$ (H.3–13c) và tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đặc biệt này.

$$\sum\delta A(\vec{F}_k) = - X_A\delta x_C.$$

Vậy :

$$Q_{x_c} = \frac{\sum \delta A(\vec{F}_k)}{\delta x_C} = - X_A.$$

Để tính lực suy rộng Q_θ ta cho hệ di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta x_C = 0$, $\delta\varphi = 0$, $\delta\theta \neq 0$ (H. 3–13 d). Tổng công các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ này là

$$\sum\delta A_\theta (\vec{F}_k) = (Qa + m_A - 2aY_A) \delta\theta.$$

Vậy

$$Q_\theta = \frac{\sum \delta A_\theta(\vec{F}_k)}{\delta\theta} = Qa + m_A - 2aY_A.$$

Để tính lực suy rộng Q_φ ta cho hệ di chuyển khả dĩ như sau : $\delta x_C = 0$, $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\theta = 0$ (H.3–13e). Ký hiệu $\sum\delta A_\varphi (\vec{F}_k)$ là tổng công khả dĩ các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ này. Ta có :

$$\sum\delta A_\varphi (\vec{F}_k) = [- 4aY_A + 4aQ + 2aP] \delta\varphi$$

Vậy

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi(\vec{F}_k)}{\delta\varphi} = 2a (P + 2Q - 2Y_A)$$

Bây giờ ta sử dụng điều kiện cân bằng của cơ hệ ta nhận được

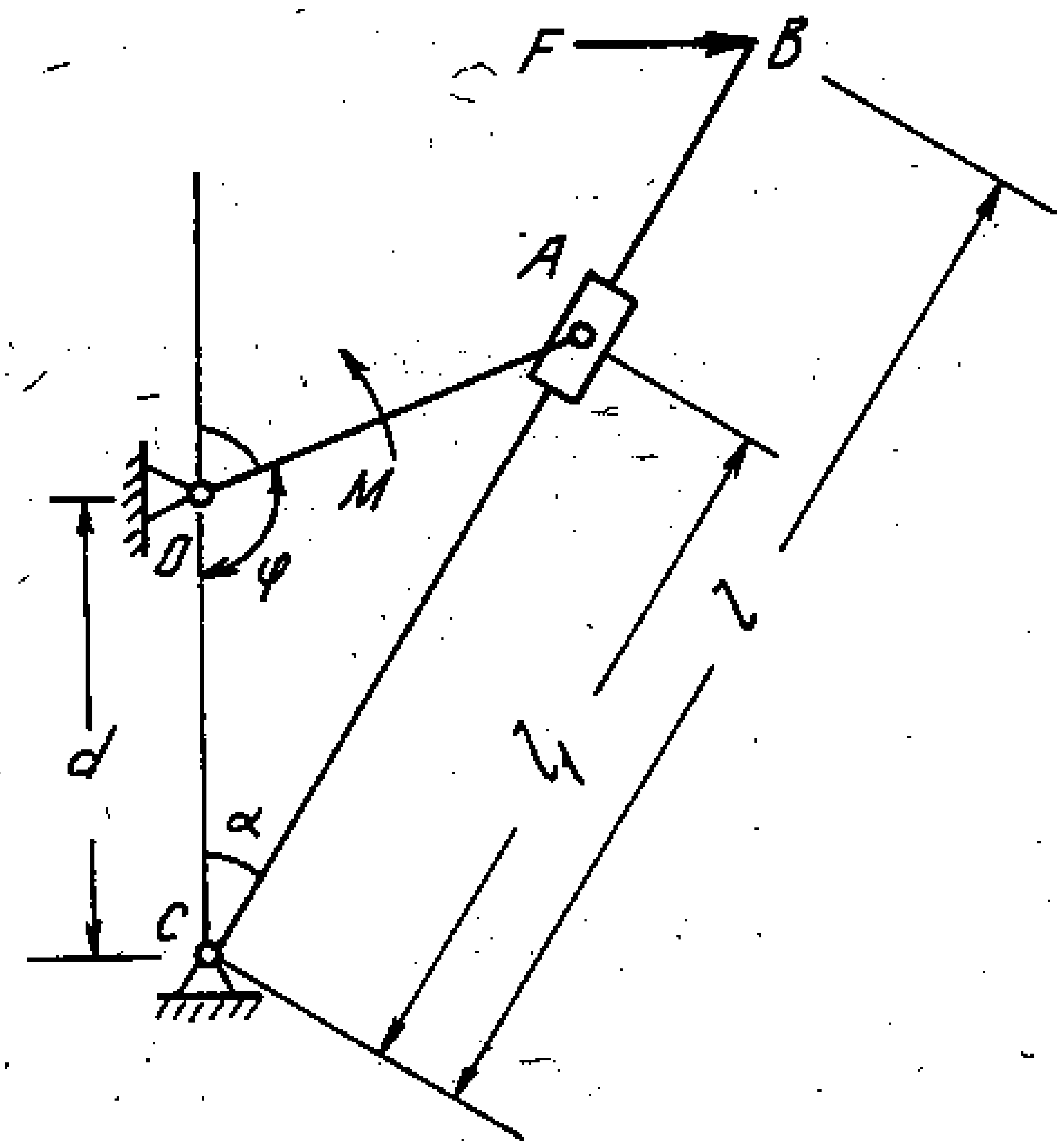
$$X_A = 0 \; ; \; Qa + m_A - 2aY_A = 0 \; ; \; 2a (P + 2Q - 2Y_A) = 0$$

Từ đó :

$$X_A = 0 \; ; Y_A = Q + \frac{P}{2} \; ; m_A = a (P + Q).$$

Có thể đồng thời phá vỡ các liên kết tại A và C. Lúc đó ta có hệ bốn bậc tự do (H. 3–13g). Bằng cách tương tự trên, ta tính đồng thời 4 đại lượng N_C, X_A, Y_A, m_A.

Thí dụ 3–7. Trên hình 3–14 ta có sơ đồ cơ cấu culíc của máy bào ngang. Tay quay OA có chiều dài a, cần lắc CB có chiều dài l, còn khoảng cách giữa hai trục O và C là d. Ở vị



HÌNH 3 – 14

trí đang xét OA tạo với phương thẳng đứng một góc φ. Tay quay OA chịu tác dụng một ngẫu lực có mômen M, còn cần lắc CB chịu tác dụng của lực ngang $\vec{F}$ tại B hướng từ trái sang phải. Bỏ qua ma sát và trọng lượng bản thân của các khâu. Tìm điều kiện cân bằng của cơ cấu ở vị trí đó và tìm phản lực tại trục quay C.

Bài giải. Cơ hệ khảo sát là cơ cấu culic. Cơ hệ có một bậc tự do với liên kết hôlônôm. Chọn góc quay φ của tay quay OA làm tọa độ suy rộng đủ. Lực hoạt động gồm lực $\vec{F}$ và ngẫu lực M. Do bỏ qua ma sát nên liên kết là lý tưởng.

Đầu tiên tính lực suy rộng ứng với tọa độ suy rộng φ. Muốn vậy cho hệ một di chuyển khả dĩ ứng với tay quay OA quay một góc vô cùng bé $\delta\varphi$ ngược chiều kim đồng hồ. Khi đó cần lắc CB quay quanh C một góc $\delta\alpha$. Vì cơ hệ có một bậc tự do nên $\delta\alpha$ phụ thuộc vào $\delta\varphi$. Để tìm mối liên hệ giữa $\delta\alpha$ và $\delta\varphi$ chúng ta chú ý A có chuyển động phức hợp.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

Trong đó :

$$v_a = \omega_{OA} \cdot OA \ ; \qquad v_e = \omega_{CB} \cdot CA.$$

Dễ dàng nhận được.

$$v_e = v_a \cos(\varphi - \alpha).$$

Vậy

$$\omega_{CB} = \omega_{OA} \cdot \frac{OA}{CA} \cos(\varphi - \alpha).$$

Từ đó chúng ta có :

$$\delta\alpha = \delta\varphi \frac{a}{l_1} . \cos(\varphi - \alpha),$$

trong đó l_1 là chiều dài của đoạn CA.

Bây giờ tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đã chọn

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = M\,\delta\varphi - Fl\cos\alpha\delta\alpha =$$

$$= [M - Fl\cos\alpha \frac{a}{l_1} \cos(\varphi - \alpha)]\,\delta\varphi.$$

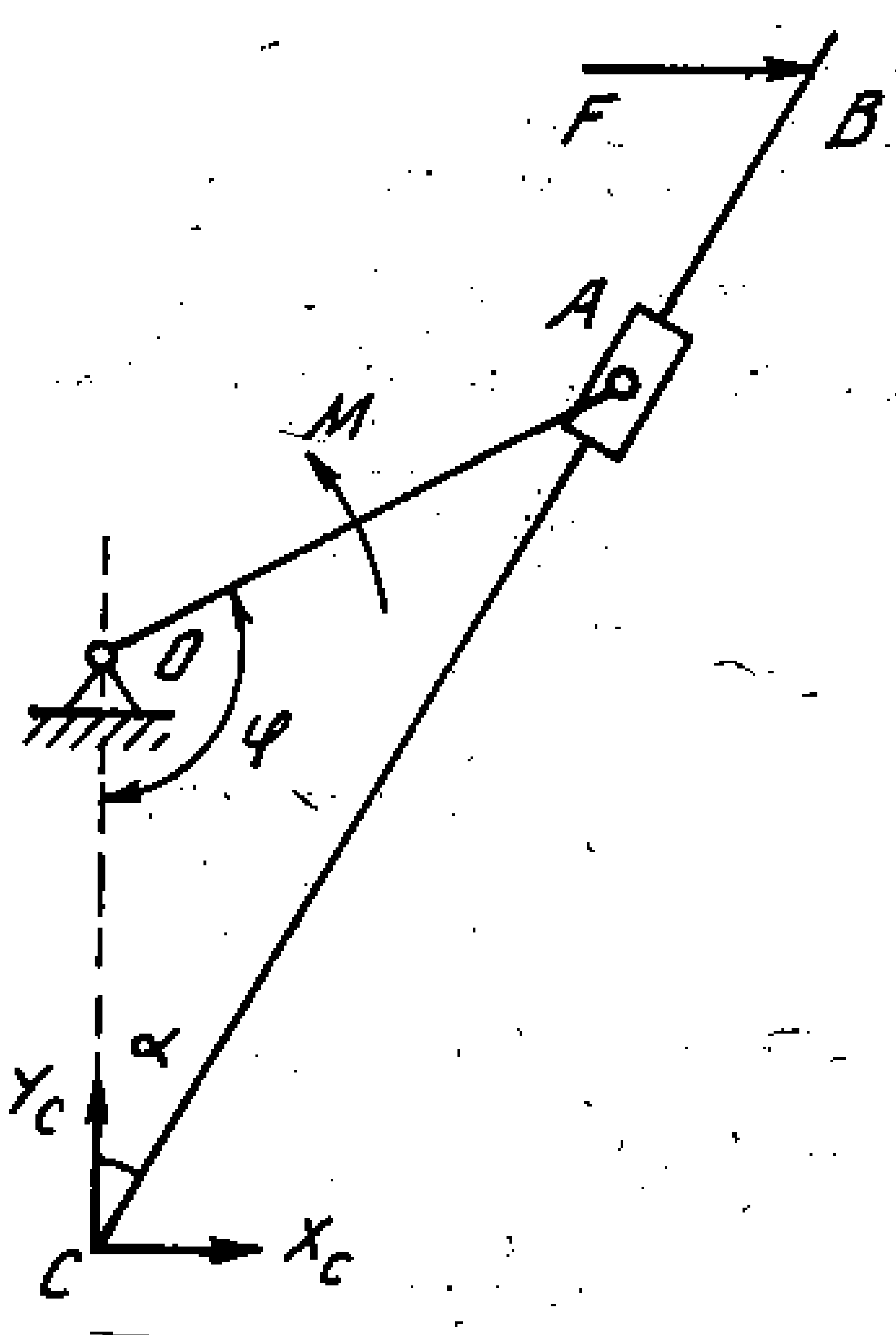
Vậy lực suy rộng Q_φ ứng với tọa độ suy rộng φ bằng

$$Q_\varphi = \frac{\sum\delta A(\vec{F}_k)}{\delta\varphi} = M - Fl\cos\alpha . \frac{a}{l_1} \cos(\varphi - \alpha).$$

Từ điều kiện cân bằng của cơ hệ $Q_\varphi = 0$, ta nhận được :

$$M = F \frac{l}{l_1} a \cos\alpha \cos(\varphi - \alpha)$$

Bây giờ ta chuyển sang xác định phản lực tại trục quay C. Giải phóng liên kết tại C và thay thế nó bằng hai phản lực X_C và Y_C (H. 3-15). Ta có cơ hệ ba bậc tự do. Chú ý rằng khi giải phóng liên kết, khâu BC trở thành khâu song phẳng nhưng chỉ có hai bậc tự do. Ta có thể chọn các tọa độ suy rộng như sau $q_1 = \varphi$; $q_2 = \alpha$; $q_3 = s$, trong đó φ được xác định như trên, α là góc giữa thanh BC và đường thẳng đứng, còn s là tọa độ của một điểm bất kỳ của khâu BC (có thể lấy điểm C của khâu BC) đối với điểm A, tức



HÌNH 3-15

$q_3 = \overline{AC} = s$. Để tìm X_C và Y_C chúng ta có thể sử dụng điều kiện cân bằng của cơ hệ trong tọa độ suy rộng, tức $Q_\varphi = 0$; $Q_\alpha = 0$; $Q_s = 0$.

Dễ dàng thấy rằng từ điều kiện $Q_\varphi = 0$ ta tìm được mối quan hệ giữa ngẫu lực M và lực F để cơ cấu cân bằng đã thiết lập ở trên.

Bây giờ để tìm X_C và Y_C chúng ta sử dụng hai điều kiện còn lại $Q_\alpha = 0$ và $Q_s = 0$.

Đầu tiên ta tính lực suy rộng Q_α. Muốn thế cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta\varphi = \delta s = 0$, $\delta\alpha \neq 0$. Tổng công khả dĩ của các lực hoạt động $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$, $\vec{M}$, $\vec{F}$ trong di chuyển khả dĩ này là :

$$\sum \delta A_\alpha(\vec{F}_k) = [l_1\sin\alpha Y_C - l_1\cos\alpha . X_C + (l - l_1)F\cos\alpha]\delta\alpha.$$

Vậy lực suy rộng Q_α ứng với tọa độ suy rộng α bằng :

$$Q_\alpha = \frac{\sum\delta A_\alpha(\vec{F}_k)}{\delta\alpha} = -l_1\sin\alpha\ Y_C + l_1\cos\alpha\ X_C - (l - l_1)\ F\cos\alpha.$$

Bây giờ chuyển đến tính lực suy rộng Q_s ứng với tọa độ suy rộng s.

Ta cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau : $\delta\varphi = \delta\alpha = 0$, $\delta s \neq 0$. Ký hiệu $\sum \delta A_s(\vec{F}_k)$ là tổng công khả dĩ của các lực hoạt động trong di chuyển khả dĩ đã cho, ta có :

$$\sum \delta A_s\ (\vec{F}_k) = -\ X_C\sin\alpha\delta s - Y_C\cos\alpha\delta s - F\sin\alpha\delta s.$$

Từ đó

$$Q_s = \frac{\sum \delta A_s\ (\vec{F}_k)}{\delta s} = -\ X_C\sin\alpha - Y_C\cos\alpha - F\sin\alpha.$$

Từ điều kiện cân bằng của cơ hệ $Q_\alpha = 0$, $Q_s = 0$ chúng ta nhận được :

$$-\ l_1\sin\alpha Y_C + l_1\cos\alpha X_C - (\ l - l_1\ )\ F\ \cos\alpha = 0,$$

$$-\ X_C\sin\alpha - Y_C\cos\alpha - F\sin\alpha = 0.$$

Vậy

$$X_C = F\left(\frac{l}{l_1}\cos^2\alpha - 1\right)$$

$$Y_C = -\frac{l}{l_1}F\cos\alpha\sin\alpha.$$

Thành phần phản lực $\vec{Y}_C$ sẽ ngược chiều hình vẽ, còn thành phần phản lực $\vec{X}_C$ đúng chiều hình vẽ nếu thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{l}{l_1}\cos^2\alpha - 1 > 0.$$

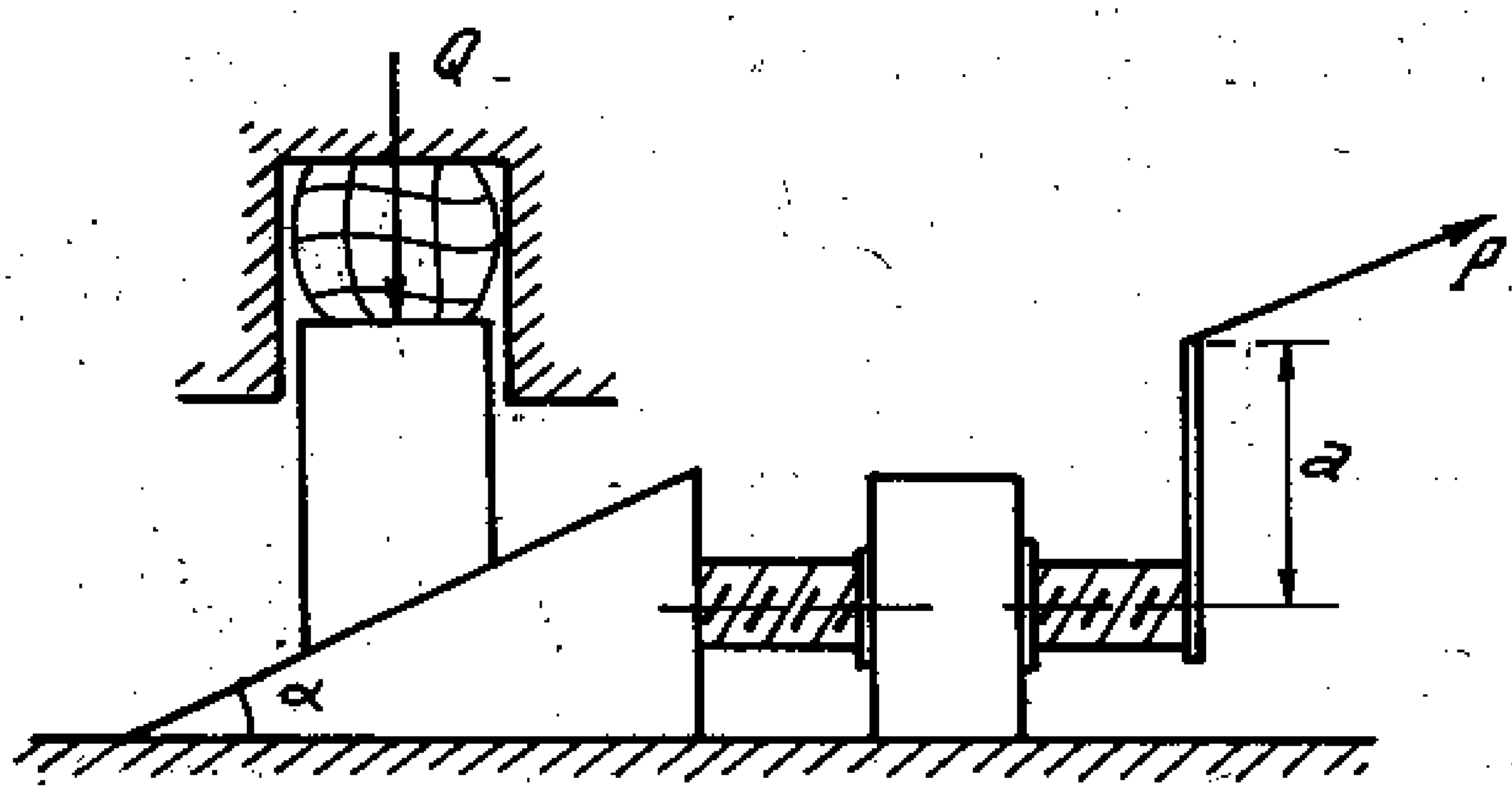
Tức là

$$l_1 < l\cos^2\alpha$$

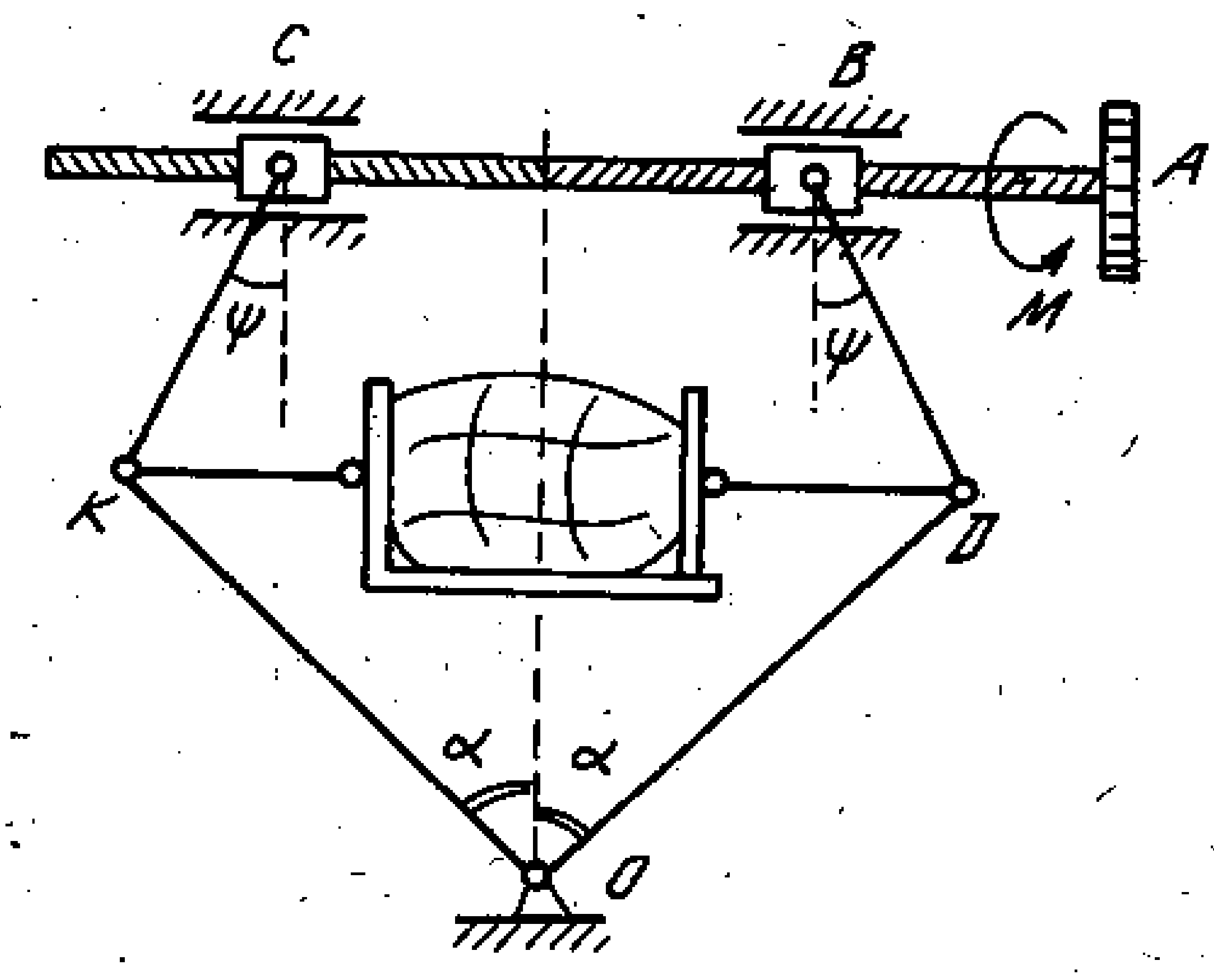
3.4. BÀI TẬP

3-1. Xác định mối liên hệ giữa cường độ của các lực $\vec{P}$ và $\vec{Q}$ trong máy ép dạng nêm như trên hình vẽ. Lực $\vec{P}$ tác dụng vào đầu mút tay quay và hướng vuông góc với mặt phẳng, chứa đường tâm của trục vít và tay quay. Bước của trục vít là h, góc đỉnh nêm là α, chiều dài tay quay bằng a. Bỏ qua ma sát, (H. 3-16).

Trả lời : $Q = P\dfrac{2\pi a}{h\mathrm{tg}\alpha}$.



HÌNH 3-16



HÌNH 3-17

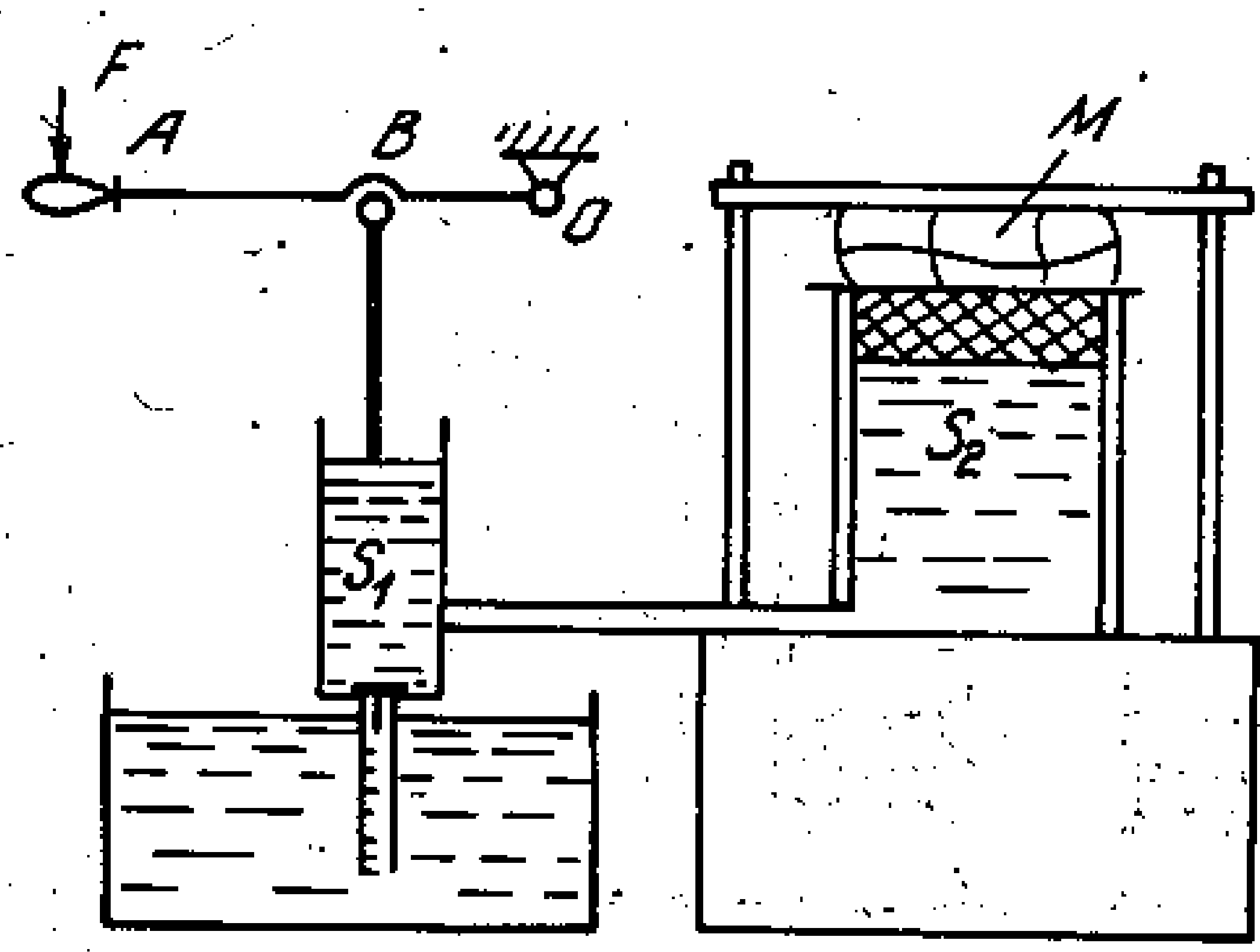
3-2. Cho cơ cấu máy ép như hình vẽ. Ngẫu lực tác dụng lên vô lăng có mômen bằng M. Nhờ trục vít được cắt ren ngược chiều mà các con chạy B và C đồng thời tiến gần hoặc lùi xa nhau. Ở vị trí của cơ cấu mà BD và OD tạo với đường thẳng đứng lần lượt góc ψ và α, xác định lực ép S tác dụng vào vật chịu ép.

Cho biết bước của trục vít là h và bỏ qua ma sát và trọng lượng các chi tiết, (H. 3-17).

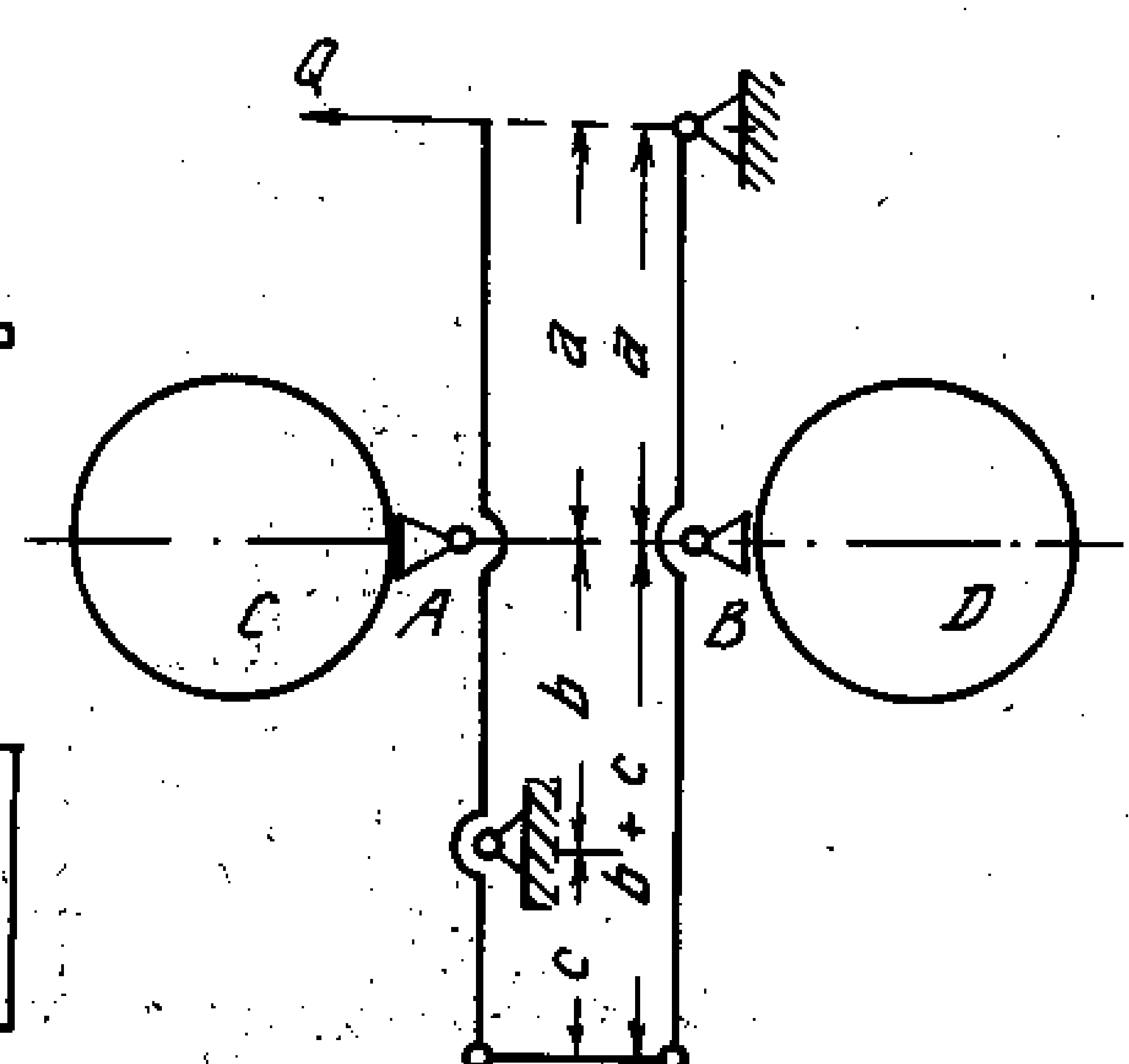
Trả lời : $S = \dfrac{\pi \sin(\alpha + \psi)}{\sin\psi \cos\alpha} \cdot \dfrac{M}{h}$

3-3. Cho một máy ép thủy lực như trên hình vẽ, lực $\vec{F}$ tác dụng vào đầu mút tay quay và vuông góc với nó. Diện tích tiết diện của xylanh trái là S_1 và xylanh phải là S_2. Xác định lực $\vec{Q}$ nén vật M. Cho OA = a, OB = b. Bỏ qua ma sát (H. 3-18).

Trả lời : $Q = \dfrac{aS_2F}{bS_1}$



HÌNH 3-18



HÌNH 3-19

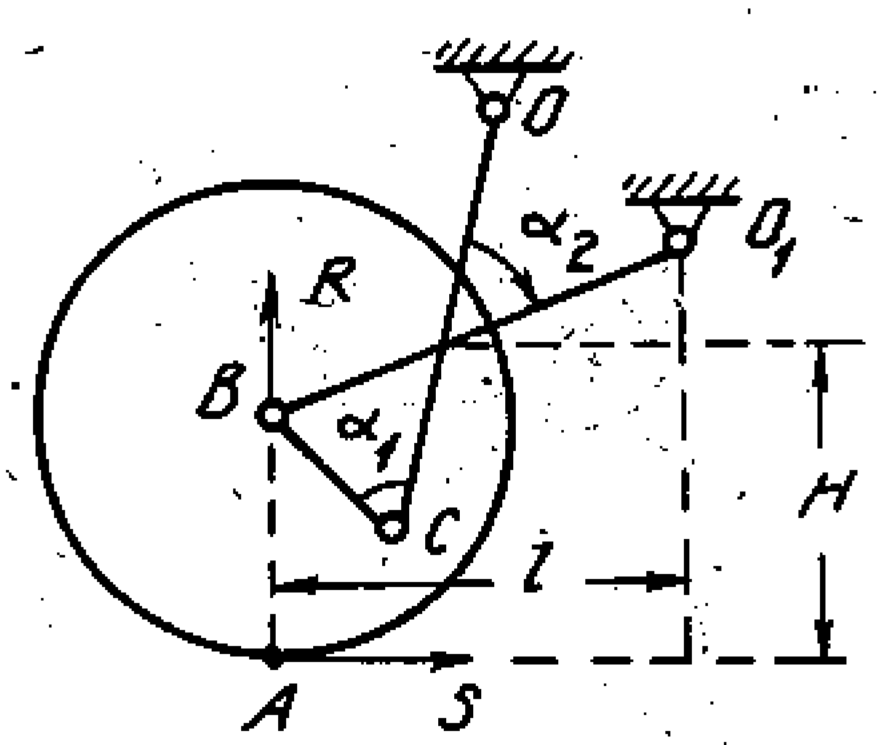
3–4. Cho cơ cấu hãm tàu như hình vẽ (H. 3–19). Tìm hệ thức giữa a, b và c để dưới tác dụng của lực $\overrightarrow{Q}$ hướng theo phương ngang, hai má hãm tác dụng vào hai bánh xe C và D các lực bằng nhau. Tìm giá trị của các lực này. Bỏ qua trọng lượng các thanh và xem các bánh xe đứng yên.

Trả lời : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a + b + c}{c}$; $F = Q\,\dfrac{a + b}{2b}$

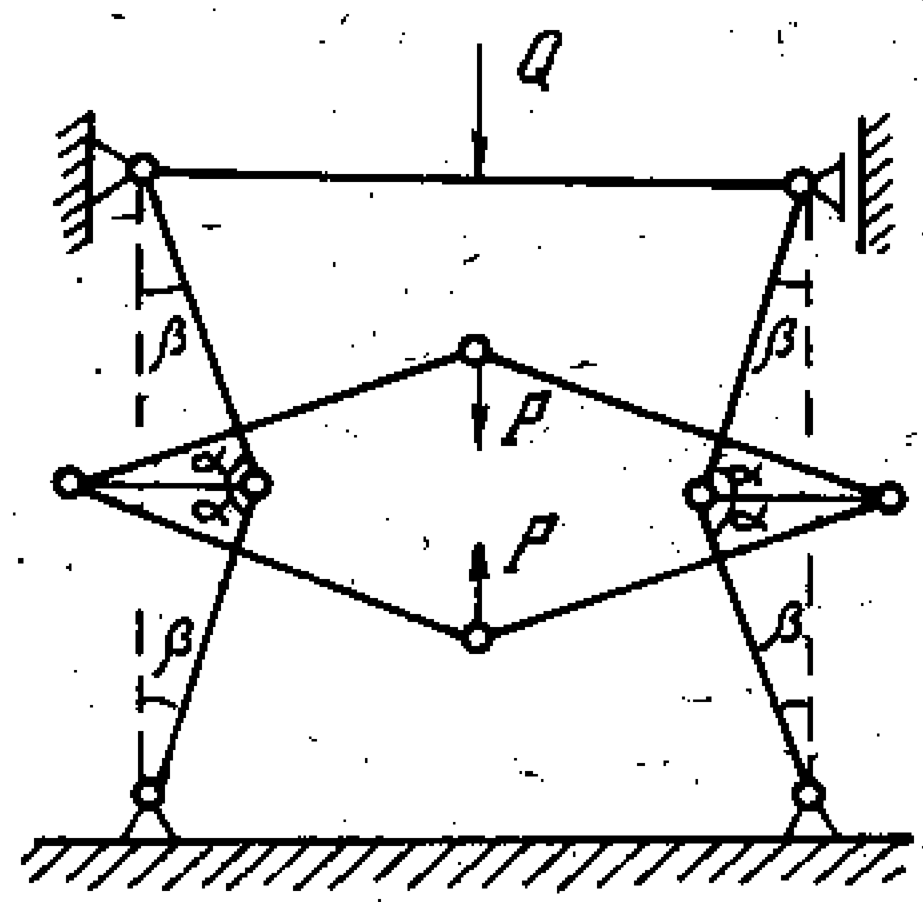
3–5. Cơ cấu để nâng bánh xe máy cày là một cơ cấu bốn khâu $OCBO_1$. Khâu BC gắn chặt với đĩa mà tâm điểm là B. Tại điểm A của đĩa có đặt lực ngang P hưỡng theo tiếp tuyến và tại bản lề B có tác dụng lực thẳng đứng R. Chiều dài các thanh $BC = l_1$, $BO_1 = l_2$ các kích thước khác cho trên hình vẽ (H, L, α_1, α_2) (H. 3–20).

Xác định mối liên hệ giữa các lực R và S khi cơ cấu cân bằng ở vị trí như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các thanh và đĩa, cũng như ma sát ở các bản lề :

Trả lời : $S = R\,\dfrac{L\,l_1 \sin\alpha_1}{H\,l_2 \sin\alpha_2}$



HÌNH 3–20

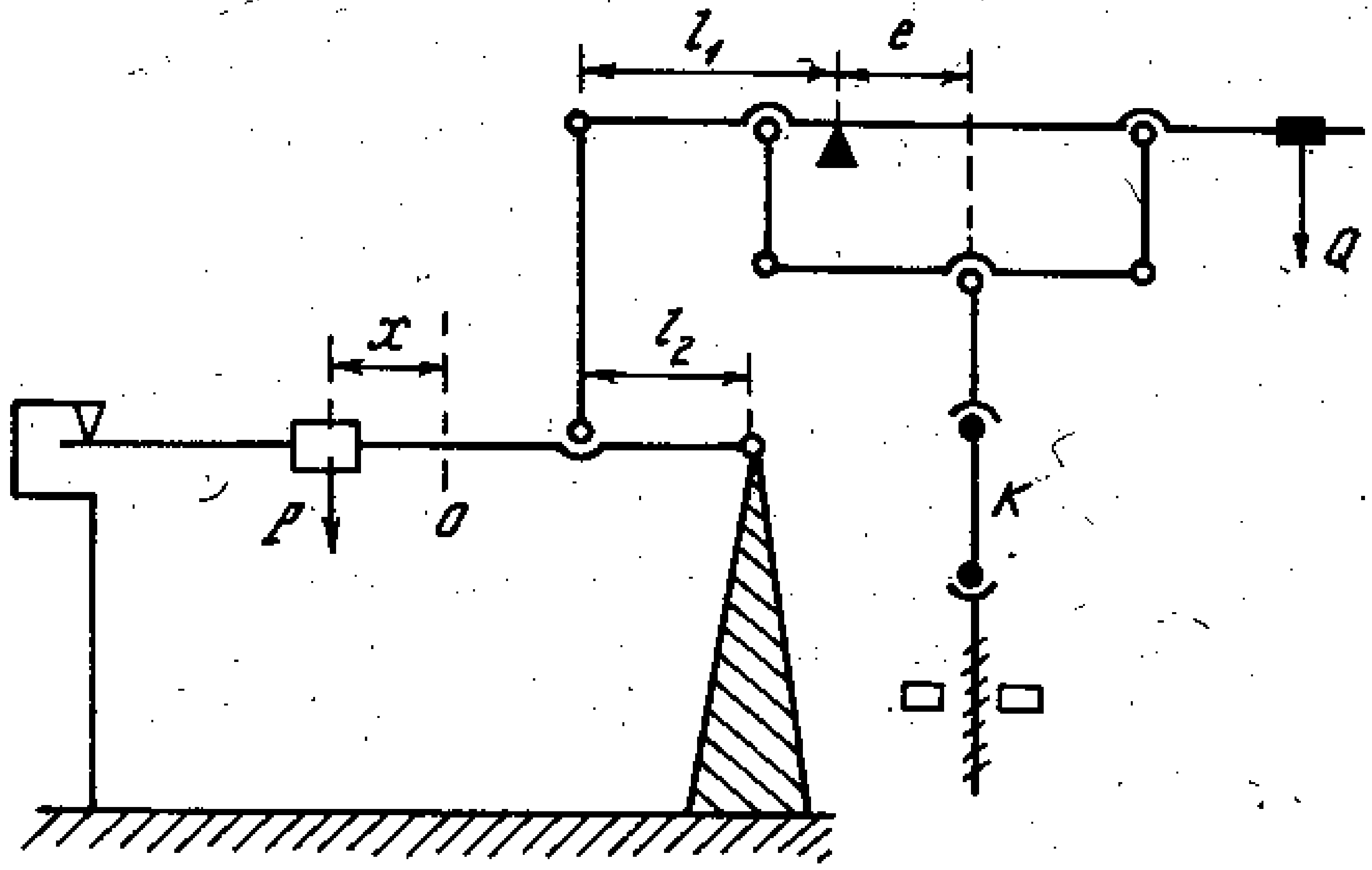


HÌNH 3–21

3–6. Tìm mối liên hệ giữa cường độ của các lực P và Q trong máy ép biểu diễn trên hình vẽ, (H. 3–21).

Trả lời : $Q = P\,\text{ctg}\alpha.\text{ctg}\beta$.

3-7. Máy dùng để thử mẫu khi kéo được biểu diễn như hình vẽ.



HÌNH 3-22

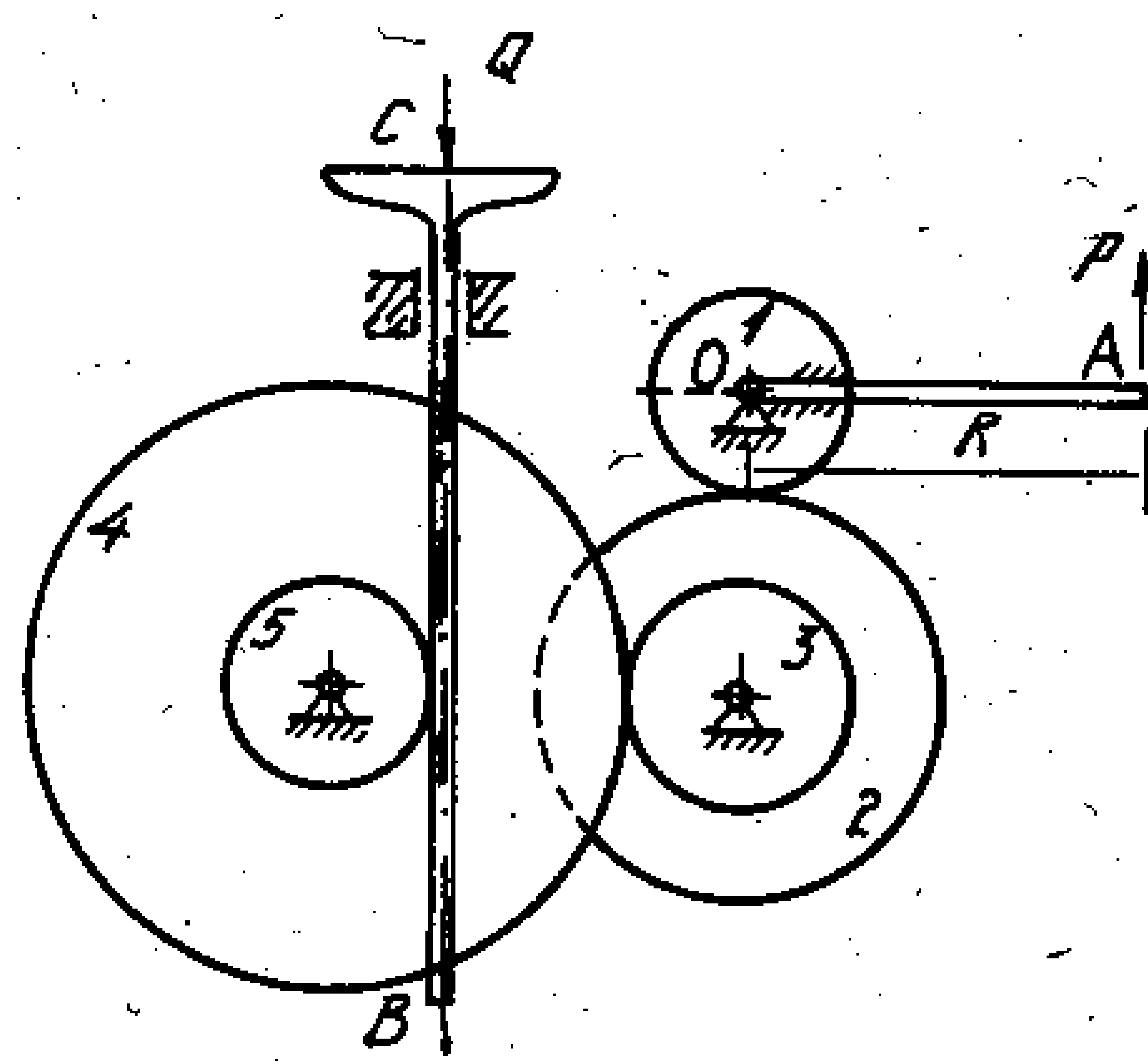
Xác định sự phụ thuộc giữa ứng lực X trong mẫu K và khoảng cách x của vật P đối với vị trí "không" (0) nếu nhờ vật Q máy được cân bằng sao cho khi vật P tại vị trí "không" và khi vắng ứng lực trong mẫu K thì tất cả các đòn đều nằm ngang. Cho các khoảng cách l_1, l_2, e, (H. 3-22).

Trả lời : $X = \frac{Pl_1}{el_2} x$.

3-8. Cho cơ cấu máy kích như hình vẽ (H. 3-23).

Chuyển động của tay quay OA, qua các bánh răng 1, 2, 3, 4, 5 được truyền sang thanh khía của kích.

Tìm lực P cần đặt vuông góc với tay quay tại đầu mút của nó để



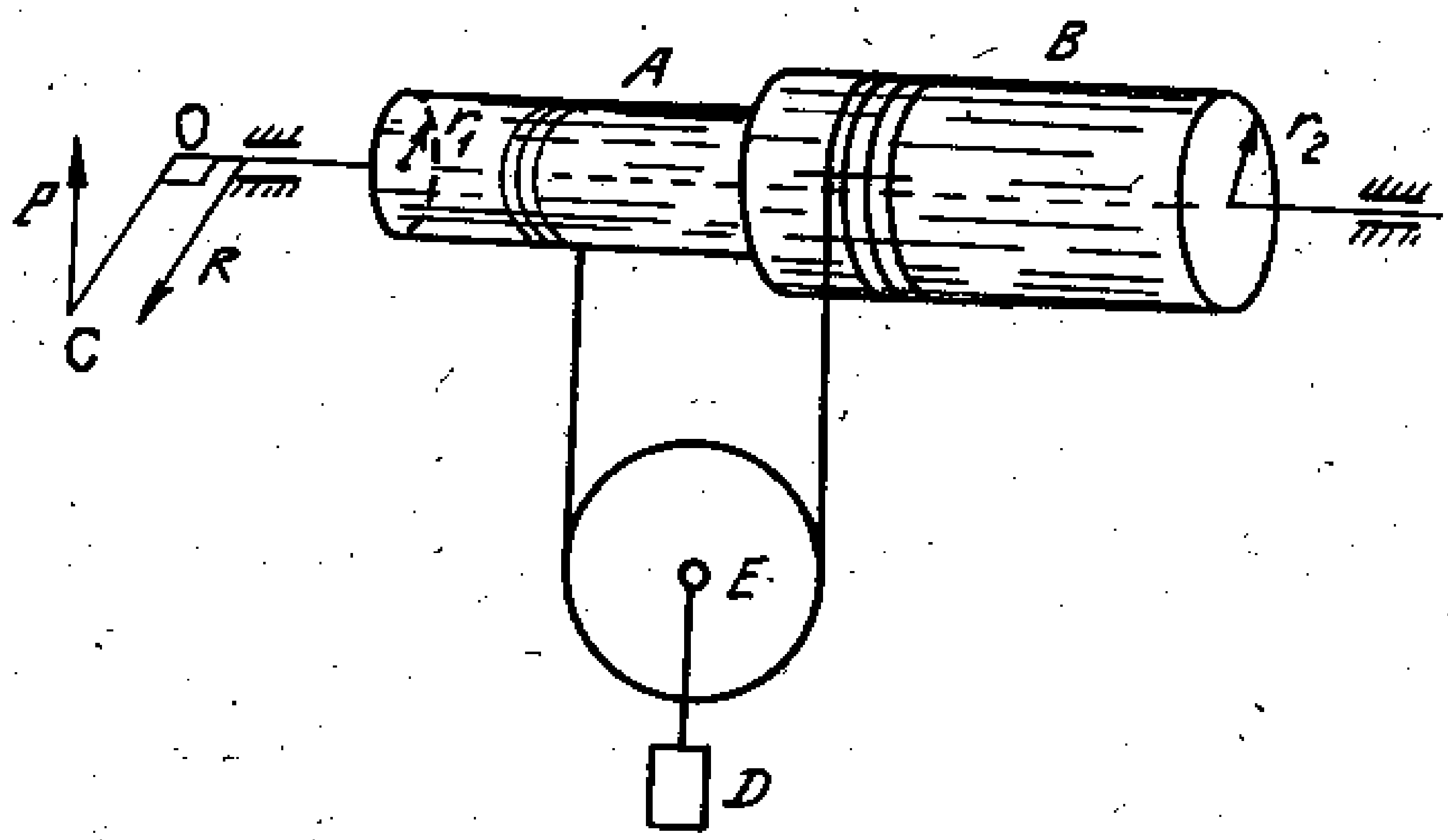
HÌNH 3-23

khi kích cân bằng thì lực nâng của nó bằng 4710 N. Bán kính các bánh răng là : $r_1 = 3$ cm ; $r_2 = 12$ cm; $r_3 = 4$ cm; $r_4 = 16$cm ; $r_5 = 3$ cm. Chiều dài tay quay $R = 18$ cm.

Trả lời : $P = Q \dfrac{r_1 r_3 r_5}{r_2 r_4 R} = 49$ N.

3-9. Trục kéo vi sai có hai tầng A và B gắn chặt với nhau, chuyển động nhờ tay quay OC dài là R.

Vật nặng D trọng lượng Q được treo vào ròng rọc động E. Khi quay tay quay để kéo vật lên thì nhánh dây trái nhả ra khỏi tầng B và nhánh dây phải quấn vào tầng A. Bán kính của hai tầng đó lần lượt là r_2 và r_1, với $r_1 < r_2$ (H. 3-24).

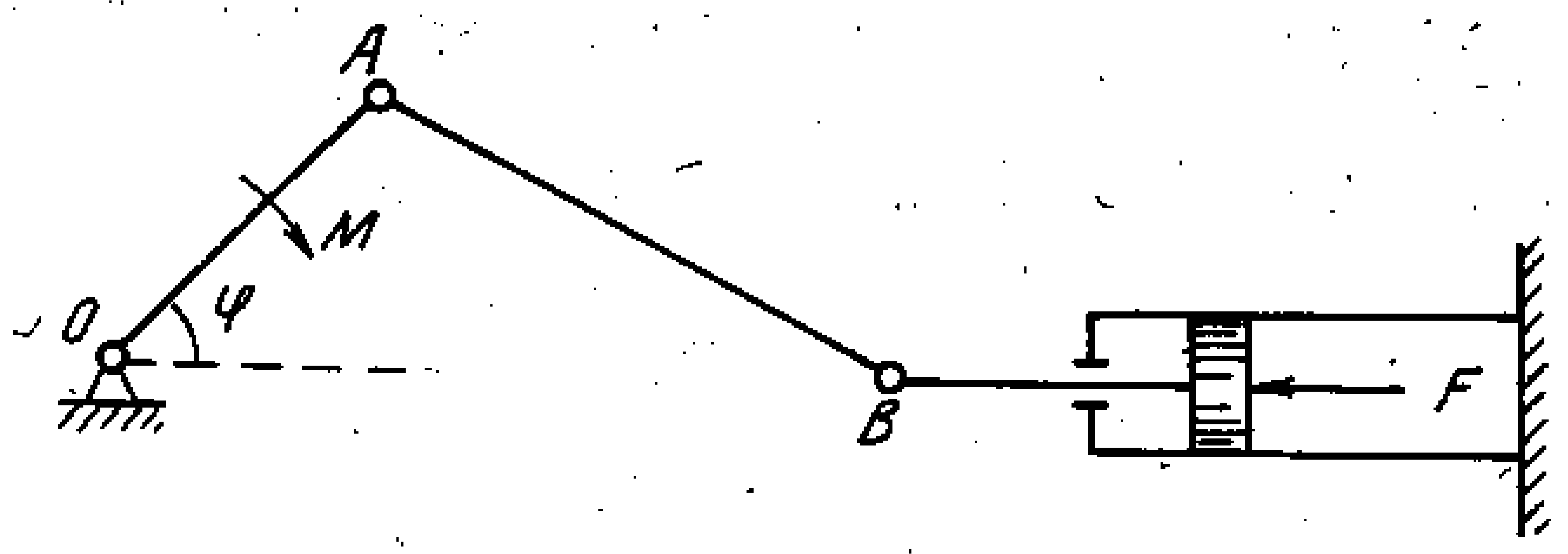


HÌNH 3-24

Tìm cường độ lực $\vec{P}$ cần đặt vuông góc với tay quay tại đầu mút của nó để giữ cho hệ cân bằng. Cho $Q = 7050$ N ; $r_2 = 12$ cm, $r_1 = 10$ cm, $R = 60$ cm.

Trả lời : $P = Q\dfrac{r_2 - r_1}{2R} = 117{,}5$ N.

3-10. Cho cơ cấu tay quay thanh truyền nằm trong mặt phẳng đứng. Xác định mômen quay M tác dụng lên tay quay khi tay quay nghiêng với phương ngang một góc φ để cân bằng tổng áp lực hơi lên xylanh F. Tay quay và thanh truyền coi



HÌNH 3-25

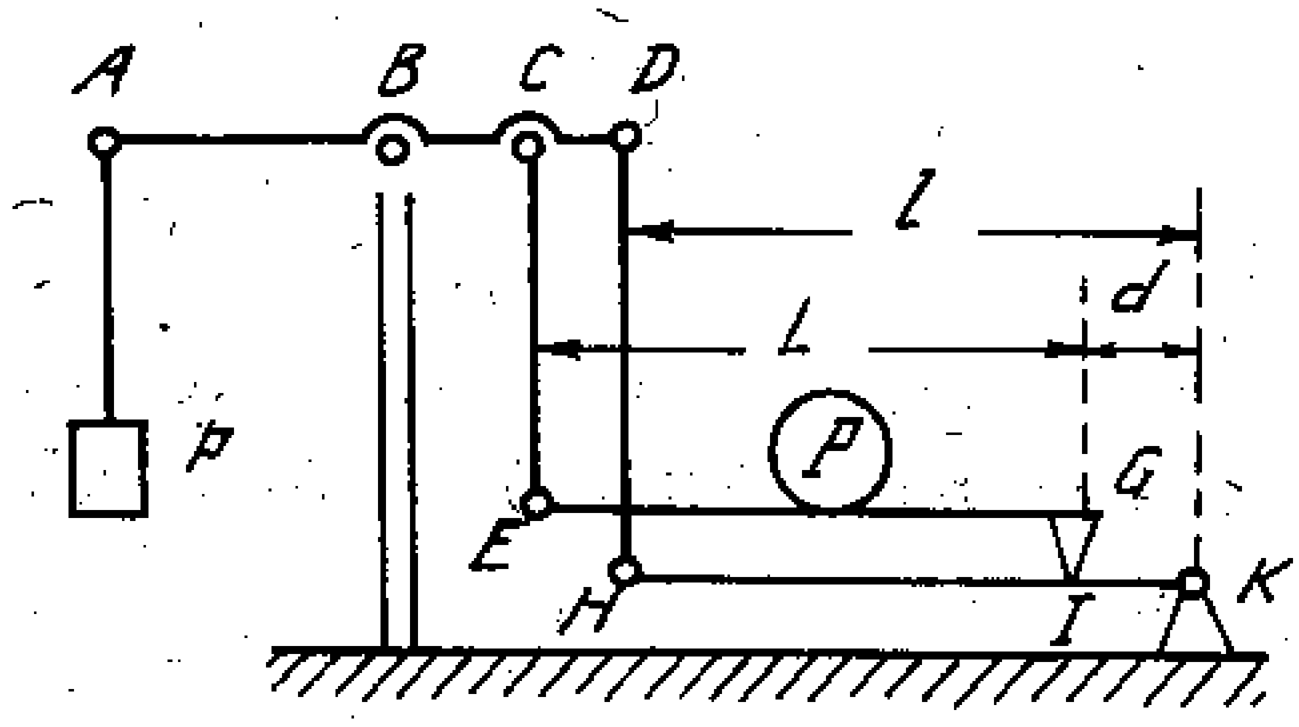
như những thanh đồng chất cùng chiều dài l và cùng trọng lượng P. Bỏ qua ma sát, (H. 3-25).

Trả lời : $M = l[2F\sin\varphi - P\cos\varphi]$.

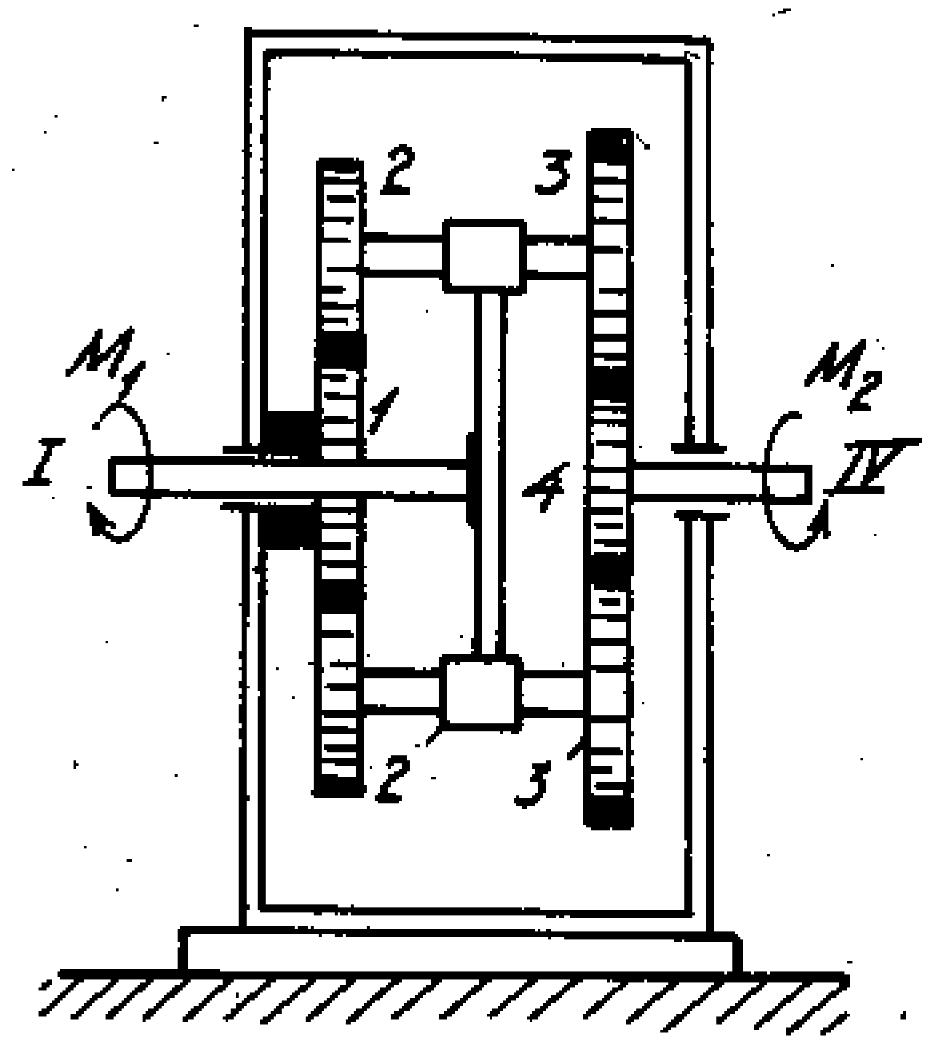
3-11. Trên hình vẽ ta có sơ đồ của một cái cân bàn. Cho : AB = a, BC = b, CD = c, IK = d, EG = L, KH = l.

Tìm hệ thức giữa a, b, c, d và l, sao cho vật được cân và đối trọng cân bằng nhau ở bất kì vị trí nào của vật cân trên mặt bàn cân. Khi đó tìm hệ thức giữa hai trọng lượng p và P của đối trọng và của vật cân, (H. 3-26).

Trả lời : $\dfrac{l}{d} = \dfrac{b + c}{b}$; $p = \dfrac{b}{a}P$.



HÌNH 3-26



HÌNH 3-27

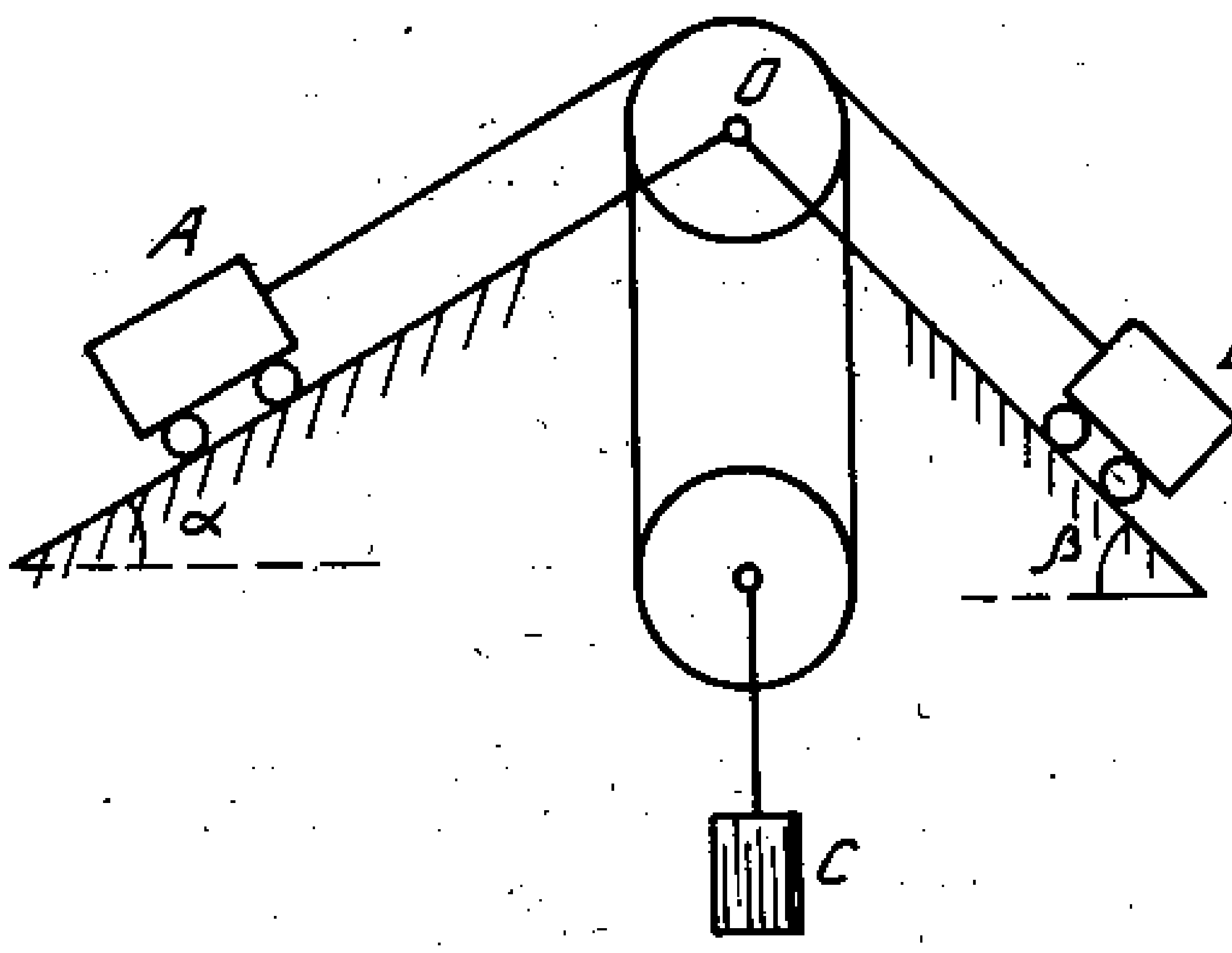
3 -12. Hộp tốc độ được biểu diễn trên hình vẽ gồm : bánh răng cố định 1 có bán kính r_1, cặp bánh răng 2 - 3 (và cặp bánh răng giống nó 2' - 3') có các bán kính tương ứng r_2 và r_3, bánh răng 4 lắp trên trục IV, (H. 3-27)

Tác dụng lên trục I mômen phát động M_1.

Xác định mômen cản hữu ích M tác dụng lên trục IV để cơ cấu cân bằng. Bỏ qua ma sát.

Trả lời : $M = M_1 \dfrac{r_2(r_1 + r_2 - r_3)}{(r_1 + r_2)(r_3 - r_2)}$

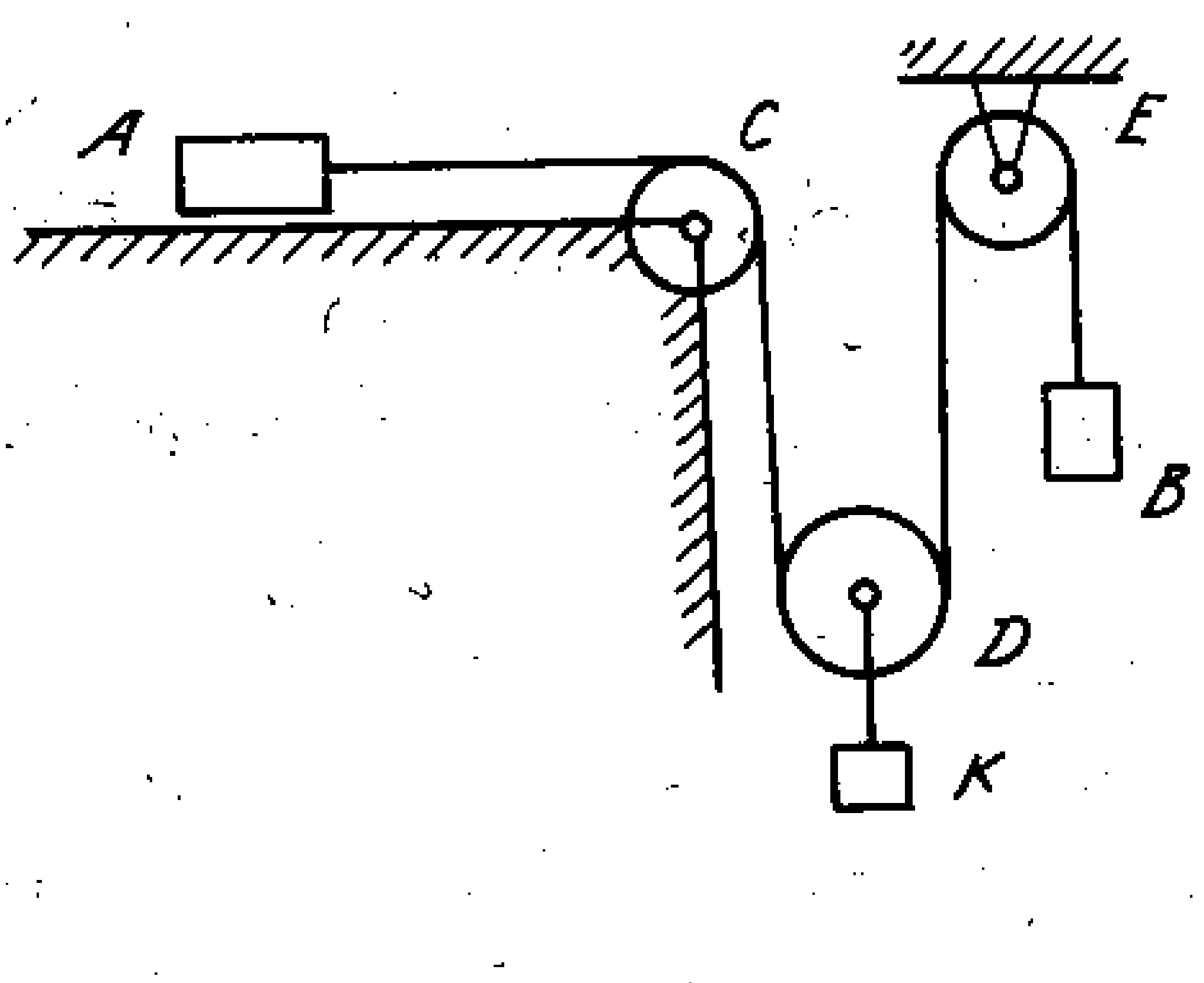
3-13. Tìm các trọng lượng P_1 và P_2 của hai vật được giữ cân bằng trên các mặt phẳng nghiêng với mặt nằm ngang các góc α, β nhờ vật P. Các vật có trọng lượng P_1 và P_2 được buộc vào hai đầu một sợi dây mảnh, nhẹ, không giãn. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và ma sát, (H. 3-28).



HÌNH 3-28

Trả lời : $P_1 = \dfrac{P}{2\sin\alpha}$; $P_2 = \dfrac{P}{2\sin\beta}$

3-14. Cho cơ hệ được biểu diễn như hình vẽ. Dây mềm mảnh, nhẹ và không giãn được buộc vào vật A, vòng qua ròng rọc cố định C, ròng rọc động D, ròng rọc cố định E, cuối cùng được buộc vào vật nặng B.



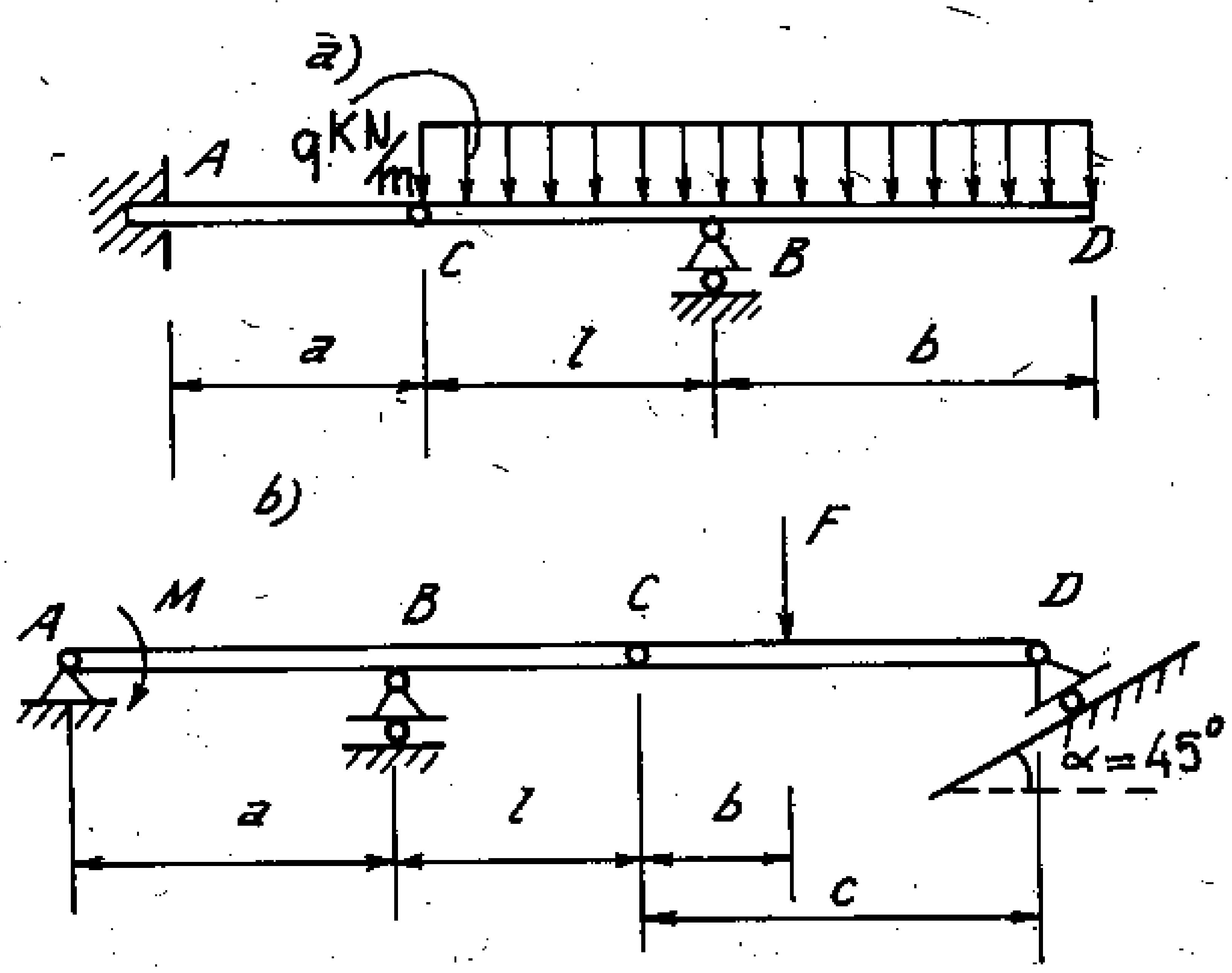
HÌNH 3-29

Tại trục ròng rọc động D có treo vật K có trọng lượng Q. Cho biết hai vật

A, B có cùng trọng lượng P. Xác định P theo Q và xác định hệ số ma sát trượt f giữa vật A và mặt phẳng ngang để hệ cân bằng (H. 3-29)

Trả lời : $P = \frac{Q}{2}$; f = 1.

3-15. Cho các hệ dầm như trên hình vẽ (H. 3-30).



HÌNH 3-30

Tìm các phản lực tại A và B (đối với trường hợp a) và tại A, B và D (đối với trường hợp b).

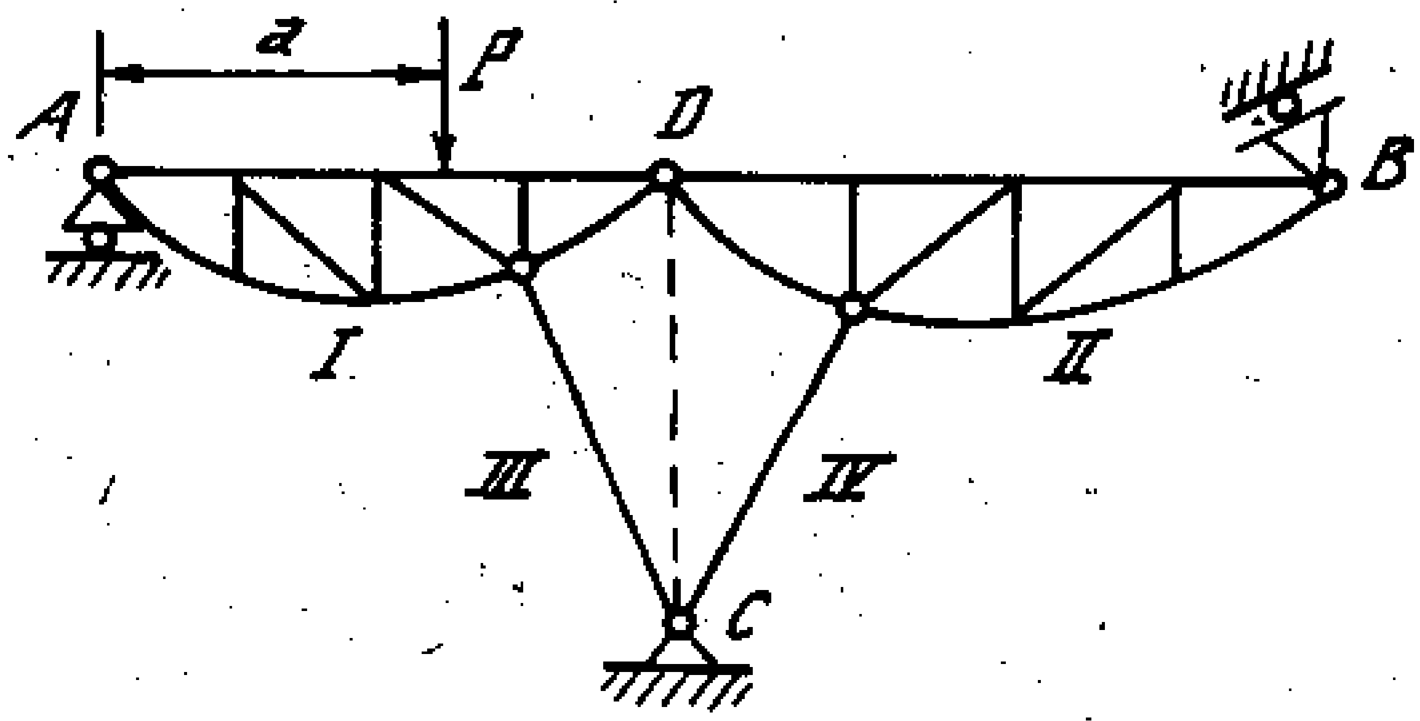
a) cho l = 2 m ; a = 2 m ; b = 1 m ; q = 4,9 KN/m ;

b) cho M = 19,2 KNm ; F = 29,59 KN ; l = 6 m, a = 2 m, b = 1 m, c = 2 m.

Trả lời : Trường hợp a) : $X_A = 0$; $Y_A = 0{,}36.10^4$ N; $M_A = 0{,}73.10^4$ Nm ; $N_B = 11.10^3$ N.

Trường hợp b) : $X_A = 1{,}47.10^4$ N ; $Y_A = -5{,}4.10^4$ N ; $R_B = 6{,}85.10^4$ N ; $R_D = 2{,}08.10^4$ N.

3-16. Hai giàn I và II được nối với nhau bằng bản lề D và được nối cố định vào bản lề C bằng hai thanh III và IV. Ở A và B giàn vào tựa vào các gối di động. Tác dụng lên giàn lực P thẳng đứng, ở cách gối A là a theo đường ngang. Tìm phản lực tựa ở gối B. Bỏ qua ma sát, (H. 3-31).



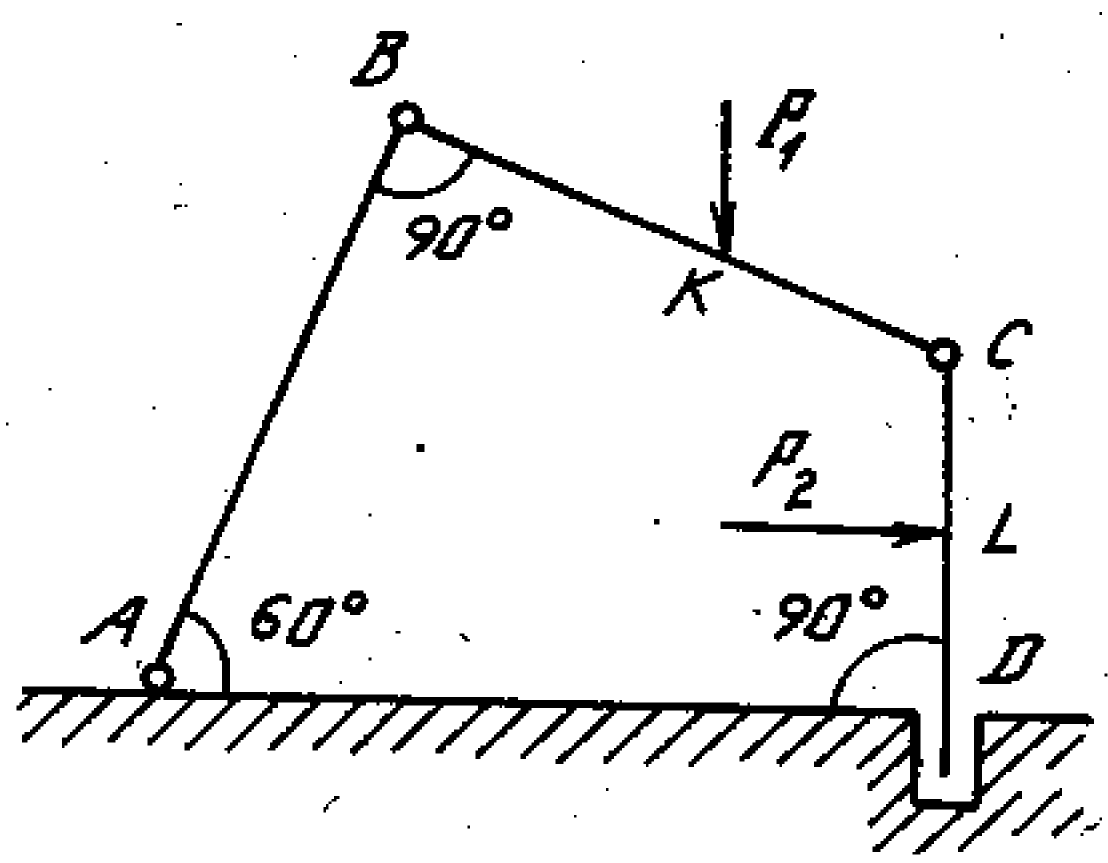
HÌNH 3-31

Trả lời : Phản lực tựa tác dụng vào gối B, hướng vuông góc với mặt phẳng trượt của các con lăn và có cường độ bằng :

$R_B = P\frac{a}{b} \frac{DC_2}{C_1D}$, trong đó b là cánh tay đòn của phản lực R_B đối với tâm tức thời C_2

Chú ý : Khi giải bài toán nên sử dụng các tâm vận tốc tức thời C_1 và C_2 của hai phần giàn.

3-17. Hệ ba thanh AB, BC và CD nối với nhau bằng hai bản lề B và C, gắn xuống nền đất bằng bản lề A và bằng ngàm D.



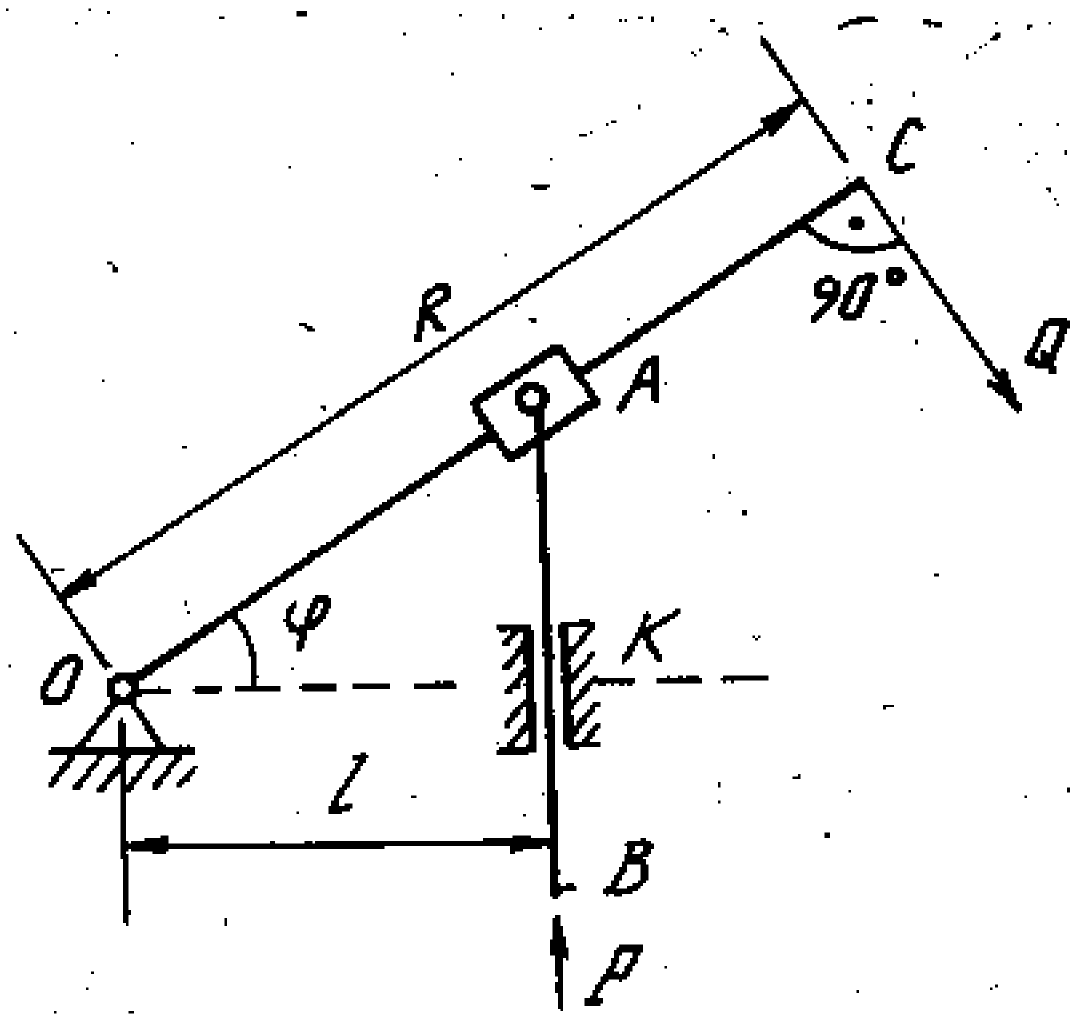
HÌNH 3-32

Cho BC = CD = 2a ; BK = KC và CL = LD.

Góc nghiêng của AB với đường ngang là 60°.

Ở K có lực $\vec{P}_1$ tác dụng thẳng đứng lên thanh BC và ở L có lực ngang $\vec{P}_2$ tác dụng vào thanh CD. Bỏ qua ma sát ở các bản lề, tìm các phản lực ngang và mômen giữ của ngàm D tác dụng lên thanh CD, (H.3-32).

Trả lời : $X_D = P_2 + \frac{3}{8} P_1$; $Y_D = \frac{5}{8} P_1$; $M_D = \frac{a}{2}(P_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} P_1)$.



HÌNH 3–33

3–18. Trong cơ cấu cần lắc khi tay quay OC lắc quanh trục nằm ngang O con trượt A di chuyển dọc tay quay OC và truyền chuyển động cho thanh AB trượt theo hướng thẳng đứng K. Cho các kích thước như sau OC = R ; OK = l. Tìm lực Q cần thiết đặt thẳng góc với tay quay OC tại điểm C để cơ cấu cân bằng khi có lực P tác dụng lên thanh trượt AB tại B và phản lực tại rãnh trượt K, (H. 3–33).

Trả lời: $Q = \dfrac{Pl}{R\cos^2\varphi}$; $X_K = \dfrac{1}{2l}QR\sin^2\varphi$; $M_K = QR\sin^2\varphi$.

CHƯƠNG 4

PHƯƠNG PHÁP TĨNH - ĐỘNG LỰC HÌNH HỌC

Trong chương này trình bày một phương pháp giải các bài toán động lực học nhờ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học (vectơ chính và mômen chính của hệ lực đồng thời triệt tiêu) được gọi là phương pháp tĩnh - động lực hình học. Cơ sở lí thuyết của phương pháp được trình bày là một hệ quả của nguyên lý Đalămbe.

4.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

4.1.1. Lực quán tính

a) Đối với chất điểm. Một chất điểm có khối lượng m, chuyển động với gia tốc a, lực quán tính của chất điểm được xác định theo biểu thức :

$$\vec{F}_{qt} = -m\vec{a}. \qquad (4\text{-}1)$$

Như vậy lực quán tính có cùng phương, ngược chiều và có giá trị tỷ lệ với giá trị của gia tốc.

Trong hệ tọa độ Đềcác, lực quán tính của chất điểm được xác định nhờ các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ

$$\vec{F}^{qt}\begin{cases} F_x^{qt} = -ma_x = -m\ddot{x} \\ F_y^{qt} = -ma_y = -m\ddot{y} \\ F_z^{qt} = -ma_z = -m\ddot{z} \end{cases} \qquad (4\text{-}2)$$

Trong hệ trục tọa độ tự nhiên, ta có :

$$\vec{F}^{qt} \begin{cases} F_{\tau}^{qt} = -\,ma^{t} = -\,m\ddot{s}\,; \\ F_{n}^{qt} = -\,ma^{n} = -\,m\dfrac{v^2}{\rho}\,; \\ F_{b}^{qt} = -\,ma^{b} = 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}3)$$

b) Đối với cơ hệ. Giả sử cơ hệ gồm N chất điểm M_k, chuyển động với các gia tốc $\vec{a}_k$ $(k = \overline{1,N})$. Đối với chất điểm M_k có lực quán tính tương ứng $\vec{F}_k^{qt} = -\,m_k\vec{a}_k$. Đối với cơ hệ ta có hệ lực quán tính :

$$(\vec{F}_1^{qt},\ \vec{F}_2^{qt}\ \ldots,\ \vec{F}_N^{qt});$$

nó được đánh giá một cách thuận tiện thường qua kết quả thu gọn về một tâm cho trước : lực thu gọn $\vec{R}_o^{qt}$ (được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực quán tính đặt tại tâm thu gọn O) và ngẫu lực thu gọn $\vec{M}_o^{qt}$ (được biểu diễn bằng mômen chính của hệ lực quán tính đối với tâm thu gọn O):

$$\vec{R}_o^{qt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{qt}\ ;\ \vec{M}_o^{qt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_k^{qt}) \qquad (4\text{-}4)$$

Kết quả thu gọn hệ lực quán tính đặc biệt quan trọng đối với trường hợp vật rắn, nó được xem là một cơ hệ gồm vô số các chất điểm và do đó ta có hệ vô số các lực quán tính. Dưới đây là bảng tóm tắt các kết quả thu gọn của hệ lực quán tính của vật rắn (Bảng 4–1).

BẢNG 4-1

Dạng chuyển động của vật rắn	Tâm thu gọn	Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của vật về tâm thu gọn
Vật rắn chuyển động tịnh tiến	Khối tâm C của vật	Hợp lực $\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{a}_c$;
Tấm phẳng quay quanh trục cố định vuông góc với tâm	Giao của trục quay và tâm O của tấm	$\vec{R}_o^{qt} = -M\vec{a}_c$; $\vec{M}_O^{qt} = -J_o\vec{\varepsilon}$.
Tấm phẳng chuyển động trong mặt phẳng của nó	Khối tâm C của tấm	$\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{a}_c$; $M_c^{qt} = -J_c\,\varepsilon_s$
Vật rắn quay quanh một trục cố định trong không gian	Điểm O nằm trên trục quay (hệ trục Oxyz gắn liền vào vật quay)	$\vec{R}_O^{qt} = -M\vec{a}_c$ $\vec{M}_O^{qt} \Rightarrow \begin{cases} M_x^{qt} = -J_{yz}\omega + J_{zx}\bar{\varepsilon}; \\ M_y^{qt} = -J_{yz}\bar{\varepsilon} + J_{zx}\omega; \\ M_z^{qt} = -J_z\bar{\varepsilon} \end{cases}$
Vật rắn quay quanh một điểm cố định O	Điểm cố định O (hệ trục Oxyz gắn liền vào vật và là hệ trục quán tính chính tại O)	$\vec{R}_O^{qt} = -M\vec{a}_c$ $\vec{M}_O^{qt} \Rightarrow \begin{cases} M_x^{qt} = -J_z\dfrac{d\omega_x}{dt} + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z; \\ M_y^{qt} = -J_y\dfrac{d\omega_y}{dt} + (J_z - J_x)\omega_z\omega_x; \\ M_z^{qt} = -J_z\dfrac{d\omega_z}{dt} + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y; \end{cases}$
Vật rắn chuyển động tổng quát	Khối tâm C của vật (hệ trục Oxyz gắn liền vào vật và là hệ trục quán tính chính tại C)	$\vec{R}_c^{tq} = -M\vec{a}_c$ $\vec{M}_c^{qt} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_x^{qt} = -J_x\dfrac{d\omega_x}{dt} + (J_y - J_z)\omega_y\omega_z; \\ \bar{M}_y^{qt} = -J_y\dfrac{d\omega_y}{dt} + (J_z - J_x)\omega_z\omega_x; \\ \bar{M}_z^{qt} = -J_z\dfrac{d\omega_z}{dt} + (J_x - J_y)\omega_x\omega_y; \end{cases}$

4.1.2. Nguyên lý Đalămbe

a) Nguyên lý : Ở mỗi thời điểm có một hệ lực cân bằng gồm các lực thật tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc hệ

$$(\text{các } \vec{F}_k^{\text{thật}},\ \text{các } \vec{F}_k^{qt}) \equiv 0 \tag{4-5}$$

b) Hệ quả : Khi khảo sát các đặc trưng hình học của hệ lực (4–5) (vectơ chính và momen chính của hệ lực) ta có hệ quả sau :

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ek} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{qt} = 0 \;;$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_{ek}) + \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_o(\vec{F}_k^{qt}) = 0 \qquad (4\text{–}6)$$

4.1.3. Phương pháp tĩnh – động lực hình học

Sử dụng hệ quả (4–6) có thể giải các bài toán động lực học bằng cách viết các phương trình cân bằng cho hệ lực gồm các ngoại lực và các lực quán tính: sáu phương trình cân bằng đối với hệ lực không gian và ba phương trình đối với hệ lực phẳng. Phương pháp như vậy được gọi là phương pháp tĩnh – động lực hình học.

4.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Phương pháp tĩnh – động lực hình học thường được áp dụng để giải các bài toán sau :

– *Bài toán thuận :* Khi đã biết chuyển động của hệ, tìm một số lực tác dụng lên cơ hệ, chủ yếu là tìm các phản lực động lực.

– *Bài toán ngược :* Viết phương trình vi phân chuyển động cơ hệ, đặc biệt, các phương trình vi phân chuyển động của vật rắn : vật rắn chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay quanh một trục cố định, chuyển động song phẳng,... trong trường hợp riêng, tìm điều kiện cân bằng tương đối của cơ hệ.

– Phương pháp tĩnh – động lực hình học trong một số trường hợp có thể áp dụng để giải đồng thời cả bài toán thuận và ngược, chủ yếu đối với bài toán chuyển động của một vật rắn chịu liên kết.

Khi sử dụng phương pháp tĩnh động lực hình học có thể theo trình tự sau :

– Phân tích chuyển động của hệ vật khảo sát và xác định trạng thái gia tốc của từng vật thuộc cơ hệ.

– Đặt ngoại lực tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc hệ. Đối với vật rắn thì sử dụng các kết quả thu gọn hệ lực quán tính (Bảng 4–1).

– Viết các phương trình cân bằng cho hệ lực gồm các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ và các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ (đối với vật rắn thì sử dụng các kết quả thu gọn hệ lực quán tính).

– Giải các phương trình đã nhận được và nhận xét các kết quả.

Chú thích :

– Đối với bài toán thuận ta nhận được hệ phương trình đại số, nói chung việc giải bài toán không có gì khó khăn. Đối với bài toán ngược ta chỉ lập được phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ và để tìm chuyển động của cơ hệ cần phải tích phân hệ phương trình vi phân nhận được.

– Phương pháp tĩnh – động lực hình học cho phép giải bài toán động lực học một vật rắn một cách hoàn toàn (cả bài toán thuận và ngược). Đối với hệ vật rắn cần phải đưa về các bài toán một vật rắn.

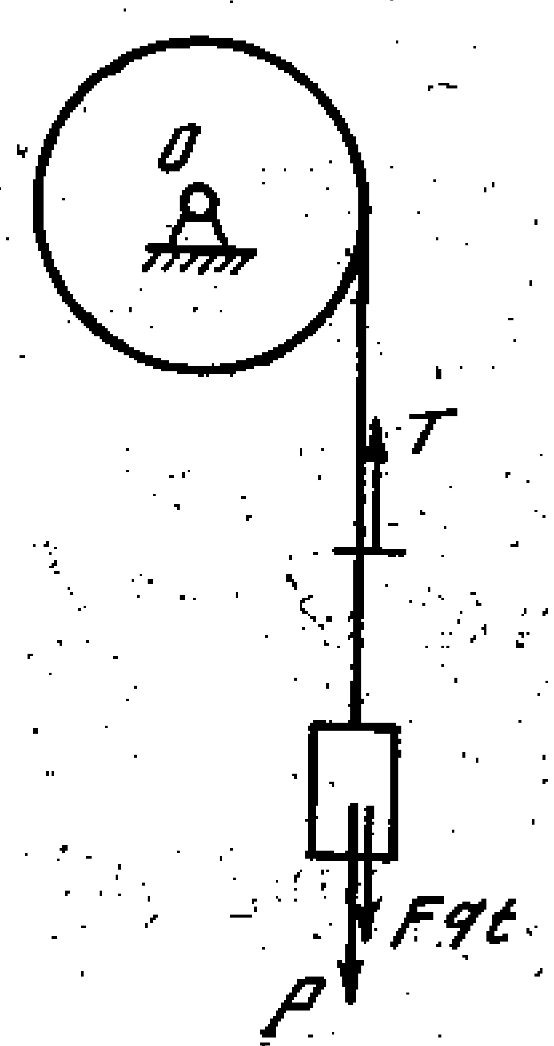
– Phương pháp tĩnh – động lực hình học có một thuận lợi đặc biệt ở chỗ là tại mỗi thời điểm có thể lập các phương trình cân bằng (4–6) trong một hệ quy chiếu bất kỳ (quán tính hoặc không quán tính) đối với hệ lực chỉ gồm các ngoại lực và các lực quán tính được tính trong hệ quy chiếu quán tính.

4.3. BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 4–1. Một vật nặng trọng lượng P được kéo lên nhanh dần đều với gia tốc a theo phương thẳng đứng nhờ dây cáp. Tìm sức căng của dây cáp (H. 4–1).

Bài giải. Vật khảo sát : vật A chuyển động tịnh tiến thẳng đứng.

– Các ngoại lực tác dụng lên vật gồm trọng lực $\vec{P}$ và sức căng $\vec{T}$ của dây cáp.



HÌNH 4–1

– Lực quán tính của vật chuyển động tịnh tiến A

$$\vec{F}^{qt} = -\frac{P}{g}\vec{a}$$

– Viết phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}).$$

Phương trình hình chiếu các lực lên phương thẳng đứng cho ta :

$$P + F^{qt} - T = 0$$

Từ đó :

$$T = P + F^{qt} = P(1 + \frac{a}{g}).$$

Nhận xét :

– Khi vật đứng yên : $T_t = P$, T_t là sức căng tĩnh.

– Khi vật chuyển động với gia tốc a

$$T = P\ (1 \pm \frac{a}{g}) = T_t \pm T_d,$$

trong đó lấy dấu + hoặc – tùy thuộc gia tốc a hướng lên hoặc xuống. Thành phần T_d $P\ \frac{a}{g}$ được gọi là phản lực động lực.

– Khi vật chuyển động đều (v = hằng, a = 0)

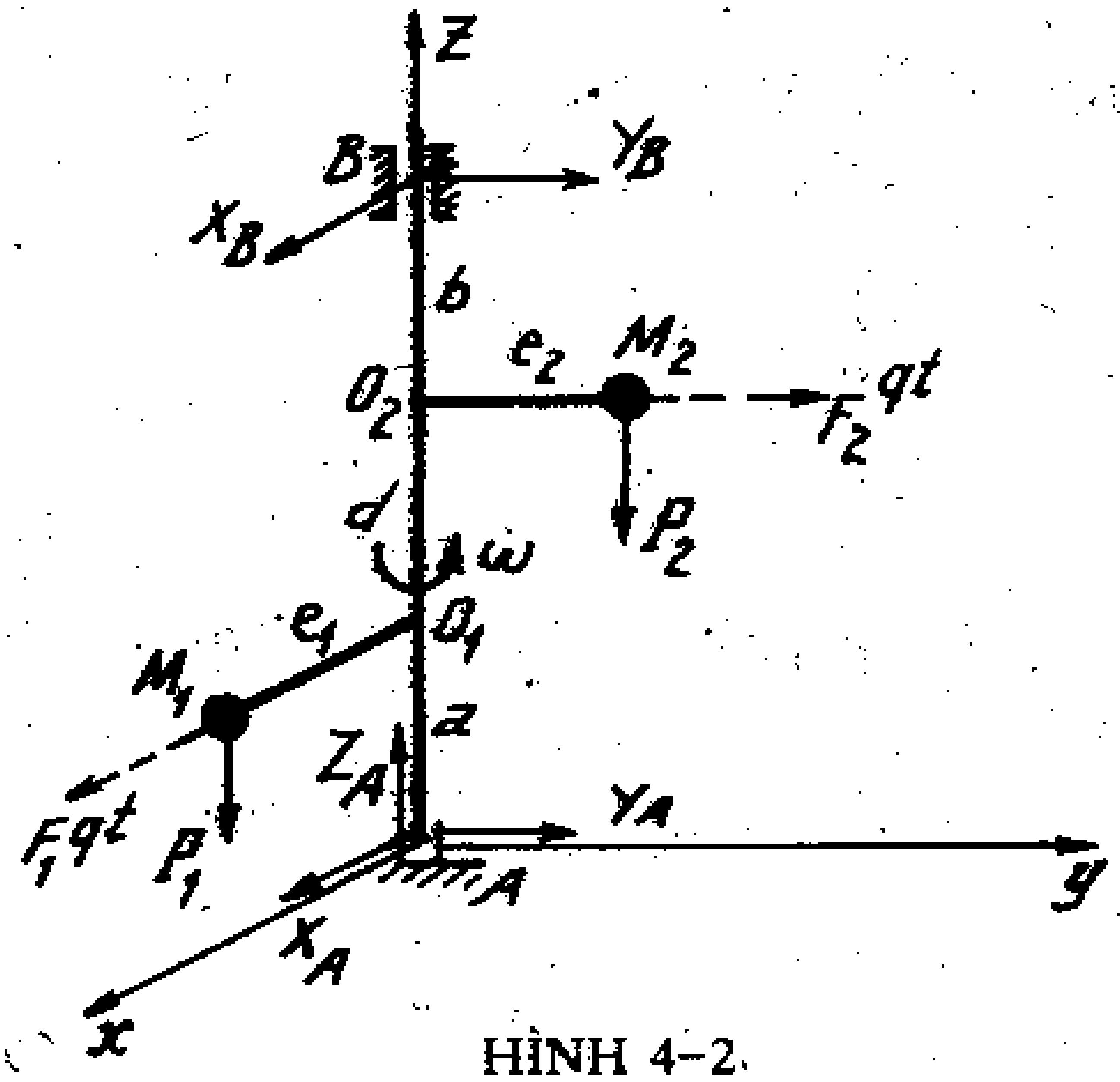
$$T = T_t.$$

Vậy khi vật chuyển động có gia tốc sức căng trong dây chênh lệch một lượng $T_d = P\ \frac{a}{g}$ so với trường hợp vật chuyển động tịnh tiến đều.

Thí dụ 4-2. Hai chất điểm M_1 và M_2 có khối lượng là m_1 và m_2 được gắn vào trục quay AB bằng hai thanh O_1M_1 và O_2M_2 vuông góc với AB và có độ dài tương ứng l_1 và l_2. Góc giữa hai mặt phẳng ABM_1 và ABM_2 bằng $\frac{\pi}{2}$

Cho $O_1A = a$, $O_2B = b$, $O_1O_2 = d$. Trục AB quay với tốc độ góc không đổi.

Bỏ qua ma sát và tác dụng của trọng lực. Tìm áp lực của trục quay AB lên các ổ đỡ (H.4-2).



HÌNH 4-2.

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm trục quay AB cùng hai chất điểm M_1, M_2. Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm hai phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ vì bỏ qua tác dụng của trọng lực, các lực quán tính gồm $\vec{F}_1^{qt}$ và $\vec{F}_2^{qt}$.

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$(\vec{R}_A, \vec{R}_B, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt}).$$

Chọn hệ trục tọa độ Axyz như sau : trục Ax luôn luôn song song với O_1M_1, trục Ay luôn luôn song song với O_2M_2, trục Az trùng với trục AB. Như vậy hệ trục Axyz gắn liền vào vật quay và cùng với vật quay quanh trục AB với vận tốc góc ω.

Ký hiệu các hình chiếu của các phản lực $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$ lên các trục tọa độ lần lượt là

$$\vec{R}_A \begin{cases} X_A \\ Y_B \\ Z_A \end{cases} \qquad \vec{R}_B \begin{cases} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{cases}$$

Còn các lực quán tính có phương chiều như hình vẽ và có trị số :

$$F_1^{qt} = m_1 a_{M1} = m_1 l_1 \omega^2;$$
$$F_2^{qt} = m_2 a_{M2} = m_2 l_2 \omega^2.$$

Viết các phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$(\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_2^{qt})$$

ta được: $\sum X = X_A + X_B + F_1^{qt} = 0;$

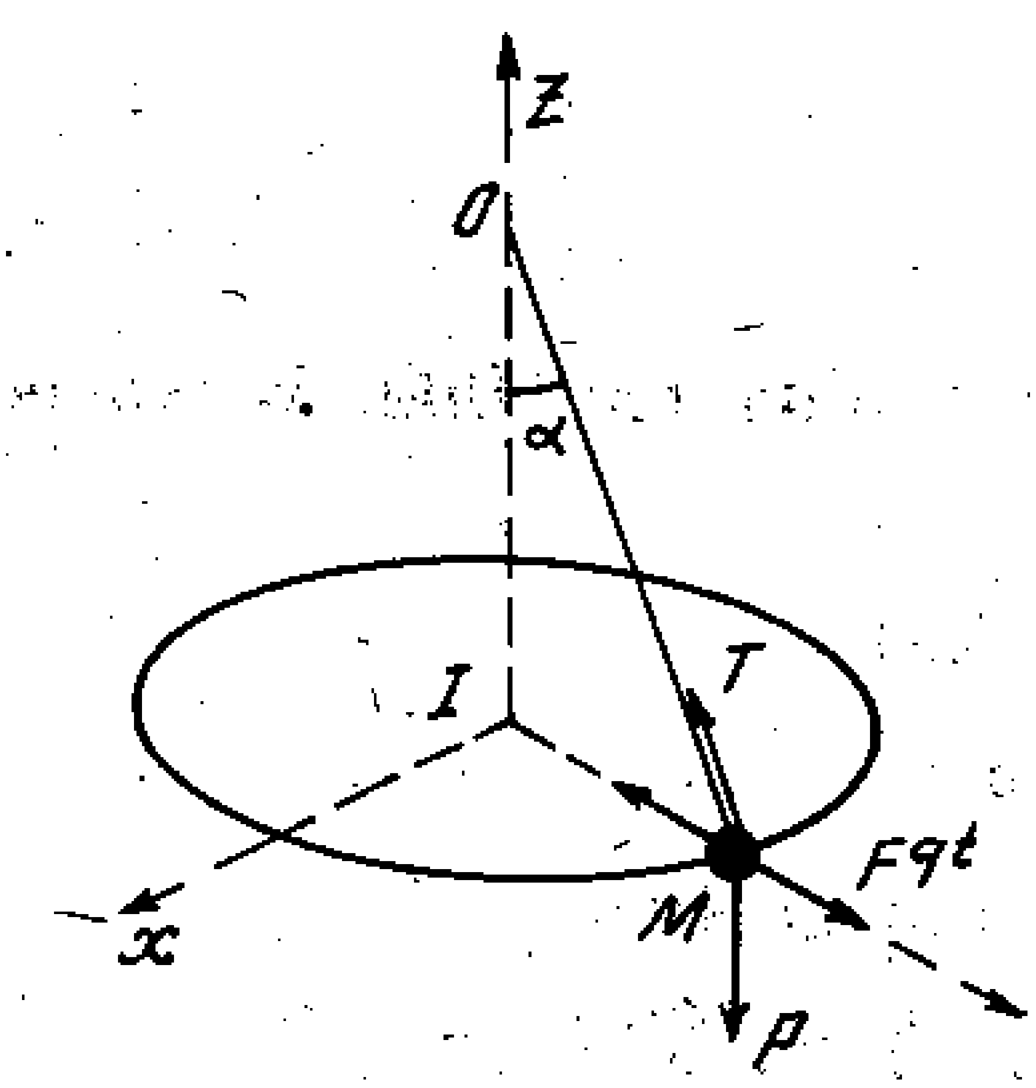
$$\sum Y = Y_A + Y_B + F_2^{qt} = 0;$$
$$\sum Z = Z_A = 0;$$
$$\sum m_x(\vec{F}) = -F_2^{qt}(a+d) - Y_B(a+b+d) = 0;$$
$$\sum m_y(\vec{F}) = X_B(a+b+d) + F_1^{qt} \cdot a = 0.$$

Giải hệ phương trình vừa nhận được ta có :

$$X_A = -\frac{a+d}{a+b+d} m_1 l_1 \omega^2 ;$$
$$Y_A = -\frac{b}{a+b+d} m_2 l_2 \omega^2 ;$$
$$Z_A = 0 ;$$
$$X_B = -\frac{a}{a+b+d} m_1 l_1 \omega^2 ;$$
$$Y_B = -\frac{a+d}{a+b+d} m_2 l_2 \omega^2.$$

Chú ý rằng bài toán này chính là mô hình bài toán tính phản lực động lực của ổ trục lên trục quay trong thực tế.

Thí dụ 4-3. Treo một vật nặng có trọng lượng P vào một điểm O cố định bằng một sợi dây mềm mảnh, nhẹ và không giãn, có chiều dài bằng l. Khảo sát chuyển động ổn định của chất điểm theo một đường tròn với tốc độ v không đổi. Tìm quan hệ giữa v và góc lệch α = const của dây treo với đường thẳng đứng qua O trong chuyển động đó, (H. 4-3).



HÌNH 4-3

Bài giải. Khảo sát vật nặng như một chất điểm chuyển động đều trên đường tròn nằm trong mặt phẳng ngang cố định với tâm I, bán kính IM = l$\sin\alpha$.

Áp dụng phương pháp tĩnh-động lực hình học để giải bài toán này.

Ngoại lực tác dụng lên chất điểm gồm :

– Trọng lực $\vec{P}$, sức căng dây $\vec{T}$.

Lực quán tính của chất điểm $\vec{F}^{qt} = -m\vec{a}$ có giá trị :

$$F^{qt} = ma^n = \frac{Pv^2}{gl\sin\alpha} \qquad (a)$$

Viết các phương trình cân bằng cho hệ lực

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}^{qt}) \qquad (b)$$

Chọn hệ trục động Oxyz như hình vẽ ta có các phương trình hình chiếu như sau :

$$F^{qt} - T\sin\alpha = 0;$$
$$-P + T\cos\alpha = 0 \qquad (c)$$

Từ hai phương trình này ta tìm được liên hệ giữa α và v:

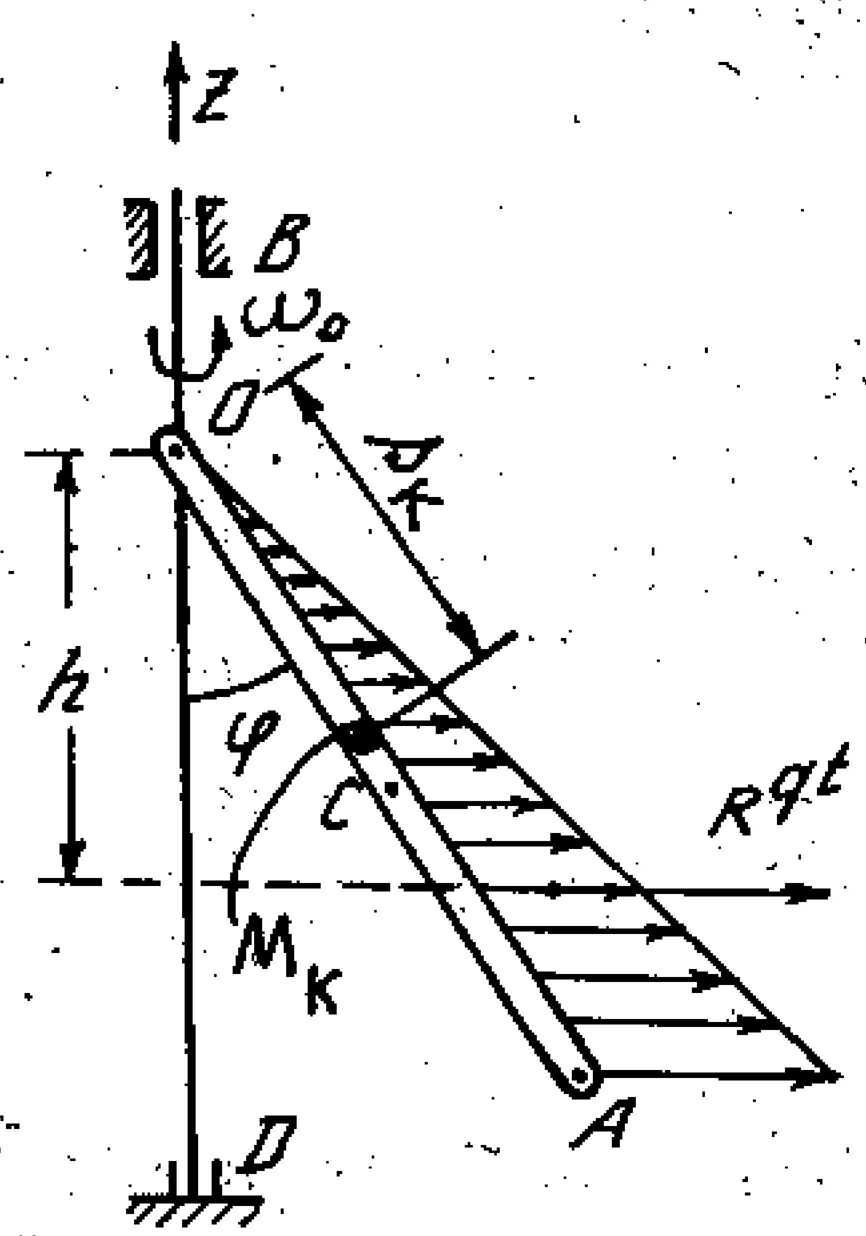
$$v^2 = gl\sin\alpha tg\alpha.$$

Cũng có thể giải bài toán trên nhờ điều kiện cân bằng tương đối được thiết lập trong chương VII.

$$-\vec{P} + \vec{T} - \vec{F}^{qt} = 0.$$

Thí dụ 4–4. Một thanh thẳng, mảnh, đồng chất, chiều dài OA = a có thể quay quanh trục đi qua O và thẳng gốc với mặt phẳng chứa thanh và trục BD. Thanh OA cùng với trục BD quay quanh trục thẳng đứng BD với vận tốc góc không đổi ω_o. Trong chế độ quay ổn định đó thanh OA luôn luôn làm với trục BD một góc không đổi φ (tức thanh OA quét nên một mặt nón tròn xoay với góc ở đỉnh 2φ).

Tìm sự liên hệ giữa tốc độ góc ω_o và góc nghiêng φ trong chế độ ổn định đó. Bỏ qua ma sát (H.4-4).



HÌNH 4–4

Bài giải. Khảo sát thanh OA chuyển động. Các ngoại lực tác dụng lên thanh OA gồm trọng lực $\vec{P}$ và phản lực bản lề $\vec{R}_o$.

Để tìm kết quả thu gọn của hệ lực quán tính của thanh OA ta xem thanh OA là hệ vô số các chất điểm M_k, có khối lượng m_k và gia tốc $\vec{a}_k$. Lực quán tính của mỗi phân tố M_k là :

$$\vec{F}_k^{qt} = - m_k \, \vec{a}_k.$$

Vì góc φ = const nên cả thanh OA và trục quay BD được xem như là một vật rắn quay đều quanh trục quay z với vận tốc góc không đổi ω_o. Do đó $\vec{a}_k$ có phương vuông góc với trục quay z, có chiều hướng từ M_k đến trục z và có giá trị :

$$a_k = s_k \sin\varphi \omega_o^2.$$

Do đó các lực quán tính của các phần tử M_k (lực quán tính ly tâm) tạo thành hệ lực phẳng song song, có phương vuông góc với trục BD, có chiều hướng từ trái sang phải. Dễ dàng chỉ ra rằng khi thu gọn hệ lực đó về tâm O, ta được :

$$\vec{R}_o^{qt} = - M\vec{a}_c \; ; \; \overline{M}_o^{qt} = J_o \omega_o^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

trong đó M là khối lượng thanh OA ; $J_o = \dfrac{Ma^2}{3}$ là mômen quán tính của thanh OA đối với trục qua O và vuông góc với mặt phẳng chứa OA và trục z ; $\vec{a}_c$ – gia tốc khối tâm C, có phương vuông góc với trục quay z, có chiều hướng từ C đến trục z và có giá trị :

$$a_c = \frac{a}{2} \sin\varphi \omega_o^2.$$

Từ kết quả thu gọn hệ lực, ta đi đến kết luận rằng hệ lực quán tính của thanh OA có hợp lực, có phương chiều và giá trị được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực ($\vec{R}^{qt} = - M\vec{a}_c$) và cách tâm thu gọn O một đoạn h :

$$h = \frac{M_o^{qt}}{R^{qt}} = \frac{J_o \sin\varphi \cos\varphi}{M \frac{a}{2} \sin\varphi \omega_o^2} \omega_o^2 = \frac{2}{3} a\cos\varphi.$$

Nói khác đi hợp lực $\vec{R}^{qt}$ của hệ lực quán tính có phương chiều và giá trị được biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực

$(\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_c)$ và đi qua trọng tâm của tam giác phân bố lực quán tính.

Viết phương trình cân bằng (phương trình momen) cho hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{R}_o, \vec{R}^{qt})$$

ta được : $\sum \overline{m}_o(\vec{F}) = -p\dfrac{a}{2}\sin\varphi + R^{qt}\dfrac{2}{3}a\cos\varphi = 0.$

Vì : $\qquad R^{qt} = Ma_c = M\dfrac{a}{2}\sin\varphi\omega_o{}^2$

nên : $\qquad -P\dfrac{a}{2}\sin\varphi + M\dfrac{a}{2}\sin\varphi\,\omega_o^2\dfrac{2}{3}a\cos\varphi = 0.$

Với $\sin\varphi \neq 0$ ta nhận được:

$$\cos\varphi = \frac{3}{2}\,\frac{g}{a\omega_o^2}.$$

Chú ý :

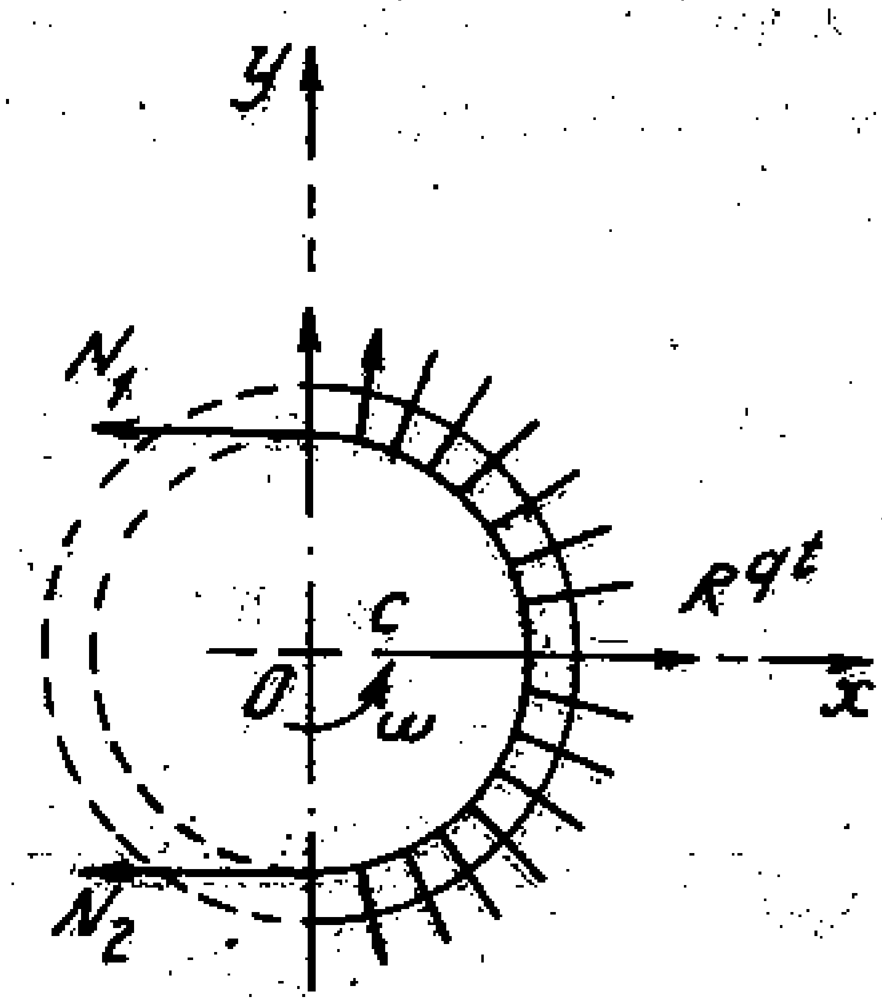
1- Kết quả thu gọn hệ lực quán tính có thể nhận được trực tiếp từ phần tĩnh học vật rắn.

2- Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng điều kiện cân bằng tương đối (xem chương VII).

Thí dụ 4-5. Một bánh đà có trọng lượng P, bán kính R được xem như một vành tròn đồng chất. Bánh đà quay đều quanh trục đối xứng vuông góc với mặt phẳng của nó với tốc độ góc bằng n vòng trong một phút.

Tìm ứng lực pháp tuyến đối với một tiết diện xuyên tâm của bánh đà do hiệu ứng quán tính gây ra.

Bài giải. Vật khảo sát : Tưởng tượng cắt bánh đà làm đôi bởi một mặt phẳng đối xứng đi qua trục quay và xét phần nửa bánh đà bên phải (bỏ qua trọng lực).



HÌNH 4-5

Các ngoại lực tác dụng lên nửa bánh đà bên phải là $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ đó là các ứng lực cần tìm.

Các lực quán tính của nửa bánh đà bên phải là một hệ lực đồng quy qua tâm O của bánh đà, nó có hợp lực $\vec{R}^{qt}$ nằm dọc trục Ox chứa khối tâm C của nửa phải bánh đà :

$$\vec{R}^{qt} = -M\vec{a}_C$$

Bây giờ khảo sát hệ lực :

$$(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{R}^{qt}). \qquad \text{(a)}$$

Để xác định $\vec{R}^{qt}$ ta cần xác định $\vec{a}_C$. Muốn vậy trước hết xác định trọng tâm của nửa đường tròn. Dễ thấy rằng :

$$OC = \frac{2R}{\pi}$$

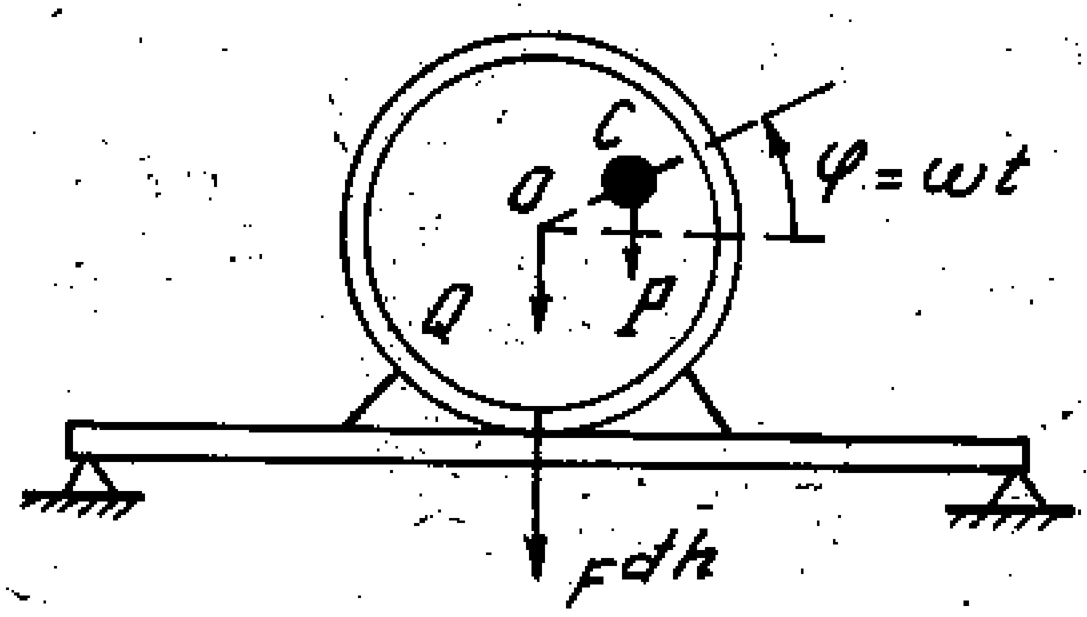
nên
$$a_C = CO\omega^2 = \frac{2R}{\pi}\omega^2,$$

trong đó $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$.

Viết phương trình cân bằng cho hệ lực (a) và tương tự như các thí dụ trước, dễ dàng tính được :

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{g}\frac{\pi R^2}{900}n^2.$$

Thí dụ 4-6. Viết phương trình vi phân chuyển động dao động cưỡng bức của dầm mang động cơ có lệch tâm trong các điều kiện sau đây.



HÌNH 4-6

Khối lượng tổng cộng của vỏ động cơ là m_1, rô to có khối lượng m_2 và có độ lệch tâm e, quay đều với vận tốc góc ω. Đặt mô tơ ở giữa dầm đàn hồi có trọng lượng không đáng kể và có hệ số cứng chống uốn là c. Bỏ qua lực cản và coi rằng động cơ quay đều (H. 4-6).

Bài giải. Ta khảo sát chuyển động của động cơ. Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ : trọng lực $\vec{Q}$ tác dụng lên vỏ động cơ, trọng lực $\vec{P}$ tác dụng lên rôto và lực đàn hồi $\vec{F}_{dh}$ của dầm đàn hồi tác dụng lên vỏ môtơ. Các lực quán tính : Vỏ động cơ chuyển động tịnh tiến, nên hệ lực quán tính của nó thu gọn thành lực quán tính đặt ở khối tâm O :

$$\vec{F}_1^{qt} = -m_1\vec{a}_o.$$

Rôto của động cơ quay đều tương đối quanh O đối với vỏ của nó nên có hai lực quán tính :

$$\vec{F}_{2e}^{qt} = -m_2\vec{a}_e = -m_2\vec{a}_o,$$

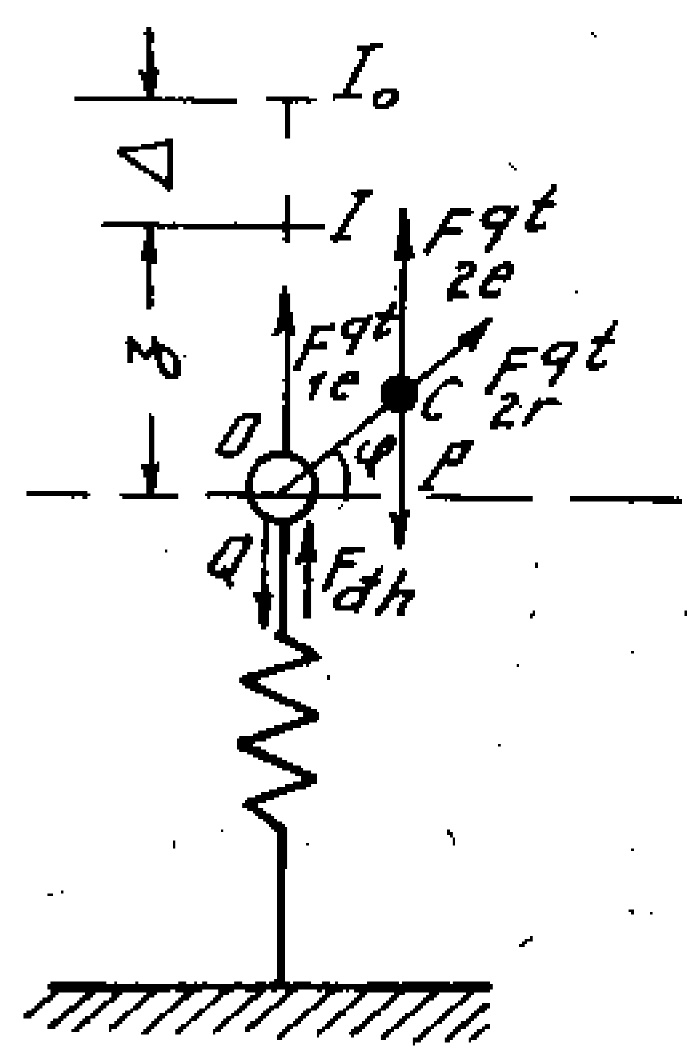
$$\vec{F}_{2r}^{qt} = -m_2\vec{a}_{2r}^{\,n}$$

Hệ lực gồm các ngoại lực và các lực quán tính của cơ hệ khảo sát (kết quả thu gọn) sẽ như sau :

$$(\vec{Q}, \vec{P}, \vec{F}_{dh}, \vec{F}_1^{qt}, \vec{F}_{2e}^{qt}, \vec{F}_{2r}^{qt}).$$

Để lập phương trình vi phân chuyển động dao động của động cơ ta sẽ viết phương trình hình chiếu trên trục đứng cho hệ lực nói trên.

Chọn vị trí I của trục O lúc mô tơ cân bằng tĩnh trên dầm làm gốc tọa độ, định hướng z trở xuống, gọi Δ là độ võng tĩnh của dầm kể từ vị trí không biến dạng I_o của nó (tức dầm không chịu tải), tức $I_oI = \Delta$. Tọa độ của khối tâm O của vỏ động cơ tại thời điểm t bất kỳ sẽ là z = IO. Ta có :



HÌNH 4-7

$$F_{dh} = -c(\Delta + z)$$

Vì $a_{ez} = \ddot{z}$, nên (xem hình 4-7):

$$F_{1ez}^{qt} = -\frac{Q}{g}a_{ez} = -\frac{Q\ddot{z}}{g};$$

$$F_{2ez} = -\frac{P}{g}a_{ez} = -\frac{P}{g}\ddot{z}$$

Bây giờ ta tính lực quán tính tương đối $\vec{F}_{2r}^{qt}$.

Gọi φ là góc của OC làm với phương ngang và giả thiết rằng tại thời điểm đầu OC nằm ngang với hướng sang phải, ta có : $\varphi = \omega t$.

Do đó suy ra :

$$F_{2r}^{qt} = m_2 e\omega^2 \; ; \; F_{2rz}^{qt} = m_2 e\omega^2 \sin\omega t.$$

Phương trình hình chiếu các lực quán tính và ngoại lực lên trục z cho ta :

$$(Q + P) - c(\Delta + z) - \frac{Q+P}{g}\ddot{z} - \frac{P}{g}e\omega^2 \sin\omega t = 0.$$

Đặt :

$$k^2 = \frac{c}{P+Q} \; ; \; h = \frac{P}{P+Q}e\omega^2.$$

và chú ý rằng tại vị trí cân bằng tĩnh :

$$c\Delta = P + Q$$

Nên sau khi rút gọn, ta có :

$$\ddot{z} + k^2 z = - h\sin\omega t.$$

Đây chính là phương trình vi phân chuyển động mô tả dao động cưỡng bức của cơ hệ, trong đó k là tần số dao động riêng của cơ hệ. Qua đây ta thấy rằng chính thành phần thẳng đứng của lực quán tính tương đối của rôto ($\vec{F}_{rz}^{qt}$) đã đóng vai trò lực kích động điều hòa gây nên dao động cưỡng bức của môtơ đặt trên nền.

4.4. BÀI TẬP

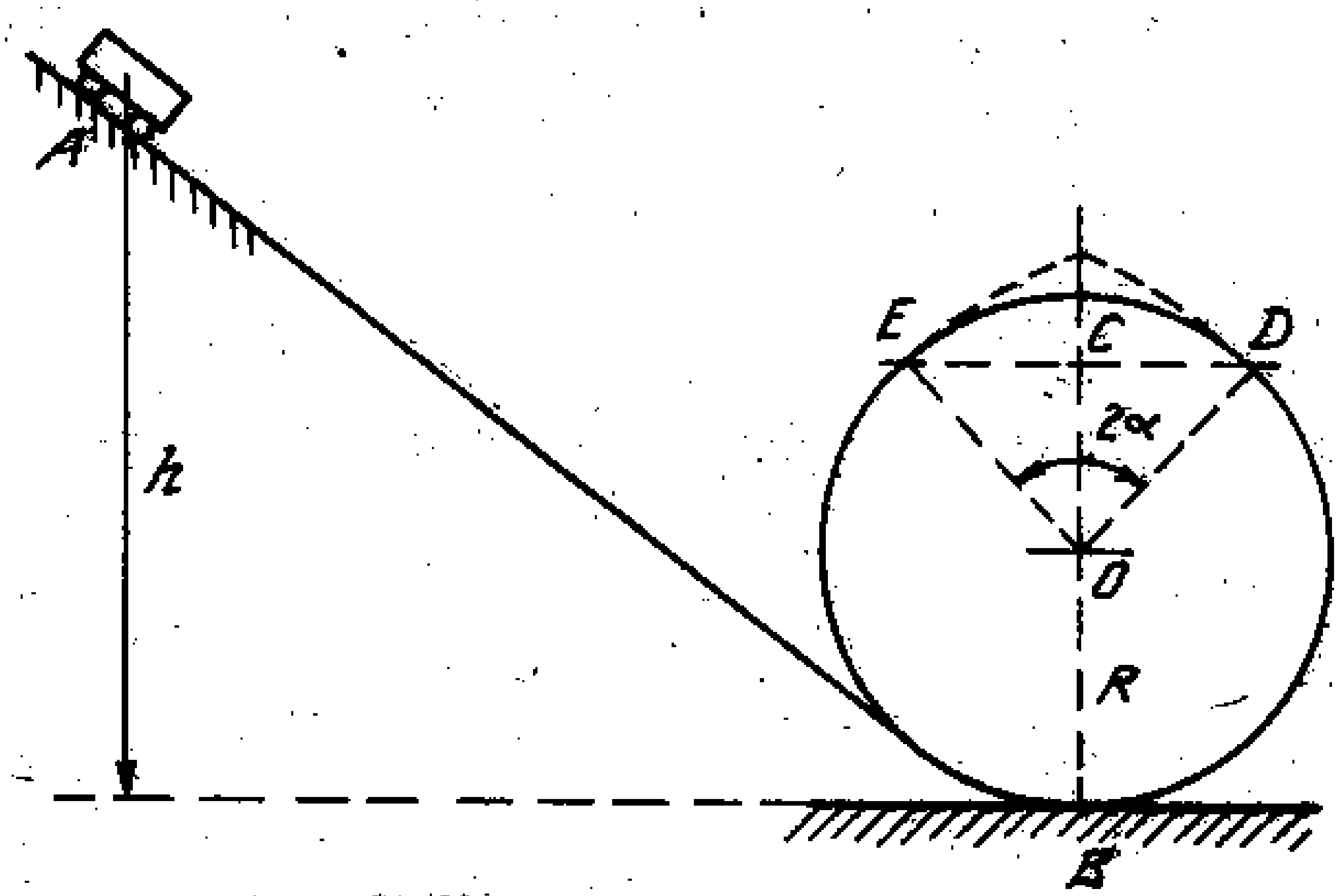
4-1. Một quả cầu nhỏ có trọng lượng P, được treo vào toa xe chuyển động thẳng với gia tốc không đổi $\vec{a}$. Dây treo quả cầu bị lệch đi góc α so với đường thẳng đứng và ở trạng thái cân bằng tương đối với toa xe. Hãy xác định gia tốc a của toa xe ?

Trả lời : $a = g\text{tg}\alpha$.

4-2. Trên một đường ray ABCD như trên hình vẽ ta thả một xe goòng con ở A với vận tốc đầu bằng không. Trọng lượng của xe là P, bán kính của đoạn đường ray vòng tròn là R.

a) Tìm áp lực pháp tuyến N của xe con vào đoạn đường ray vòng tròn đó. Tìm độ cao h ban đầu tối thiểu để xe con chạy được hết đoạn ray quấn tròn.

b) Giả thiết vòng quấn tròn có đoạn hở DE đối xứng qua đường thẳng đứng qua tâm vòng tròn, với góc mở là 2α. Tìm độ cao h cần thiết sao cho xe con vượt qua được quãng mở DE và tiếp tục chuyển động theo vòng quấn ngay từ E (Từ D đến E xe chuyển động theo quỹ đạo parabon). Tìm α ứng với độ cao h nhỏ nhất (H.4-8).

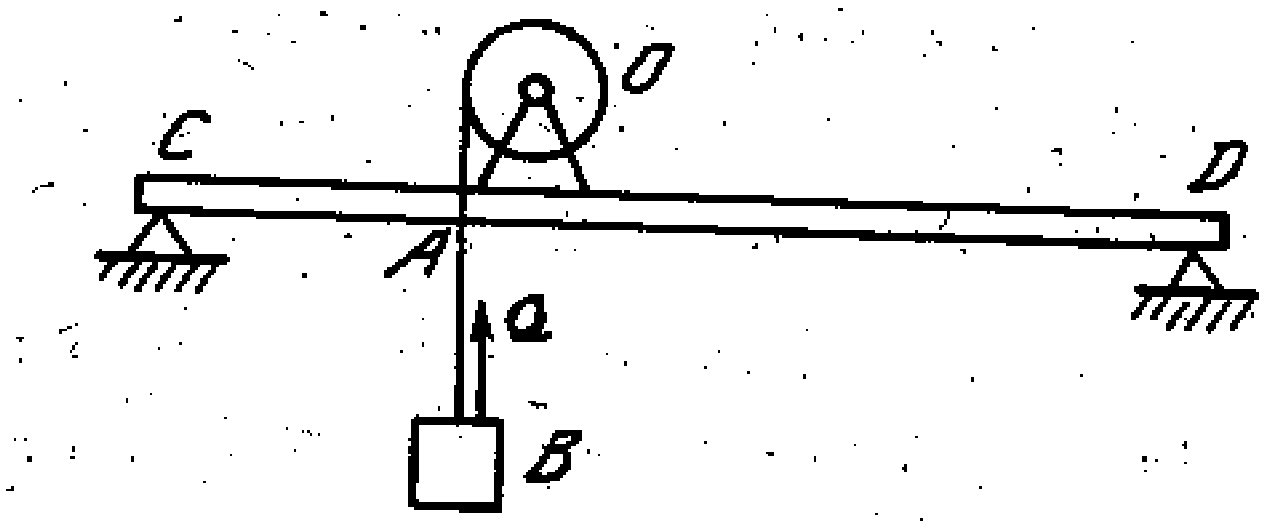


HÌNH 4-8

Trả lời : a) $N = P\left(\frac{2h}{R} - 2 + 3\cos\varphi\right)$; $h \geq 2{,}5R$, trong đó φ là góc của bán kính OB với bán kính định vị của xe trên đường tròn.

b) $h = R\left(1 + \cos\alpha + \frac{1}{2\cos\alpha}\right)$

4-3. Tời máy được đặt trên dầm nằm ngang như trên hình vẽ. Cho khoảng cách giữa hai gối đỡ CD = 8m, AC = 3m. Tời kéo vật nặng B có khối lượng là 2 tấn chạy lên thẳng đứng



HÌNH 4-9

nhanh dần đều với gia tốc $a = 0,5 m/s^2$. Tìm áp lực phụ do lực quán tính của vật nặng B gây ra trên hai gối đỡ, (H.4-9).

Trả lời : 625,4N và 375,40N

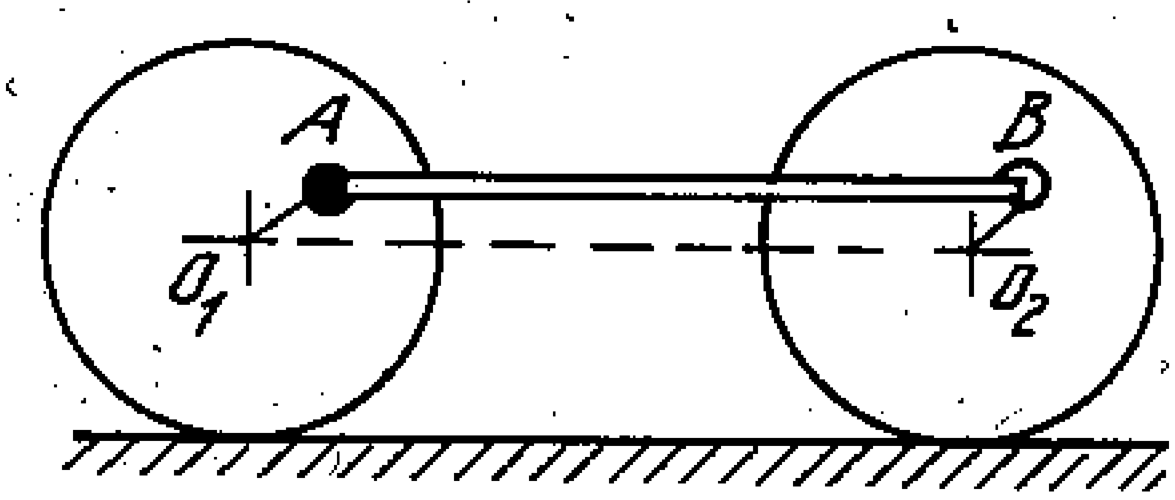
4-4. Xe ô tô có khối lượng m, chạy trên đường ngang với gia tốc a. Trọng tâm của xe cách mặt đường là h và theo phương ngang cách trục các bánh trước và sau những đoạn l_1 và l_2. Bỏ qua mômen quán tính của các bánh xe đối với trục quay của chúng. Tìm áp lực pháp tuyến của cặp bánh trước và cặp bánh sau lên mặt đường. Với trạng thái chuyển động nào của xe thì hai áp lực ấy có giá trị bằng nhau.

Trả lời : $N_1 = \dfrac{m(gl_2 - ah)}{l_1 + l_2}$; $N_2 = \dfrac{m(gl_1 + ah)}{l_1 + l_2}$;

$N_1 = N_2$ khi xe chạy chậm dần đều với gia tốc

$$l_1 = g\,\frac{(l_1 - l_2)}{2h}$$

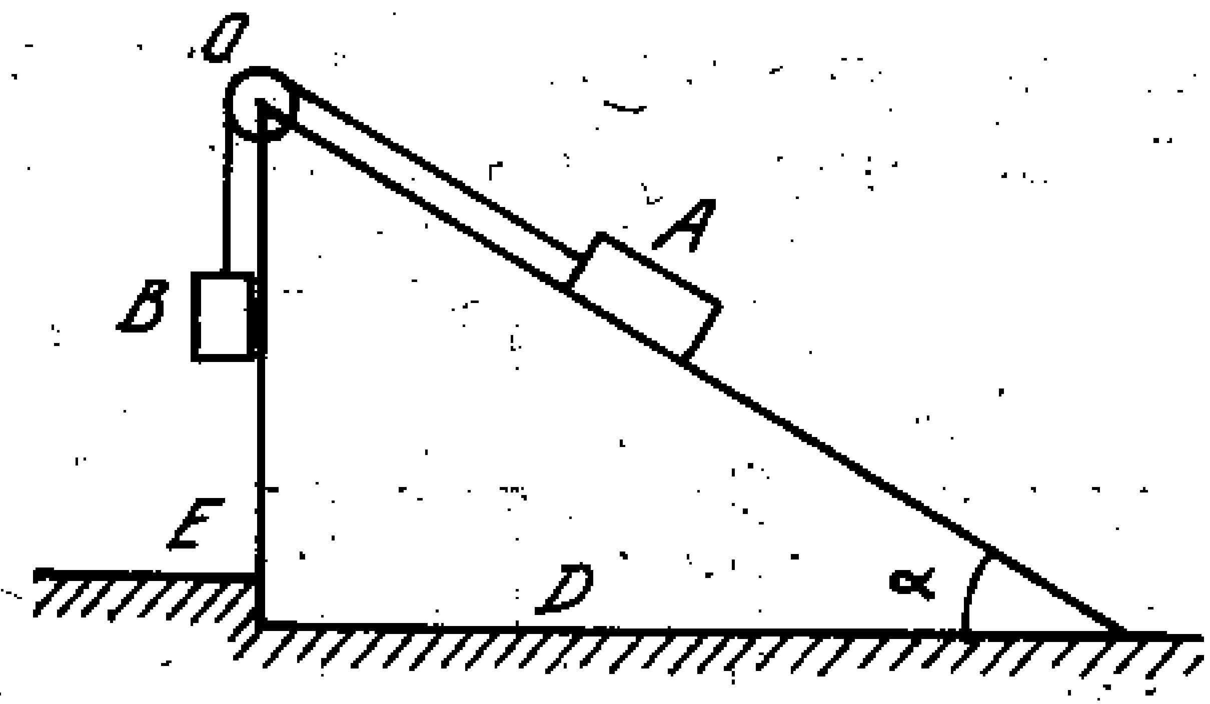
4-5. Đầu máy xe lửa chạy đều trên một đoạn đường ray thẳng ngang với vận tốc 72 km/h, xác định áp lực phụ lên ray do tác dụng quán tính của thanh AB gây ra. Khối lượng của AB là 200kg được phân bố đều dọc thanh. Tay quay có độ dài là r = 0,3m, bán kính vành lăn của bánh xe là R = 1m, giả thiết các bánh xe lăn không trượt trên đường ray (H. 4-10).



HÌNH 4-10

Trả lời : Áp lực có giá trị hàm điều hòa theo thời gian và $N_{max} = 24,03$ kN.

4-6. Vật A trọng lượng P_1 hạ xuống theo mặt nghiêng D truyền chuyển động cho vật nặng B trọng lượng P_2 nhờ một sợi dây không trọng lượng, không giãn, vòng qua ròng rọc cố định O. Góc của mặt phẳng nghiêng với mặt ngang là α. Bỏ qua ma sát.



HÌNH 4-11

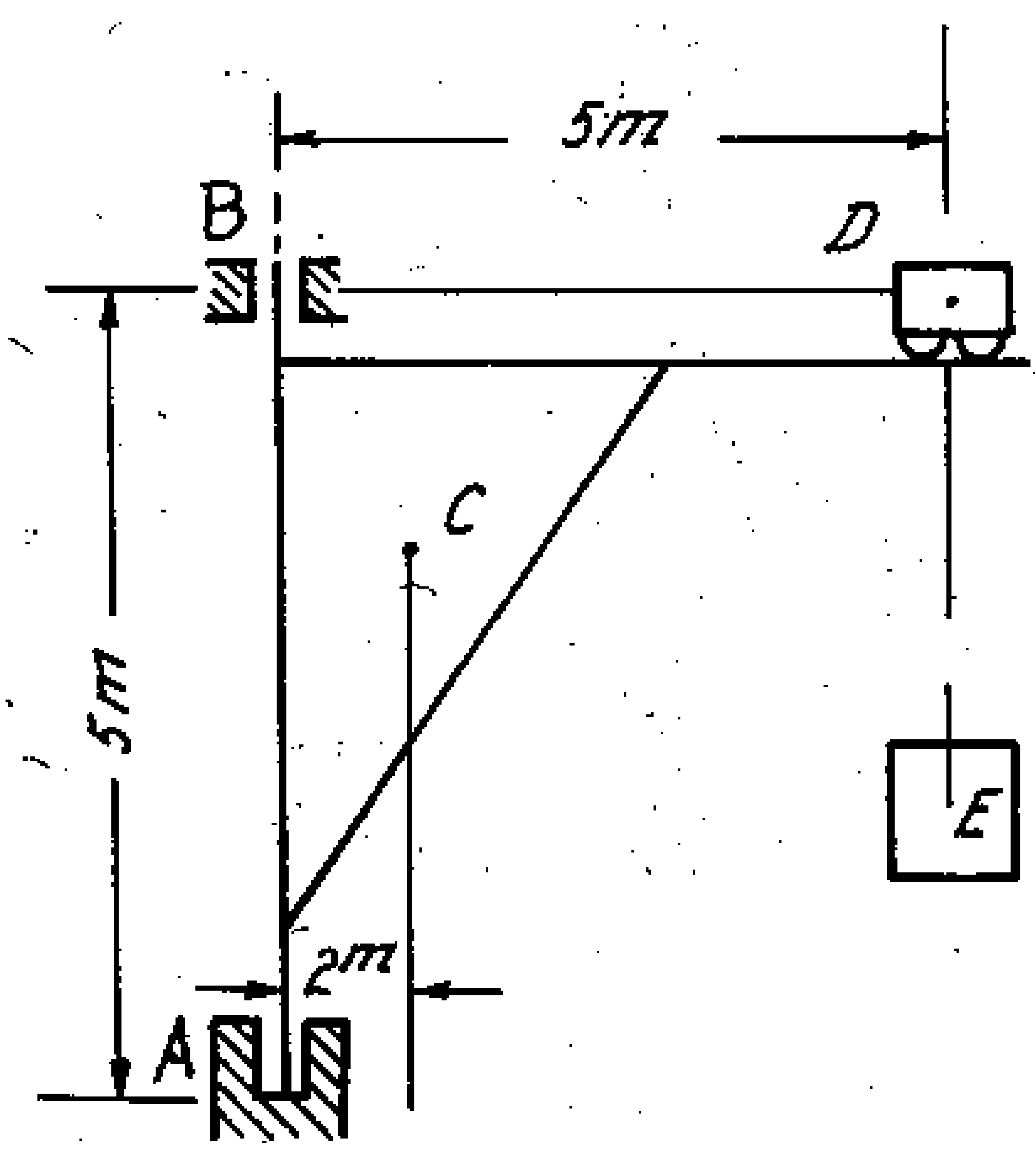
Xác định áp lực của mặt bên D lên mố E của nền, (H. 4-11).

Trả lời : $N = P_1 \dfrac{P_1 \sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2} \cos\alpha$

4-7. Một cần trục quay có khối lượng bằng 2.10^3 kg và khối tâm tại C. Xe vận chuyển D có khối lượng bằng 500kg. Xác định các phản lực ổ đỡ A và B trong các trường hợp sau (H. 4-12).

1) Cần trục và xe đứng yên. Người ta kéo lên vật E có khối lượng 3.10^3 kg theo phương thẳng đứng với gia tốc bằng $\dfrac{1}{3}$ g (g : gia tốc trọng trường).

2) Cần trục đứng yên và xe di chuyển không có vật E từ phải sang trái với gia tốc bằng 0,5g. Cho biết trọng tâm của xe cũng nằm trên đường nằm ngang với ổ đỡ B.

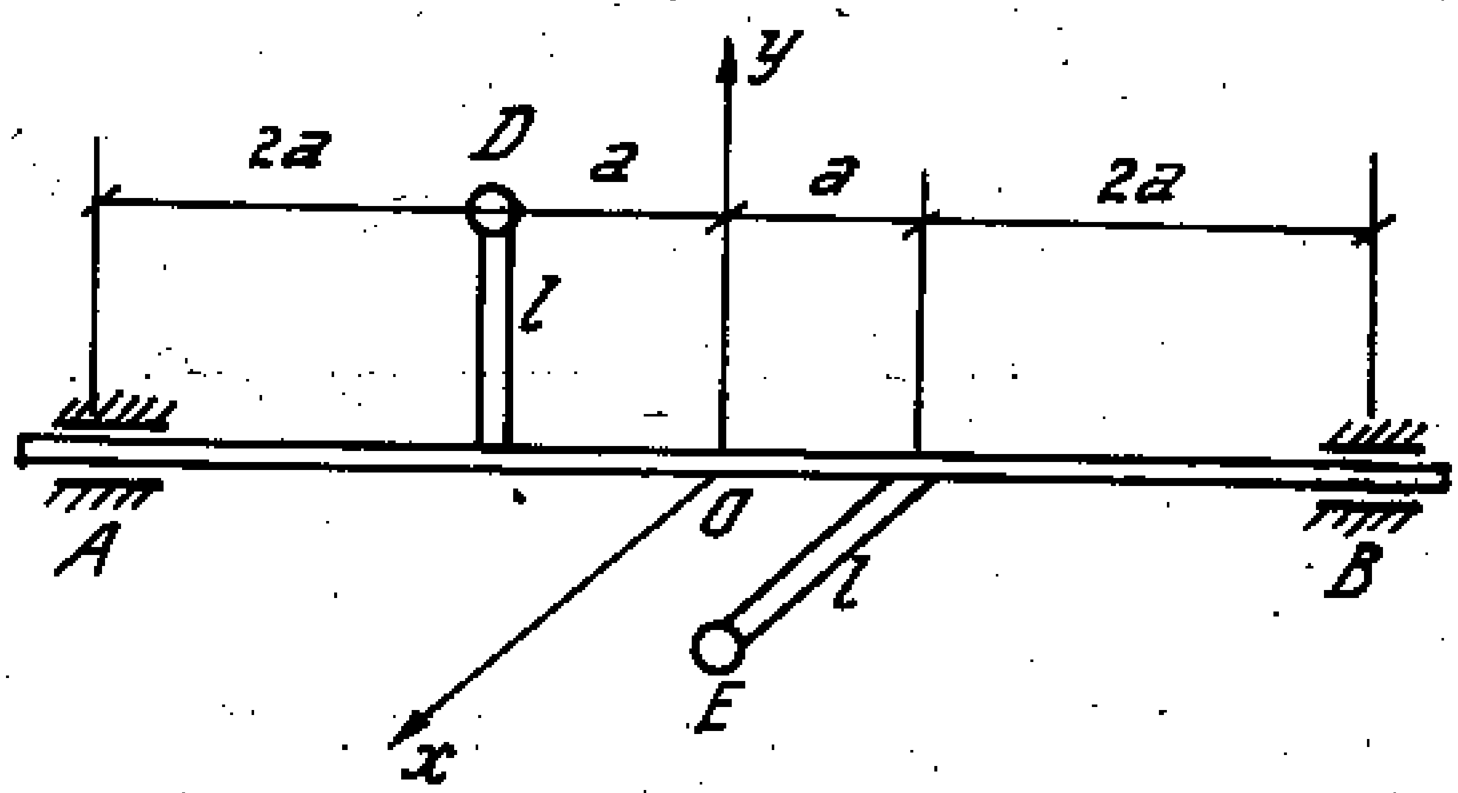


HÌNH 4-12

Trả lời : 1) $X_A = -X_B = 52{,}1$ kN ; $Y_A = 63{,}9$ kN

2) $X_A = 12{,}8$ kN, $X_B = -15{,}2$kN, $Y_A = 24{,}5$ kN

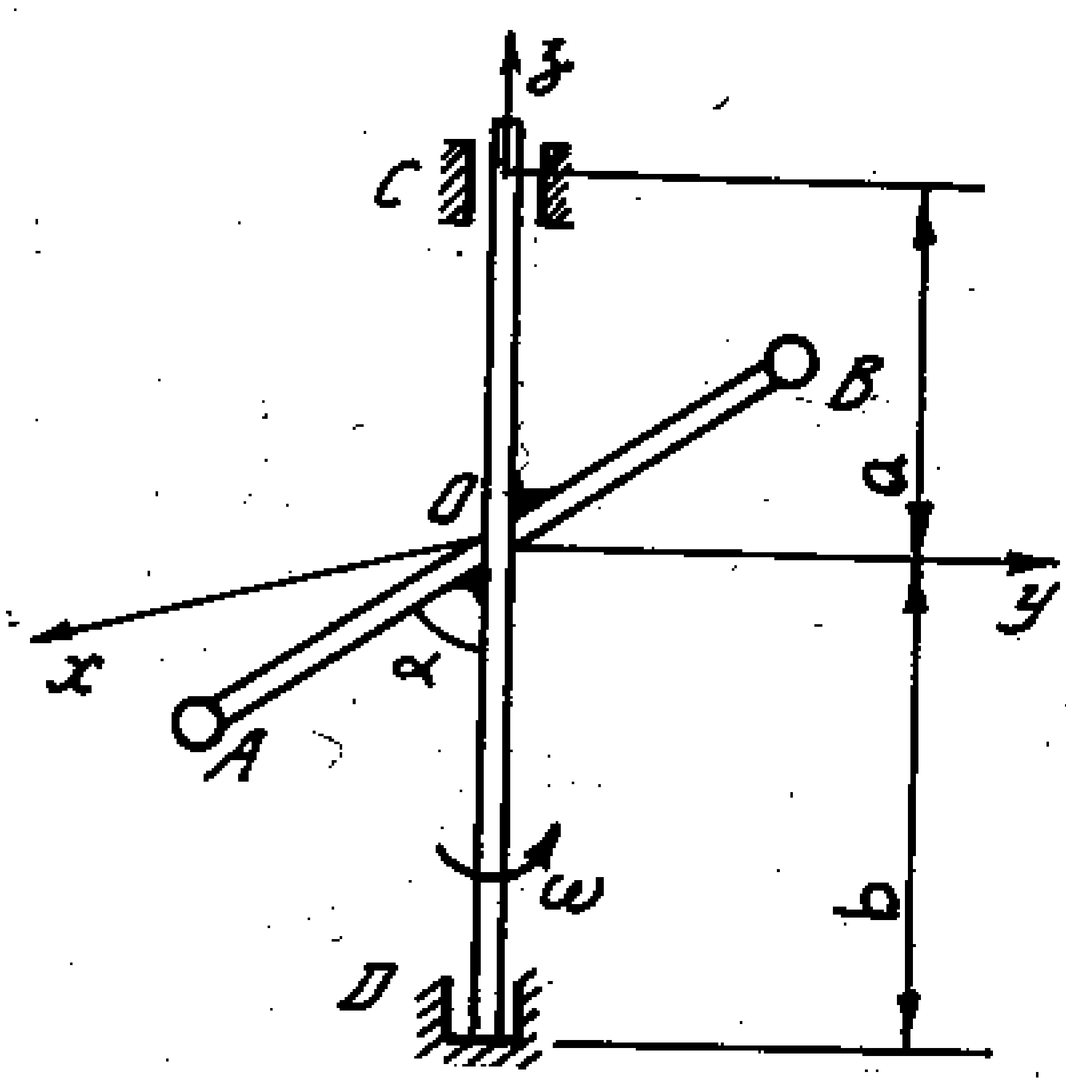
4-8. Trên một trục nằm ngang AB ta lắp hai thanh cùng chiều dài l vuông góc với trục và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Ở đầu cuối mỗi thanh gắn các quả cầu D và E mỗi quả có khối lượng là m. Xác định áp lực động lực của trục AB lên các gối A và B khi trục quay đều với vận tốc góc không đổi ω. Các thanh có vị trí như trên hình vẽ. Các quả cầu coi như chất điểm, khối lượng các thanh bỏ qua, (H.4-13).



HÌNH 4-13

Trả lời : $N_A = N_B = \dfrac{\sqrt{5}}{3} ml\omega^2$

4-9. Thanh AB dài 2l được lắp trên hai đầu mút các vật có cùng trọng lượng P, quay đều quanh trục thẳng đứng Oz đi qua điểm giữa O của thanh AB với vận tốc góc ω. Khoảng cách từ O đến ổ đỡ C là a, đến ổ đỡ D là b. Góc giữa AB và trục Oz là α không đổi. Bỏ qua trọng lượng thanh và kích thước các vật nặng, hãy xác định hình chiếu của các lực tác dụng lên các ổ đỡ C, D khi thanh AB nằm trong mặt phẳng Oyz (H.4-14).

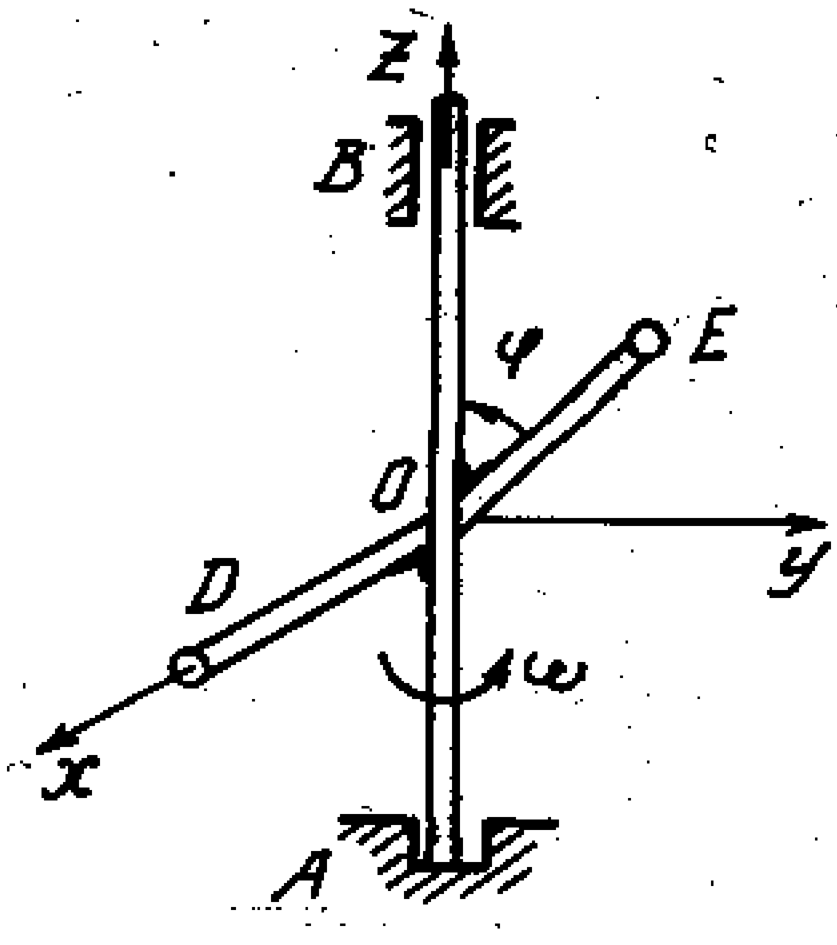


HÌNH 4-14

Trả lời : $X_C = X_D = 0$

$$Y_C = -Y_D = \frac{Pl^2 \sin 2\alpha}{g(a+b)}\omega^2 \; ; \; Z_D = 2P$$

4-10. Trên trục AB quay quanh trục thẳng đứng người ta lắp cứng thêm hai thanh OE và OD. Thanh OE làm với AB một góc φ, còn OD vuông góc với mặt phẳng chứa AB và OE. Cho biết OE = OD = l, AB = 2a, OA = OB. Trên đầu mút các thanh mới lắp người ta gắn thêm hai quả cầu E và D có khối lượng mỗi quả là m. Hãy xác định áp lực động lực của trục lên các ổ đỡ A, B. Bỏ qua trọng lượng các thanh và xem các quả cầu E, D có kích thước không đáng kể, (H.4-15).

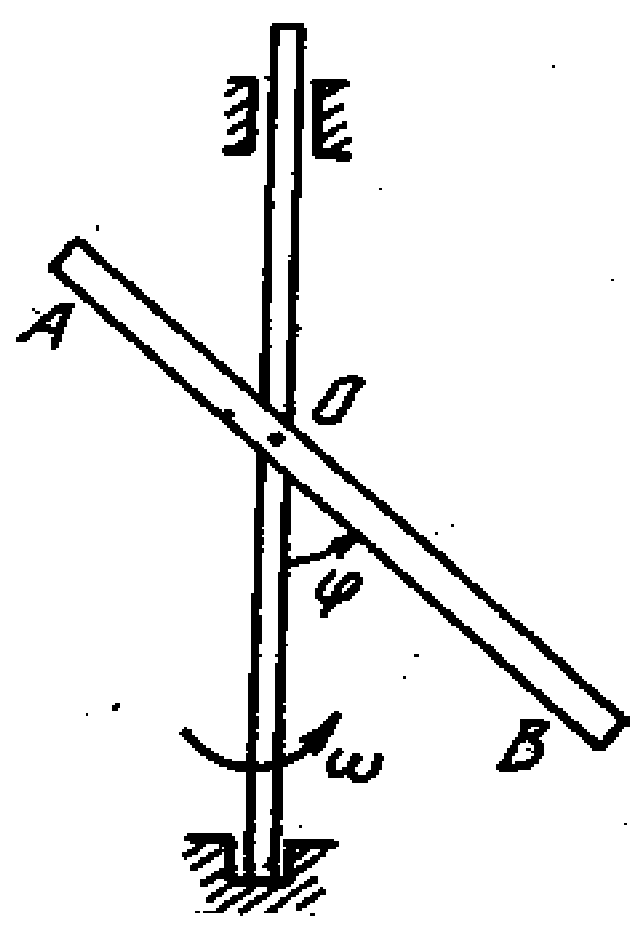


HÌNH 4-15

Trả lời : $X_A = X_B = \dfrac{ml\omega^2}{2}$; $Y_A = \dfrac{ml\omega^2(a - l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$

$$Y_B = \frac{ml\omega^2(a + l\cos\varphi)\sin\varphi}{2a}$$

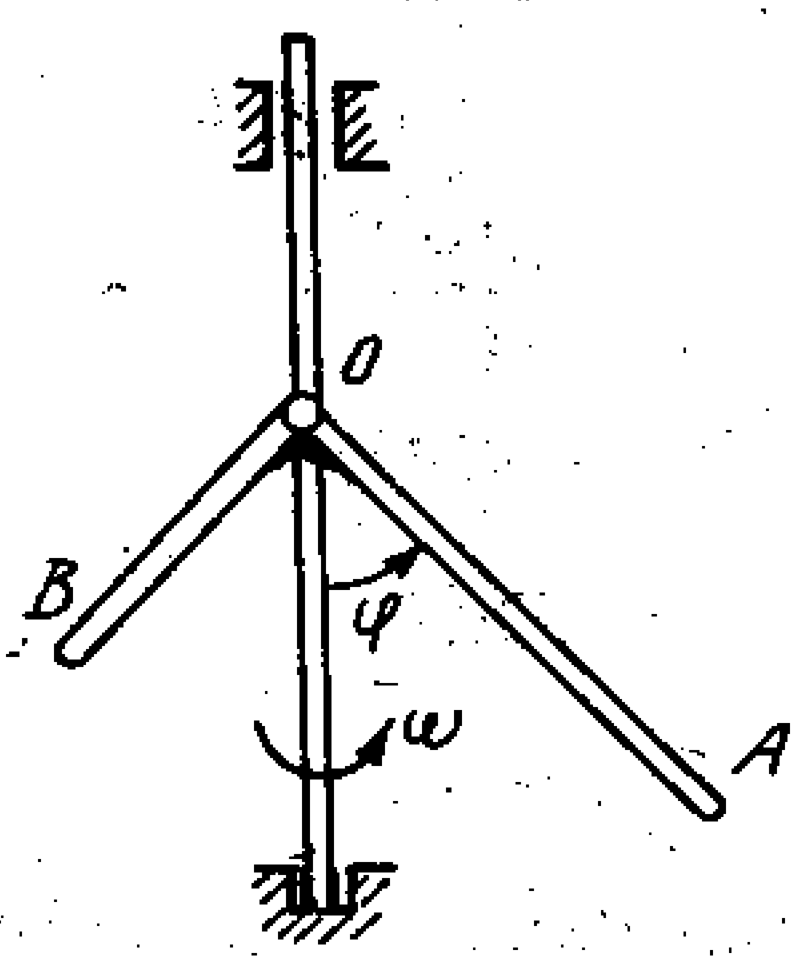
4-11. Một thanh mảnh đồng chất được gắn bằng bản lề vào một trục quay thẳng đứng tại O ; OA = a ; OB = b. Trục quay đều với tốc độ góc ω, chốt bản lề nằm ngang. Bỏ qua ma sát. Tìm hệ thức giữa tốc độ góc ω và góc nghiêng φ giữa trục quay và thanh AB khi chuyển động đã ổn định, (khi đó φ = const) (H.4-16).



HÌNH 4-16

Trả lời : $\cos\varphi = \dfrac{3g}{2\omega^2} \cdot \dfrac{a - b}{a^2 - ab + b^2}$

4-12. Thanh AOB đồng chất, AOB = 90°, được lắp bằng bản lề có chốt ngang vào một trục quay thẳng đứng tại O. Cho OA = a, OB = b. Bỏ qua ma sát. Gọi góc lệch giữa OA và trục quay là φ, trục quay đều với tốc độ góc là ω. Tìm quan hệ giữa φ và ω khi chuyển động đã ổn định, (khi đó φ = const) (H. 4-17).



HÌNH 4-17

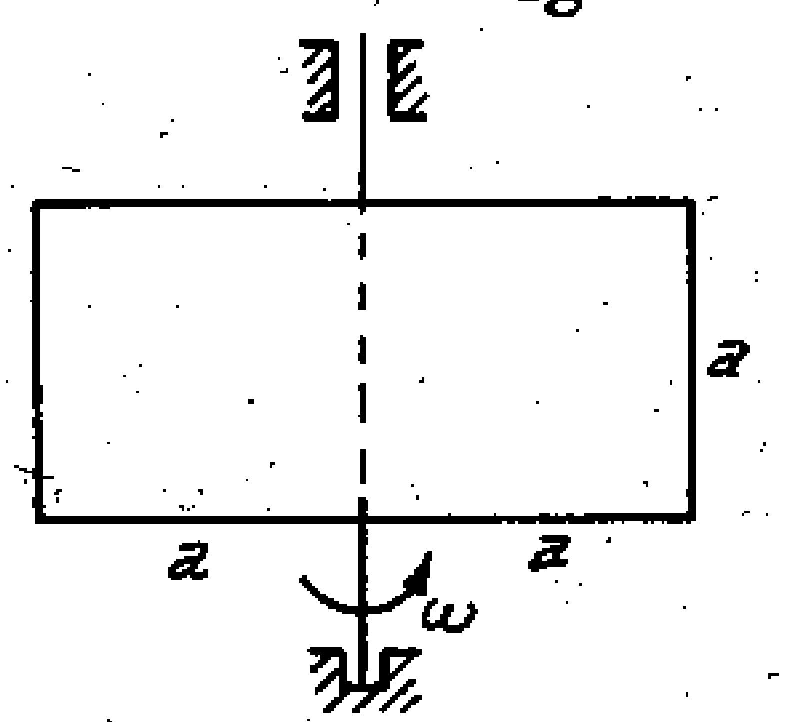
Trả lời : $\omega^2 = 3g\dfrac{b^2\cos\varphi - a^2\sin\varphi}{(b^3 - a^3)\sin2\varphi}$

4-13. Một thanh đồng chất trọng lượng P, dài l quay với vận tốc góc không đổi ω quanh trục thẳng đứng, vuông góc với thanh đó và đi qua đầu mút của thanh. Hãy xác định sức căng của thanh ở thiết diện ngang nằm cách trục quay một đoạn là a.

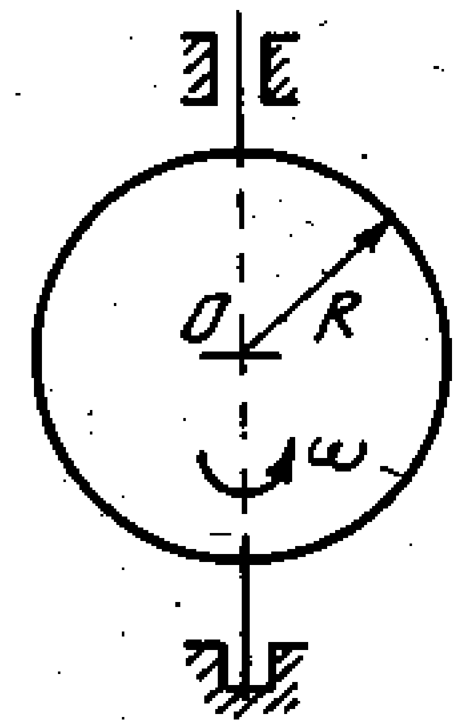
Trả lời : $T = \dfrac{P(l^2 - a^2)\omega^2}{2gl}$

4-14. Một tấm hình chữ nhật đồng chất trọng lượng P quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω. Hãy xác định lực xé tâm theo hướng vuông góc với trục quay trên tiết diện đi qua trục quay, (H. 4-18).

Trả lời : $S = \dfrac{Pa\omega^2}{4g}$.



HÌNH 4-18



HÌNH 4-19

4-15. Một đĩa tròn đồng chất, bán kính R, trọng lượng P quay quanh trục thẳng đứng nằm trên đường kính với vận tốc góc không đổi ω. Hãy xác định lực xé đĩa theo đường kính thẳng đứng (H. 4-19).

Trả lời : $S = \dfrac{2PR\omega^2}{3\pi g}$

CHƯƠNG 5

PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ

5.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

5.1.1. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ

Đối với cơ hệ chịu liên kết giữ, dừng và lý tưởng chúng ta có

$$\sum \delta A\,(\vec{F}_k) + \sum \delta A\,(\vec{F}_k^{qt}) = 0, \tag{5-1}$$

trong đó $\sum \delta A(\vec{F}_k)$ và $\sum \delta A\,(\vec{F}_k^{qt})$ lần lượt là tổng công khả dĩ của các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ và tổng công khả dĩ của các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ. Từ (5-1) chúng ta nhận được các dạng khác nhau của phương trình chuyển động cơ hệ.

Phương trình tổng quát của động lực học trong dạng vectơ

$$\sum_{k=1}^{N} (\vec{F}_k - m_k \ddot{\vec{r}}_k)\,\delta\vec{r}_k = 0, \tag{5-2}$$

trong đó $\vec{F}_k$ là lực hoạt động tác dụng lên chất điểm M_k; m_k, r_k lần lượt là khối lượng và vectơ định vị của chất điểm M_k.

Phương trình tổng quát của động lực học trong dạng tọa độ Đềcác.

$$\sum_{k=1}^{N} [(F_{kx} - m_k\ddot{x}_k)\delta x_k + (F_{ky} - m_k\ddot{y}_k)\,\delta y_k + (F_{kz} - m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0 \tag{5-3}$$

trong đó F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} lần lượt là hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ lên các trục tọa độ Đềcác ; x_k, y_k, z_k là các tọa độ Đềcác của chất điểm M_k.

Đối với cơ hệ chịu liên kết hôlônôm giữ, dừng và lý tưởng, chúng ta có phương trình Lagơrăng loại II

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i};\ i = \overline{1.n}, \tag{5-4}$$

trong đó q_i $(i = \overline{1,n})$ là các tọa độ mở rộng đủ của cơ hệ $\dot{q}_i = dq_i/dt$ là vận tốc mở rộng, T là động năng cơ hệ được biểu diễn qua các tọa độ suy rộng đủ và các vận tốc mở rộng, Q_i là các lực suy rộng của các lực hoạt động không thế, Π là thế năng của cơ hệ, n là số bậc tự do của cơ hệ.

Phương trình (5-4) còn có thể được viết trong dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i;\ i = \overline{1,n}, \tag{5-5}$$

trong đó L = T − Π được gọi là hàm thế động.

Trong trường hợp tất cả các lực tác dụng lên cơ hệ đều là các lực có thế, phương trình chuyển động của cơ hệ có dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0;\ i = \overline{1,n}. \tag{5-6}$$

Còn trong trường hợp các lực hoạt động đều là các lực không thế, ta có :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{5-7}$$

5.1.2. Các tích phân đầu của phương trình chuyển động

a) Tích phân năng lượng : Nếu cơ hệ bảo toàn (tức các lực hoạt động là lực có thế) phương trình chuyển động của cơ hệ có dạng (5-6), nó có tích phân đầu sau :

$$T + \Pi = \text{const} \tag{5-8}$$

được gọi là tích phân năng lượng.

b) Tích phân xycolic : Nếu cơ hệ bảo toàn và $\{\varphi_i\}$ $(i = \overline{1,k})$ là các tọa độ xycolic (tức hàm Lagrăng của hệ không chứa rõ các tọa độ suy rộng φ_i, $\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \equiv 0$; $i = \overline{1,k}$) thì phương trình chuyển động (5–6) của cơ hệ có các tích phân đầu sau :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i \ , \quad i = \overline{1,k} \qquad (5\text{–}9)$$

được gọi là các tích phân xycolic.

5.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

1. Phương trình tổng quát động lực học và phương trình Lagờrăng loại II về nguyên tắc thường được sử dụng để thành lập phương trình vi phân chuyển động của các cơ hệ có một hoặc nhiều bậc tự do. Tuy nhiên trong thực tế chỉ khi phải thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có từ hai bậc tự do trở lên người ta mới sử dụng các dạng phương trình này. Đối với các cơ hệ có một bậc tự do để thành lập phương trình vi phân chuyển động của chúng, có thể sử dụng định lí biến thiên động năng (dạng đạo hàm) (xem chương 2, 2.4).

Cần chú ý thêm rằng phương trình tổng quát động lực học là phương trình biến phân. Do đó nó tương ứng với một hệ phương trình vi phân (số phương trình của hệ bằng số bậc tự do của cơ hệ).

2. Để áp dụng phương trình tổng quát của động lực học ta đặt trực tiếp các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ (trong trường hợp cơ hệ gồm nhiều vật rắn ta thay thế hệ lực quán tính của các vật rắn bằng kết quả thay thế tương đương của chúng). Sau đó ta cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ và tính tổng công khả dĩ của các lực hoạt động và các lực quán tính. Lập các phương trình (5–1) và (5–3). Dựa vào các di chuyển khả dĩ độc lập ta rút ra các phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

3. Để viết phương trình Lagờrăng loại II, đầu tiên chúng ta xác định số bậc tự do của cơ hệ và chọn các tọa độ suy rộng đủ. Tiếp theo tính động năng của cơ hệ theo các công thức ở

2.4, và biểu diễn nó qua các tọa độ và vận tốc suy rộng. Nhờ các phương pháp tính các lực suy rộng đã trình bày, ta tính các lực suy rộng của các lực hoạt động ứng với các tọa độ suy rộng. Tính các biểu thức của đạo hàm của động năng theo tọa độ và vận tốc suy rộng và đạo hàm toàn phần của biểu thức đạo hàm riêng của động năng theo vận tốc suy rộng, thay thế các biểu thức tính được vào (5-4) chúng ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Trong trường hợp các lực hoạt động đều là lực có thế chúng ta sử dụng phương trình (5-6), còn nếu như các lực hoạt động gồm các lực có thế và lực không có thế chúng ta sử dụng phương trình (5-4) và (5-5). Trong trường hợp như vậy cần phải tính biểu thức của hàm thế năng theo các tọa độ suy rộng (theo các công thức tính thế năng trong §2-4) và tính các biểu thức đạo hàm riêng của hàm thế năng theo tọa độ suy rộng nếu sử dụng (5-4) hoặc thành lập hàm thế động L nếu sử dụng (5-5).

Chú ý thêm là trong một số trường hợp của cơ hệ với liên kết ma sát, chúng ta có cơ hệ với liên kết không lý tưởng. Đối với trường hợp như vậy, cần giải phóng các liên kết ma sát và kể các lực ma sát thuộc vào lớp các lực hoạt động.

5.3. BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 5-1. Ròng rọc bán kính R trọng lượng Q phân bố đều chịu tác dụng ngẫu lực M, nâng vật nặng trọng lượng P như hình vẽ. Xác định gia tốc góc của ròng rọc.

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm ròng rọc và vật nặng A. Cơ hệ có một bậc tự do :

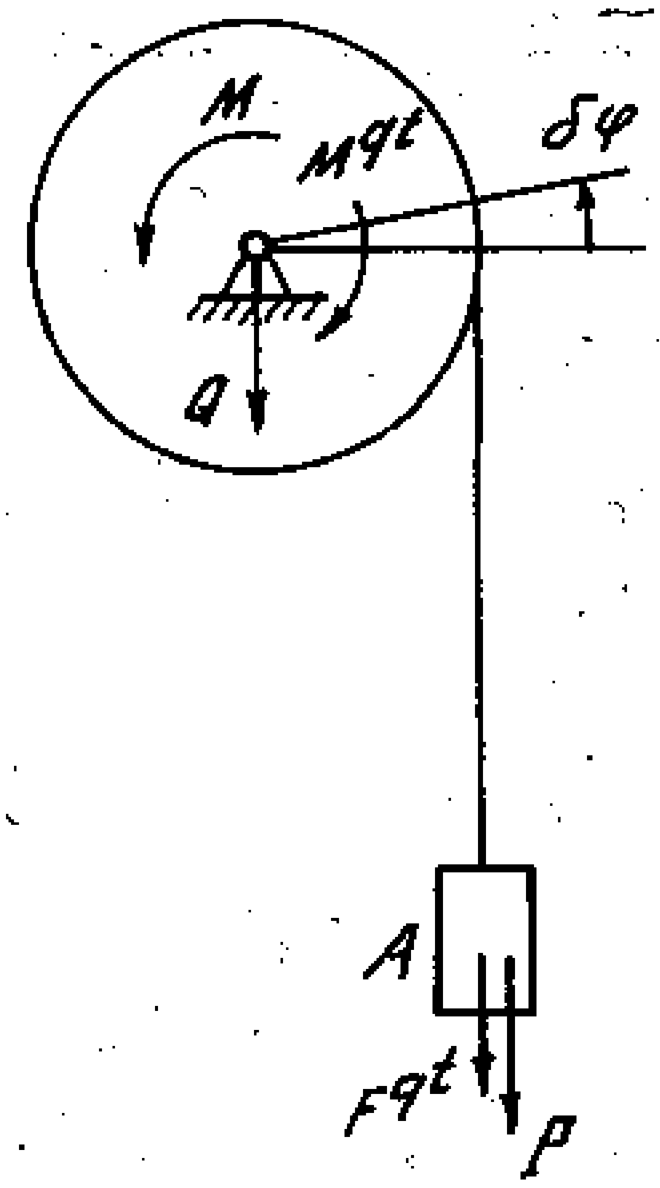
Hệ lực hoạt động gồm các trọng lực $\vec{P}$, $\vec{Q}$ và ngẫu lực M.

Do bỏ qua ma sát và dây được xem là không giãn nên liên kết đặt lên cơ hệ là lý tưởng.

Đặt vào cơ hệ các lực quán tính tương ứng như hình vẽ, trong đó

$$\overline{M^{qt}} = -J\varepsilon = -\frac{Q}{g}\frac{R^2}{2}\varepsilon;$$

$$F^{qt} = ma = \frac{P}{g}R\varepsilon;$$



HÌNH 5-1

J là momen quán tính của ròng rọc đối với trục quay ;

$$J = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}R^2.$$

Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ như sau : ròng rọc quay một góc $\delta\varphi$ và tương ứng vật A dịch chuyển một đoạn δs.

Áp dụng phương trình (5-1) ta có

$$\sum\delta A(\vec{F}_K) + \sum\delta A(\vec{F}^{qt}) =$$

$$= \delta A(M) + \delta A(M^{qt}) + \delta A(\vec{P}) + \delta A(\vec{F}^{qt}) =$$

$$= M\delta\varphi - M^{qt}\delta\varphi - P\delta s - F^{qt}\delta s = 0$$

Theo liên hệ truyền động, ta có : $\delta s = R\delta\varphi$:

Do đó :

$$\delta\varphi[M - M^{qt} - PR - F^{qt}R] = 0,$$

Vậy

$$M - M^{qt} - PR - F^{qt}R = 0,$$

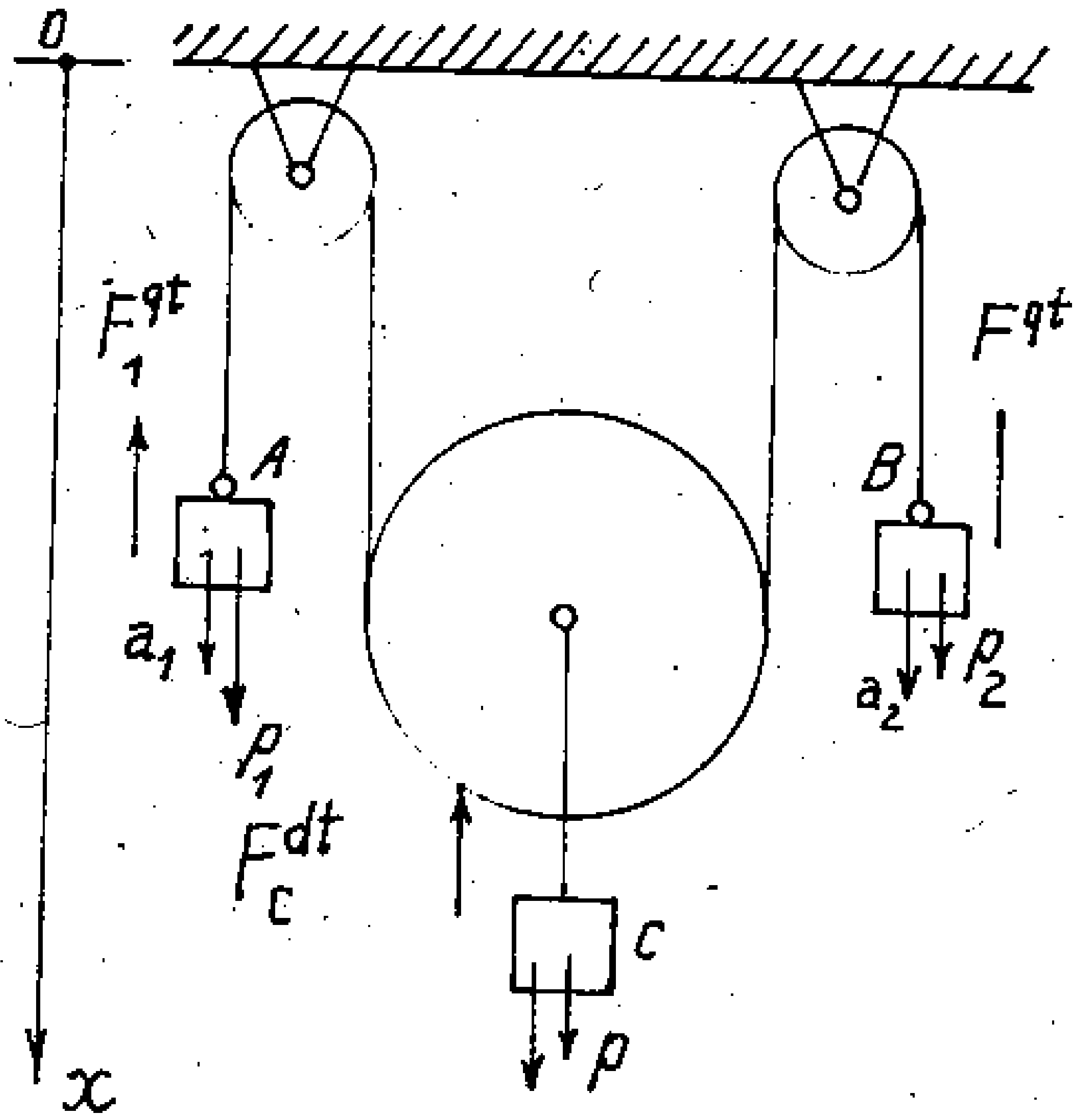
hoặc

$$M - \frac{QR_2}{2g}\varepsilon - PR - \frac{P}{g}\varepsilon R = 0,$$

Từ đó

$$\varepsilon = 2g\frac{M - PR}{R^2(P + Q)}.$$

Thí dụ 5-2. Cho cơ hệ như trên hình vẽ 5-2. Các phần dây không nằm trên ròng rọc theo phương thẳng đứng. Các vật A, B, C lần lượt có khối lượng tương ứng $m_1 = 2$ kg ; $m_2 = 3$kg ;



HÌNH 5-2

m = 4kg. Hãy xác định gia tốc của ba vật nặng. Bỏ qua ma sát và khối lượng của các ròng rọc và dây.

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm dây, các ròng rọc và các vật nặng. Cơ hệ có hai bậc tự do.

Các lực hoạt động gồm các trọng lực. Liên kết đặt lên cơ hệ là lý tưởng.

Chọn phương dương của trục đứng hướng xuống. Giả sử các vật A, B, C chuyển động với gia tốc lần lượt tương ứng là $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}$ hướng xuống.

Ta đặt trực tiếp các lực quán tính như hình vẽ, có các hình chiếu trên trục thẳng đứng là :

$$\bar{F}_A^{qt} = -m_1\bar{a}_1 \ ; \ \bar{F}_B^{qt} = -m_2\bar{a}_2 ; \ \bar{F}_C^{qt} = -m\bar{a}.$$

Cho cơ hệ một di chuyển khả dĩ, trong đó vật A và B di chuyển hướng thẳng đứng xuống với các dịch chuyển δs_A và δs_B, còn vật C dịch chuyển δs_C. Vì ròng rọc II có chuyển động song phẳng, nên ta có.

$$\delta s_C = -\frac{1}{2}(\delta s_A + \delta s_B).$$

Áp dụng phương trình (5-3):

$$(m_1g - m_1\bar{a}_1)\delta s_A + (m_2g - m_2\bar{a}_2)\delta s_B + (mg - ma)\delta s_c = 0.$$

Thay biểu thức của δs_C tính theo δs_A và δs_B ta có

$$\left[m_1g - m_1\bar{a}_1 - \frac{mg - m\bar{a}}{2}\right]\delta s_A + \left[m_2g - m_2\bar{a}_2 - \frac{mg - m\bar{a}}{2}\right]\delta s_B = 0.$$

Vì hệ có hai bậc tự do nên các di chuyển δs_A và δs_B độc lập, do đó chúng ta có :

$$m_1g - m_1\bar{a}_1 - \frac{mg - m\bar{a}}{2} = 0;$$

$$m_2g - m_2\bar{a}_2 - \frac{mg - ma}{2} = 0$$

Từ mối quan hệ giữa các dịch chuyển của các vật A, B, C chúng ta nhận ngay được quan hệ gia tốc giữa ba vật đó, đó là

$$\bar{a} = -\frac{\bar{a}_1 + \bar{a}_2}{2}$$

Khi thay biểu thức của $\bar{a}$ vừa tìm được vào hai phương trình trên, chúng ta có

$$\left(\frac{m}{2} + m_1\right)\bar{a}_1 + \frac{m}{2}\bar{a}_2 = \left(m_1 - \frac{m}{2}\right)g,$$

$$\frac{m}{4}\bar{a}_1 + \left(m_2 + \frac{m}{4}\right)\bar{a}_2 = g\left(m_2 - \frac{m}{2}\right).$$

Thay các số liệu bằng số vào ta nhận được

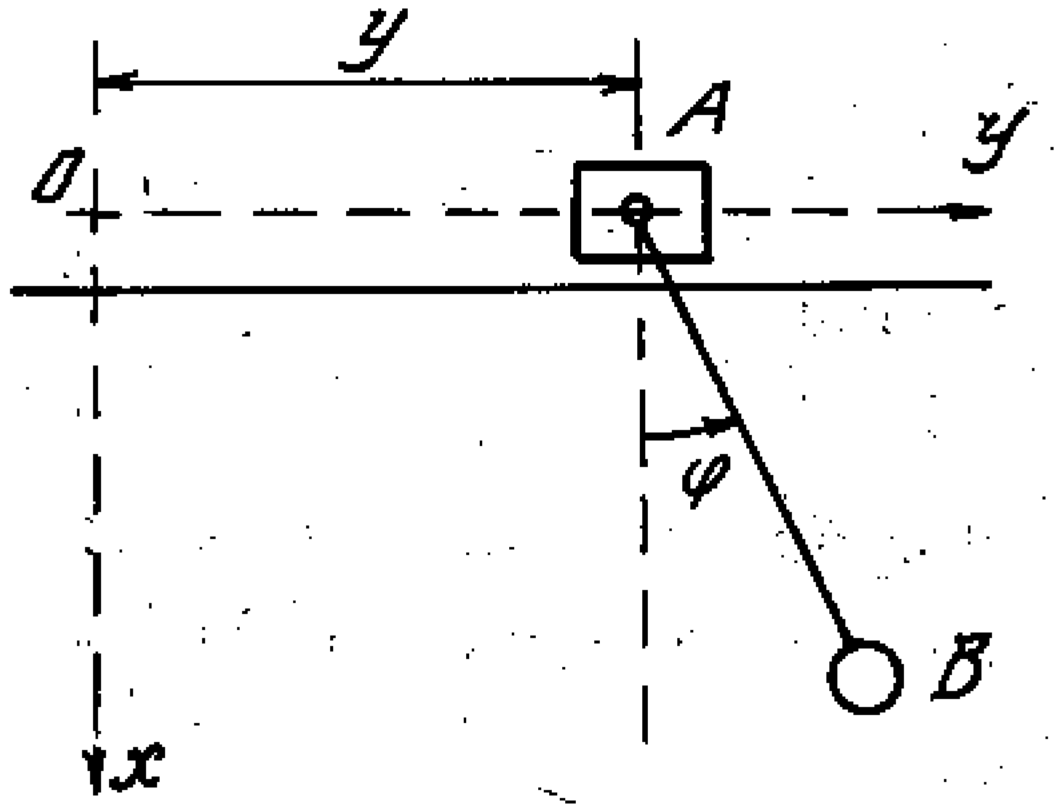
$$3\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = 0, \qquad \bar{a}_1 + 4\bar{a}_2 = g.$$

Từ đó

$$\bar{a}_1 = -\frac{1}{11}g; \ \bar{a}_2 = \frac{3}{11}g; \ \bar{a} = \frac{1}{11}g.$$

Trong kết quả cuối cùng $\bar{a}_1$ mang dấu âm, điều đó có nghĩa là giả thiết trên về chuyển động của vật A là không đúng. Vật A có gia tốc không phải hướng xuống mà là hướng lên. Các giả thiết về hướng gia tốc của vật B và C là đúng.

Thí dụ 5-3. Một con lắc enliptic gồm con chạy A có khối lượng m_1 trượt trên mặt phẳng nhẵn và quả cầu nhỏ có khối lượng m_2 được nối với con chạy A bằng thanh AB cứng, nhẹ, có chiều dài l. Thanh AB có thể quay trơn quanh trục A vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ và tìm các tích phân đầu (H. 5-3).



HÌNH 5-3

Bài giải. Khảo sát cơ hệ gồm con chạy A chuyển động tịnh tiến thẳng ngang và quả cầu B xem như một chất điểm chuyển động tròn tương đối trong mặt phẳng Axy.

Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn hai tọa độ suy rộng đủ là $q_1 = y$; $q_2 = \varphi$. Hệ chịu liên kết hôlônôm và lý tưởng. Các lực hoạt động gồm các trọng lực.

Phương rình Lagơrăng II có dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y \,, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

Đầu tiên tính động năng cơ hệ : $T = T_1 + T_2$, trong đó T_1 và T_2 lần lượt tương ứng là động năng của con chạy và quả cầu.

Vì con chạy chuyển động tịnh tiến theo phương ngang nên :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2.$$

Chất điểm B chuyển động trong mặt phẳng nên :

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)\,,$$

trong đó : $x_2 = l\cos\varphi$; $\dot{x}_2 = -\,l\sin\varphi \,.\, \dot{\varphi}$,

$$y_2 = y + l\sin\varphi \quad ; \quad \dot{y}_2 = \dot{y} + l\cos\varphi \,.\, \dot{\varphi}\,.$$

Vậy

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 [(-l\sin\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{y} + l\cos\varphi \,.\, \dot{\varphi})^2] =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 (l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi).$$

Biểu thức động năng của cơ hệ được viết như sau :

$$T = \frac{m_1\dot{y}^2}{2} + \frac{m_2}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 + \dot{y}^2 + 2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\varphi}^2 + m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\cos\varphi .$$

Bây giờ ta tính các lực suy rộng. Lực sinh công duy nhất trong di chuyển của cơ hệ là trọng lực $\vec{P}_2$ tác dụng lên quả cầu B, đó là lực có thế và hàm thế năng Π của hệ có dạng.

$$\Pi = -m_2gl\cos\varphi + \text{const.}$$

Từ đó suy ra

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = -m_2gl\sin\varphi,$$

$$Q_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y} = 0.$$

Để viết phương trình Lagrăng loại II, ta tính các đạo hàm của hàm động năng

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} + m_2l\dot{\varphi}\cos\varphi ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi \; ;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2l^2\dot{\varphi} + m_2l\dot{y}\cos\varphi ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\ddot{y}\cos\varphi - m_2l\sin\varphi\dot{y}\dot{\varphi} .$$

Khi thay thế giá trị của các đạo hàm này và giá trị của lực suy rộng vào phương trình Lagrăng loại II, ta nhận được phương trình vi phân chuyển động cơ hệ như sau :

$$m_2l^2\ddot{\varphi} + m_2l\cos\varphi\ddot{y} - m_2l\sin\varphi\dot{y}\dot{\varphi} + m_2l\sin\varphi\dot{y}\dot{\varphi} = -m_2gl\sin\varphi,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2l\cos\varphi\ddot{\varphi} - m_2l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0.$$

Sau khi rút gọn ta có hệ phương trình

$$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0 ,$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + m_2 l\cos\varphi\ddot{\varphi} - m_2 l\sin\varphi\dot{\varphi}^2 = 0 ;$$

nó mô tả chuyển động cơ hệ.

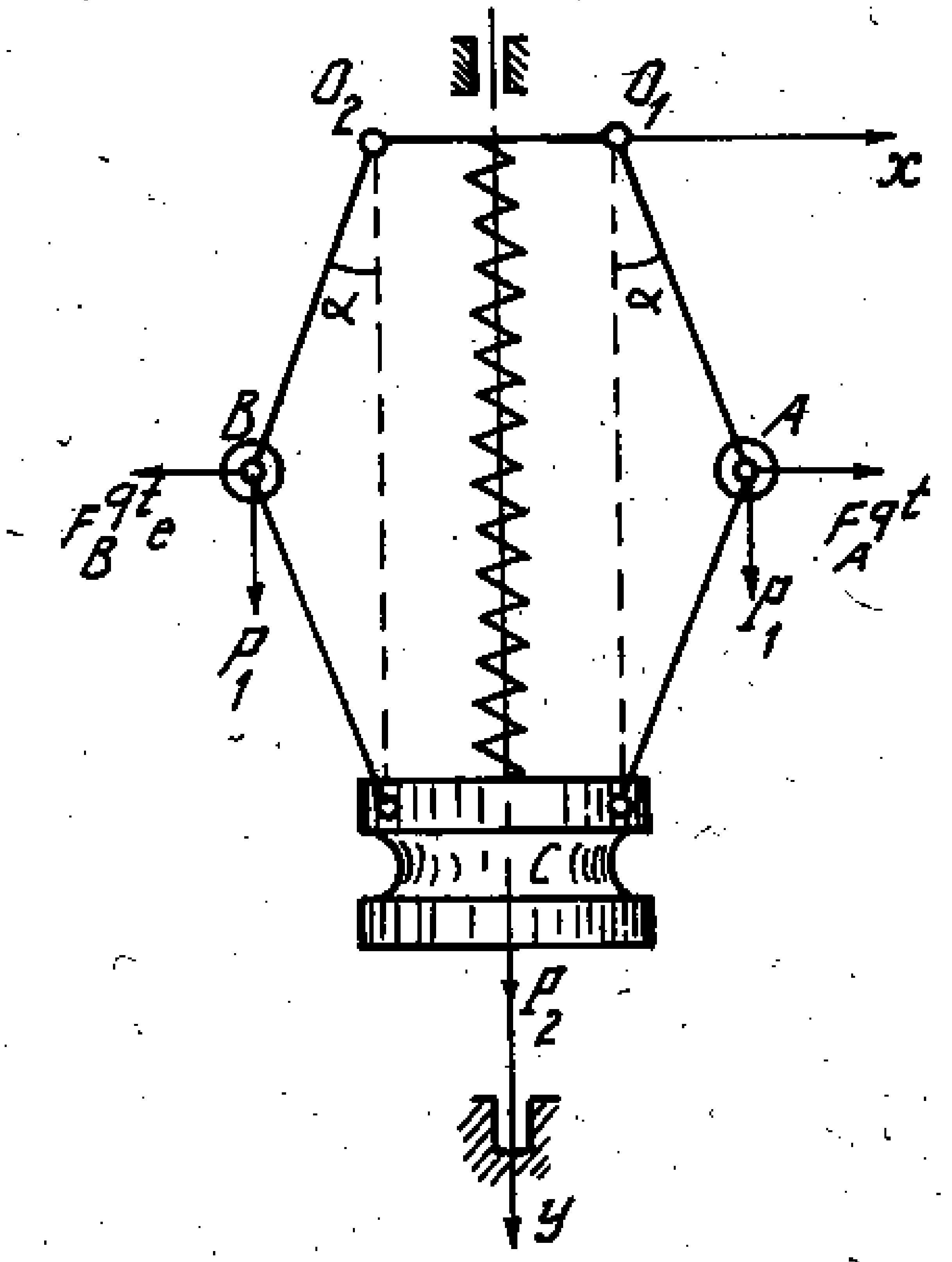
Dễ dàng chỉ ra rằng hệ phương trình trên có các tích phân đầu sau (hệ bảo toàn và có tọa độ xycơlic y):

$$(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi} = C_1 ,$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\cos\varphi\dot{y}\dot{\varphi} - m_2 g l\cos\varphi = C_2$$

ở đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân.

Thí dụ 5-4. Một máy điều tiết ly tâm chịu tác dụng ngẫu lực có momen M đặt vào trục quay. Các quả văng A và B của máy điều tiết có cùng trọng lượng P_1. Các thanh treo có cùng độ dài l và các điểm treo của chúng cách trục quay một khoảng bằng a. Đối trọng có trọng lượng P_2 và bị đẩy về vị trí cân bằng tĩnh bởi lò xo có độ cứng c. Bỏ qua trọng lượng của các thanh và của lò xo cũng như ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ (H. 5-4).



HÌNH 5-4

Bài giải. Hệ khảo sát là cơ cấu máy điều tiết không kể lò xo (phá vỡ liên kết lò xo và thay thế tác dụng của lò xo bằng lực đàn hồi). Đối trọng A xem như một chất điểm chuyển động thẳng. Các quả văng A và B đối với khung quay của máy điều tiết, chuyển động trên các đường tròn có tâm là O_1 và O_2, và có cùng bán kính l.

Để xác định vị trí cơ hệ ta dùng hai thông số độc lập là góc quay θ của khung quanh trục thẳng đứng và góc lệch φ của các thanh treo trong mặt phẳng khung quay nói trên.

Như thế, θ và φ chính là hai tọa độ suy rộng đủ của cơ hệ và cơ hệ có hai bậc tự do.

Ngoài liên kết lò xo, các liên kết khác của cơ hệ đều là lý tưởng. Do đó các lực hoạt động gồm các trọng lực đặt vào các quả văng và đối trọng, ngẫu lực có momen M và lực đàn hồi lò xo.

Để thành lập phương trình vi phân chuyển động cơ hệ ta áp dụng phương trình Lagờrăng loại II.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \ ,$$

Đầu tiên ta tính biểu thức động năng cơ hệ :

$$T = T_1 + T_2 \ ,$$

trong đó T_1 là động năng của hai quả văng, T_2 là động năng của đối trọng :

Mỗi quả văng tham gia vào hai chuyển động, trong mặt phẳng chứa khung chúng chuyển động trên các đường tròn tâm O_1 và O_2 có cùng bán kính l. Ngoài ra chúng bị mặt phẳng khung kéo theo trong chuyển động của nó quanh trục thẳng đứng. Như vậy vận tốc tuyệt đối của mỗi quả văng được tính theo công thức:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

Vận tốc tương đối $\vec{v}_r$ nằm trong mặt phẳng khung, hướng vuông góc với các thanh treo và có giá trị $v_r = l\dot{\varphi}$. Vận tốc theo $\vec{v}_e$ hướng vuông góc với mặt phẳng khung quay và có giá trị $v_e = (a + l\sin\varphi)\theta$.

Rõ ràng hai vectơ $\vec{v}_e$ và $\vec{v}_r$ vuông góc với nhau, nên :

$$v_a^2 = v_e^2 + v_r^2 = (l\sin\varphi + a)^2 \dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 .$$

Đối trọng được xem là một chất điểm có chuyển động thẳng với vận tốc $\vec{v}_c$.

$$v_c = \frac{d}{dt}(\overline{OC}) = \frac{d}{dt}(2l\cos\varphi) = -2l\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Động năng của toàn cơ hệ bằng

$$T = T_A + T_B + T_C = 2\frac{P_1}{g}\frac{v_A^2}{2} + \frac{P^2}{2g}v_C^2$$

$$= \frac{P_1}{g}\left[(l\sin\varphi + a)^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2\right] + \frac{P_2}{2g}4l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2$$

Dễ dàng tính các biểu thức đạo hàm của hàm động năng

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2P_1}{g}l^2\dot{\varphi} + \frac{4P_2}{g}l^2\sin^2\varphi\dot{\varphi} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2(P_1 + 2P_2\sin^2\varphi)}{g}l^2\ddot{\varphi} + \frac{8P_2}{g}l^2\sin\varphi\cos\varphi \,.\, \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{2P_1}{g}(l\sin\varphi + a)\, l\cos\varphi\dot{\theta}^2 + \frac{P_2}{g}l^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{2P_1}{g}(l\sin\varphi + a)^2\dot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = \frac{2P_1}{g}(l\sin\varphi + a)^2\ddot{\theta} + \frac{4P_1}{g}(l\sin\varphi + a)\, l\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0.$$

Bây giờ ta tính các lực suy rộng Q_θ và Q_φ.

Vì các lực hoạt động gồm các lực có thế (các trọng lực và lực đàn hồi) và lực không thế (ngẫu lực) nên ta tính lực suy rộng theo công thức :

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*$$

$$Q_\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + Q_\theta^*:$$

trong đó Π là hàm thế năng của các trọng lực và lực đàn hồi, Q_φ^* và Q_θ^* là lực suy rộng của lực không thế (ngẫu lực M).

Thế năng của cơ hệ bằng :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

trong đó, Π_1, Π_2, Π_3 lần lượt là thế năng của hai quả văng của hai đối trọng và thế năng đàn hồi của lò xo.

Nếu chọn O làm gốc để tính thế năng và quy ước rằng thế năng trọng trường ở đó bằng không, ta có

$$\Pi_1 = -2P_1 l\cos\varphi \ ; \ \Pi_2 = -2P_2 l\cos\varphi.$$

Thế năng Π_3 của lực đàn hồi được tính theo công thức

$$\Pi_3 = \frac{c\delta^2}{2},$$

trong đó δ là độ giãn của lò xo kể từ trạng thái không biến dạng (coi rằng khi không co giãn thế năng biến dạng của lò xo bằng không). Vì khi $\varphi = 0$ lò xo không bị co giãn, nên

$$\delta = l(1 - \cos\varphi),$$

Vậy
$$\Pi_3 = \frac{cl^2(1 - \cos\varphi)^2}{2}.$$

Thế năng của toàn hệ sẽ là

$$\Pi = -2(P_1 + P_2)\ l\cos\varphi - \frac{cl^2}{2}(1 - \cos\varphi^2) + C)$$

Từ đó suy ra :

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -2(P_1 + P_2)\, l\sin\varphi - cl^2(1 - \cos\varphi)\sin\varphi,$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = 0 \ .$$

Bây giờ tính tiếp Q^*_φ và Q^*_θ.

Để tính Q^*_φ ta cho hệ một di chuyển khả dĩ $\delta\varphi \neq 0$ và $\delta\theta = 0$.

Trong di chuyển khả dĩ này khung không di chuyển, nên

$$\delta A_\varphi(M) = 0.$$

Vậy

$$Q^*_\varphi = \frac{\delta A_\varphi(M)}{\delta\varphi} = 0.$$

Để tính Q^*_θ ta cho hệ một di chuyển khả dĩ : $\delta\theta \neq 0$, $\delta\varphi = 0$ và tính công khả dĩ của ngẫu lực M

$$\delta A_\theta(M) = M\delta\theta.$$

Vậy

$$Q^*_\theta = \frac{\delta A_\theta(M)}{\delta\theta} = M.$$

Như vậy các lực suy rộng Q_θ và Q_φ bằng :

$$Q_\theta = M,$$

$$Q_\varphi = -2(P_1 + P_2)l\sin\varphi - cl^2(1 - \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Áp dụng phương trình Lagờrăng loại II ta nhận được

$$\frac{P_1 + 2P_2\sin^2\varphi}{g}l\ddot{\varphi} + \frac{P_2}{g}l\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 - \frac{P_1}{g}(l\sin\varphi + a)\cos\varphi\dot{\theta}^2 =$$

$$= -(P_1 + P_2)\sin\varphi - \frac{cl}{2}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi.$$

$$2\frac{P_1}{g}(l\sin\varphi + a)^2\ddot{\theta} + \frac{4P_1}{g}(l\sin\varphi + a)l\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = M.$$

Nhận xét rằng trong chế độ làm việc của máy điều tiết M = 0 ta có $\ddot{\theta} = 0$; $\dot{\theta} = \text{const} = \omega$; $\dot{\varphi} = 0$; φ = hằng. Chế độ đó tương ứng với chế độ làm việc bình ổn của máy điều tiết. Khi đó phương trình cuối cùng được tự thỏa mãn, còn từ phương trình đầu chúng ta tìm được mối liên hệ giữa chế độ quay bình ổn của máy điều tiết và độ lệch của quả văng, nó tương ứng với vị trí xác định của đối trọng.

$$\omega^2 = g\,\frac{(P_1 + P_2\sin\varphi + \dfrac{cl}{2}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi}{P_1(l\sin\varphi + a)\cos\varphi},$$

hay là $$\omega^2 = g\,\frac{(P_1 + P_2) + \dfrac{cl}{2}(1 - \cos\varphi)}{P_1(l\sin\varphi + a)}\,tg\varphi.$$

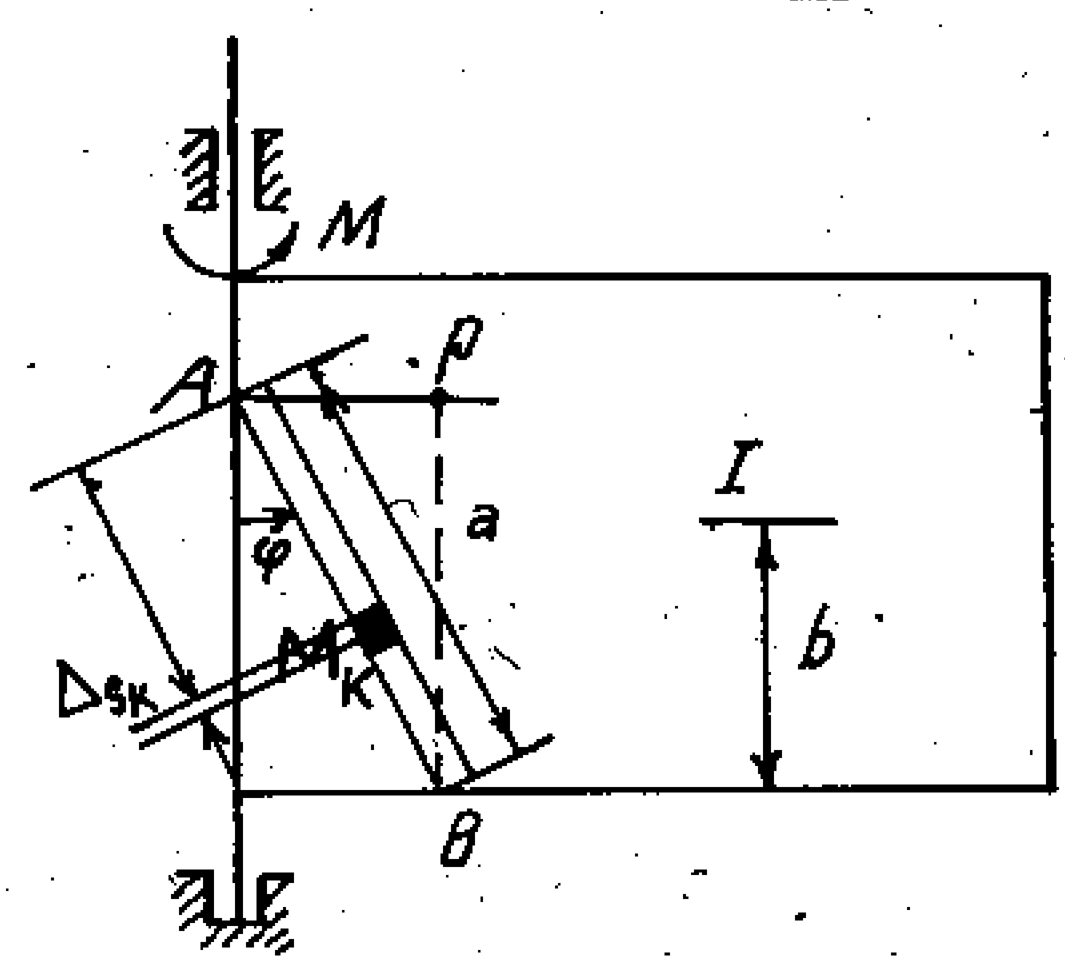
Chế độ quay bình ổn của máy điều tiết thiết lập một trạng thái cân bằng của các quả văng và đối trọng trong mặt phẳng của khung quay, được gọi là trạng thái cân bằng tương đối.

Thí dụ 5–5. Các đầu mút của thanh đồng chất AB có thể trượt không ma sát theo hai cạnh nằm ngang và thẳng đứng của một khung cứng có thể quay quanh trục thẳng đứng. Độ dài thanh bằng 2a và khối lượng của thanh bằng m, mômen quán tính của khung đối với trục quay bằng J. Khung quay quanh trục thẳng đứng dưới tác dụng ngẫu lực có mômen M. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ (H. 5–5).

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm có khung đang quay quanh trục cố định và thanh AB. Đối với khung thanh này, chuyển động song phẳng nếu chọn khung làm hệ động thì chuyển động ấy là chuyển động tương đối.

Cơ hệ có hai bậc tự do. Để xác định vị trí cơ hệ ta dùng hai tọa độ suy rộng đủ $q_1 = \theta$; $q_2 = \varphi$; trong đó θ là góc quay của khung và φ là góc nghiêng của thanh đối với trục thẳng đứng.

Các liên kết đều là lý tưởng. Các lực hoạt động gồm các trọng lực đặt vào thanh và khung, và ngẫu lực có mômen M.



HÌNH 5–5

Để thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ ta viết phương trình Lagơrăng loại II.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi} ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

Đầu tiên tính động năng cơ hệ. Nếu gọi T_1 và T_2 lần lượt là động năng của khung và thanh AB tương ứng thì động năng T của cơ hệ là $T = T_1 + T_2$; trong đó

$$T_1 = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$

còn động năng T_2 được tính theo công thức

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} m_k v_k^2 ,$$

trong đó ta chia thanh *AB* thành tập hợp vô hạn các phần tử m_k có vận tốc v_k, mỗi phần tử tham gia hai chuyển động theo của khung quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc $\omega = \dot{\theta}$. Vì vậy

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{ek} + \vec{v}_{rk}.$$

Dễ dàng thấy các vectơ vận tốc tương đối và theo của phần tử m_k vuông góc với nhau, nên

$$v_k^2 = v_{ek}^2 + v_{rk}^2$$

Vậy $$T_2 = \frac{1}{2}\sum m_k v_{ek}^2 + \frac{1}{2}\sum m_k v_{rk}^2$$

Chú ý rằng lượng $\sum \frac{m_k v_{rk}^2}{2}$ chính là động năng của thanh *AB* trong chuyển động tương đối, được kí hiệu qua T_r, còn lượng $\sum m_k v_{ek}^2$ chính là động năng của thanh *AB*, coi như gắn chặt vào khung chữ nhật và do đó quay quanh trục cố định của khung, kí hiệu qua T_e. Vậy :

$$T_{(AB)} = T_e + T_r$$

Trong mặt phẳng khung, thanh *AB* chuyển động song phẳng với tâm tức thời *P*, nên

$$T_r = J_p \frac{\omega^2}{2} = (J_c + ma^2)\frac{\omega^2}{2} = \frac{4}{3}ma^2\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{2}{3}ma^2\dot{\varphi}^2.$$

Nếu coi *AB* gắn vào khung, cùng quay với vận tốc góc $\omega_1 = \dot{\theta}$ thì

$$T_e = J_z \frac{\dot{\theta}^2}{2}.$$

Để tính momen quán tính J_z của thanh *AB* đối với trục quay thẳng đứng *z*, chúng ta sử dụng công thức :

$$J_z = \sum m_k h_k^2.$$

Nếu gọi chiều dài của phân tố M_K có khối lượng m_k là Δs_k, và do đó

$$m_k = m\frac{\Delta s_k}{2a}.$$

Vậy :

$$J_z = \sum_{k=1}^{\infty} m\frac{\Delta s_k}{2a}(s_k \sin\varphi)^2 = \frac{m}{2a}\sin^2\varphi \int_0^{2a} s^2 ds = \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi.$$

Từ đó

$$T_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2.$$

Động năng của thanh *AB* bằng

$$T_{AB} = T_e + T_r = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\dot{\varphi}^2.$$

Chúng ta nhận được biểu thức động năng toàn hệ :

$$T = \frac{1}{2}(J + \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{4}{3}ma^2\dot{\varphi}^2.$$

Bây giờ chúng ta chuyển sang tính các lực suy rộng. Vì các lực hoạt động gồm các lực có thế (các trọng lực) và lực không thế (ngẫu lực) nên lực suy rộng có thể được tính theo công thức

$$Q_\theta = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} + Q_\theta^*$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*$$

trong đó Π là hàm thế năng của các trọng lực ; Q_θ^*, Q_φ^* là lực suy rộng của các lực không thế.

Để tính thế năng của các trọng lực, ta chọn gốc thế năng là O, trục z hướng lên và thế năng của khung và thanh lần lượt là Π_1 và Π_2, ta có :

$$\Pi_1 = Pz_1 + \text{hằng} = Pb + \text{hằng} = \text{hằng},$$

(I là trọng tâm của khung).

$$\Pi_2 = Qz_2 + \text{hằng} = mga\cos\varphi + \text{hằng}.$$

Vậy thế năng của cơ hệ bằng

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = mga\cos\varphi + \text{hằng}.$$

Tương tự như trong thí dụ 5–4 ta dễ dàng tính được

$$Q_\theta^* = M; \; Q_\varphi^* = 0.$$

Vậy

$$Q_\theta = M, \quad Q_\varphi = mga\sin\varphi.$$

Để viết các phương trình Lagơrăng loại II ta tính các đạo hàm

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \left(J + \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi\right)\dot\theta,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \left(J + \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi\right)\ddot\theta + \frac{2}{3}ma^2\sin\varphi\cos\theta\dot\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\theta \varphi} = \frac{4}{3}ma^2\sin\varphi\cos\varphi\dot\theta^2 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{4}{3}ma^2\dot\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \frac{4}{3}ma^2\ddot\varphi.$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ là :

$$(J + \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi)\ddot{\theta} + \frac{8}{3}ma^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} = M,$$

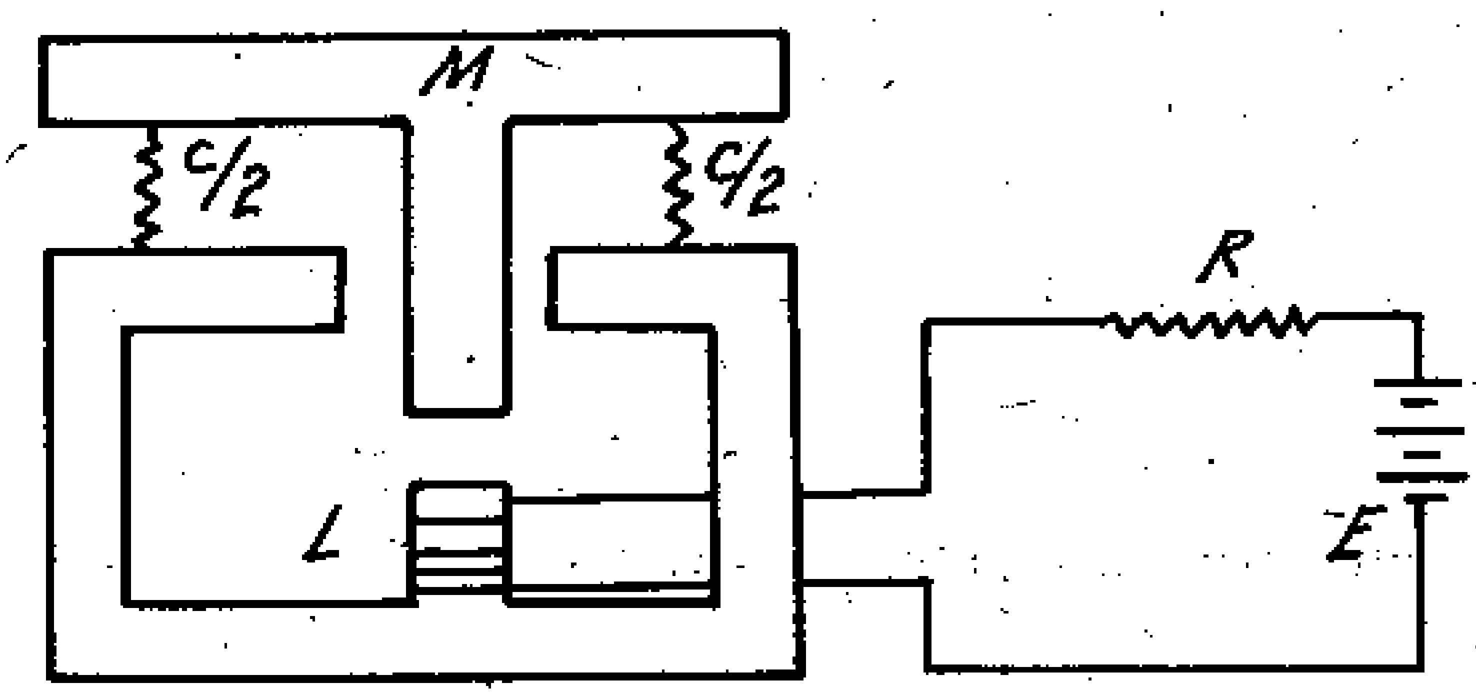
$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\varphi} - \frac{4}{3}ma^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 = mga\sin\varphi.$$

Rút gọn lại, ta nhận được

$$(J + \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi)\ddot{\theta} + \frac{4}{3}ma^2\sin2\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} - M = 0,$$

$$\frac{4}{3}a\ddot{\varphi} - \frac{2}{3}a\sin2\varphi\dot{\theta}^2 - g\sin\varphi = 0.$$

Thí dụ 5–6. Trên hình vẽ biểu diễn sơ đồ máy ghi chấn động dùng điện. Lõi sắt động M có khối lượng m, hai lò xo giữ lõi sắt đó như nhau và có độ cứng tổng cộng là c. Hệ số tự cảm của cuộn dây điện là L(x), biến thiên theo độ dời x của lõi sắt động kể từ vị trí của nó ứng với trạng thái nguyên của hai lò xo. Cuộn dây tự cảm được nối với nguồn điện có sức điện động E = hằng. Điện trở ôm tổng cộng của mạch điện là R. Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ và xác định vị trí cân bằng của nó (H.5–6).



HÌNH 5–6

Bài giải. Ở một thời điểm bất kỳ gọi x là độ dời đại số của lõi sắt động kể từ vị trí của nó ứng với trạng thái nguyên của hai lò xo và gọi q là điện tích trong mạng điện. Rõ ràng rằng x và q là hai tọa độ suy rộng đủ của hệ cơ điện đó.

Để lập phương trình vi phân chuyển động của hệ ta viết các phương trình Lagờrăng loại II:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_q$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x$$

trong đó T là tổng động năng cơ học của lõi và động năng động điện của các điện tích, Π là thế năng đàn hồi của lò xo và của trọng lực, Q_q và Q_x là hai lực suy rộng do các lực không thế. Đó là lực cản điện trở ôm và sức điện động E. Ta có

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + L(x)\frac{\dot{q}^2}{2} \; ; \; \Pi = -mgx + \frac{cx^2}{2}.$$

Các lực suy rộng Q_q và Q_x được tính như sau :

Tổng cộng nguyên tố của lực điện từ, lực cản điện trở ôm và sức điện động trong chuyển động thật của hệ là :

$$\sum dA(\vec{F}_k) = -R\dot{q}^2dt + E\dot{q}dt,$$

Vậy

$$\sum dA(\vec{F}_k) = -R\dot{q}dq + Edq,$$

và do đó tổng công nguyên tố của các lực trong di chuyển khả dĩ của cơ hệ cơ điện ấy sẽ là

$$\sum \delta A(\vec{F}_k) = (E - R\dot{q})\delta q.$$

Từ đó ta nhận được biểu thức các lực suy rộng

$$Q_q = E - R\dot{q} \; ; \; Q_x = 0.$$

Để viết các phương trình Lagrăng loại II, ta tính các đạo hàm

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L(x)\dot{q} \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = L(x)\ddot{q} + \frac{dL}{dx}\dot{x}\dot{q}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\dot{q}^2}{2}\frac{dL}{dx} \; ; \; \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}.$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động của hệ sẽ là

$$L\ddot{q} + \dot{q}\dot{x}\frac{dL}{dx} = E - R\dot{q},$$

$$m\ddot{x} - \frac{\dot{q}^2}{2}\frac{dL}{dx} = mg - cx.$$

Sau khi chuyển vế và rút gọn, ta được :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \dot{q}\dot{x}\frac{dL}{dx} = E$$

$$m\ddot{x} + cx - \frac{1}{2}\dot{q}^2\frac{dL}{dx} = mg.$$

Để tìm vị trí cân bằng của hệ, ở đó :

$$\ddot{q} = \ddot{x} = 0 \; ; \; \dot{x} = 0 \; ; x = x_o \; ; \; \dot{q} = \dot{q}_o;$$

ta thay giá trị này vào phương trình chuyển động.

Ta có :

$$R\dot{q}_o = E \; ; \text{ tức : } \dot{q}_o = \frac{E}{R} = \text{hằng},$$

$$cx_o = mg + \frac{1}{2}\dot{q}_o^2\left(\frac{dL}{dx}\right)_o, \text{ tức } x_o = \frac{mg}{C} + \frac{\dot{q}_o^2}{2}\left(\frac{dL}{dx}\right)_o$$

Nếu xem chuyển động bé của lõi sắt quanh vị trí bằng :

$$x = x_o + \xi, \text{ trong đó } \xi \text{ là bé}$$

$$\text{và } \dot{q} = \dot{q}_o + \dot{e}, \text{ trong đó } e \text{ là bé.}$$

Từ đó

$$\dot{\xi} = \dot{x} \text{ là bé và } \dot{e} \text{ cũng bé,}$$

$$L(x) = L(x_o + \xi) = a + b\,\xi \; ; \frac{dL}{dx} = b$$

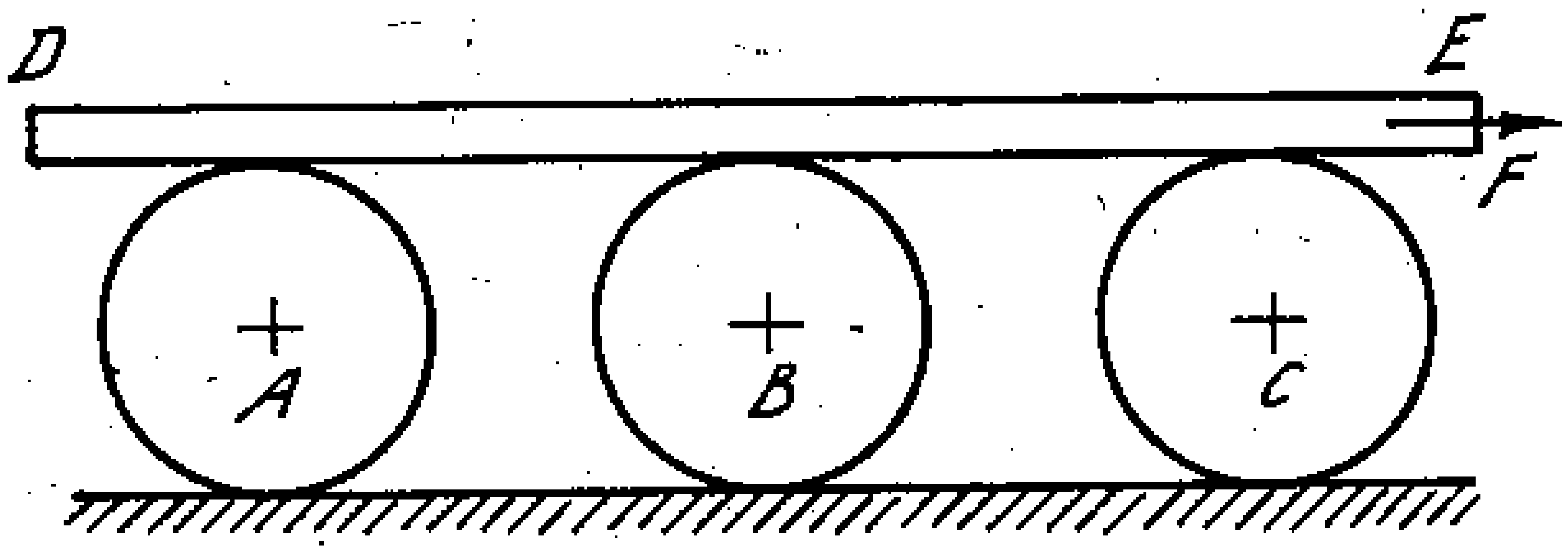
Trong trường hợp như vậy có thể bỏ qua các số hạng bậc hai đối với các đại lượng ξ, $\dot{\xi}$, e, $\dot{e}$, và ta nhận được hệ phương trình vi phân chuyển động đã tuyến tính hóa như sau :

$$a\ddot{e} + R\dot{e} + b\dot{q}_o\dot{\xi} = 0,$$

$$m\ddot{\xi} + c\xi - b\dot{q}_o\dot{e} = 0$$

5.4. BÀI TẬP

5-1. Thanh DE có trọng lượng là Q tựa trên ba con lăn như nhau và có cùng trọng lượng P. Chịu tác dụng lực ngang $\vec{F}$ hướng về bên phải. Coi như không xảy ra hiện tượng trượt giữa thanh và các con lăn cũng như giữa các con lăn và nền

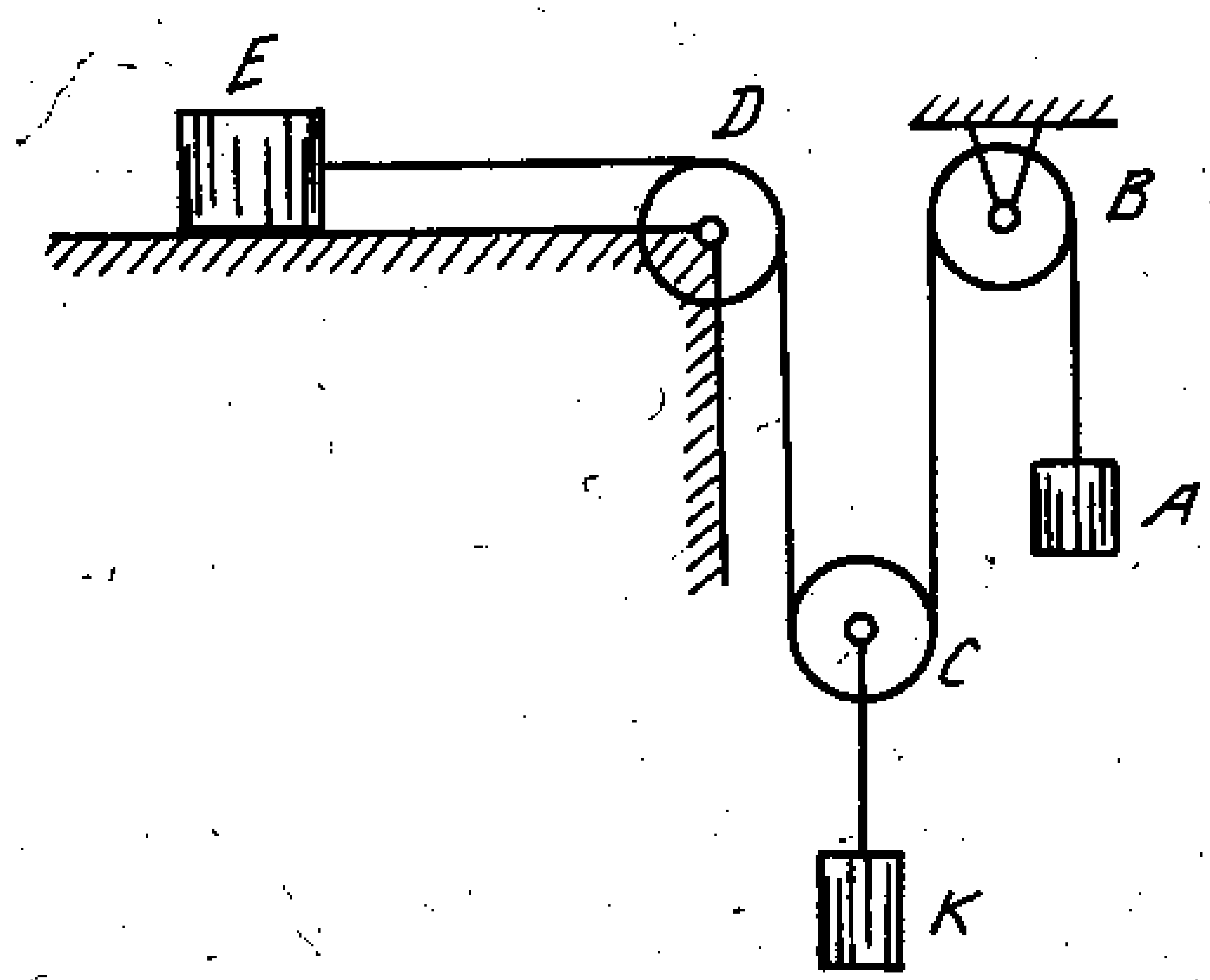


HÌNH 5-7

ngang. Tìm gia tốc của thanh DE. Coi các con lăn như những khối trụ đồng chất. Bỏ qua ma sát lăn (H.5-7).

Trả lời : $a = \dfrac{8gF}{8Q + 9P}$.

5-2. Một sợi dây nhẹ, không giãn, một đầu buộc vào vật A, sau đó vắt qua ròng rọc B cố định, ròng rọc động C, ròng rọc cố định D và buộc vào vật E, có thể trượt trên mặt phẳng ngang. Một vật K được treo vào tâm của ròng rọc động C có trọng lượng Q. Hệ số ma sát giữa vật E và mặt phẳng ngang là f. Xác định điều kiện để vật K có thể tụt xuống nếu vận tốc đầu của tất cả các vật đều bằng

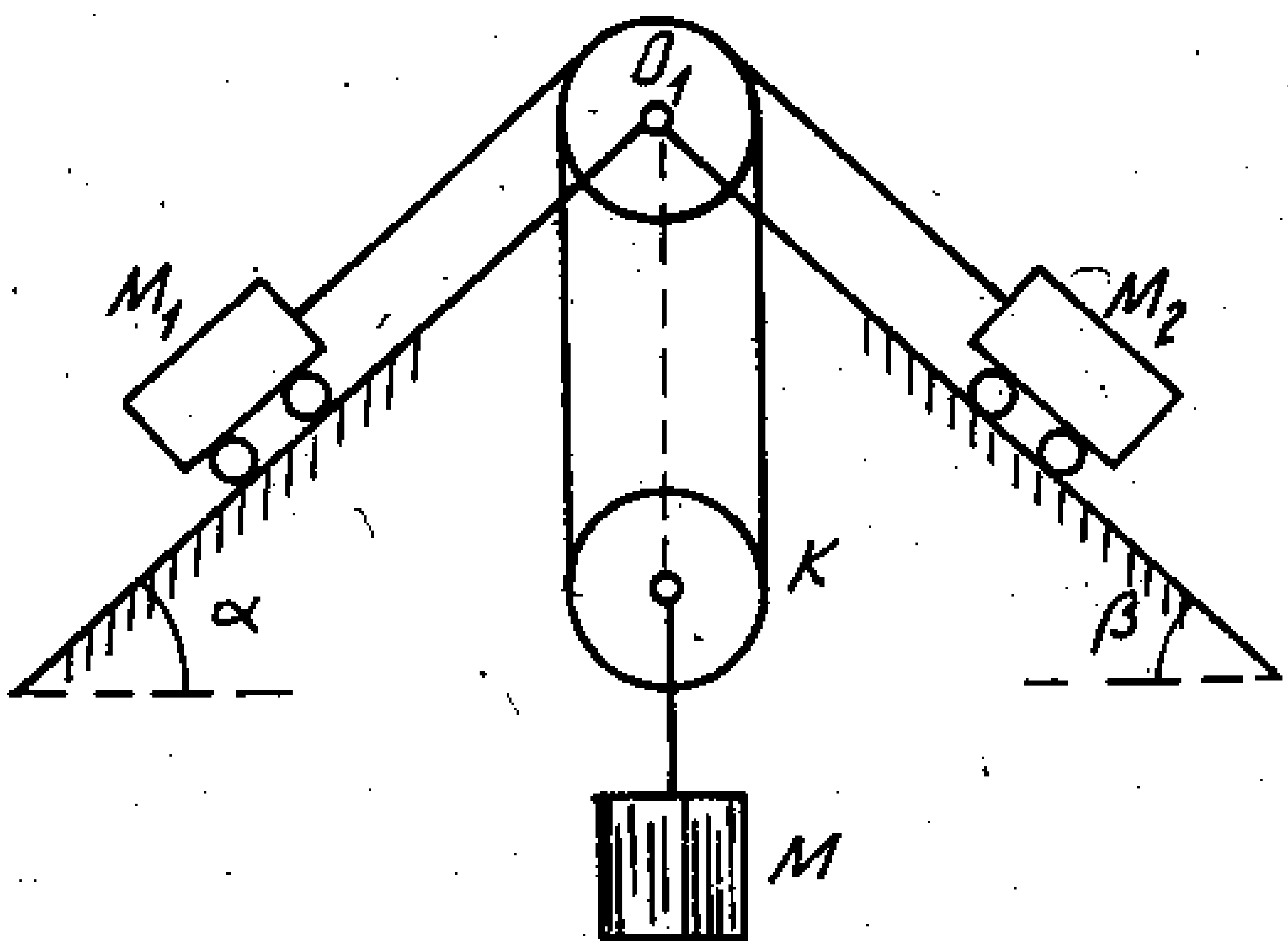


HÌNH 5-8

không. Tìm gia tốc của vật K. Bỏ qua khối lượng các ròng rọc và sự trượt giữa dây và ròng rọc (H. 5-8).

Trả lời : $Q > P(1 + f)$; $a = g\dfrac{Q - P(1 + f)}{Q + 2P}$

5-3. Hai vật M_1 và M_2 có trọng lượng bằng nhau và bằng P chuyển động dọc hai mặt phẳng nghiêng với mặt phẳng ngang góc α và β. Một dây nhẹ không giãn, có một đầu được buộc vào vật M_1 sau đó được vắt qua ròng rọc cố định O_1, choàng qua ròng rọc động K, và vắt lần nữa qua ròng rọc cố định, rồi nối vào vật M_2. Một vật M có trọng lượng Q được treo vào tâm của ròng rọc K. Bỏ qua ma sát và khối lượng của các ròng rọc. Tìm gia tốc của vật M (H.5-9).



HÌNH 5-9

Trả lời : Xem gia tốc a của vật M là dương khi nó hướng xuống và âm khi nó hướng lên, ta có

$$a = g\frac{Q - P(\sin\alpha + \sin\beta)}{Q + 2P}.$$

5-4. Lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc toán học có khối lượng m được treo vào đầu tự do của một dây đàn hồi có độ dài khi cân bằng là l và có độ cứng đàn hồi là c.

Trả lời : $(1 + z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0,$

$$\ddot{z} - (1 + z)\dot{\varphi}^2 + \frac{c}{m}z + \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi) = 0,$$

trong đó φ là góc lệch của dây treo đối với phương thẳng đứng và z là độ giãn tương đối của dây so với chiều dài khi cân bằng.

Trong điều kiện dao động nhỏ, phương trình chuyển động của con lắc được viết như sau

$$z = A\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha\right),$$

$$\varphi = B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \beta\right),$$

trong đó các hằng số A, B, α, β phụ thuộc vào điều kiện đầu của chuyển động.

5–5. Trở lại thí dụ 5–3 khi kể đến ma sát trượt giữa con chạy và nền ngang với hệ số ma sát trượt f = hằng. Viết phương trình vi phân chuyển động của con lắc.

Trả lời : $l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{y} + g\sin\varphi = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[(m_1 + m_2)\dot{y} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right] =$$

$$= -f\left[(m_1 + m_2)g + m_2 l\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l m_2\sin\varphi\ddot{\varphi}\right]\mathrm{gsin}\dot{y},$$

trong đó: $\mathrm{gsin}\dot{y} = \begin{cases} 1 \text{ khi } \dot{y} > 0 \\ -1 \text{ khi } \dot{y} < 0 \end{cases}$

5–6 Một ống trụ tròn rỗng, đồng chất, có trọng lượng P, bán kính đáy R và có thể quay quanh trục thẳng đứng. Trên mặt trong của ống trụ có xẻ một rãnh đinh ốc, bước của đường đinh ốc là h. Một viên bi nhỏ, chạy trong rãnh ấy dưới tác dụng của trọng lượng bản thân. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, cho biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ.

Trả lời : Phương trình vi phân chuyển động cơ hệ

$$\frac{Q + P}{g} R^2\ddot{\theta} + \frac{Q}{g} R\sin\gamma\,\ddot{s} = 0.$$

$$\frac{Q}{g} R\sin\gamma\,\ddot{\theta} + \frac{Q}{g}\ddot{s} = P\cos\gamma,$$

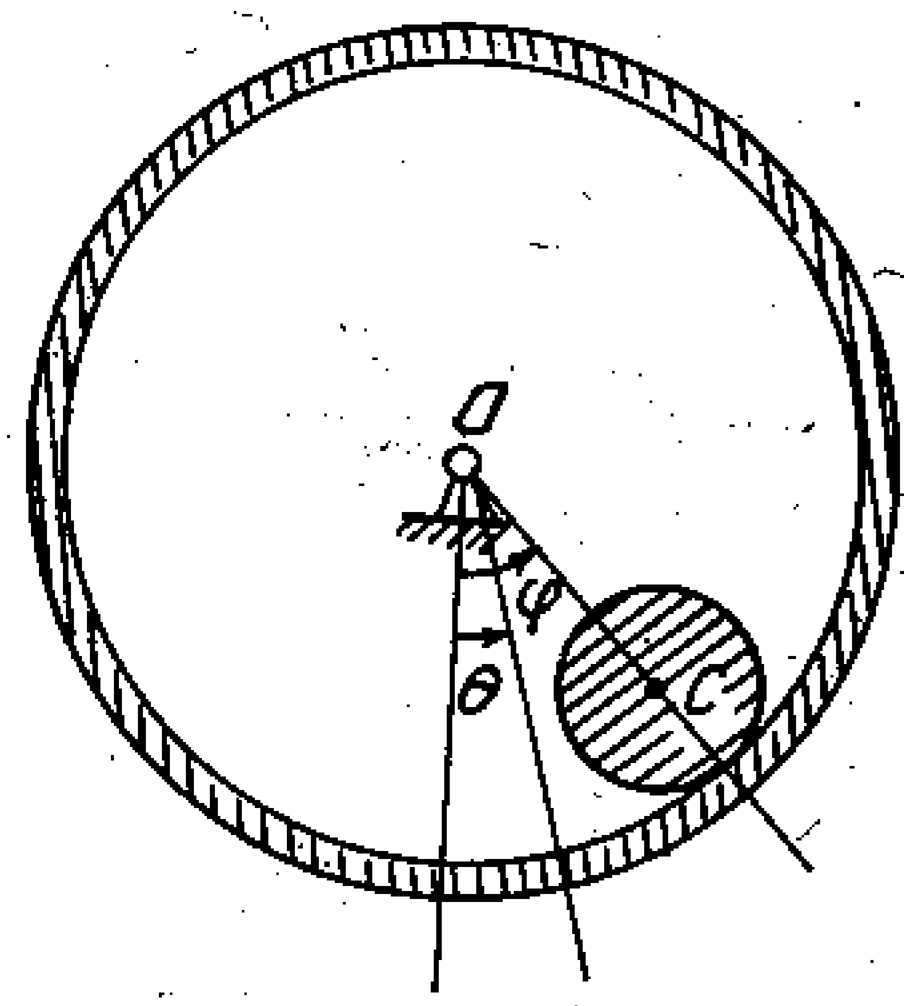
Phương trình chuyển động của hệ .

$$\theta = \frac{g}{2}\frac{P\sin 2\gamma}{QR\cos^2\gamma + PR}\frac{t^2}{2}$$

$$s = g\frac{Q\cos 2\gamma + P}{Q\cos^2\gamma + P}\cdot\frac{P}{Q}\cos\gamma\,\frac{t^2}{2},$$

trong đó θ là góc quay của trụ, s là quãng đường đi được của viên bi theo rãnh.

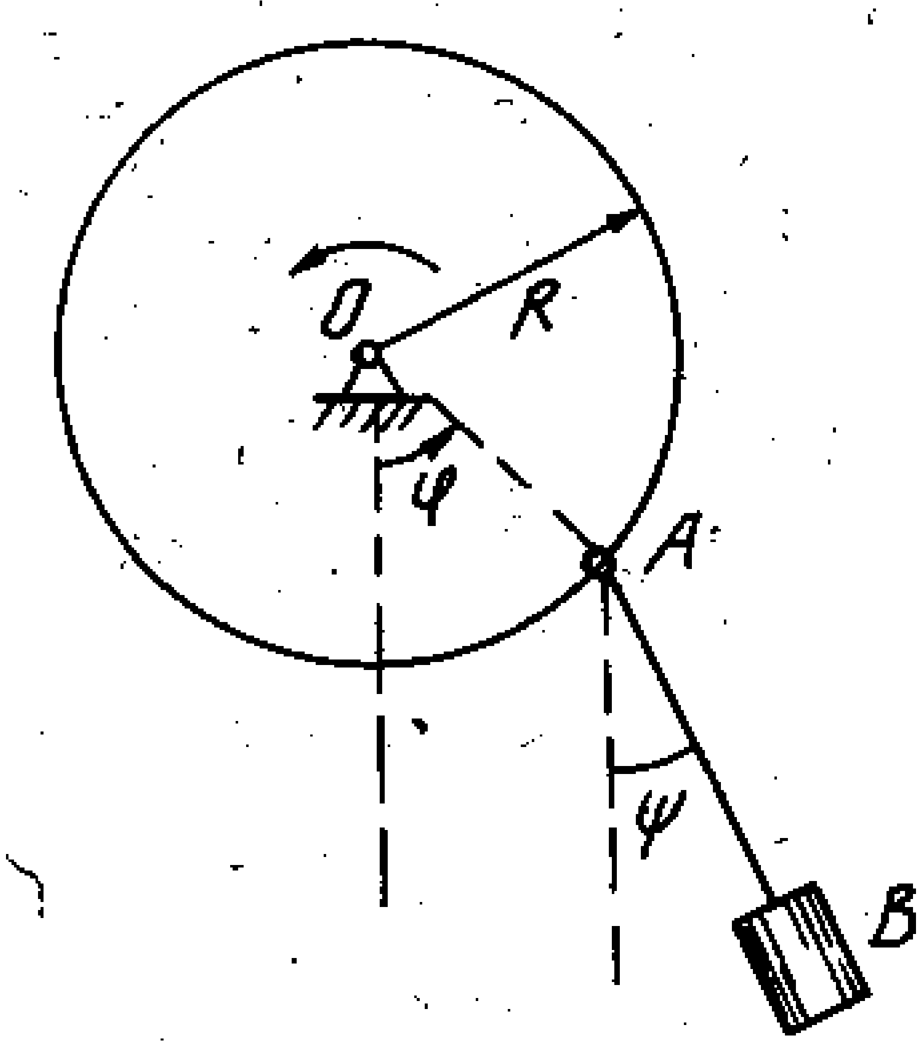
5–7. Một hình trụ khối lượng m, bán kính r lăn không trượt bên trong của một trụ rỗng, khối lượng M, bán kính R, trụ này có thể quay quanh trục nằm ngang O. Mômen quán tính của các trụ đối với các trục của mình tương ứng bằng MR^2 và $\frac{mr^2}{2}$. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ và tìm các tích phân đầu (H.5–10).



HÌNH 5–10

Trả lời : $MR^2\dot\theta - \frac{1}{2}mR\,[(R-r)\dot\varphi + R\dot\theta] = C_1,$

$$\frac{1}{2}MR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{4}m[(R-r)\dot\varphi - R\dot\theta]^2 + \frac{m}{2}(R-r)^2\dot\varphi^2 - mg(R-r)\cos\varphi = C_2.$$



HÌNH 5–11

Ở đó φ là góc quay của đoạn thẳng nối tâm các trụ, θ là góc quay của trụ ngoài.

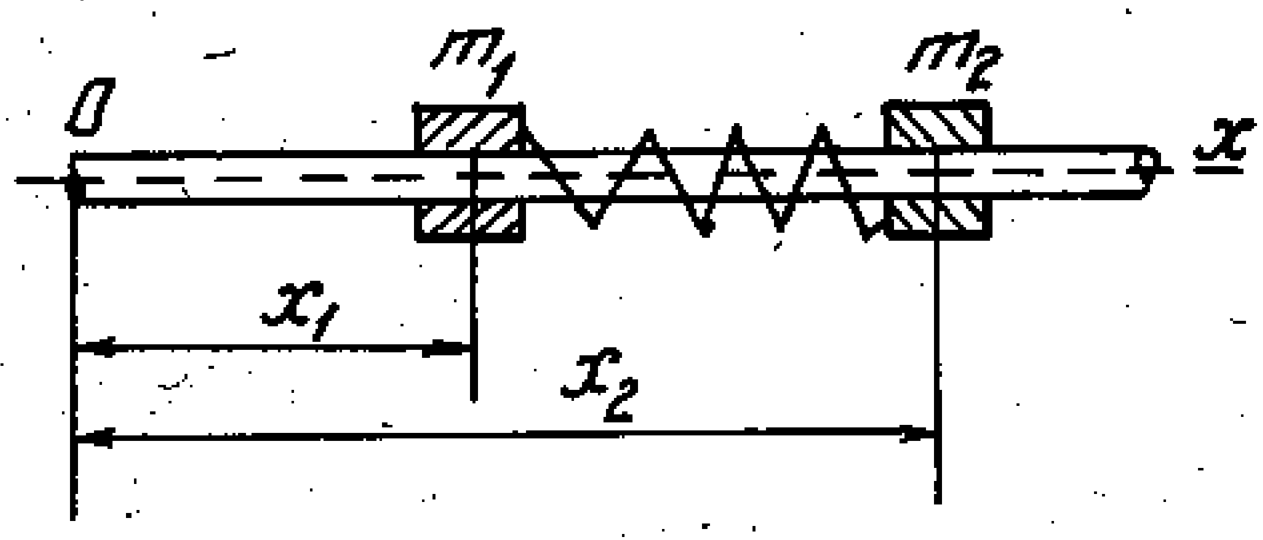
5–8. Một đĩa đồng chất bán kính R, có khối lượng M có thể quay quanh trục nằm ngang O. Một dây nhẹ không giãn AB, một đầu của nó treo vào vành đĩa tại A, và đầu kia buộc vật có khối tượng m tại B. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ (H.5–11).

Trả lời :

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\ddot{\varphi} + mRl\cos(\varphi - \psi)\ddot{\psi} + mRl\sin(\varphi - \psi)\dot{\psi}^2 + mgR\sin\varphi = 0$$

$$mRl\cos(\varphi - \psi)\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\psi} - mRl\sin(\varphi - \psi)\dot{\varphi}^2 + mgl\sin\psi = 0.$$

5-9. Xác định chuyển động của cơ hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 có thể trượt tịnh tiến dọc thanh nhẵn nằm ngang (Ox). Các khối lượng được nối với nhau nhờ một lò xo có độ cứng c. Khoảng cách giữa hai khối tâm của hai khối lượng khi lò xo không làm việc là l. Trạng thái đầu của cơ hệ được xác định bằng giá trị của vận tốc và tọa độ khối tâm của hai vật khi t = 0 ; $x_1 = 0$; $\dot{x}_1 = u_o$; $x_2 = l$; $\dot{x}_2 = 0$ (H.5-12).



HÌNH 5-12

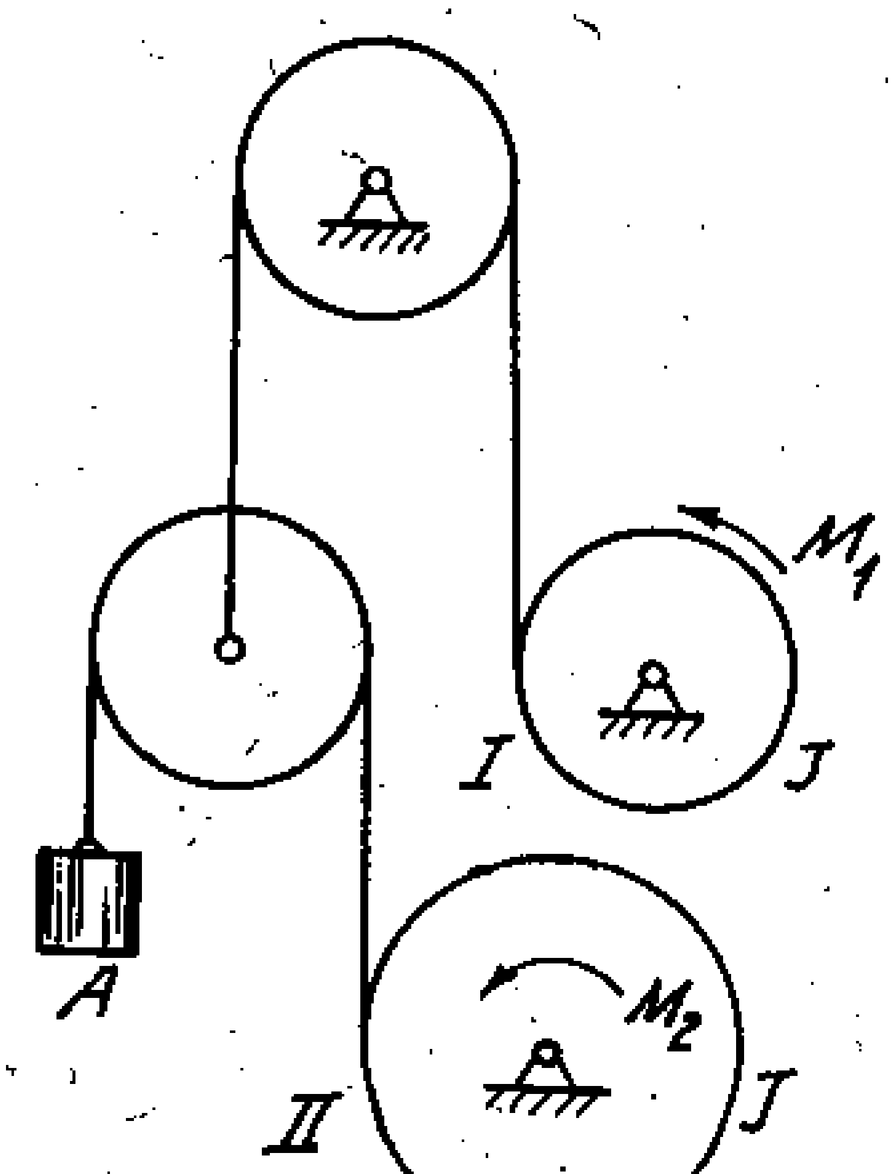
Trả lời :

$$x_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_o t + \frac{m_2 u_o}{k}\sin kt\right),$$

$$x_2 - l = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 u_o t - \frac{m_1 u_o}{k}\sin kt\right),$$

$$k = \sqrt{c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

5-10. Vật A có khối lượng m được kéo lên nhờ các trục quay I và II có cùng bán kính R và mômen quán tính của chúng đối với trục quay riêng bằng J. Xác định gia tốc của vật A nếu các trục quay chịu tác dụng của các ngẫu lực có mômen



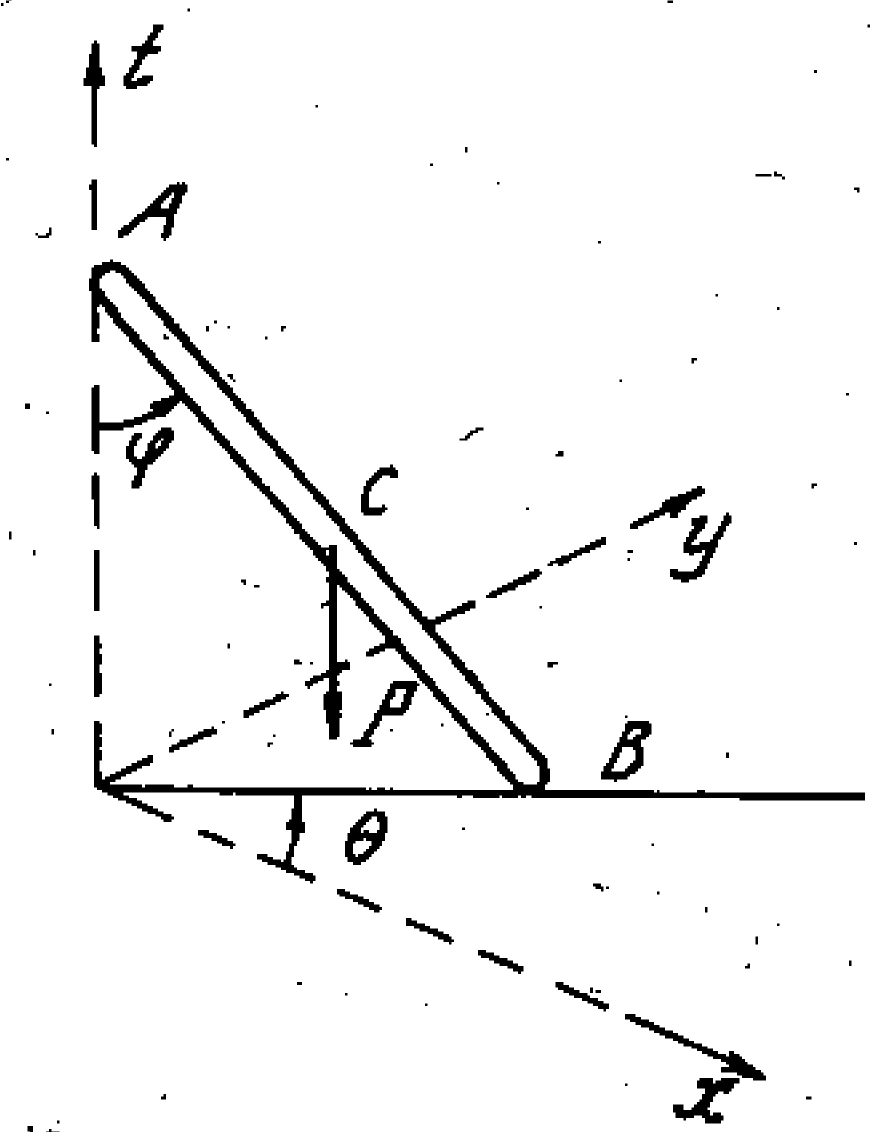
HÌNH 5-13

là M_1 và M_2. Bỏ qua khối lượng của các ròng rọc và ma sát ở các ổ trục. Coi các dây là nhẹ, không giãn và không trượt đối với các ròng rọc (H.5–13).

Trả lời : $a_A = \dfrac{2M_1 + M_2 - 5mgR}{J + 5mR^2}$

5–11. Một thanh mảnh đồng chất AB có trọng lượng P và độ dài 2l, đầu A trượt theo đường thẳng đứng còn đầu B trượt trong mặt phẳng ngang.

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của thanh và tìm các tích phân đầu của chuyển động, (H. 5–14).



HÌNH 5–14

Trả lời : Phương trình vi phân chuyển động

$$\ddot{\varphi} - \dot{\theta}^2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sin\varphi$$

$$\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$

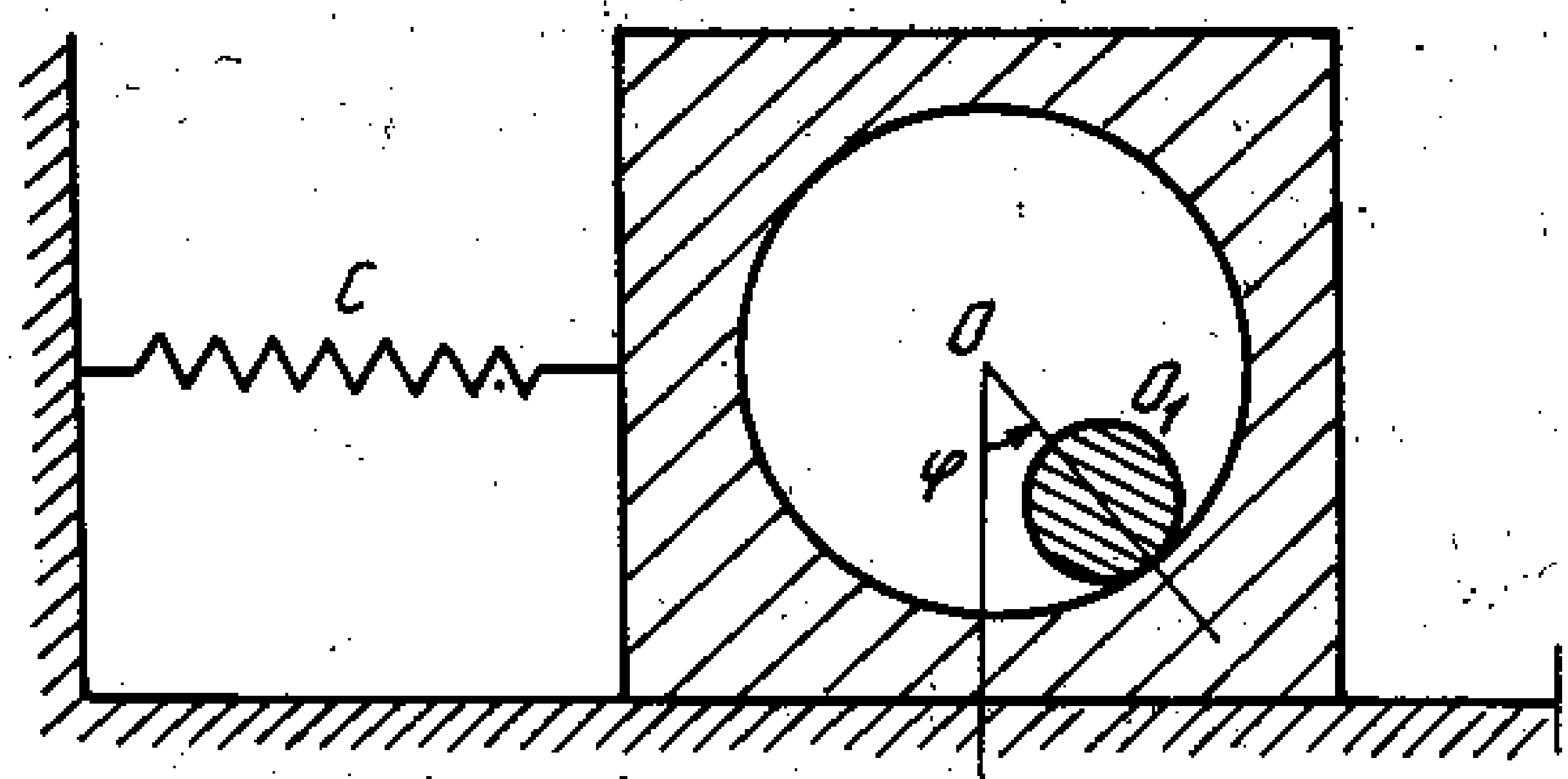
trong đó φ là góc nghiêng giữa thanh với đường thẳng đứng và là góc giữa hình chiếu của thanh trên mặt phẳng ngang với trục Ox.

Các tích phân đầu :

$$\dot{\theta}\sin^2\varphi = C_1, \quad \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\varphi = C_2$$

trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân.

5–12. Một dầm có tiết diện vuông, khối lượng M bị khoét một lỗ hình trụ bán kính R được nối với thành cố định nhờ một lò xo có độ cứng C và có thể trượt không ma sát dọc theo phương ngang. Dọc theo bề mặt của lỗ lăn không trượt là một hình trụ đồng chất khối lượng m, bán kính r (r < R), (H. 5–15).



HÌNH 5-15

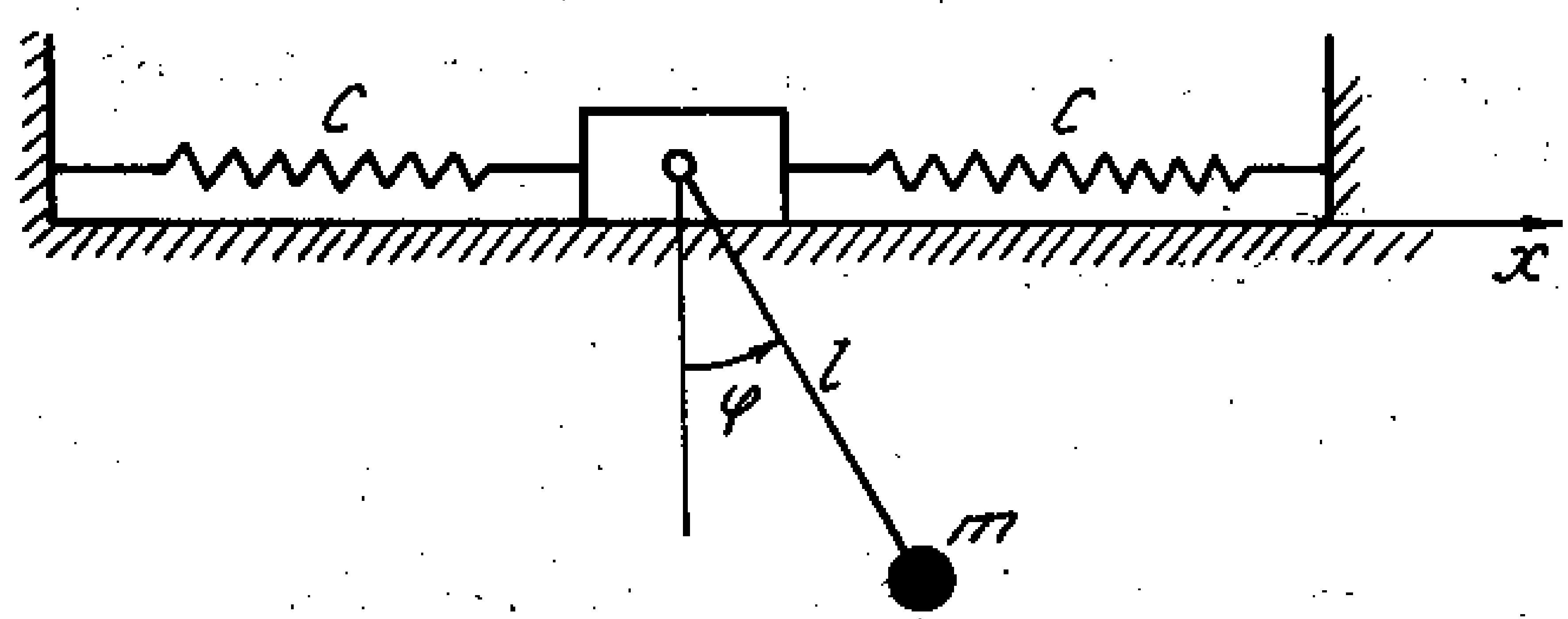
Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Trả lời : $(M+m)\ddot{x} + m(R-r)\cos\varphi\ddot{\varphi} - m(R-r)\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + cx = 0,$

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\varphi} + m(R-r)\cos\varphi\ddot{x} + mg(R-r)\sin\varphi = 0,$$

trong đó x là hoành độ của trọng tâm của dầm, φ là góc giữa đoạn thẳng nối tâm của lỗ và tâm của trụ đối với đường thẳng đứng.

5-13. Một dầm có khối lượng M được nối với các tường cố định nhờ các lò xo có độ cứng như nhau C, có thể trượt không ma sát dọc sàn ngang. Một vật khối lượng m được buộc vào một đầu dây và được treo vào khối tâm của dầm. Dây được xem là mảnh và không giãn. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ, (H. 5-16).



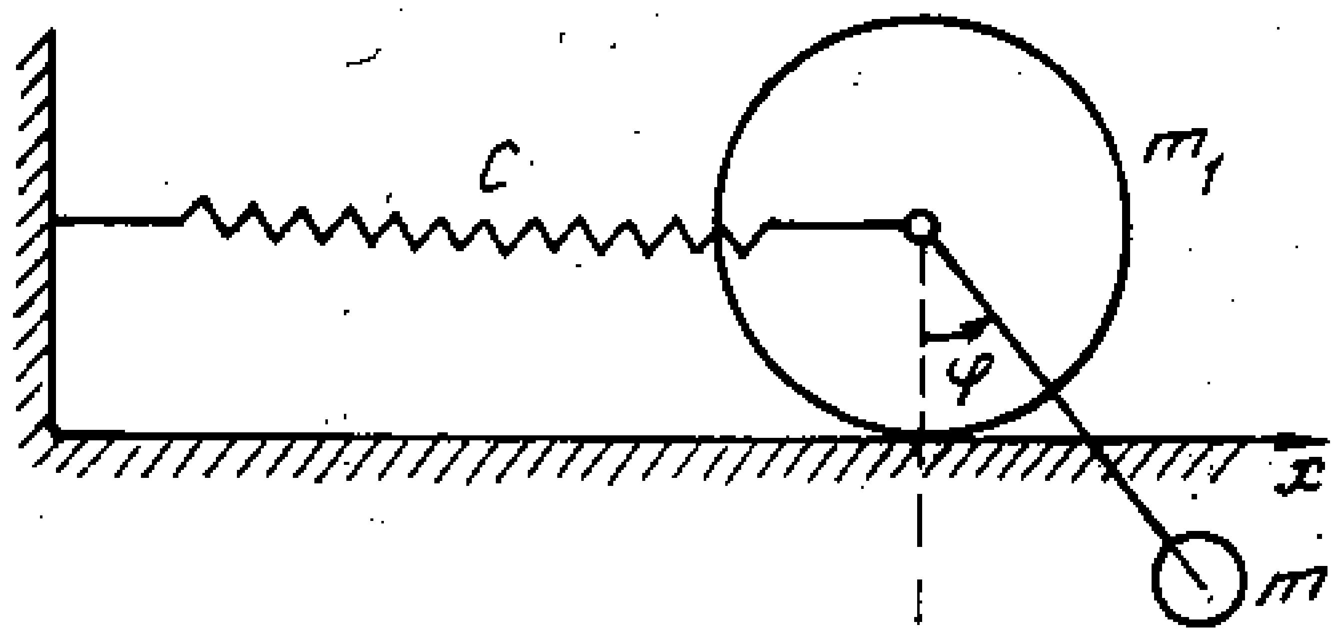
HÌNH 5-16

Trả lời : $(M + m)\ddot{x} + ml\cos\varphi\ddot{\varphi} - ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + 2cx = 0,$

$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{x} + g\sin\varphi = 0,$

trong đó x là hoành độ khối tâm của dầm, φ là góc lệch của sợi dây đối với phương thẳng đứng.

5–14. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của một con lắc có khối lượng m và độ dài l, điểm treo của nó nằm tại tâm của đĩa bán kính r và có khối lượng m_1. Đĩa có thể lăn không trượt dọc trục ngang Ox, tâm của đĩa nối với tường cố định nhờ một lò xo có độ cứng c, (H. 5–17).



HÌNH 5–17

Trả lời : $(3m_1 + 2m)\ddot{x} + 2ml\cos\varphi\ddot{\varphi} - 2ml\sin\varphi\dot{\varphi}^2 + 2cx = 0$;
$l\ddot{\varphi} + \cos\varphi\ddot{x} + g\sin\varphi = 0$.

5–15. Giải bài tập 4–11 khi trục quay thẳng đứng có mômen quán tính đối với trục tâm của nó bằng J và chịu tác dụng ngẫu lực M, còn thanh đồng chất AB có khối lượng m. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ (H. 4–16).

Trả lời :

$$[J + \frac{m}{6}(a^2 - ab + b^2)\sin^2\varphi]\ddot{\theta} + \frac{m}{6}(a^2 - ab + b^2)\sin 2\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} = M$$

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}g(b - a)\sin\varphi,$$

trong đó θ là góc quay của trục máy và φ là góc giữa thanh AB và đường thẳng đứng.

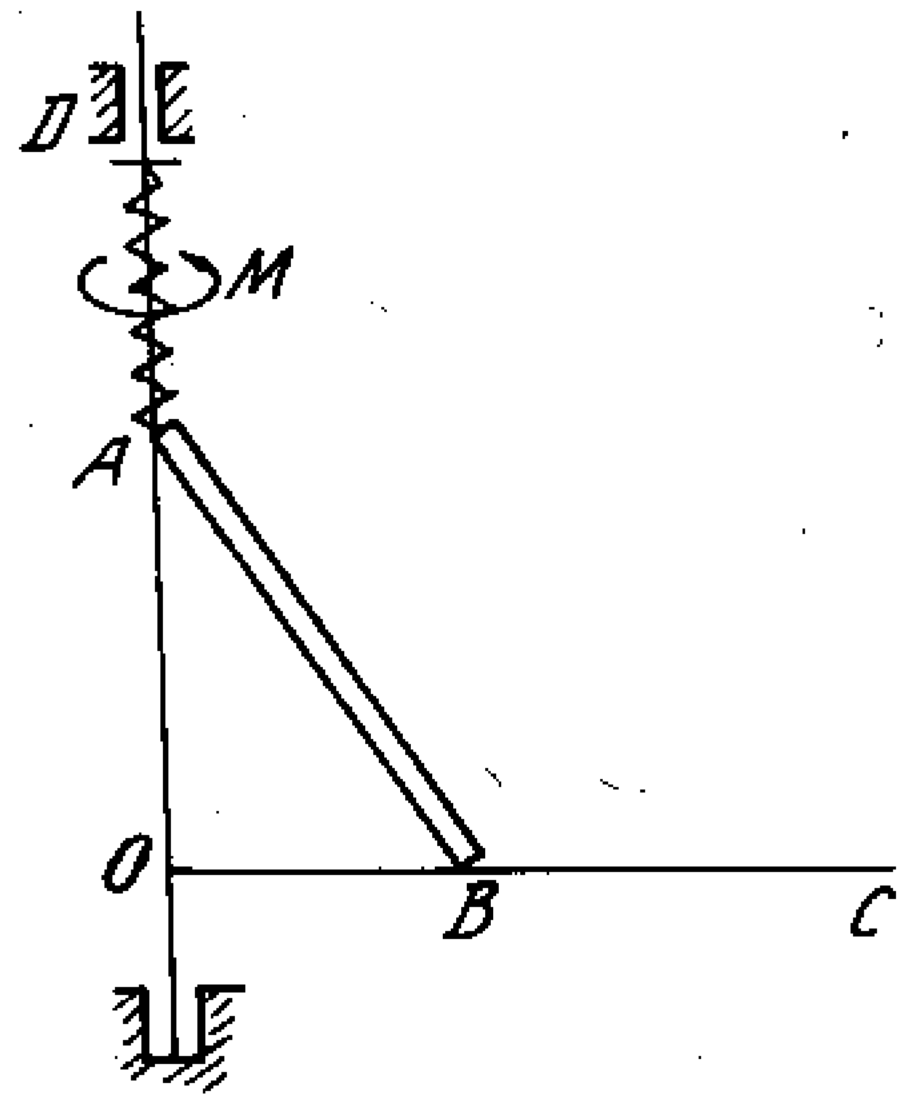
5–16. Giải bài tập 4–12 khi trục quay thẳng đứng có mômen quán tính đối với trục tâm của nó bằng J và chịu tác dụng ngẫu lực M, còn thanh gãy khúc OAB đồng chất có khối lượng phân bố theo chiều dài là σ (kg/m). Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, (H. 4–17).

Trả lời :

$$[J + \frac{1}{3}\sigma(b^3\sin^2\varphi + a^3\cos^2\varphi)]\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\sigma\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\theta}\dot{\varphi}(b^3 - a^3) = M$$

$$(a^3 + b^3)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}(b^3 - a^3)\sin 2\varphi\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}(a^2\cos\varphi - b^2\sin\varphi)$$

trong đó θ là góc quay của trục máy và φ là góc giữa thanh OA với đường thẳng đứng.



HÌNH 5-18

5-17. Một thanh đồng chất AB có khối lượng m và chiều dài l có thể trượt không ma sát theo các cạnh của góc vuông DOC, trong đó cạnh DO thẳng đứng. Đầu A của thanh được nối với điểm cố định D nhờ lò xo có độ cứng c. Khung DOC có mômen quán tính đối với trục OD bằng J có thể quay quanh trục OD dưới tác dụng của ngẫu lực có mômen M.

Cho biết khi $\varphi = \varphi_o$ lò xo không bị biến dạng.

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, (H. 5-18).

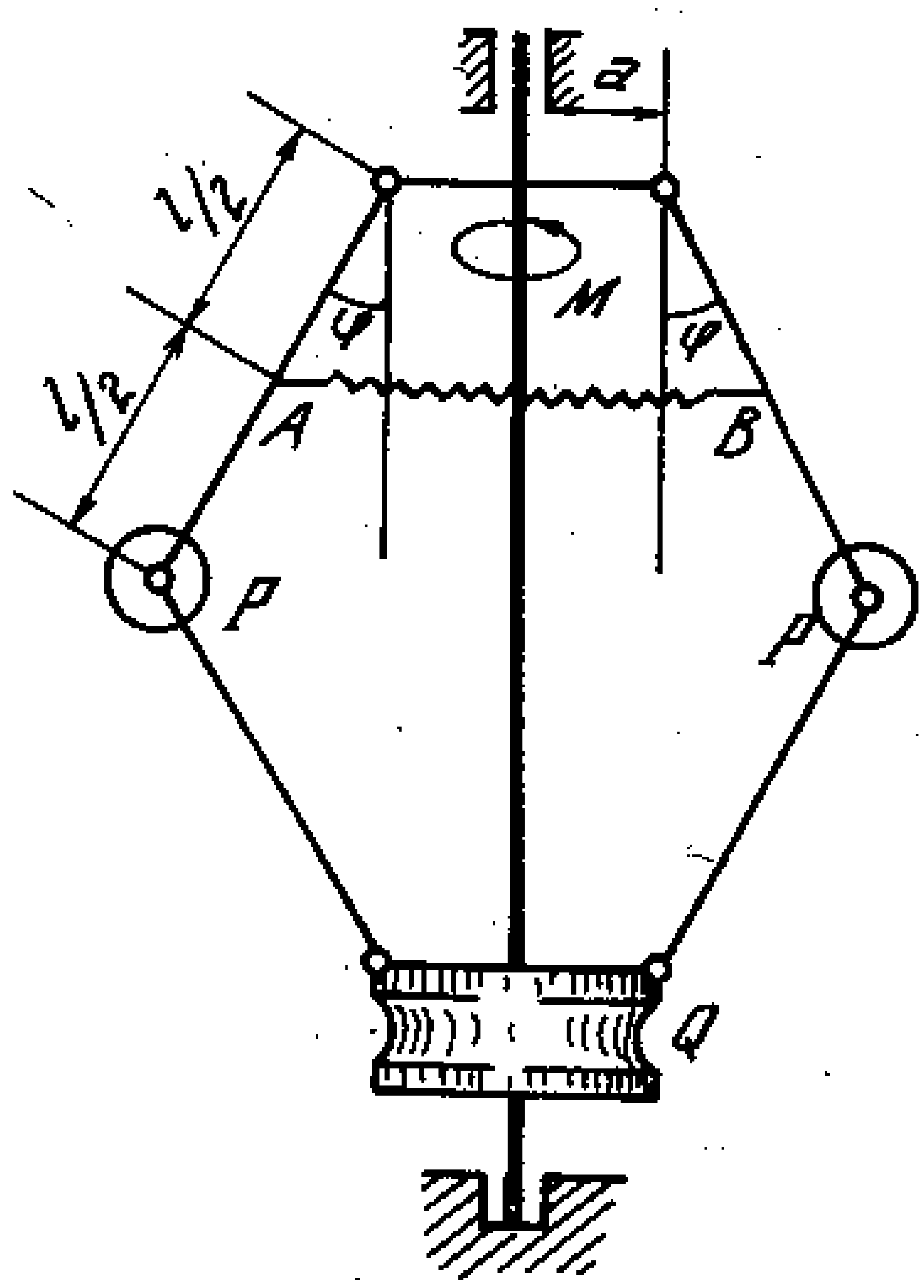
Trả lời : $(J + \frac{1}{3}ml^2\sin^2\varphi)\ddot{\theta} + \frac{1}{3}ml^2\sin 2\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} - M = 0$

$$l\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}g\sin\varphi - \frac{3cl}{m}(\cos\varphi - \cos\varphi_o)\sin\varphi = 0$$

trong đó θ là góc quay của khung và φ là góc của thanh AB làm với đường thẳng đứng.

5-18. Một máy điều tiết ly tâm có sơ đồ như trên hình vẽ. Các quả văng có cùng trọng lượng P, đối trọng có trọng lượng bằng Q, các điểm treo của thanh cách trục quay của máy một khoảng bằng a. Một lò xo có độ cứng c được nối vào điểm giữa của hai thanh trên, cho biết lúc các thanh nằm theo đường thẳng đứng thì lò xo không biến dạng. Các thanh có cùng độ dài l.

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ nếu trục quay của máy điều tiết chịu tác dụng của ngẫu lực có



HÌNH 5–19

mômen M. Bỏ qua ma sát ở các ổ trục, trọng lượng của các thanh và lò xo, (H. 5–19).

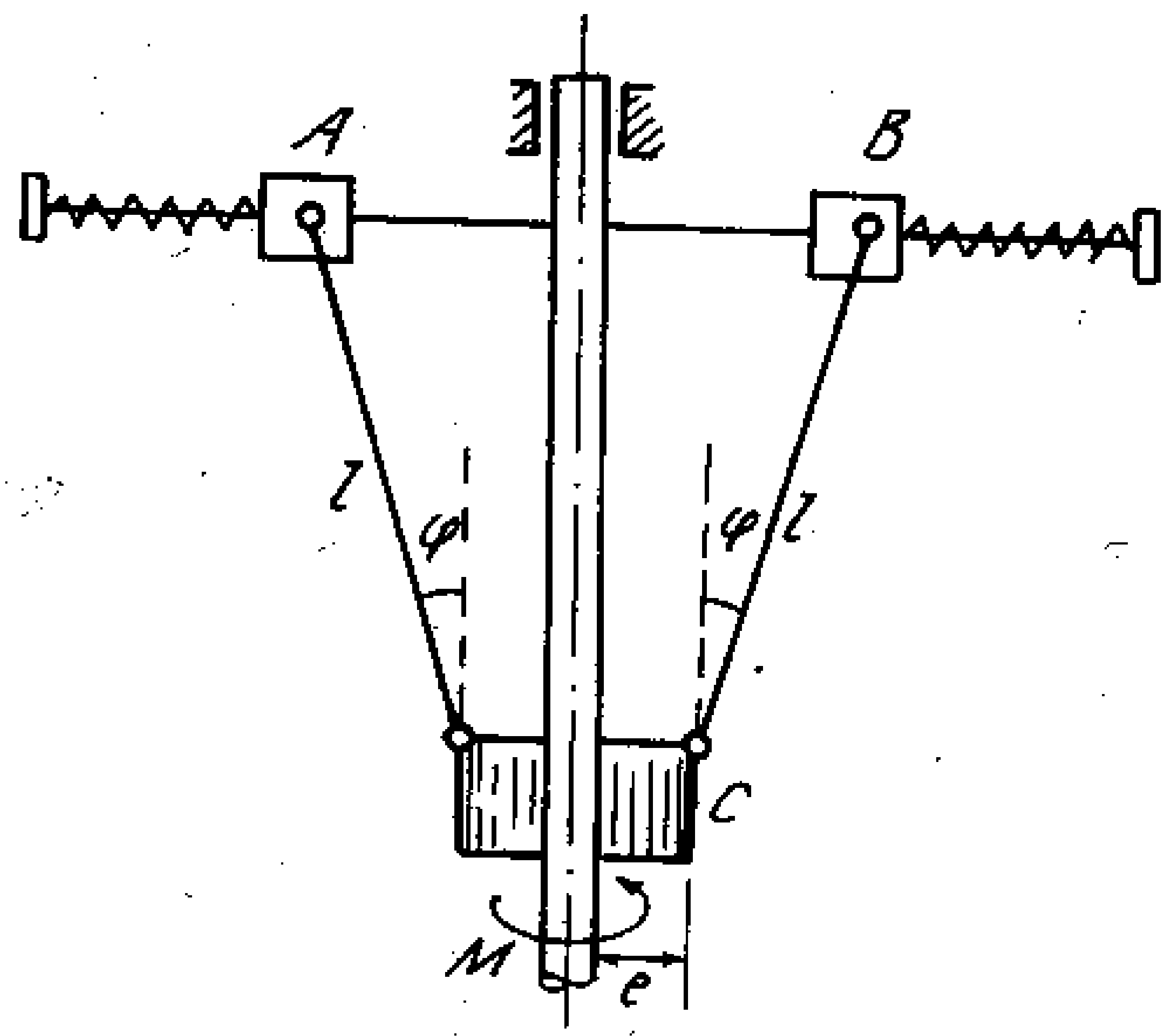
Trả lời : $2\dfrac{P + 2Q\sin^2\varphi}{g} l\ddot{\varphi} + 2\dfrac{Q}{g} l\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 -$

$$- 2\frac{P}{g}(a + l\sin\varphi)\cos\varphi\dot{\theta}^2 + \frac{cl}{2}\sin 2\varphi + 2(P + Q)\sin\varphi = 0,$$

$$2\frac{P}{g}(a + l\sin\varphi)^2\ddot{\theta} + 4\frac{P}{g}(a + l\sin\varphi)l\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} - M = 0,$$

trong đó θ là góc quay của trục máy và φ là góc giữa thanh treo và đường thẳng đứng.

5–19. Một máy điều tiết ly tâm dùng lò xo gồm có hai vật nặng A và B có cùng trọng lượng P có thể trượt trên các trục nhẵn nằm ngang gắn cứng vào các trục quay của máy. Đối trọng C có trọng lượng Q được nối với các vật A và B bằng các thanh cứng và nhẹ có độ dài l. Khoảng cách từ bản lề nối thanh vào đối trọng C đến trục máy bằng e. Các lò xo dùng đẩy hoặc kéo các vật nặng về vị trí cân bằng tĩnh có độ cứng c. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của máy khi



HÌNH 5-20

trục quay của nó chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M. Bỏ qua khối lượng của các thanh nối, của lò xo và ma sát tại các ổ trục. Cho biết khi thanh nghiêng với đường thẳng đứng một góc φ_o thì lò xo không biến dạng, (H. 5-20).

Trả lời :

$$\frac{2P\cos^2\varphi + Q\sin^2\varphi}{g} l\ddot{\varphi} + \frac{Q}{2g} l\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 - \frac{2P}{g}(e + l\sin\varphi)\cos\varphi\dot{\theta}^2 -$$

$$- \frac{P}{g} l\sin 2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2cl(\sin\varphi - \sin\varphi_o)\cos\varphi + Q\sin\varphi = 0,$$

$$2\frac{P}{g}(e + l\sin\varphi)^2\ddot{\theta} + \frac{4P}{g}(e + l\sin\varphi)l\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} = M,$$

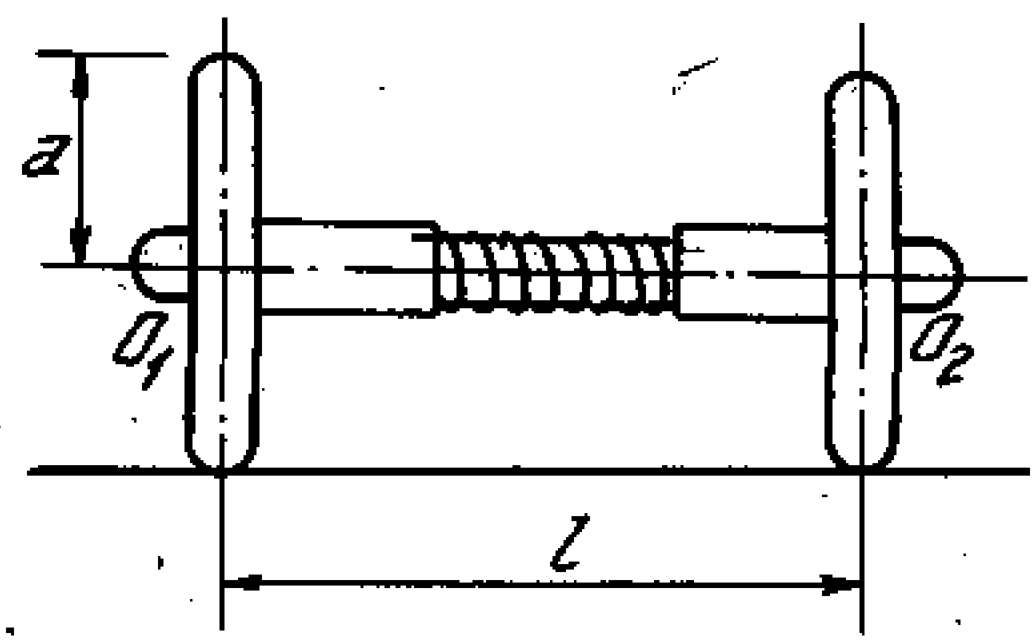
trong đó θ là góc quay của trục máy, còn φ là góc lệch giữa thanh và đường thẳng đứng.

5-20. Một hệ gồm hai bánh xe giống nhau, có cùng bán kính a, cùng khối lượng m. Mômen quán tính của mỗi bánh xe đối với trục quay bằng C, còn đối với đường kính bằng A. Hai bánh xe này có thể quay độc lập với nhau quanh trục O_1O_2 vuông góc với chúng và lăn không trượt trên mặt phẳng ngang, độ dài của trục bằng l. Một lò xo xoắn có độ cứng bằng c nối giữa hai bánh xe, (H. 5-21).

Thành lập phương trình chuyển động của hệ với các điều kiện đầu như sau :

$$\varphi_1 = 0; \dot{\varphi}_1 = 0 ;$$

$$\varphi_2 = 0; \dot{\varphi}_2 = 0;$$



HÌNH 5-21

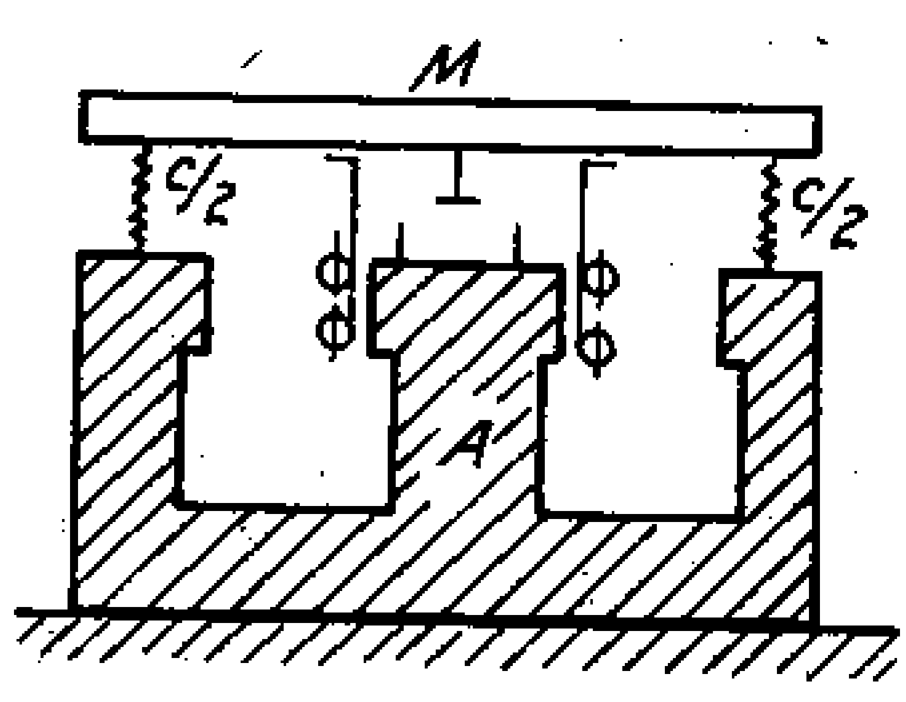
(φ_1, φ_2 là góc quay của các bánh xe).

Bỏ qua khối lượng của trục.

Trả lời : $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt)$,

$$k = \sqrt{\frac{2c}{ma^2 + C + 4A(\frac{a}{l})^2}}$$

5-21. Trên hình vẽ cho một sơ đồ máy ghi địa chấn. Gắn trên bệ máy một cuộn tự cảm có n vòng dây với bán kính r và có điện trở Ôm tổng cộng là R và hệ số tự cảm L. Lõi sắt từ là một hình trụ đồng trục với cuộn tự cảm và gây ra trong khoảng không của nó một từ trường phẳng và xuyên tâm với hệ số cảm ứng B. Lõi sắt có khối lượng M và được đỡ bằng các lò xo có hệ số cứng tổng cộng là c và còn chịu tác dụng của lực cản nhớt $\beta\dot{x}$, trong đó x là độ chuyển dời của lõi sắt từ tính từ vị trí cân bằng của nó. Nền rung theo quy luật $\xi = \xi_0 \sin\omega t$. Đóng kín mạch điện bằng cách nối liền hai cực cuộn tự cảm bằng dây dẫn có điện trở nhỏ không đáng kể. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ, (H. 5-22).



HÌNH 5-22

Hướng dẫn : Các lực suy rộng do lực tác dụng tương hỗ giữa sắt từ và cuộn dây tự cảm là :

$$Q_q = -2\pi rnB\dot{x} \; ; \; Q_x = 2\pi rnB\dot{q}.$$

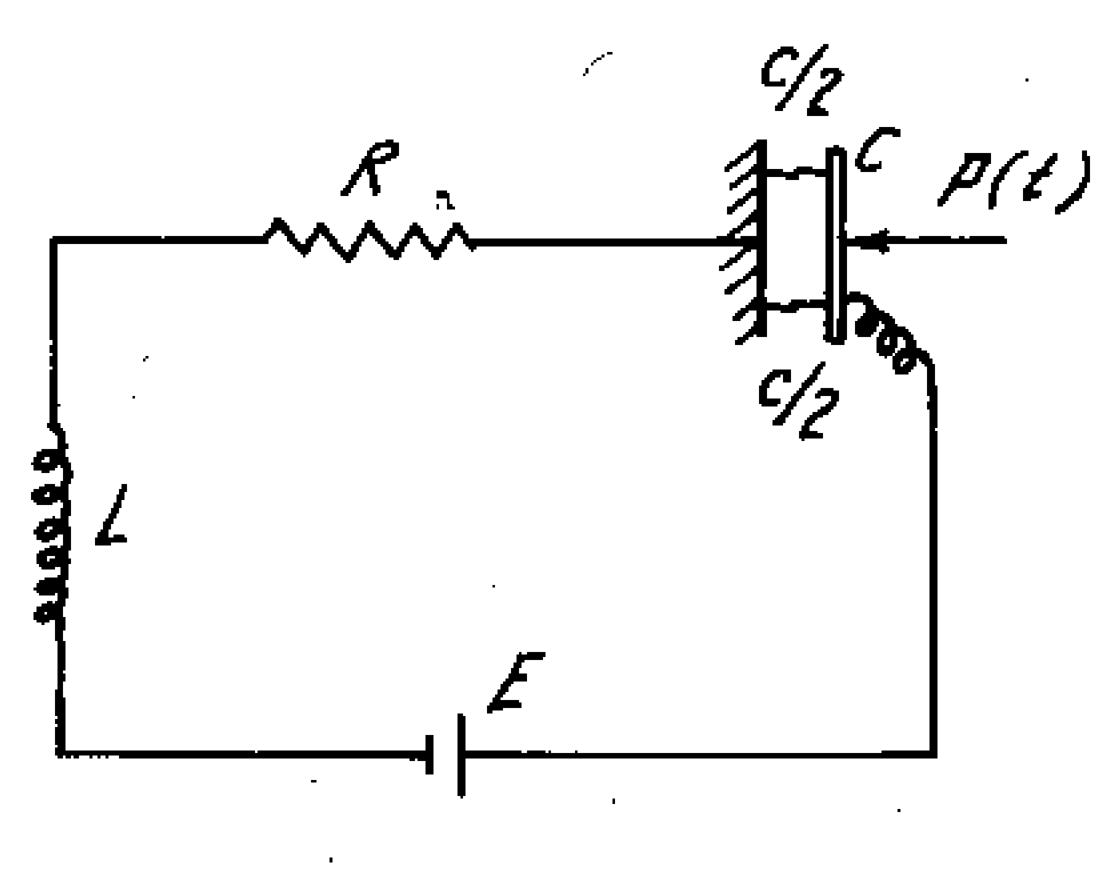
Trả lời : $M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx - 2\pi rnB\dot{q} = M\xi_0\omega^2\sin\omega t$;

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + 2\pi rnB\dot{x} = 0$$

5–22. Sơ đồ của một máy nói micrô dùng tụ điện được biểu diễn như trên hình vẽ, nó là một mạch nối tiếp gồm nguồn điện với sức điện động E, ống tự cảm với hệ số L, điện trở ôm R và tụ điện có điện dung C(E, L và R là những hằng số). Giữa hai tấm của tụ điện ta mắc hai lò xo có độ cứng tổng cộng c, để có thể thay đổi điện dung C của tụ điện, khối lượng tấm động của tụ điện là m ; gọi C_0 là điện dung của tụ điện lúc hệ cân bằng, khi đó khoảng cách giữa hai tấm tụ điện là a và điện lượng của mỗi tấm đó là q_0. Tác dụng lên tấm động của tụ điện lực kích động P(t). Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ cơ điện ấy.

Chỉ dẫn :

1– Thế năng của tụ điện bằng $\Pi = \dfrac{q^2}{2C}$ (C là điện dung của tụ điện, q là điện lượng trên các tấm của nó), động năng của các điện tử chạy trong mạch được tính theo công thức $T = \dfrac{1}{2}Li^2$ (L là hệ số tự cảm, $i = \dfrac{dq}{dt}$ cường độ dòng điện trong mạch).



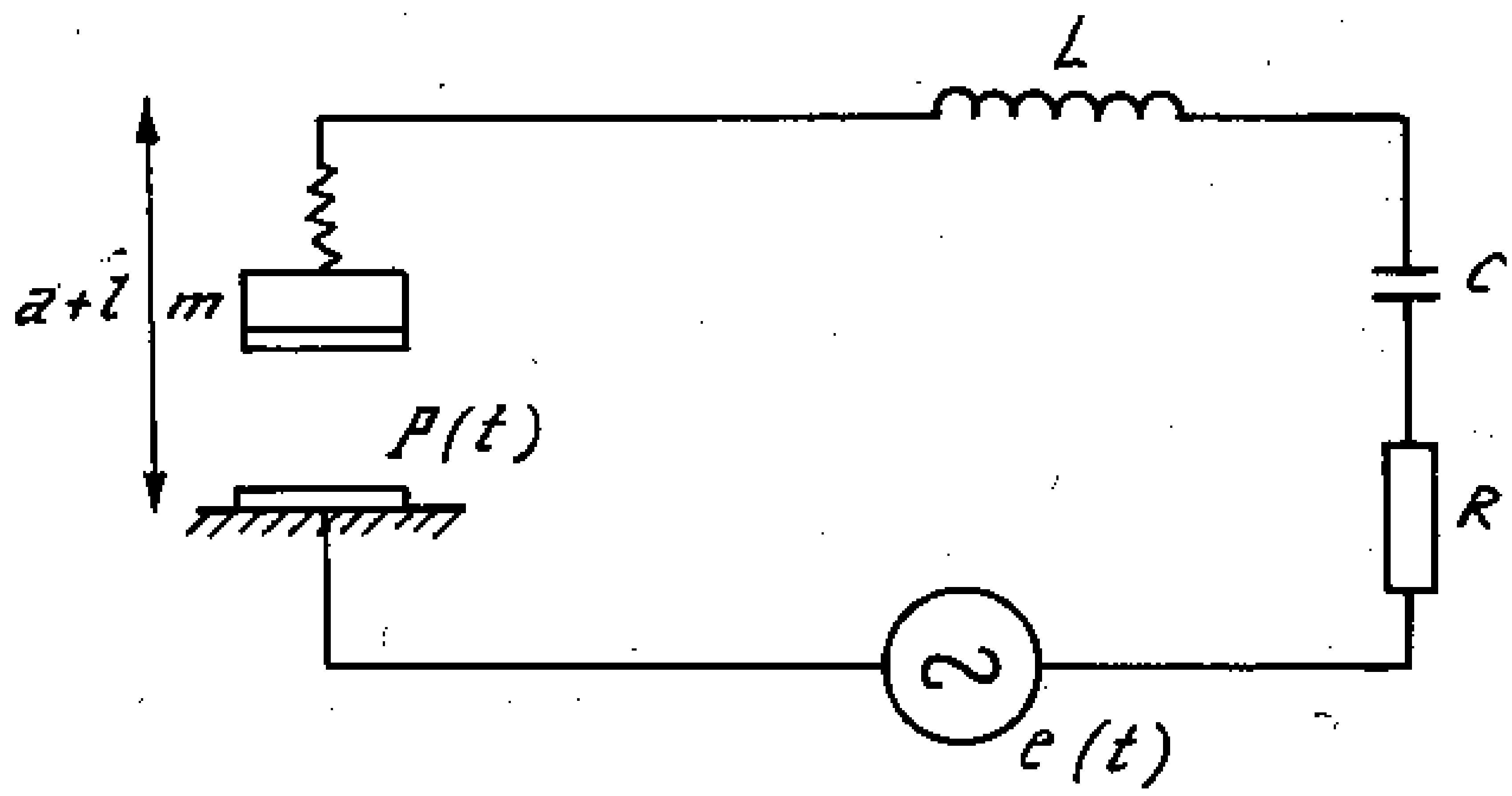
HÌNH 5–23

2– Chọn tọa độ suy rộng là độ tăng giảm điện lượng q và độ lệch x của tâm đối với vị trí cân bằng. Khi đó điện lượng toàn phần sẽ là $q_0 + q$, còn độ lệch toàn phần là $x_0 + x$; ở đó q_0 là điện lượng của tụ điện, còn x_0 là độ lệch của lò xo của vị trí trung hòa đối với vị trí cân bằng, (H. 5–23).

Trả lời : $m\ddot{x} + cx - \frac{E}{a}q - \frac{q^2}{2C_0 a} = P(t).$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{E}{a}x + \frac{q}{C_0} - \frac{qx}{aC_0} = 0.$$

5-23. Thành lập phương trình chuyển động của một hệ cơ điện được biểu diễn như trên hình vẽ. Chiều dài của lò xo lúc không biến dạng bằng l, độ cứng của nó bằng c, khối lượng của vật với tấm động bằng m. Khi quay lò xo không bị biến dạng khoảng cách giữa các tấm động và cố định của tụ bằng a, còn điện dung của nó bằng C_1, (H. 5-24).



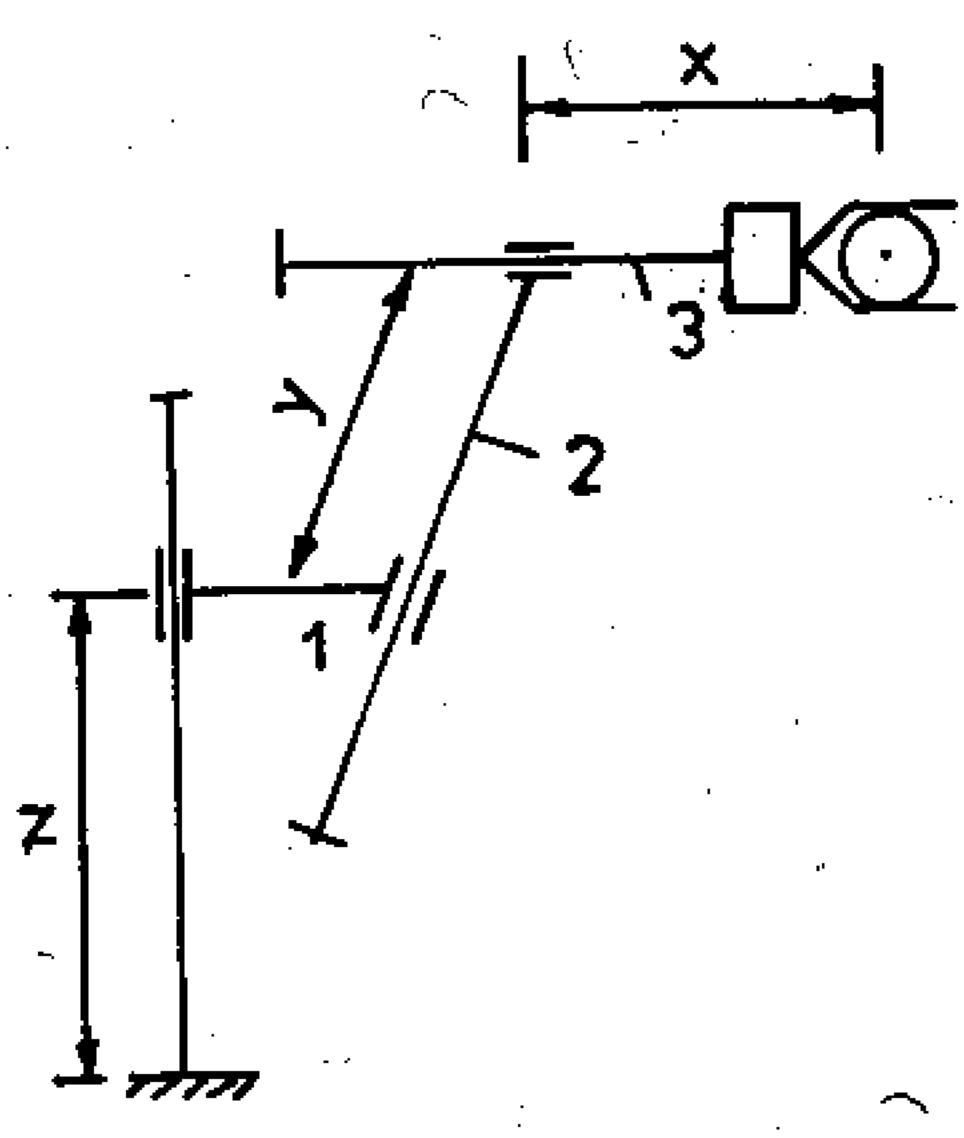
HÌNH 5-24

Trả lời :

$$m\ddot{x} + cx - \frac{q}{aC_1} = mg + P(t).$$

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C_0} - \frac{q}{aC_1}(a-x) + R\dot{q} = e(t).$$

5-24. Một tay quay gồm trụ cố định thẳng đứng dọc theo nó di chuyển thanh đỡ 1, thanh đỡ 2 có thể chuyển động tịnh tiến đối với thanh 1 và tay với 3 cùng với bàn kẹp có thể tịnh tiến đối với thanh 2. Khối lượng



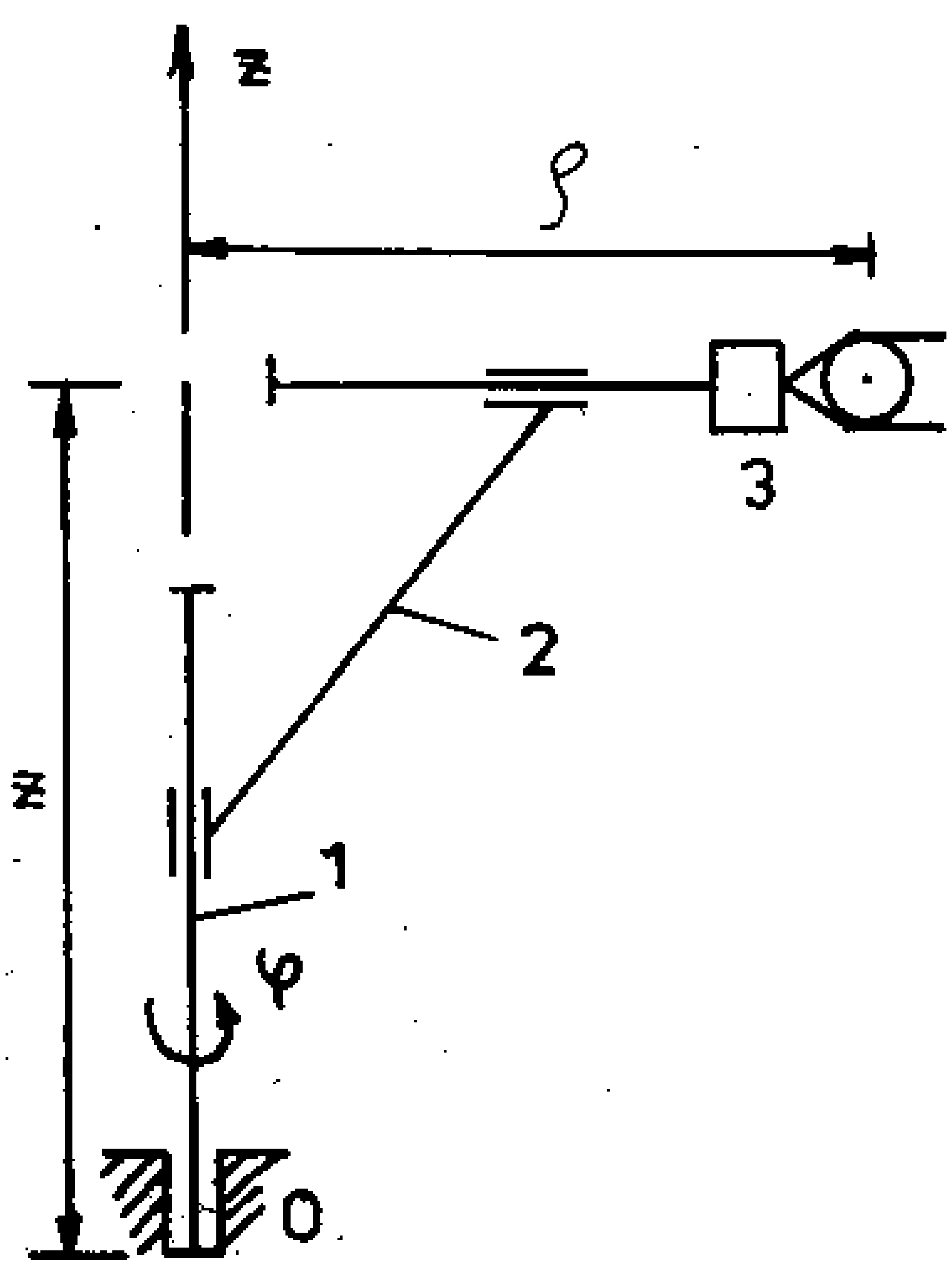
HÌNH 5-25

các thanh 1, 2 và 3 tương ứng là m_1, m_2, m_3. Các động lực để thực hiện các chuyển động tịnh tiến lần lượt là $\vec{F}_{01}$, $\vec{F}_{12}$ và $\vec{F}_{23}$. Bỏ qua ma sát (Hình 5-25). Thành lập phương trình chuyển động của cơ hệ.

Trả lời : $m_3\ddot{x} = F_{23}$; $(m_2 + m_3)\ddot{y} = F_{12}$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{01} - (m_1 + m_2 + m_3)g.$$

5.25. Một tay máy gồm cột 1 quay quanh trục thẳng đứng (thông số định vị φ) bộ phận 2 dùng để nâng hạ lên xuống theo phương thẳng đứng (thông số định vị z) và tay với cùng bàn kẹp 3 (thông số định vị ρ). Các khâu 1, 2, 3 có khối lượng tương ứng là m_1, m_2, m_3 và mômen quán tính đối với trục quay Oz lần lượt là J_1, J_2, J_3. Trục quay chịu tác dụng ngẫu lực có mômen M, còn các động lực để thực hiện các chuyển động tịnh tiến là $\vec{F}_{12}$ (để di chuyển bộ phận 2 đối với trụ đứng 1) và $\vec{F}_{23}$ (để di chuyển tay với - bàn kẹp cùng chi tiết).



HÌNH 5-26

Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

Bỏ qua ma sát (Hình 5-26).

Trả lời : $\dfrac{d}{dt}[(J_1 + J_2 + J_3 + m_3\rho^2)\dot{\varphi}] = M$

$$(m_2 + m_3)\ddot{z} = F_{12} - (m_2 + m_3)g \; ; \; m_3(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_{23}$$

CHƯƠNG 6

ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

Trong chương này khảo sát động lực học vật rắn : bài toán một vật và bài toán hệ vật. Đối với bài toán một vật sử dụng các phương trình vi phân chuyển động có thể giải được cả bài toán thuận và bài toán ngược. Đối với bài toán hệ vật có thể đưa nó về từng bài toán một vật nhờ giải phóng liên kết hoặc sử dụng tổng hợp các kết quả lý thuyết ở các chương trước và do vậy bài toán đó còn được gọi là bài toán tổng hợp.

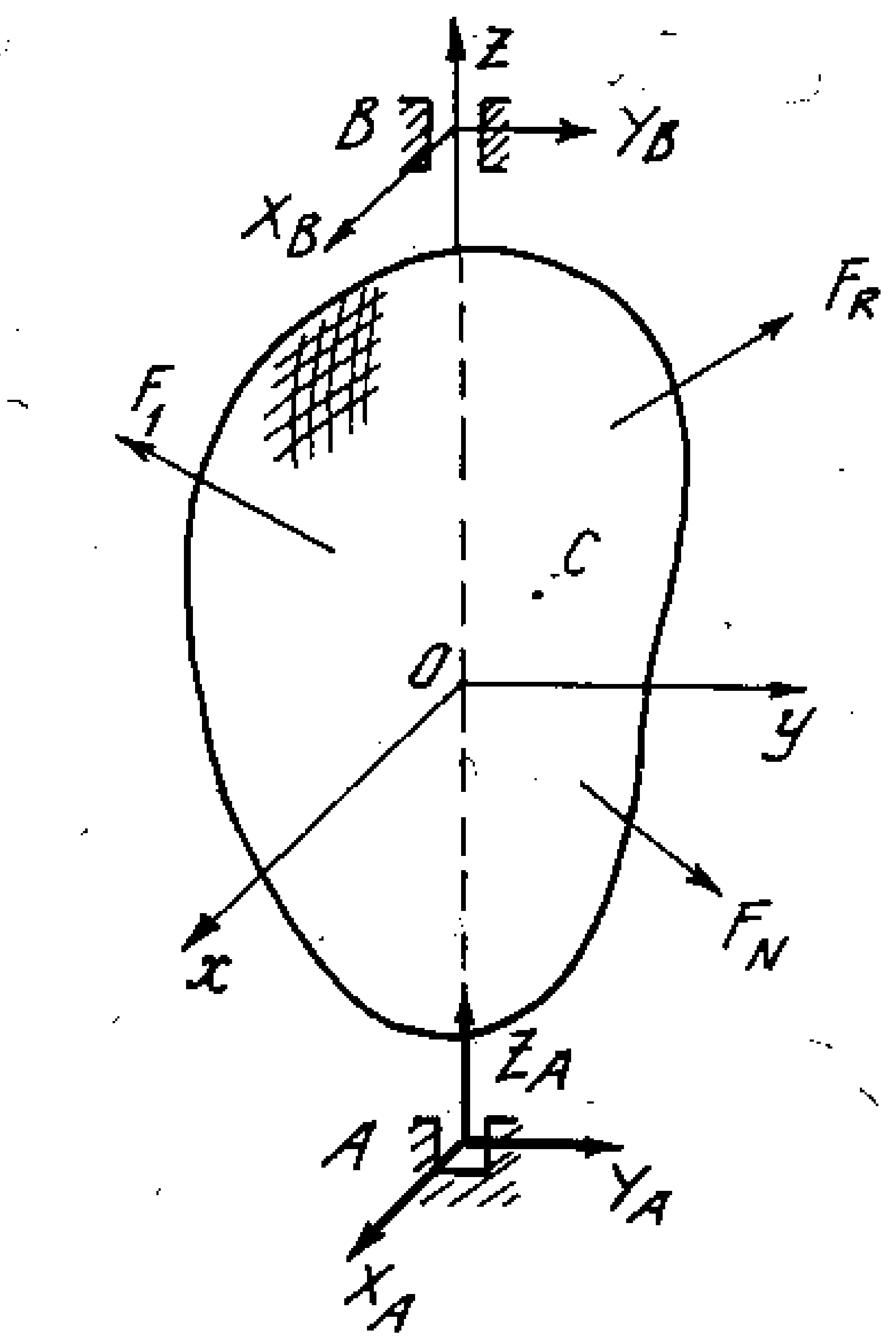
6.1. CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH. ÁP LỰC ĐỘNG LỰC LÊN Ổ TRỤC

6.1.1. Cơ sở lý thuyết

a) Phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh một trục cố định

Chọn hệ trục Oxyz gắn liền với vật, trong đó trục Oz trùng với trục quay (H. 6–1), ta có :

$$\begin{cases} \sum X_K^e + X_A + X_B - Mx_C\omega^2 + My_C\bar{\varepsilon} = 0, \\ \sum Y_K^e + Y_A + Y_B + My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon = 0 \\ \sum Z_K^e + Z_A = 0, \\ \sum \overline{m}_x(\vec{F}_K^e) + Y_A a - Y_B b - J_{yz}\omega^2 + J_{xz}\bar{\varepsilon} = 0 \\ \sum \overline{m}_y(\vec{F}_K^e) - X_A a + X_B b + J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon = 0 \\ \sum \overline{m}_z(\vec{F}_K^e) - J_z\bar{\varepsilon} = 0, \end{cases} \qquad (6\text{–}1)$$



HÌNH 6-1

trong đó các lực $\vec{F}_K^e(X_K^e, Y_K^e, Z_K^e)$ là các ngoại lực tác dụng lên vật rắn, $\vec{R}_A(X_A, Y_A, Z_A)$; $\vec{R}_B(X_B, Y_B)$ là các phản lực tại ổ đỡ A và B ; $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$ - vận tốc góc và gia tốc góc của vật quay; x_C, y_C các tọa độ khối tâm C của vật; J_{yz}, J_{zx} - các mômen quán tính tích của vật; J_z - mômen quán tính của vật đối với trục quay. Vì hệ trục tọa độ gắn liền vào vật quay nên các tọa độ khối tâm của vật, các mômen quán tính tích và mômen quán tính của vật đối với trục quay là các đại lượng không đổi.

Phương trình cuối cùng không chứa các phản lực trục quay được gọi là phương trình vi phân chuyển động của vật quay, khi tích phân chúng sẽ nhận được vận tốc góc và phương trình chuyển động của vật quay.

Năm phương trình còn lại cho phép xác định các thành phần phản lực tại các ổ trục A và B, chúng phụ thuộc không những vào ngoại lực tác dụng mà còn vào các yếu tố động học $\bar{\omega}$ và $\bar{\varepsilon}$.

b) Phương trình xác định phản lực tĩnh và phản lực động lực

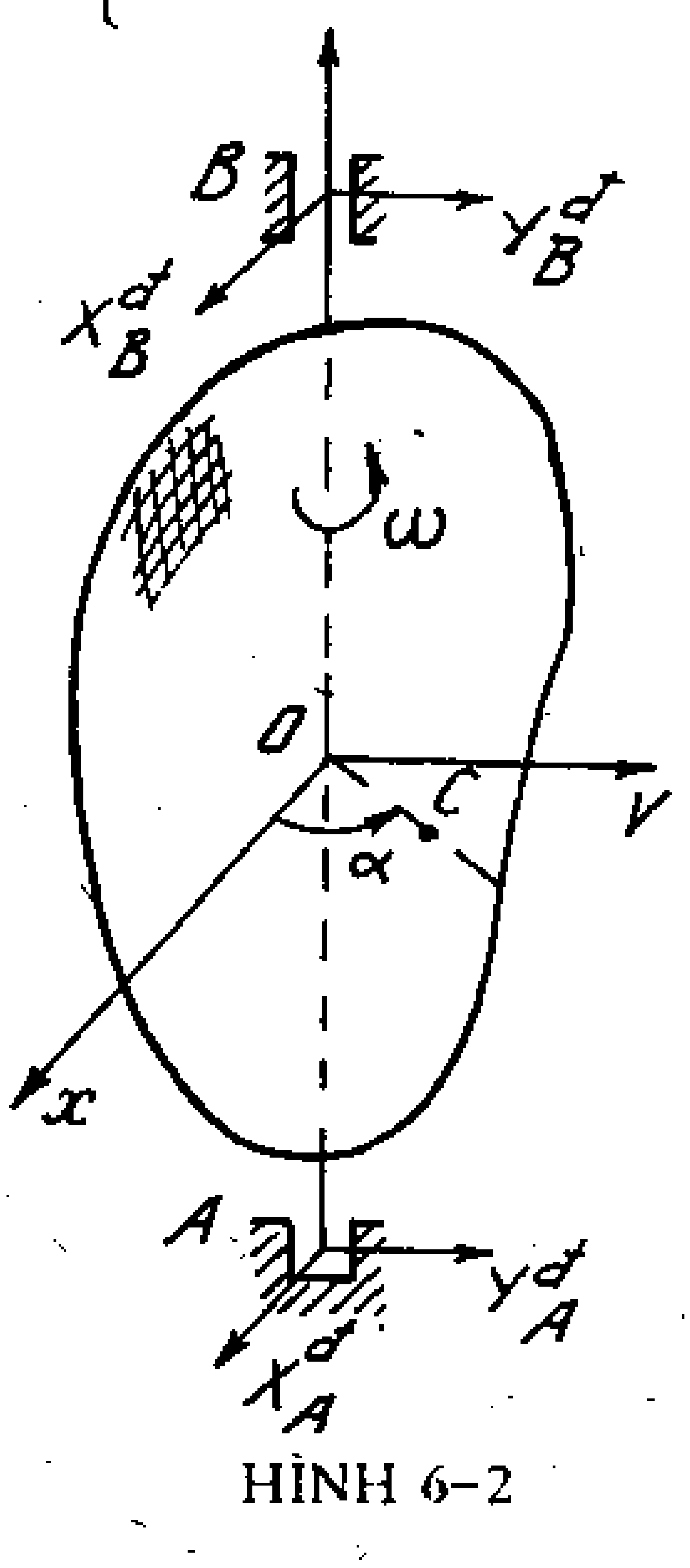
$$\begin{cases} \sum X_K^e + X_A^t + X_B^t = 0 \\ \sum Y_K^e + Y_A^t + Y_B^t = 0, \\ \sum Z_K^e + Z_A^t = 0, \\ \sum \overline{m}_x(\vec{F}_K^e) + Y_A^t a - Y_B^t b = 0, \\ \sum \overline{m}_y(\vec{F}_K^e) - X_A a + X_B^t b = 0, \end{cases} \qquad (6\text{-}2)$$

$$
\begin{cases}
X_A^{đ} + X_B^{đ} + Mx_C\omega^2 + My_C\bar{\varepsilon} = 0, \\
Y_A^{đ} + Y_B^{đ} + My_C\omega^2 - Mx_C\bar{\varepsilon} = 0, \\
Z_A^{đ} = 0, \\
aY_A^{đ} - bY_B^{đ} - J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\bar{\varepsilon} = 0, \\
-aX_A^{đ} + bX_B^{đ} + J_{zx}\omega^2 + J_{yz}\bar{\varepsilon} = 0.
\end{cases} \qquad (6\text{–}3)
$$

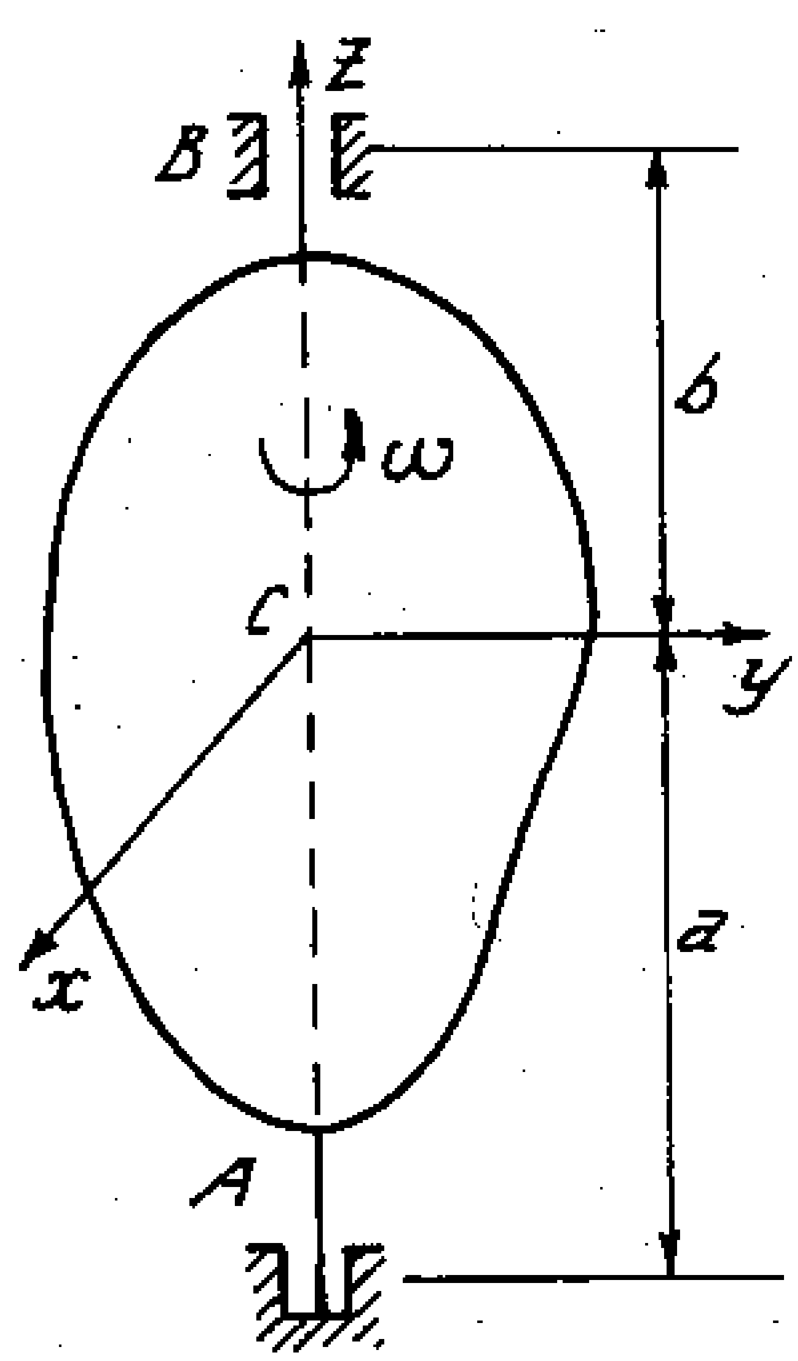
c) Trường hợp trục quay mất cân bằng tĩnh. Vật quay đều với vận tốc góc ω (H. 6–2)

Nếu trục quay là trục quán tính chính tại O và không đi qua khối tâm C. Ta có $J_{zx} = J_{zy} = 0$, và nếu chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ: $x_C = e\cos\alpha$, $y_C = e\sin\alpha$, thì từ hệ phương trình xác định phản lực động lực (6–3) ta nhận được :

$$
\begin{cases}
X_A^{đ} = \dfrac{-mb\omega^2 e\cos\alpha}{a+b} \; ; \; Y_A^{đ} = -\dfrac{mb\omega^2 e\sin\alpha}{a+b}, \\
X_B^{đ} = -\dfrac{ma\omega^2 e\cos\alpha}{a+b} \; ; \; Y_B^{đ} = -\dfrac{ma\omega^2 e\sin\alpha}{a+b}.
\end{cases} \qquad (6\text{–}4)
$$



HÌNH 6–2



HÌNH 6–3

d) Trường hợp trục quay mất cân bằng động. Vật quay đều với vận tốc góc ω (H. 6-3)

Nếu trục quay đi qua khối tâm C nhưng không phải là trục quán tính chính tại C, thì khi chọn hệ trục gốc tại C, ta có :

$$x_C = y_C = 0\ ;\ J_{yz} \neq 0;\ J_{zx} \neq 0.$$

Các phản lực động lực được tính từ các phương trình (6-3) sẽ bằng

$$\begin{cases} X_A^d = -X_B^d = \dfrac{J_{zx}}{a+b}\omega^2, \\ Y_A^d = -Y_B^d = \dfrac{J_{yz}}{a+b}\omega^2\ ; \end{cases} \qquad (6\text{-}5)$$

Chúng tạo thành một ngẫu lực.

6.1.2. Hướng dẫn áp dụng

Ở đây chúng ta chỉ xét bài toán xác định phản lực (bài toán xác định chuyển động của vật quay quanh một trục cố định đã được đề cập đến trong chương II §2-3), nó được tiến hành theo các bước sau :

– Chọn hệ trục tọa độ Oxyz gắn chặt với vật quay, trong đó trục Oz trùng với trục quay, còn một trong hai trục còn lại cố gắng chọn sao cho là trục quán tính chính tại gốc tọa độ. Nếu trọng tâm C của vật nằm trên trục quay thì gốc tọa độ O được chọn trùng với C.

– Đặt các ngoại lực tác dụng lên vật nếu cần tìm phản lực toàn phần thì giải hệ phương trình (6-1). Nếu chỉ cần xác định riêng rẽ phản lực tĩnh và phản lực động lực thì giải tương ứng các hệ phương trình (6-2) và (6-3). Trong trường hợp trục quay chỉ mất cân bằng tĩnh thì sử dụng kết quả (6-4) còn nếu trục mất cân bằng động (6-5).

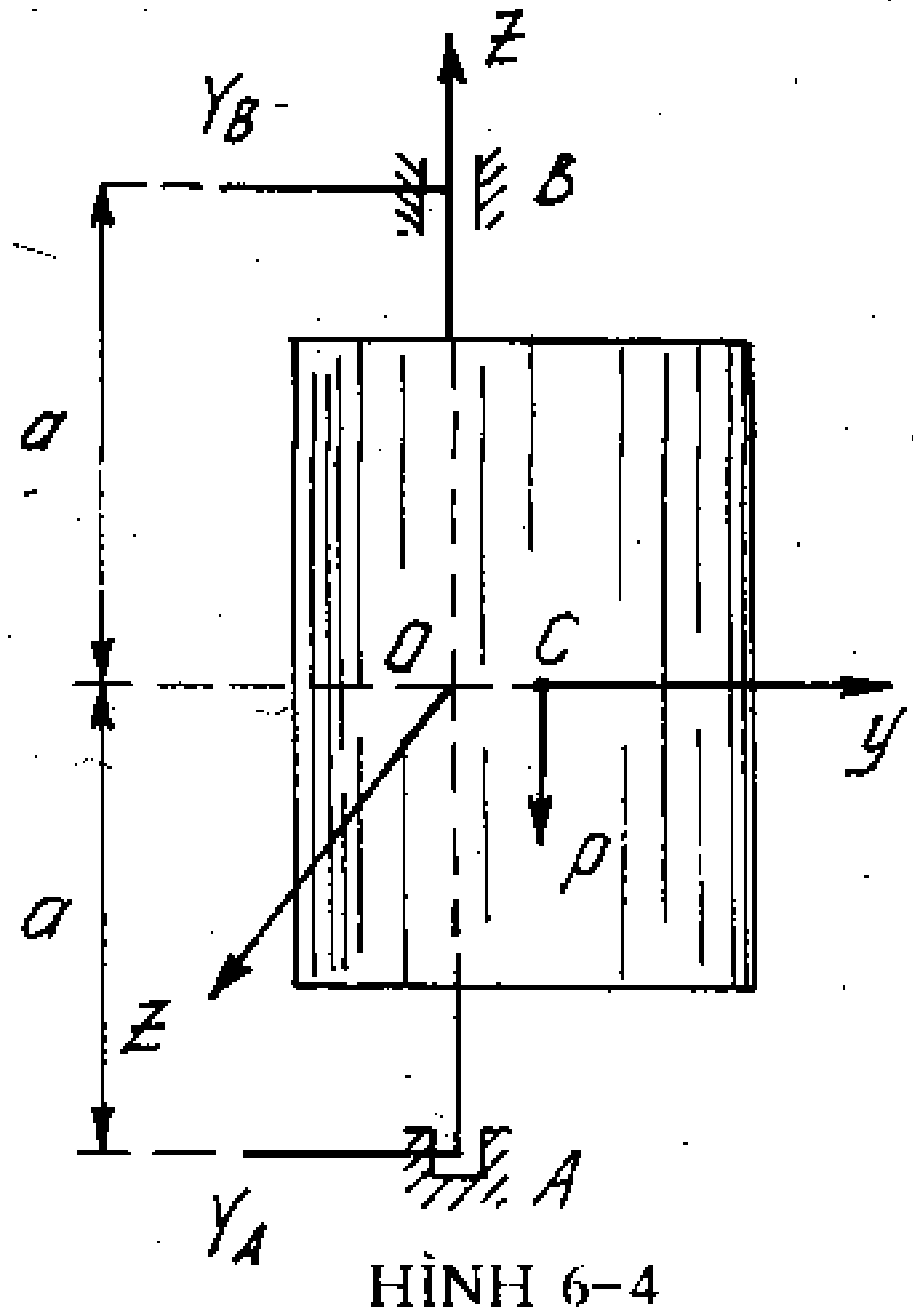
6.1.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 6-1. Một trục máy hình trụ đồng chất khối lượng m quay đều với vận tốc góc ω_0 quanh một trục song song với đường trục tâm của trụ. Cho biết độ lệch tâm của trục máy bằng e. Xác định các phản lực tĩnh và phản lực động lực tại các ổ trục A và B (H. 6-4).

Bài giải. Vì trục quay là trục quán tính chính nên trục máy chỉ bị mất cân bằng tĩnh. Do đó các phản lực động lực theo (6-4) trong đó $\alpha = \frac{\pi}{2}$, bằng :

$$X_A^d = 0, X_B^d = 0;$$

$$Y_A^d = Y_B^d = \frac{1}{2}me\omega_o^2 \;;\; Z_A^d = 0.$$



HÌNH 6-4

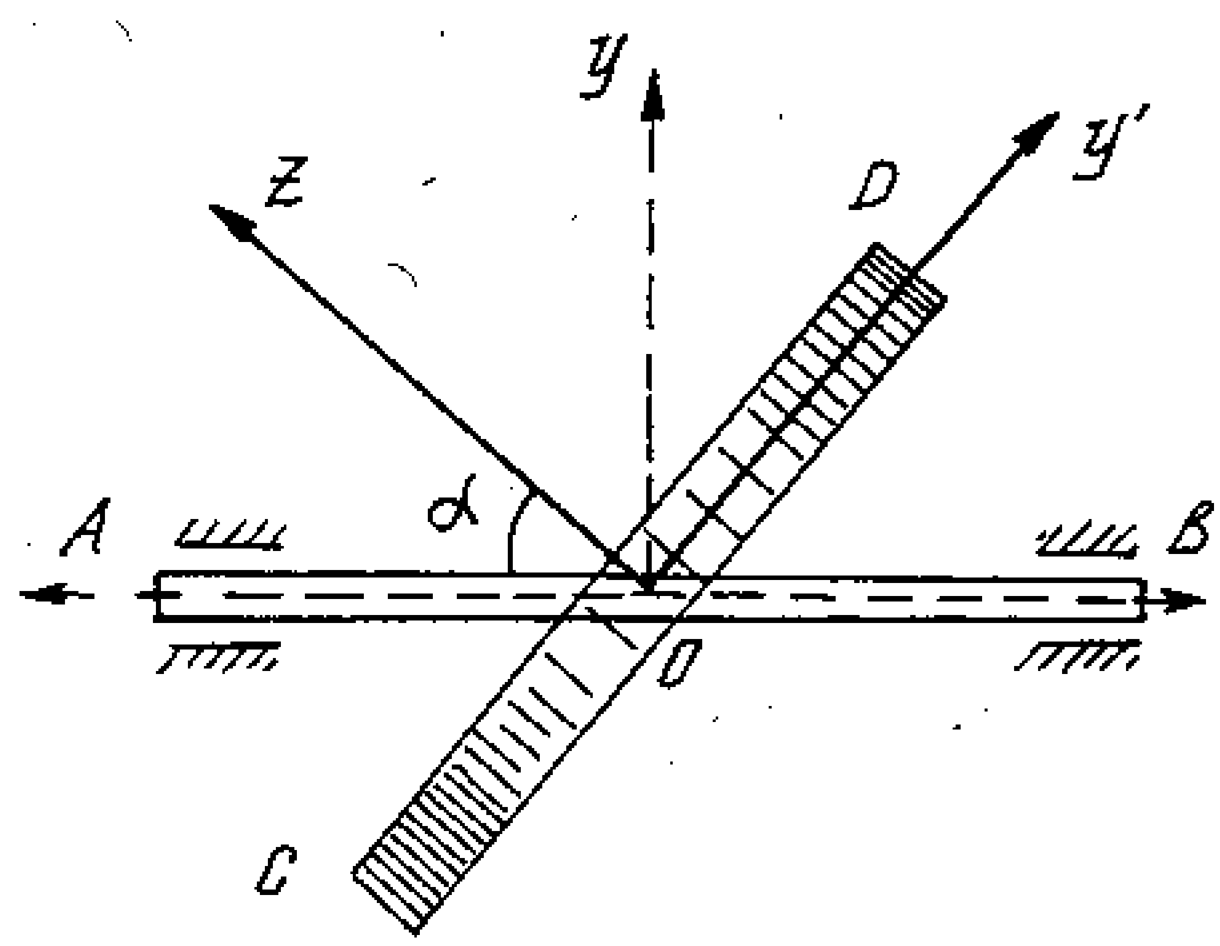
Còn các phản lực tĩnh dễ dàng tính được

$$X_A^t = X_B^t = 0; Y_A^t = \frac{Pe}{2a}; Y_B^t = -\frac{Pe}{2a}; Z_A^t = P,$$

trong đó P = mg.

Thí dụ 6-2. Đĩa tròn đồng nhất CD của tuabin hơi, có bán kính 20 cm, khối lượng là 3,27 kg được gắn trên trục AB tại O với AO = 50 cm, OB = 50 cm. Trục AB được coi là trục cứng nhẹ đi qua trọng tâm O của đĩa nhưng nghiêng với mặt phẳng của đĩa một góc α = 0,02 rad (đó cũng là góc của trục đối xứng của đĩa và trục quay AB). Tuabin quay đều với tốc độ n = 30.000 v/phút. Tính áp lực động của trục AB lên hai ổ đỡ (H. 6-5).

Bài giải. Trục quay đi qua trọng tâm của vật quay nhưng không phải là trục quán tính chính nên bị mất cân bằng động. Do đó các phản lực động lực được tính theo (6-5). Muốn vậy ta chọn hệ trục tọa độ có gốc tại O và các trục được chọn như sau :



HÌNH 6-5

– trục Oz trùng với trục quay.

– trục Oy nằm trong mặt phẳng chứa trục Oz và Oz', và thẳng góc với trục Oz (Oz' là trục thẳng góc với mặt phẳng đĩa, nó là trục quán tính chính trung tâm).

– Trục Ox thẳng góc với trục Oz và Oy nên cũng thẳng góc với trục Oz' ; tức Ox nằm trong mặt phẳng của đĩa đi qua khối tâm, nó cũng là trục quán tính chính trung tâm.

Đối với hệ trục tọa độ được chọn ta có : $J_{yz} \neq 0$, $J_{zx} = 0$.

Theo (6–5), các phản lực động lực bằng

$$X_A^đ = -X_B^đ = \frac{J_{zx}}{a+b}\omega^2 = 0 \ ;$$

$$Y_A^đ = -Y_B^đ = \frac{J_{yz}}{a+b}\omega^2.$$

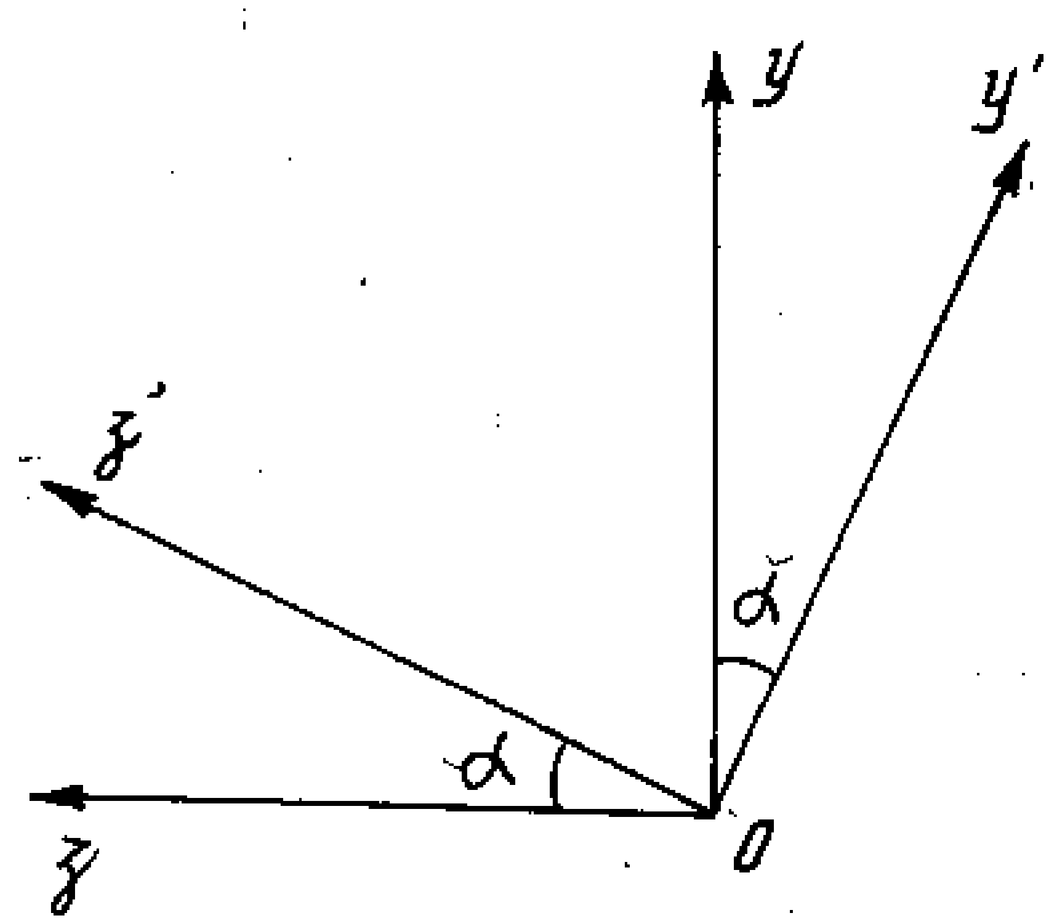
Để tính J_{yz} ta sử dụng công thức

$$J_{yz} = \frac{J_{z'} - J_{y'}}{2}\sin 2\alpha,$$

trong đó các trục Ox', Oy' được chọn như sau :

– Trục Ox' trùng với trục Ox

– Trục Oy' thẳng góc với trục Oz' và Ox nên cùng nằm trong mặt phẳng với các trục Oz, Oz', Oy. Do đó khi quay quanh Ox (Ox') một góc α thì Oy' đến trùng với Oy và Oz' đến trùng với Oz (H. 6–6). Các trục Oz' và Ox' là trục quán tính chính trung tâm nên trục Oy' cũng là trục quán tính chính trung tâm. Ta có



HÌNH 6–6

$$J_{y'} = \frac{mR^2}{4}, J_{z'} = \frac{mR^2}{2} \ ;$$

Vậy :

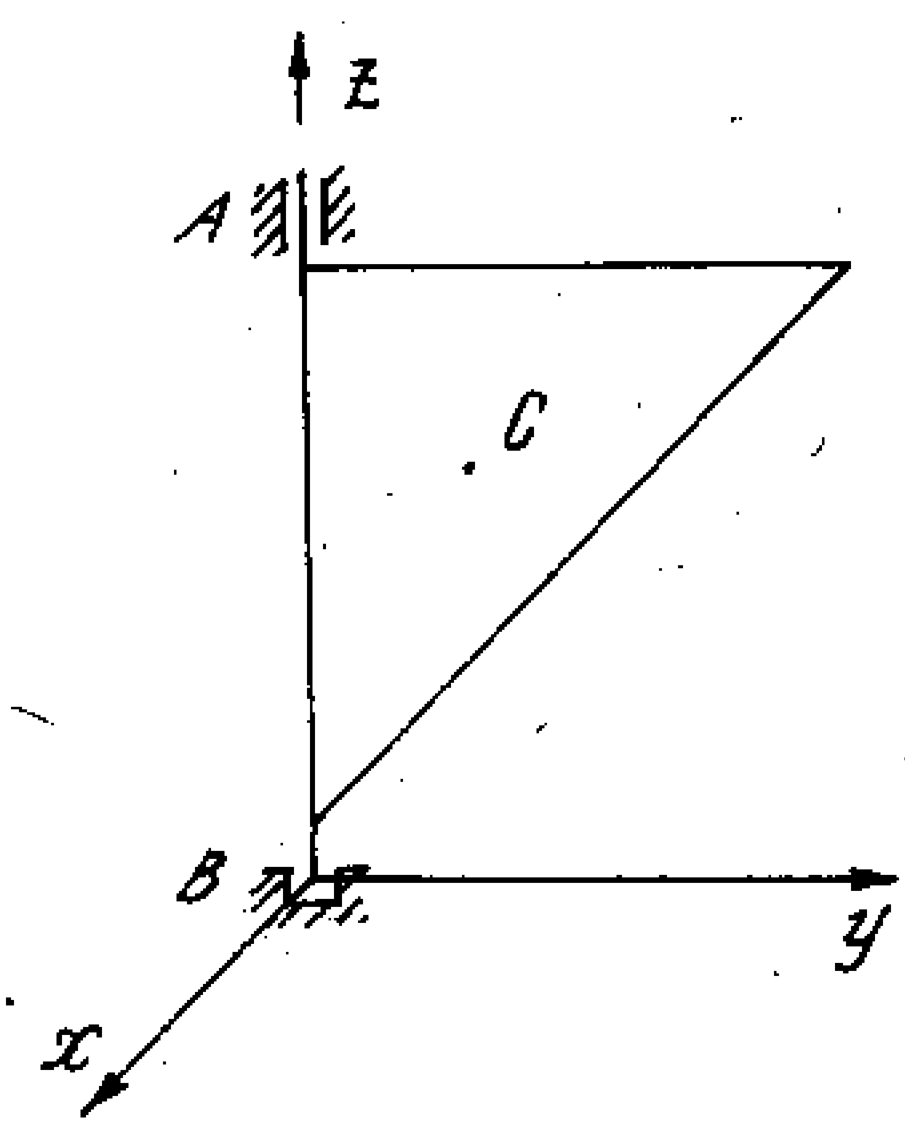
$$J_{yz} = \left(\frac{mR^2}{2} - \frac{mR^2}{4}\right)\frac{\sin 2\alpha}{2} = \frac{mR^2}{8}\sin 2\alpha.$$

Khi thay số vào chúng ta nhận được kết quả cuối cùng :

$$X_A^d = X_B^d = 0; Y_A^d = -Y_B^d = 8.063,8N.$$

Như vậy các phản lực động tạo thành ngẫu lực thuận chiều quay của kim đồng hồ trong mặt phẳng Oyz.

Thí dụ 6–3. Một tấm đồng chất dạng hình tam giác vuông cân cạnh a quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω. Tìm giá trị của vận tốc góc để phản lực tại ổ trục B bằng không. Xem khoảng cách giữa hai ổ trục A và B bằng a (H.6–7).



HÌNH 6–7

Bài giải. Chọn hệ tọa độ gốc tại B và các trục như sau : trục B_z là trục quay, trục B_y nằm trong mặt phẳng của tấm và thẳng góc với trục quay, trục B_x – thẳng góc với mặt phẳng của tấm.

Như vậy trục B_x là trục quán tính chính tại B vì $J_{xz} = \sum m_k x_k z_k = 0$; $J_{xy} = \sum m_k y_k x_k = 0$.

Đầu tiên ta xác định các thành phần của phản lực tĩnh. Giả định các thành phần của phản lực tĩnh hướng theo chiều dương các trục tọa độ.

Phương trình xác định phản lực tĩnh (6–2) cho ta

$$X_A^t + X_B^t = 0 \; ; \quad Y_A^t + Y_B^t = 0 \; ; \quad Z_A^t - P = 0 \; ;$$

$$-Y_A^t \cdot a - \frac{Pa}{3} = 0 \; ; \quad X_A^t \cdot a = 0.$$

Từ đó chúng ta có

$$X_A^t = X_B^t = 0 \; ; \; Y_B^t = \frac{P}{3} \; ; \; Y_A^t = -\frac{P}{3}.$$

Như vậy thành phần theo trục B_y của phản lực tĩnh tại A hướng theo chiều âm của trục B_y.

Bây giờ chuyển sang xác định các thành phần của phản lực động lực.

Giả định các thành phần của phản lực động hướng theo chiều dương các trục tọa độ. Khi viết các phương trình xác định các phản lực động lực (6–3) với chú ý

$$x_c = 0 \; ; \; y_c = \frac{a}{3} \; ; \; J_{zx} = 0,$$

ta có : $X_A^d + X_B^d = 0$; $Y_A^d + Y_B^d + M\dfrac{a}{3}a^2 = 0$; $Z_B^d = 0,$

$$-Y_A^d \cdot a - J_{yz}\omega^2 = 0 \; ; \; X_A^d \cdot a = 0,$$

Từ đó :

$$X_A^d = X_B^d = 0 \; ; \; Y_A^d = -\frac{1}{a} J_{yz}\,\omega^2 \; ;$$

$$Y_B^d = -Y_A^d - M\frac{a}{3}\omega^2 = \left(\frac{1}{a} J_{yz} - M\frac{a}{3}\right)\omega^2.$$

Điều kiện để phản lực tại B bằng không là :

$$X_B = X_B^t + X_B^d = 0 \; ; \; Y_B = Y_B^t + Y_B^d = 0.$$

Rõ ràng phương trình đầu được thỏa mãn đồng nhất, còn để phương trình thứ hai được thỏa mãn cần phải có :

$$\frac{P}{3} + \left(\frac{1}{a} J_{yz} - \frac{Ma}{3}\right)\omega^2 = 0.$$

Chú ý rằng :

$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k = \gamma \int_0^a z dz \int_0^z y dy = \frac{\gamma a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{Ma^2}{4},$$

trong đó γ là khối lượng của một đơn vị diện tích của tấm.

Vậy để phản lực tại ổ trục B bằng không, tấm cần quay đều với vận tốc thỏa mãn phương trình

$$\frac{P}{3} + \left(\frac{1}{a}\frac{Ma^2}{4} - \frac{Ma}{3}\right)\omega^2 = 0,$$

tức :
$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

6.2. CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẲNG CỦA VẬT RẮN (TẤM PHẲNG)

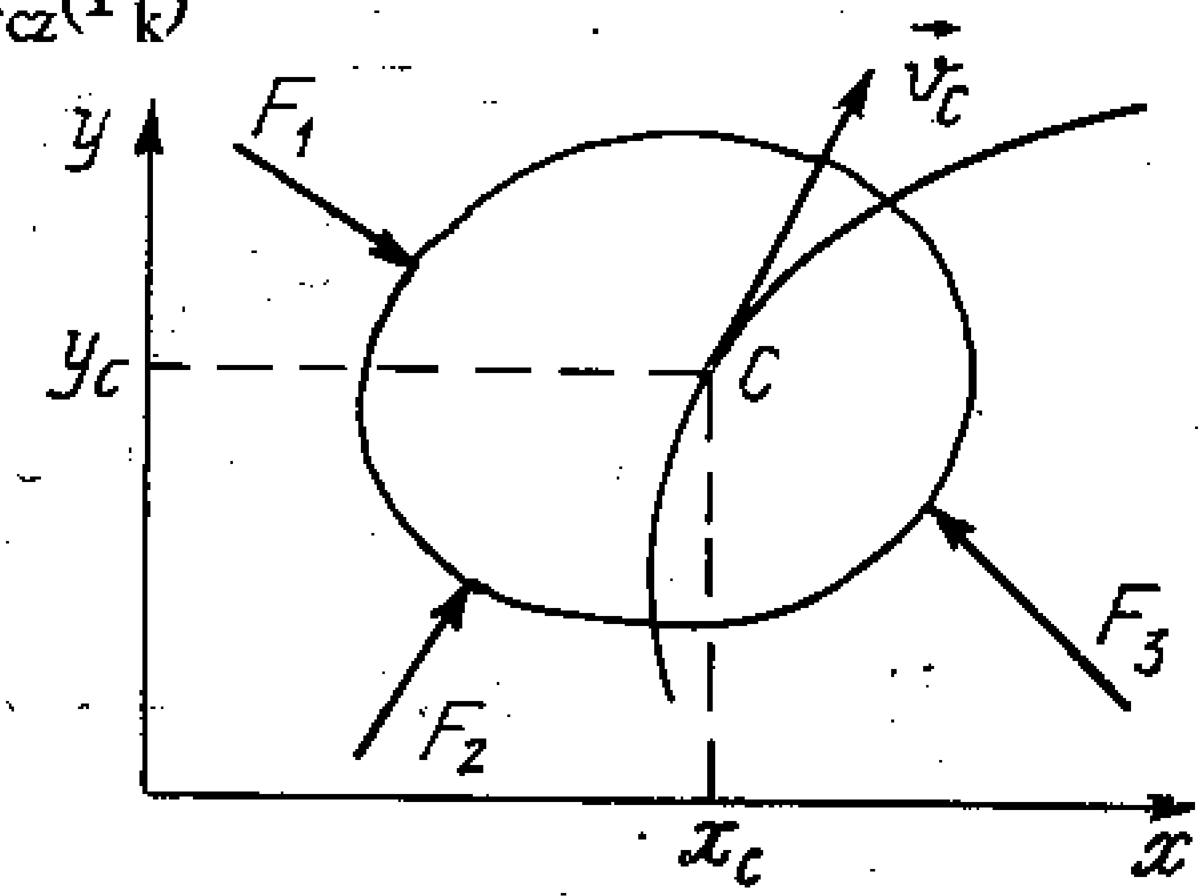
6.2.1. Cơ sở lí thuyết

Phương trình vi phân chuyển động của tấm phẳng chuyển động song phẳng :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum X_k^e , \\ M\ddot{y}_c = \sum Y_k^e , \\ J_{cz}\ddot{\varphi}_s = \sum \overline{m}_{cz}(\overrightarrow{F_k^e}) \end{cases} \qquad (6\text{–}6)$$

hoặc

$$\begin{cases} M\ddot{s}_C = \sum F_k^t \\ M\dfrac{v_c^2}{\rho} = \sum F_k^n \\ J_{cz}\ddot{\varphi}_s = \sum \overline{m}_{cz}(\overrightarrow{F_k^e}) \end{cases} \qquad (6\text{–}7)$$



HÌNH 6–8

trong đó x_c, y_c là tọa độ khối C tâm của tấm phẳng, $\overline{s}_c$, $\overrightarrow{v_c}$ là tọa độ cong và vận tốc của khối tâm C, ρ là bán kính cong của quỹ đạo khối tâm, φ_s – góc định vị của tấm phẳng đối với hệ trục tọa độ tịnh tiến cùng với khối tâm ; M là khối lượng của tấm ; J_{cz} – mômen quán tính của tấm đối với trục thẳng góc với mặt phẳng của tấm qua khối tâm C (H.6–8).

6.2.2. Hướng dẫn áp dụng

Phương trình vi phân chuyển động của tấm chuyển động song phẳng được dùng để giải cả bài toán thuận và ngược.

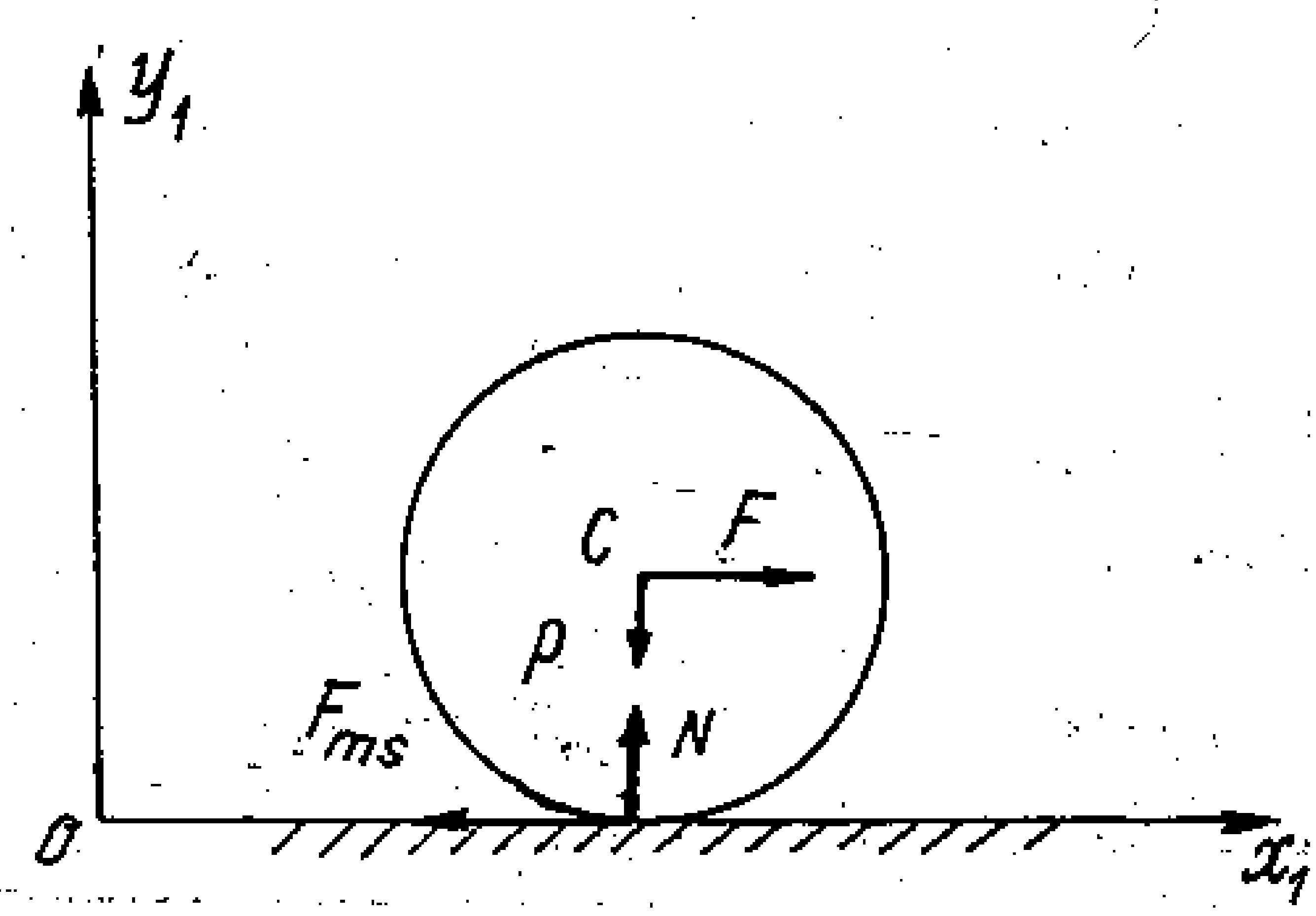
a) Biết chuyển động song phẳng của tấm, hãy xác định vectơ chính và mômen chính các lực tác dụng lên vật và nhờ đó có thể xác định các phản lực.

b) Cho biết các lực tác dụng lên vật, hãy xác định chuyển động song phẳng của vật.

Chú ý rằng khi sử dụng các phương trình vi phân chuyển động song phẳng giải được đồng thời cả bài toán ngược và thuận đối với một tấm phẳng.

6.2.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 6–4. Trục bị động của bánh xe ô tô chuyển động ngang và thẳng. Đặt lên trục một lực $\vec{F}$ nằm ngang. Bán kính quán tính của bánh xe đối với trục đi qua trọng tâm thẳng góc với mặt phẳng của nó bằng ρ. Hệ số ma sát trượt giữa bánh xe và đất là f. Bánh xe có bán kính bằng R, trọng lượng là P (Hình 6–9). Tìm điều kiện lực $\vec{F}$ cần thỏa mãn để bánh xe lăn không trượt. Bỏ qua sức cản lăn.



HÌNH 6–9

Bài giải. Khảo sát chuyển động của bánh xe. Đó là chuyển động song phẳng.

Các loại lực tác dụng lên bánh xe gồm

– Trọng lực $\vec{P}$,

– Phản lực $\vec{N}$,

– Lực tác dụng nằm ngang $\vec{F}$,

– Lực ma sát $\vec{F}_{ms}$.

Chọn các trục tọa độ như hình 6–9.

Phương trình vi phân chuyển động của bánh xe theo (6–6) có dạng :

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = F - F_{ms}, \tag{a}$$

$$\frac{P}{g}\ddot{y}_c = - P + N, \tag{b}$$

$$\frac{P}{g}\rho^2\ddot{\varphi} = F_{ms}.R, \tag{c}$$

Ta có ba phương trình với năm đại lượng chưa biết $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$, $\ddot{\varphi}$, F_{ms}, N. Ta cần tìm một số liên hệ giữa các đại lượng này.

Vì $$y_c = R, \text{ nên } \ddot{y}_c = 0. \tag{d}$$

Vì bánh xe lăn không trượt nên tâm vận tốc tức thời là điểm tiếp xúc giữa bánh xe và đường.

Từ đó : $v_c = R\omega$ hoặc $\dot{x}_c = - R\dot{\varphi}$

Rút ra : $$\ddot{x}_c = - R\ddot{\varphi} \tag{e}$$

Giải các phương trình (a)(b) và (c) với sự chú ý đến (d) và (e) chúng ta nhận được:

$$N = P \text{ và } F_{ms} = \frac{F}{R^2 + \rho^2}$$

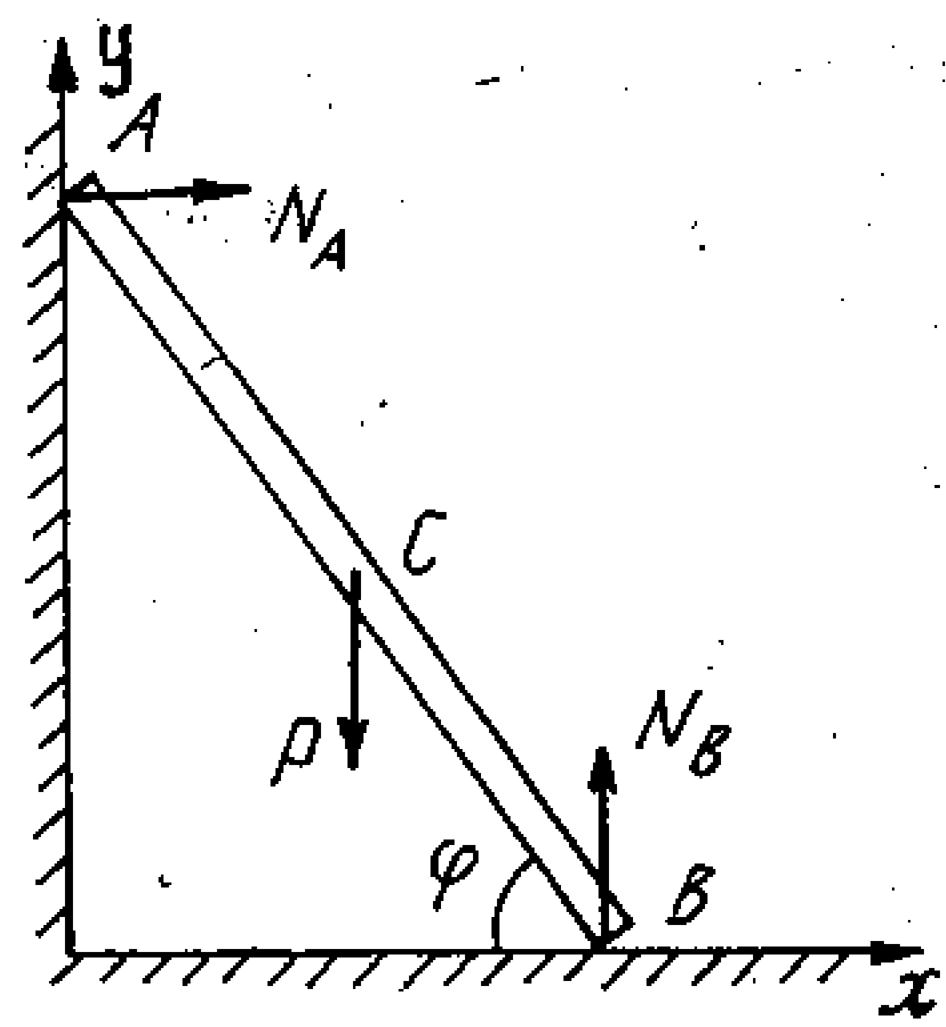
Điều kiện để bánh xe lăn không trượt là :

$$F_{ms} \leqslant fN,$$

$$\text{hay } \frac{F\rho^2}{R^2 + \rho^2} \leqslant fP.$$

Vậy lực F tác dụng lên trục phải thỏa mãn điều kiện :

$$F \leqslant fP . \frac{R^2 + \rho^2}{\rho^2}.$$



HÌNH 6-10

Thí dụ 6-5. Một thanh AB đồng chất có chiều dài 2a đặt trong mặt phẳng thẳng đứng, đầu mút A tựa vào mặt tường nhẵn thẳng đứng, còn đầu mút B trượt trên mặt nhẵn ngang. Giữ thanh đứng yên tạo với mặt phẳng ngang một góc φ_o rồi thả ra cho nó chuyển động dưới tác dụng của trọng lực.

Xác định vận tốc góc và gia tốc theo góc nghiêng φ của nó. Tính phản lực do tường và nền tác dụng lên thanh AB ở tại A và B theo góc φ. Suy ra giá trị của φ lúc đầu mút A của thanh rời khỏi mặt tường (H.6-10).

Bài giải. Khảo sát thanh AB chuyển động song phẳng trong mặt phẳng thẳng đứng dưới tác dụng các ngoại lực : trọng lực $\vec{P}$, các phản lực $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_B$.

Phương trình vi phân chuyển động song phẳng của thanh có dạng :

$$M\ddot{x}_c = N_A, \tag{a}$$

$$M\ddot{y}_c = N_B - P, \tag{b}$$

$$J_c\,\ddot{\varphi} = N_B a\cos\varphi - N_A a\sin\varphi \tag{c}$$

Vì $\quad x_c = a\cos\varphi \ ; \ y_c = a\sin\varphi,$

nên $\quad \ddot{x}_c = -\,a\sin\varphi\ddot{\varphi} - a\cos\varphi\dot{\varphi}^2,$

$$\ddot{y}_c = a\cos\varphi\ddot{\varphi} - a\sin\varphi\dot{\varphi}^2.$$

Vậy $\quad N_A = -\,Ma(\sin\varphi\,\ddot{\varphi} + \cos\varphi\dot{\varphi}^2),$

$$N_B = P + Ma\,(\cos\varphi\ddot{\varphi} - \sin\varphi\dot{\varphi}^2) \tag{d}$$

Khi thay (d) vào (c) và chú ý rằng $J_c = \frac{Ma^2}{3}$, chúng ta có :

$$\bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{g}{a}\cos\varphi \qquad \text{(e)}$$

Bây giờ tích phân (e) với điều kiện đầu $\varphi(t_o) = \varphi_o$; $\dot{\varphi}(t_c) = 0$:

$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 = -3\frac{g}{a}(\sin\varphi - \sin\varphi_o).$$

Khi đầu mút A rời khỏi tường thì $N_A = 0$, tức là

$$Ma[\sin\varphi \frac{3}{2}\frac{g}{a}\cos\varphi + 3\frac{g}{a}(\sin\varphi - \sin\varphi_o)\cos\varphi] = 0.$$

Vì $\cos\varphi \neq 0$ nên

$$3\sin\varphi - 2\sin\varphi_o = 0.$$

Vậy đầu mút A rời khỏi tường tại vị trí

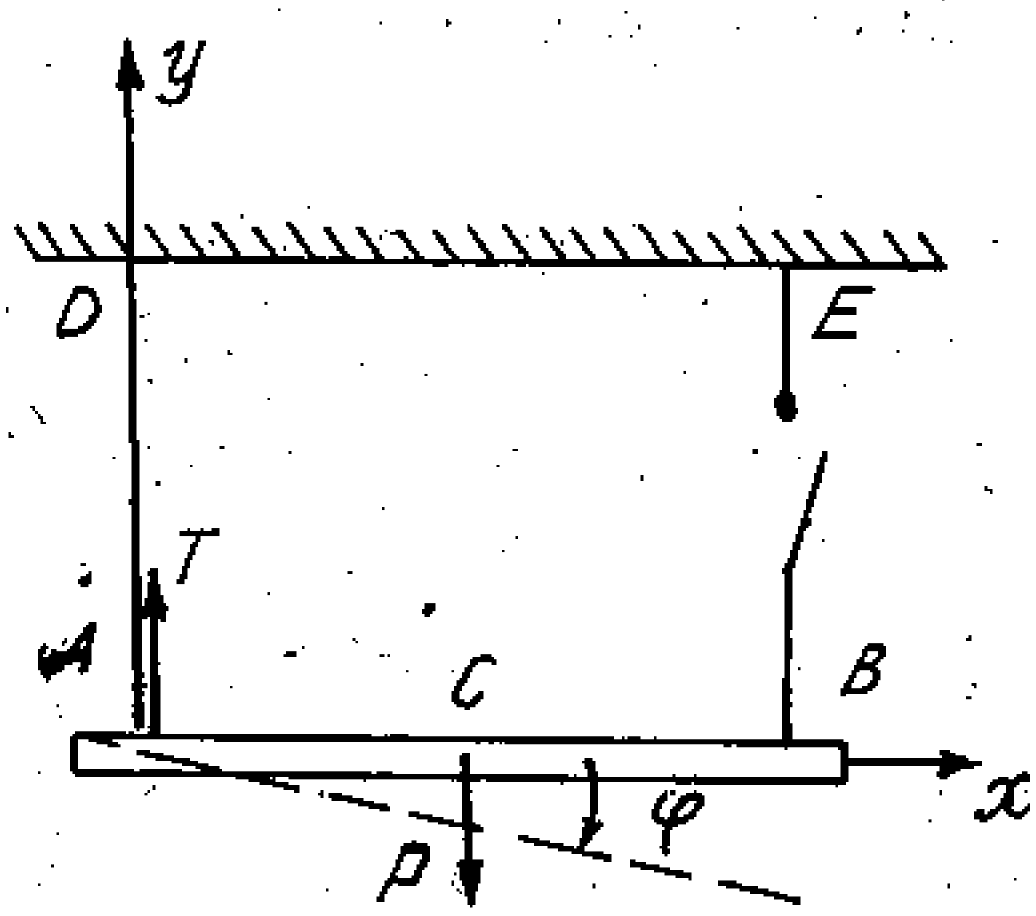
$$\varphi = \text{Arcsin}\left(\frac{2}{3}\sin\varphi_o\right).$$

Sau khi thanh rời khỏi tường, từ (a) ta nhận được :

$$\ddot{x}_c = 0 \; ; \; \dot{x}_c = \text{const},$$

tức sau khi rời tường thành phần nằm ngang của vận tốc khối tâm C của thanh không đổi, tức hình chiếu của khối tâm trên trục x chuyển động đều.

Thí dụ 6–6. Thanh thẳng AB đồng chất có chiều dài 2a, khối lượng m, được treo nằm ngang nhờ hai dây thẳng đứng AD và BE như hình 6–11. Tìm lực căng của một dây treo tại thời điểm ngay khi dây kia bị đứt.



HÌNH 6 –11

Bài giải. Giả thiết rằng sau khi một dây bị đứt dây kia vẫn căng, sự thay đổi phương của thanh AB, cũng như sự thay đổi khoảng cách từ trọng tâm của thanh đến dây không đứt là nhỏ và bỏ qua được.

Viết phương trình vi phân chuyển động (6–6) cho thanh AB ta có :

$$M\ddot{x}_c = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$M\,\ddot{y}_c = T - P, \qquad \text{(b)}$$

$$J_c\,\ddot{\varphi} = -\,Ta \qquad \text{(c)}$$

trong đó : $$J_c = \frac{Ma^2}{3}.$$

Dựa vào giả thiết nêu trên, chúng ta có:

$$y_c = a\varphi\,;\ \ddot{y}_c = a\ddot{\varphi}.$$

Các phương trình (b) và (c) bây giờ có dạng:

$$Ma\ddot{\varphi} = T - P\ ;\ \frac{Ma^2}{3}\ddot{\varphi} = -\,Ta.$$

Khi khử $\ddot{\varphi}$ giữa các phương trình vừa nhận được và giải ra, ta có

$$T = \frac{P}{4}.$$

6.3. HIỆU ỨNG CON QUAY

6.3.1. Cơ sở lý thuyết

a) Định nghĩa. Con quay là một vật rắn có trục đối xứng vật chất được gọi là trục đối xứng động lực và quay quanh trục đó với vận tốc góc lớn.

b) Giả thiết cơ bản của lý thuyết chuyển động gần đúng con quay. Giả thiết con quay quay quanh trục đối xứng động lực của mình với vận tốc góc quay riêng không đổi $\vec{\Omega}$ và cùng với trục này quay quanh một trục cố định qua điểm O nằm trên trục đối xứng động lực với vận tốc góc quay theo $\vec{\omega}$ (bằng tổng các vectơ vận tốc góc tiến động và chương động), trong đó (H.6-12)

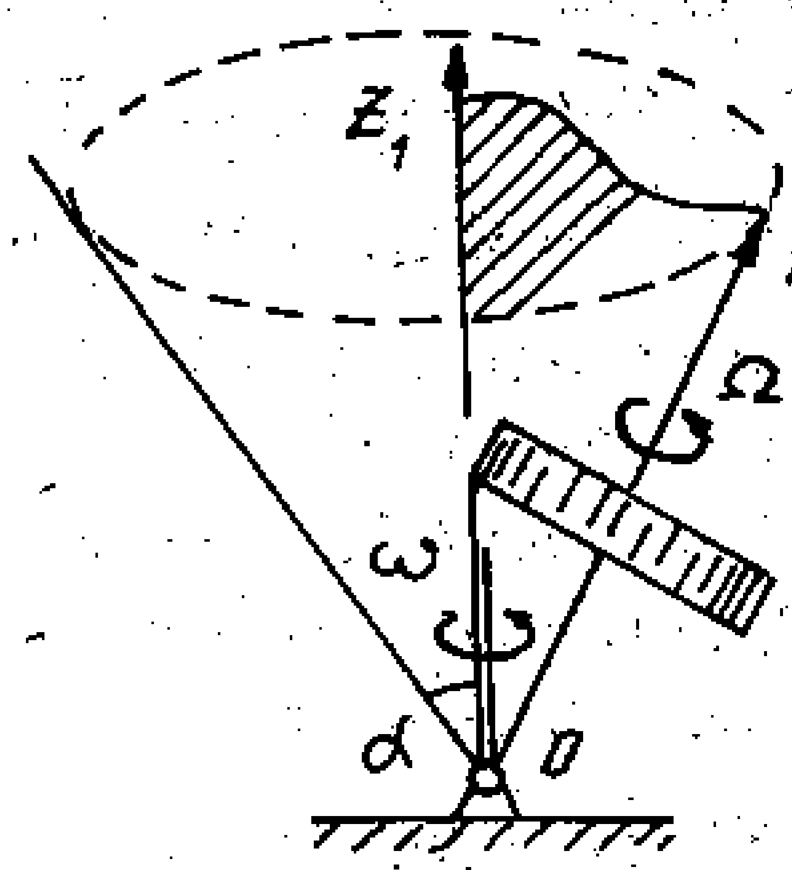
$$\Omega >> \omega$$

Gọi $\vec{\omega}_a$ là vận tốc góc tuyệt đối của con quay, ta có :

$$\vec{\omega}_a = \vec{\Omega} + \vec{\omega} \approx \vec{\Omega}.$$

Như vậy :

Có thể xem vận tốc góc tuyệt đối của con quay bằng vận tốc góc quay riêng và trục quay tức thời của con quay trùng với trục đối xứng động lực của nó.



HÌNH 6-12

c) Phương trình cơ bản của con quay quay nhanh. Dưới tác dụng của các ngoại lực $\vec{F}_k$ con quay quay nhanh theo phương trình.

$$J\vec{\omega} \wedge \vec{\Omega} = \sum \vec{m}_o(\vec{F}_k)$$

gọi là phương trình cơ bản của con quay quay nhanh, trong đó J là mômen quán tính của con quay đối với trục đối xứng động lực của nó.

d) Mômen con quay, được ký hiệu $\vec{M}_{cq}$, là mômen chính của hệ lực quán tính của con quay đối với điểm cố định O. Dễ dàng nhận được.

$$\vec{M}_{cq} = - J\vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}$$

Chính mômen con quay gây nên áp lực động lực lên ổ đỡ mang trục quay đối xứng động lực của con quay và gây nên nhiều hiệu ứng rất quan trọng đối với kỹ thuật gọi là các hiệu ứng con quay.

Với giá trị rất lớn của vận tốc góc quay riêng Ω, mômen con quay có giá trị rất lớn và có thể gây nên sự phá hỏng các ổ đỡ của trục quay con quay quay nhanh.

Đối với con quay tiến động đều (Ω = const, ω = const, $(\vec{\Omega}, \vec{\omega})$ = const ta có:

$$M_{cq} = J\omega\Omega\sin\alpha = \text{const}$$

e) Hai bài toán cơ bản của lý thuyết gần đúng con quay :

Bài toán 1. Biết chuyển động con quay $(\vec{\omega})$, tìm mômen lực tác dụng lên con quay.

Bài toán 2. Biết lực tác dụng hai con quay $(\sum \vec{m}_o C\vec{F}_k)$, tìm chuyển động con quay $(\vec{\omega})$.

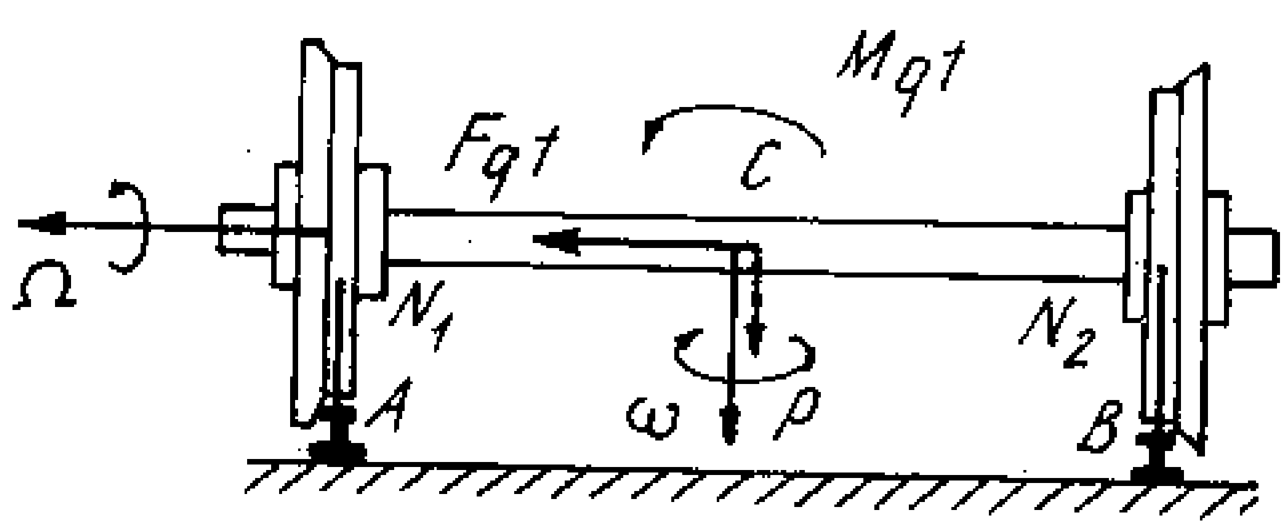
6.3.2. Hướng dẫn áp dụng

Những bài toán về hiệu ứng con quay thường được chú ý đến các bài toán sau :

- Tìm phản lực động lực do hiệu ứng con quay gây nên.
- Tính bảo toàn phương của trục quay riêng của con quay quay theo quán tính.

6.3.3. Bài giải mẫu

Thí dụ 6–7. Một trục mang một cặp bánh xe tàu hỏa có khối lượng m = 1400kg, có bán kính quán tính đối với trục đối xứng động lực của nó là $\rho^2 = 0{,}55a^2$, trong đó a = 75cm là bán kính vành lăn của bánh xe. Đoàn tàu chạy với vận tốc v = 20m/s trên một cung đường vòng bán kính R = 200m nằm trong mặt phẳng ngang. Khoảng cách xuyên tâm giữa hai thanh ray là l = 1,5m.



HÌNH 6–13

Tìm áp lực pháp tuyến của hai bánh xe lên hai mặt ray (H.6–13).

Bài giải. Khảo sát chuyển động của trục mang hai bánh xe, bỏ qua sự khác nhau trong chuyển động giữa hai bánh xe đó. Rõ ràng là chuyển động quay riêng quanh trục đối xứng động lực của nó có tốc độ lớn hơn nhiều so với tốc độ góc của chuyển động quay theo là chuyển động của chính trục đó quay quanh trục quay cố định thẳng đứng qua tâm của đường vòng. Cụ thể là :

$$\Omega = \frac{v}{a} = 26\frac{2}{3}\ s^{-1},$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{10}\ s^{-1}.$$

Do đó ta có thể xem vật khảo sát như là một con quay quay nhanh, chuyển động tiến động đều.

Để tính áp lực động lực của các bánh xe lên hai mặt ray, áp dụng phương pháp tĩnh– động lực hình học ta viết các phương trình cân bằng cho hệ lực :

$$(\vec{P}, \vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{F}^{qt}, \vec{M}_o^{qt}),$$

trong đó $\vec{F}^{qt} = m\vec{a}_c$, $\vec{M}_o^{qt} = \vec{M}_{cq} = -J(\vec{\omega} \wedge \vec{\Omega})$.

Bằng cách đó ta nhận được

$$\sum Y = -P + N_1 + N_2 = 0,$$

$$\sum \overline{m}_B(\vec{F}_k) = M_{cq} + aF^{qt} + P\frac{l}{2} - N_1 l = 0,$$

trong đó : $$M_{cq} = J\omega \,.\, \Omega = \frac{m\rho^2 v^2}{aR},$$

$$F^{qt} = ma_c = \frac{mv^2}{R}$$

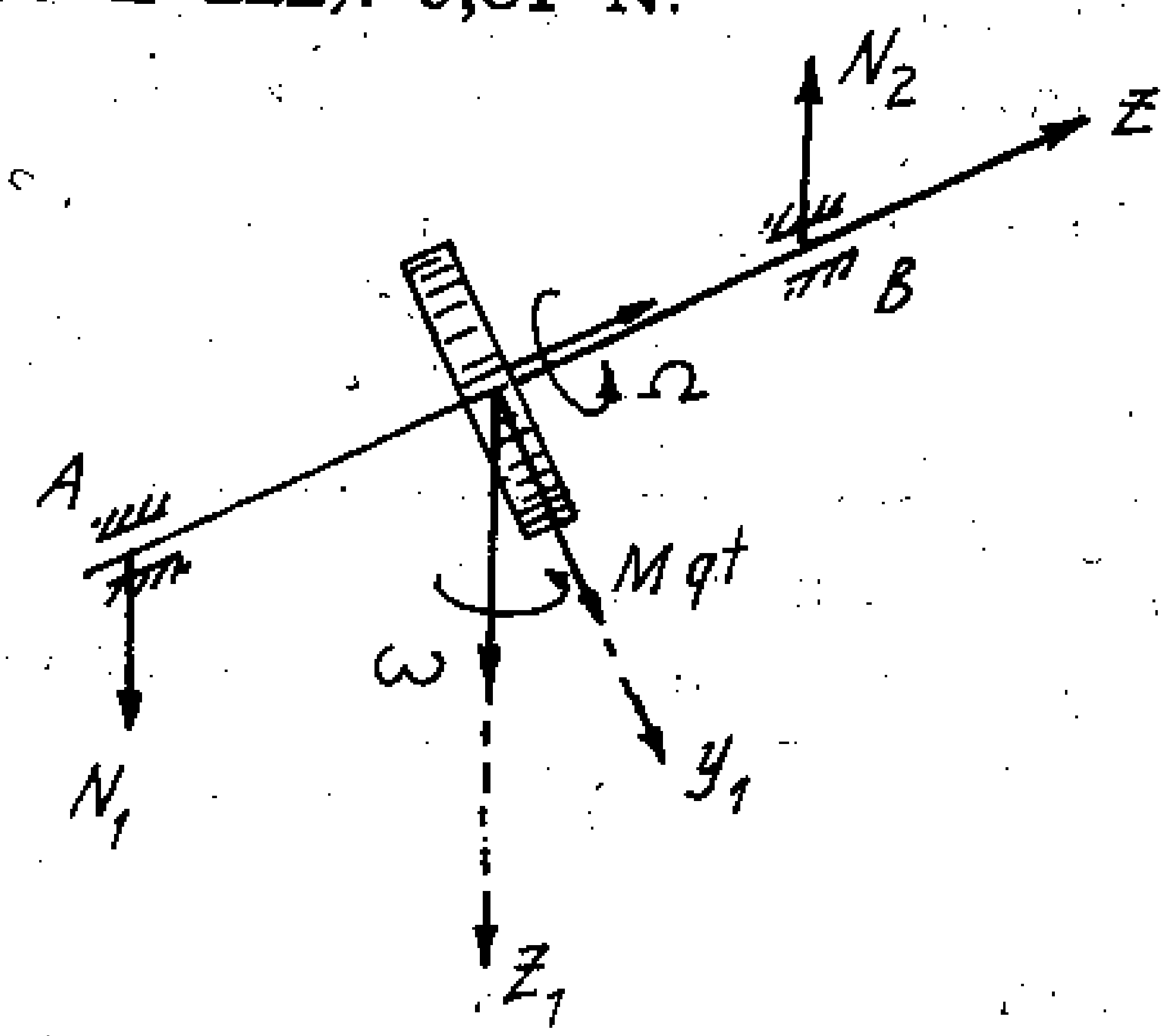
Giải ra ta có kết quả :

$$N_{1,2} = \frac{mg}{2} \pm \frac{mav^2}{lR}\left(1 + \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

Thay giá trị bằng số ta có :

$$N_{1,2} = (700 \pm 222).\ 9,81\ N.$$

Thí dụ 6–8. Một tuabin quay nhanh đặt trên tàu thủy có trục quay song song với đường tim của con tàu. Tốc độ quay của tuabin là $n = 3000$v/ph, khối lượng của rôto là $m = 3500$ kg và bán kính quán tính của nó đối với trục quay là $\rho = 0,6$m. Tàu cưỡi sóng nên bị chòng chành ngang với biên độ $\varphi_o = 9^o$ và với



HÌNH 6 – 14

chu kỳ $T = 15s$ quanh trục nằm ngang vuông góc với trục rôto của tuabin. Tìm áp lực động lực của rôto lên ổ đỡ, do hiệu ứng con quay gây ra, biết rằng $AB = l = 2m$. Bỏ qua ma sát (H. 6–14).

Bài giải. Khảo sát chuyển động của rôto, vận tốc góc quay riêng của nó là :

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = 100\pi s^{-1}$$

Trong chuyển động tiến động con tàu dao động quanh trục y theo luật

$$\varphi = \varphi_o \cos(kt + \alpha),$$

trong đó $$\varphi_o = 9^o = \frac{\pi}{20} \; ; \; k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{15},$$

tức là : $$\varphi = \frac{\pi}{20} \cos\left(\frac{2\pi}{15} t + \alpha\right).$$

Từ đây suy ra vận tốc góc quay theo :

$$\omega = \dot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{150} \sin\left(\frac{2\pi}{15} t + \alpha\right)$$

và $$\omega_{max} = \frac{\pi^2}{150} \approx \frac{1}{15} s^{-1}.$$

Rõ ràng $\Omega >> \omega_{max}$ rất nhiều lần, vậy ta có thể áp dụng lý thuyết gần đúng của con quay để giải quyết bài toán.

Trước hết hãy xác định mômen con quay :

$$\vec{M}_{cq} = -J_z \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}$$

Trên hình vẽ ta thấy $\vec{\omega}$ nằm theo trục z_1, $\vec{\Omega}$ nằm theo trục z nên $\vec{M}_{cq}$ phải nằm theo trục y_1. Ta tính được hình chiếu lên trục y_1 của mômen con quay bằng :

$$M_{y1} = J_z (\omega_{z1}\Omega_z - \omega_z . \Omega_{z1}),$$

trong đó : $$\omega_{z1} = \dot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{150} \sin\left(\frac{2\pi}{15} t + \alpha\right)$$

$$\omega_z = 0$$
$$\Omega_z = \Omega = 100\pi s^{-1},$$
$$\Omega_{z1} = 0.$$

Vậy $\qquad M_{y1} = -m\rho^2\,\omega_{z1}\,\Omega_z$ và $\vec{M}_{cq} = \vec{M}_{y1}$.

Điều đó có nghĩa là ngẫu lực quán tính do hiệu ứng con quay gây ra nằm trong mặt phẳng zz_1 và nó làm xuất hiện các áp lực động lực $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ lên hai gối đỡ A, B theo hướng trục z_1. Từ đó suy ra :

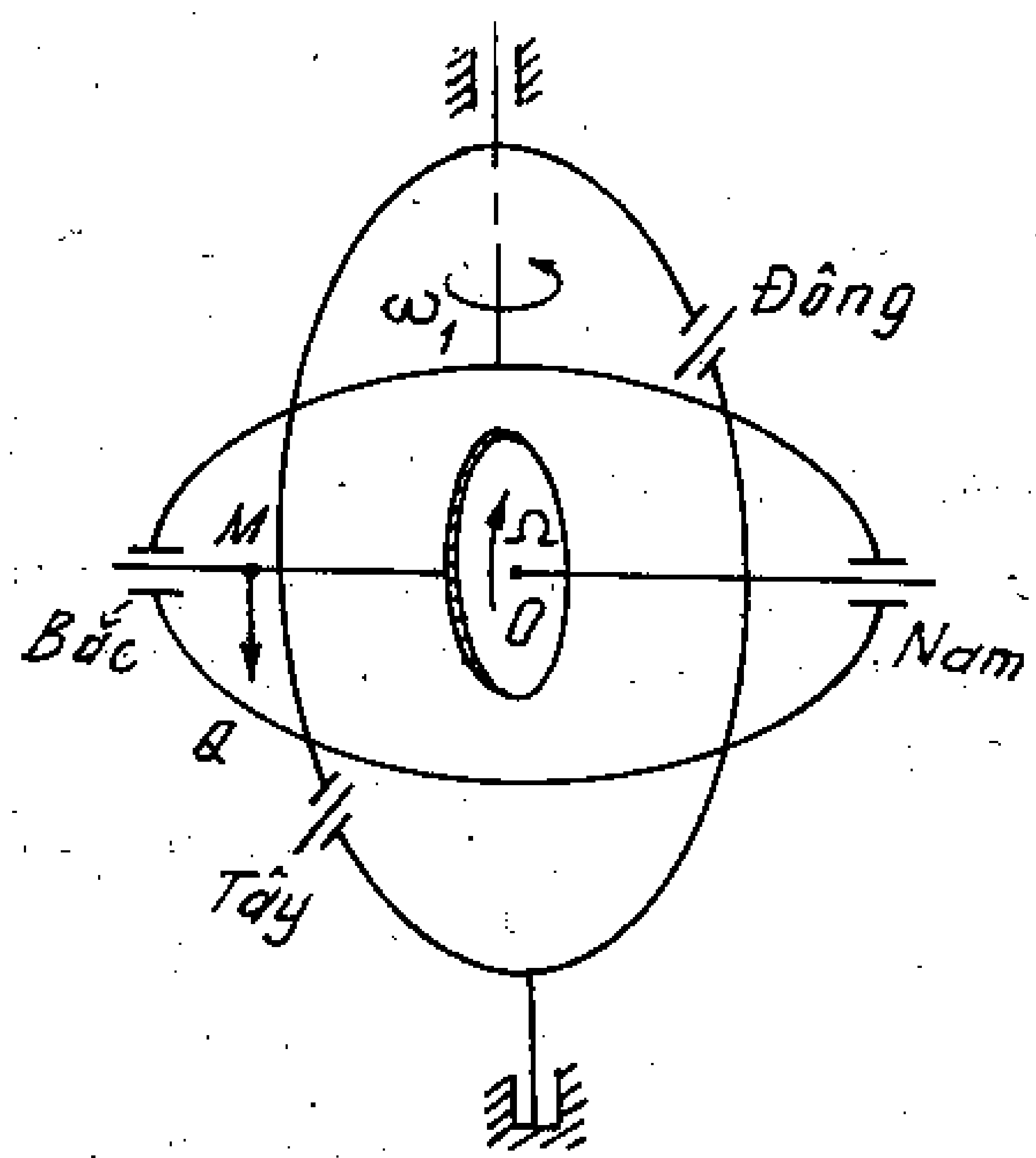
$$N_{1z1} = -N_{2z1} = -\frac{M_{y1}}{AB}\, m\,\frac{\rho^2}{l}\,\omega_{z1}\,\Omega_z$$

Sau khi thay các trị số đã cho trong đề ra tính được

$$N_1 = -N_2 = \frac{m\rho^2}{l}\left[-\frac{\pi^2}{150}\sin\left(\frac{2\pi}{15}t + \alpha\right)\right]100\pi =$$
$$= -\frac{2}{3}\,\frac{m\rho^2}{l}\,\pi^3\sin\left(\frac{2\pi}{15}t + \alpha\right) = -12.936\,\sin\left(\frac{2\pi}{15}t + \alpha\right)$$

Như thế khi tàu chòng chành ngang thì các ổ đỡ tuabin phải chịu áp lực động lực thay đổi tuần hoàn với giá trị cực đại khá lớn.

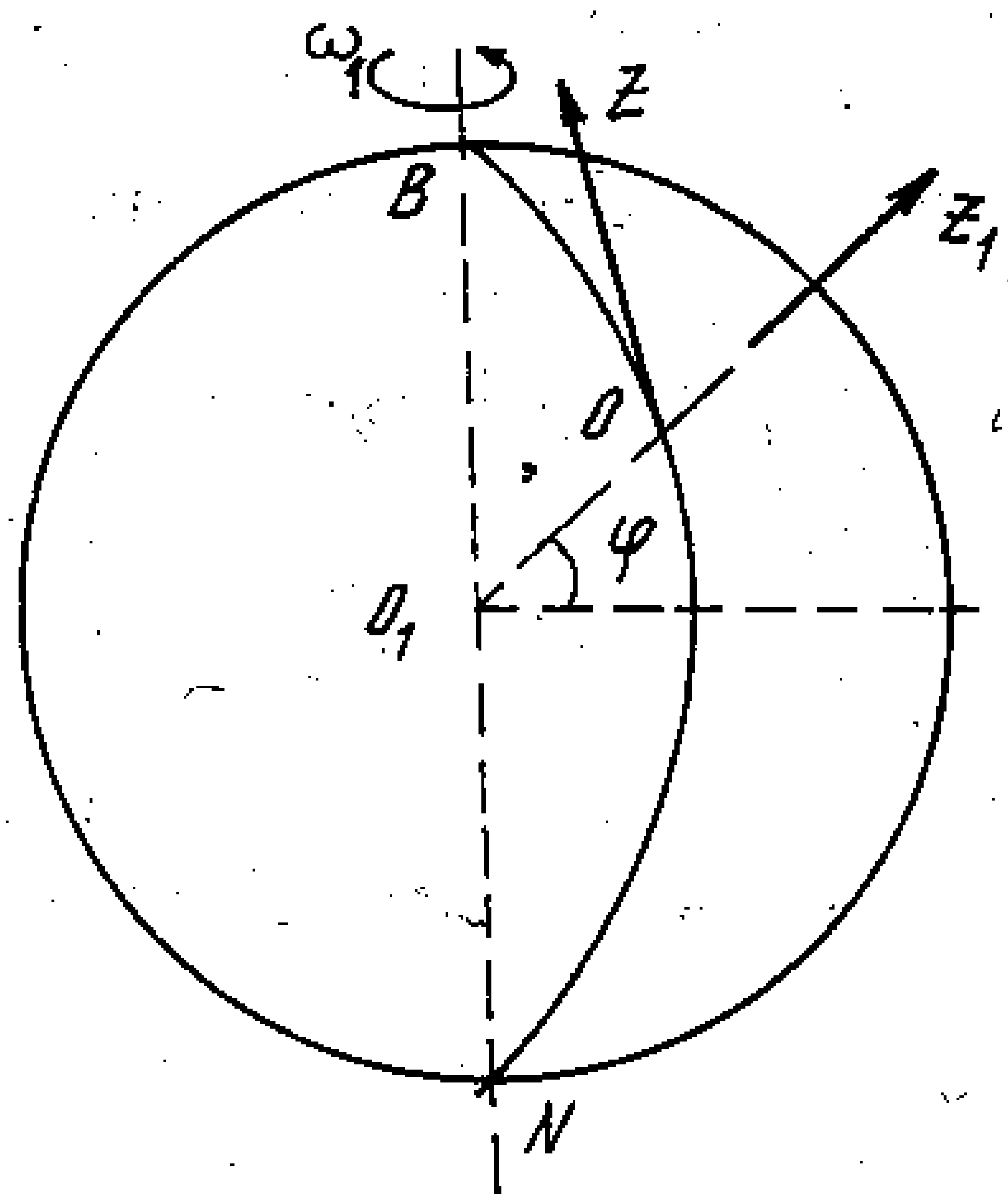
Thí dụ 6–9. Một con quay cân bằng được đặt bằng giá treo Cácđăng ở một địa điểm thuộc bắc bán cầu có vĩ độ φ. Trục rôto được đặt nằm ngang trong mặt phẳng kinh tuyến tại địa điểm đó. Muốn cho trục rôto luôn luôn ở trong mặt phẳng kinh tuyến của địa phương (do quả đất quay) ta treo vào vành trong của giá treo và trên đường trục của rôto đối trọng Q, nằm cách tâm O của con quay một đoạn



HÌNH 6–15

bằng a. Tốc độ quay riêng Ω của rôto lớn gấp nhiều lần tốc độ quay riêng ω_1 của quả đất, mômen quán tính của rôto đối với trục đối xứng động lực của nó bằng J. Bỏ qua ma sát và khối lượng của các vành giá treo. Tìm khối lượng cần thiết của đối trọng (H. 6–15).

Bài giải. Đầu tiên nhận xét rằng con quay quay nhanh và được treo cân bằng trong giá Cácđăng thì trục đối xứng động lực O_z của nó giữ một hướng không đổi trong không gian cố định nếu ban đầu trục đó được giữ đứng yên (bảo toàn mômen động lượng).



HÌNH 6–16

Nếu tại một địa điểm của bắc bán cầu có vĩ độ φ ta đặt trục rôto nằm trong mặt phẳng kinh tuyến theo phương nam – bắc (N–B) thì do mặt phẳng kinh tuyến quay quanh trục (N–B) với vận tốc ω_1 (vận tốc góc của quả đất quay quanh trục N–B) nên khi đứng trên mặt kinh tuyến qua địa điểm đặt trục rôto ta sẽ thấy trục của con quay quay theo chiều ngược lại quanh trục O_{z1} với vận tốc góc (H.4–16)

$$\omega_2 = \omega_1 \sin \varphi,$$

(hiện tượng này tương tự hiện tượng của con lắc Phucô).

Như vậy trục rôto quay nhanh quanh trục quay riêng với vận tốc góc Ω và trục lại đảo quanh trục Oz_1 với vận tốc góc $\omega << \Omega$.

Trong chuyển động đó sẽ xuất hiện mômen con quay.

$$\vec{M}_{cq} = -J(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{\Omega}) \begin{cases} \text{Phương vuông góc mặt phẳng } (\vec{\omega}_2, \vec{\Omega}): \\ \text{phương đông – tây, chiều hướng từ tây} \\ \text{sang đông.} \\ \text{Giá trị } M_{cq} = \div J\omega_2\Omega = J\omega_1\sin\varphi.\Omega. \end{cases}$$

Như đã biết mômen con quay là mômen chính của các lực quán tính của rôto, tức là mômen phản lực do rôto tác dụng lên các ổ đỡ. Vì vậy các ổ đỡ tác dụng lại lên trục rôto ngẫu lực có mômen cùng phương cùng giá trị nhưng ngược chiều với mômen con quay, chính mômen đó làm cho trục quay riêng của rôto không thể bảo toàn phương của nó. Để trục rôto bảo toàn phương cần đặt một đối trọng Q triệt tiêu mômen ngẫu lực tác dụng lên rôto, tức lực Q gây đối với điểm O một mômen có cùng phương, cùng chiều và cùng giá trị với mômen con quay :

$$\vec{m}_o(\vec{Q}) = -J(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{\Omega}).$$

Như vậy cần treo đối trọng Q tại điểm M ở bắc bán cầu trên trục nam– bắc và cách O một đoạn :

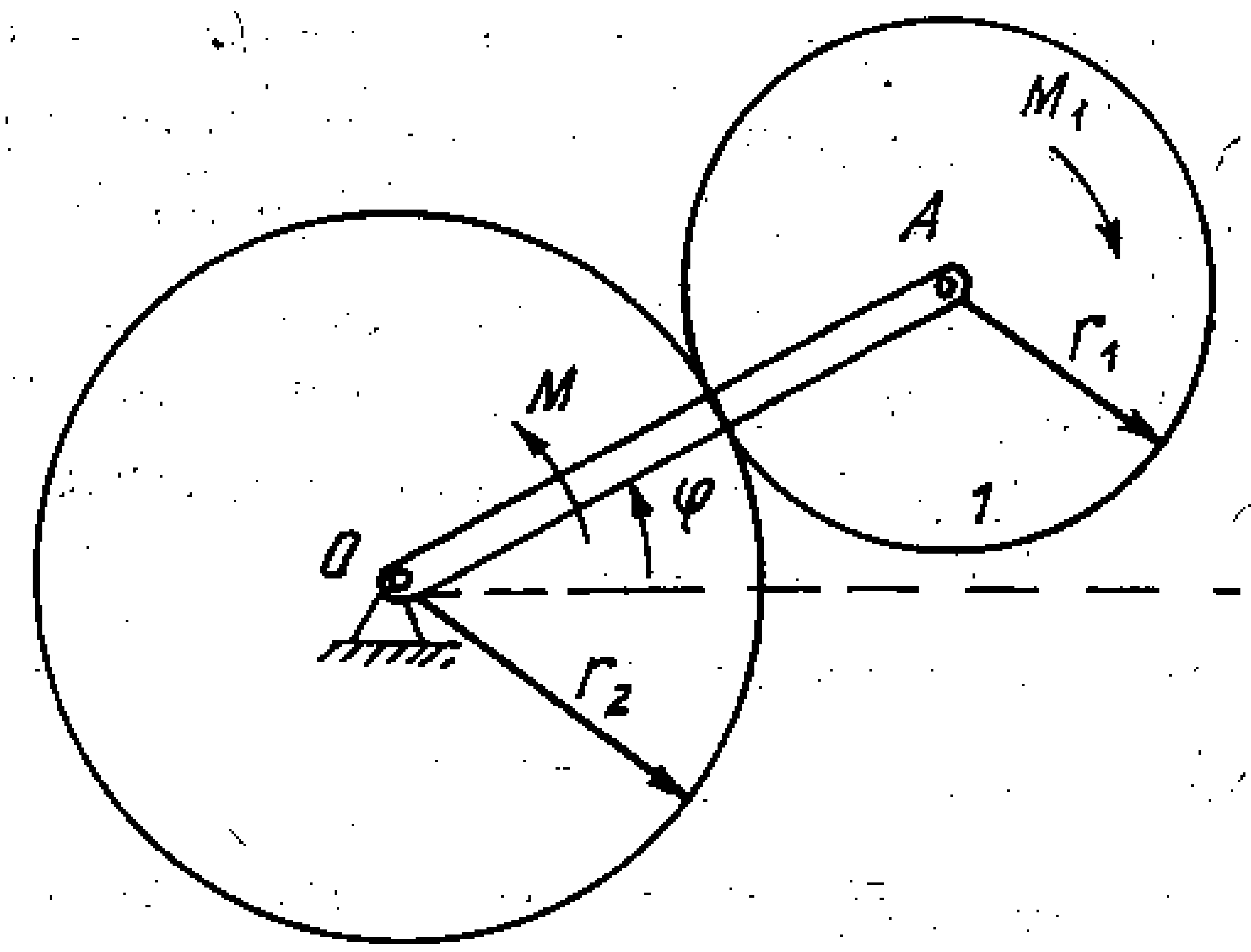
$$a = \frac{J\omega_1\Omega\sin\varphi}{Q}$$

Chú ý : Cơ cấu vừa được xét là mô hình của địa bàn con quay để giữ phương ngang và hướng nam – bắc trên các máy bay và tàu đi biển.

6.4. BÀI TOÁN TỔNG HỢP

Trong phần này ta khảo sát bài toán thuận và ngược của hệ các vật rắn hoặc bài toán của một vật rắn mà chuyển động của nó chuyển qua nhiều dạng chuyển động do hiện tượng mất (hoặc thêm) các liên kết. Để giải các bài toán trên lẽ dĩ nhiên có thể sử dụng các phương pháp và kết quả đã nêu cho bài toán một vật rắn nhờ tiên đề giải phóng liên kết hoặc viết phương trình chuyển động cho từng giai đoạn (điều kiện cuối của giai đoạn trước là điều kiện đầu của giai đoạn tiếp theo). Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể giải các loại bài toán này một cách nhanh gọn nhờ sử dụng tổng hợp các định lý được thiết lập trong các chương trước đây. Vì vậy các bài toán này còn được gọi là các bài toán tổng hợp.

Thí dụ 6–10. Một cơ cấu hành tinh được đặt trong mặt phẳng nằm ngang chuyển động từ trạng thái đứng yên do chịu



HÌNH 6-17

tác dụng của một ngẫu lực phát động có mômen không đổi, bằng M đặt vào tay quay OA. Cho biết bánh răng 2 cố định có bán kính r_2, bánh răng 1 là một đĩa tròn đồng chất có bán kính r_1 và khối lượng m_1, chịu tác dụng của một ngẫu lực cản có mômen M_1 không đổi. Tay quay được coi là một thanh đồng chất, có khối lượng là m. Bỏ qua ma sát (H.6-17).

1) Xác định vận tốc góc tay quay OA hàm theo góc quay của nó.

2) Tìm phản lực tại A và lực ăn khớp giữa hai bánh răng, biết rằng góc ăn khớp giữa chúng là α.

Bài giải.

1. Tìm biểu thức vận tốc góc $\omega = \omega\ (\varphi)$.

Khảo sát cơ hệ gồm :

– Tay quay OA quay quanh trục O cố định (vuông góc với mặt phẳng hình vẽ).

Bánh răng 1 chuyển động song phẳng trong mặt phẳng hình vẽ.

Các lực tác dụng lên cơ hệ có sinh công trong chuyển động là hai ngẫu lực có mômen M và M_1 không đổi, có thể tính được công hữu hạn của chúng.

Để tìm biểu thức $\omega = \omega\ (\varphi)$ ta áp dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn :

$$T - T_o = \sum A_k \qquad \text{(a)}$$

Ban đầu hệ đứng yên nên $T_o = 0$

Bây giờ ta tính động năng của hệ ở thời điểm bất kỳ :

$$T = T_{oA} + T_1 \qquad (b)$$

Gọi ω là vận tốc góc của tay quay OA ta có :

$$T_{oA} = J \cdot \frac{\omega^2}{2}; \text{trong đó } J = \frac{m(r_1 + r_2)^2}{3}.$$

tức là :
$$T_{0A} = \frac{m(r_1 + r_2)^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Gọi v_A, là vận tốc điểm A, ω_1 là vận tốc góc bánh 1, ta có :

$$T_I = \frac{J_A}{2}\omega_1^2 + \frac{m_1 v_A^2}{2},$$

trong đó $J_A = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$ nên :

$$T_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{m_1 v_A^2}{2}.$$

Vậy biểu thức động năng của toàn hệ sẽ là :

$$T = \frac{m(r_1 + r_2)^2}{3} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{m_1 r_1^2}{2} \cdot \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{m_1 v_A^2}{2}.$$

Ta có thể tính được dễ dàng :

$$\omega_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_1}\omega; \; v_A = (r_1 + r_2)\omega.$$

Vì vậy biểu thức động năng toàn hệ có thể viết trong dạng sau :

$$T = \frac{1}{6}(2m + 9m_1)(r_1 + r_2)^2 \frac{\omega^2}{2}. \qquad (b)$$

Tiếp theo ta tính biểu thức $\sum A$ theo góc quay của tay quay OA. Trong chuyển động của cơ hệ chỉ có hai ngẫu lực mômen M và M_1 sinh công. Ta tính công của hai ngẫu lực đó :

$$A = M\varphi - M_1\varphi_1, \qquad (c)$$

trong đó φ_1 là góc quay được của bánh 1 khi tay quay OA quay được một góc φ. Từ quan hệ động học vừa được tìm trên, ta suy ra :

$$\varphi_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\varphi,$$

và thay nó vào (c) ta có :

$$\sum A_k = \left(M - M_1\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\varphi \; ; \qquad (c')$$

Thay (b), (c) vào (a) ta được:

$$\frac{1}{6}(2m + 9m_1)(r_1 + r_2)^2\frac{\omega^2}{2} = \left(M - M_1\frac{r_1 + r_2}{r_2}\right)\varphi. \qquad (d)$$

Rút ra:

$$\omega = \sqrt{\frac{12[Mr_2 - M_1(r_1 + r_2)]\varphi}{r_2(r_1 + r_2)^2(2m + 9m_1)}}, \qquad (e)$$

Từ đó dễ dàng tìm được

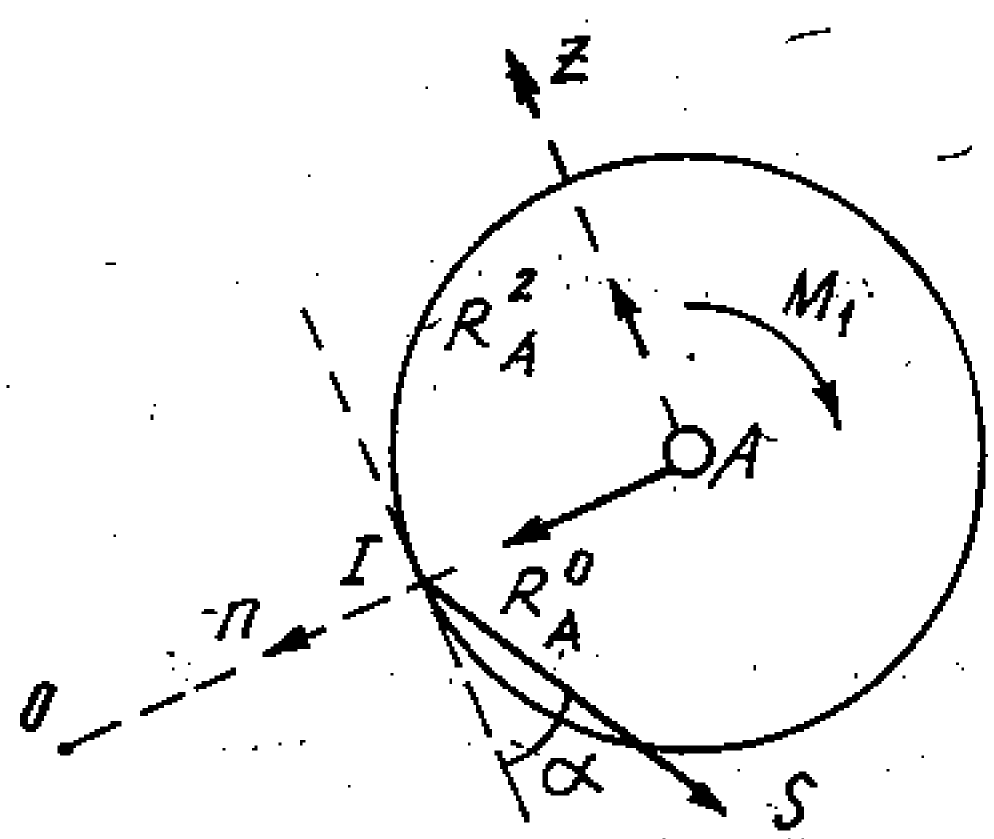
$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\varpi}{d\varphi}\varpi = \frac{6[Mr_2 - M_1(r_1 + r_2)]}{r_1(r_1 + r_2)^2(2m + 9m_1)}. \qquad (g)$$

Nhận xét rằng kết quả này cũng có thể tìm được bằng cách áp dụng trực tiếp định lý biến thiên động năng dạng đạo hàm (2-51).

2. Tìm lực ăn khớp $\vec{S}$ và phản lực $\vec{R}_A$ (H. 6-18).

Khảo sát bánh răng 1 chuyển động song phẳng dưới tác dụng của hệ lực

$$(\vec{S}, \vec{R}_A, \vec{M}_1),$$



HÌNH 6-18

trong đó $\vec{S}$ là lực ăn khớp tại I ; $\vec{R}_A$ – phản lực tại A do tay quay tác dụng lên bánh răng 1.

Nhận xét rằng quy luật chuyển động của bánh răng 1 đã biết : gia tốc khối tâm A của bánh răng 1 gồm hai thành phần : $\vec{a}_A^t$ có phương, chiều cùng với $\vec{v}_A$ và có giá trị $a_A^t = (r_1 + r_2)\varepsilon_1$, còn $\vec{a}_A^n$ có phương chiều hướng từ A đến O và có giá trị $a_A^n = (r_1 + r_2)\omega^2$.

Ngoài ra, từ quan hệ động học :

$$\bar{\omega}_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_1}\bar{\omega},$$

suy ra :
$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{r_1 + r_2}{r_1}\bar{\varepsilon}.$$

Do đó việc tìm lực ăn khớp $\vec{S}$ và phản lực $\vec{R}_A$ là bài toán thuận đối với bánh răng 1. Muốn thế ta viết phương trình vi phân chuyển động đối với vật song phẳng bánh răng 1 trong dạng (6–7) (do cơ cấu đặt trong mặt phẳng ngang nên ta chỉ lập phương trình vi phân chuyển động trong mặt phẳng của chuyển động song phẳng):

$$m_1\bar{a}_A^t = -S\cos\alpha + \bar{R}_A^t,$$

$$m_1a_A^n = -S\sin\alpha + R_A^n,$$

$$J_A\bar{\varepsilon} = Sr_1\cos\alpha - M_1,$$

trong đó:
$$J_A = \frac{m_1r_1^2}{2}.$$

Từ đó dễ dàng nhận được

$$S = \left[\frac{m_1r_1(r_1 + r_2)}{2}\varepsilon + M_1\right]\frac{1}{\cos\alpha};$$

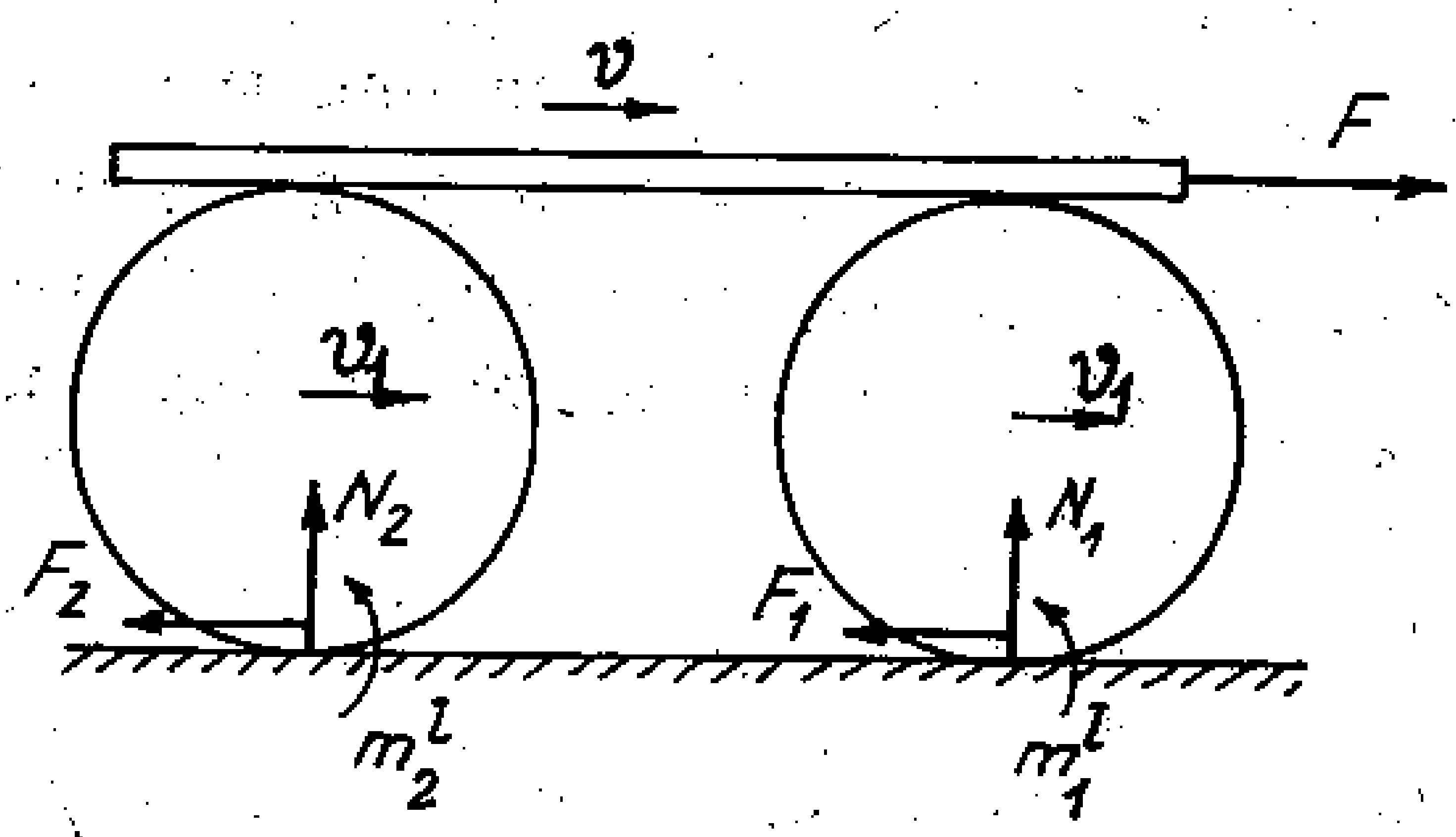
$$R_A^t = m_1(r_1 + r_2)(2 + \frac{r_2}{r_1})\varepsilon + \frac{M_1}{r_1};$$

$$R_A^n = m_1(r_1 + r_2)(\omega^2 + \frac{\varepsilon}{2}tg\alpha) + \frac{M_1}{r_1}tg\alpha,$$

trong đó ε, ω được tính theo các biểu thức (e) và (g).

Thí dụ 6-11. Một tấm nặng có khối lượng m, được đặt nằm ngang trên hai con lăn, mỗi con lăn là một khối trụ tròn xoay đồng chất có bán kính r và khối lượng m_1. Tác dụng vào tấm một lực $\vec{F}$ nằm ngang có cường độ không đổi. Hệ số ma sát lăn giữa con lăn với mặt nền là k. Các con lăn không trượt trên nền và tấm nặng cũng không trượt đối với các con lăn. Tìm gia tốc của tấm và tìm lực ma sát trượt tổng cộng do mặt nền tác dụng lên các con lăn. Bỏ qua ma sát lăn giữa tấm và các con lăn.

Bài giải.



HÌNH 6-19

1- Tìm gia tốc của tấm. Khảo sát cơ hệ gồm tấm và hai con lăn. Tấm chuyển động tịnh tiến, các con lăn chuyển động song phẳng (H. 6-19).

Các lực tác dụng lên cơ hệ sinh công gồm có lực $\vec{F}$, các ngẫu lực ma sát lăn do nền tác dụng lên các con lăn, chúng có mômen lần lượt là $m_1^l = kN_1$, $m_2^l = kN_2$.

Để tìm gia tốc của tấm ta có thể áp dụng định lý biến thiên động năng dạng đạo hàm :

$$\frac{dT}{dt} = \sum W_k,$$

trong đó : T là động năng của hệ gồm động năng của tấm và hai con lăn :

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2}\right).$$

Vì không có hiện tượng trượt giữa con lăn và nền, giữa con lăn và tấm nên :

$$v_1 = \frac{1}{2}v \; ; \; \omega_1 = \frac{v_1}{r} = \frac{v}{2r},$$

trong đó v là vận tốc tấm, v_1 – vận tốc của tâm con lăn, ω_1 – vận tốc gốc của con lăn.

Do đó : $$T = \frac{4m + 3m_1}{4}\frac{v^2}{2}.$$

Bây giờ tính tổng công suất của lực $\vec{F}$ và các ngẫu lực ma sát lăn.

$$\sum W_k = F.v - (m_1^l + m_2^l)\omega = F.v - k(N_1 + N_2)\omega =$$

$$= F.v - k(P_1 + P_2 + P_3)\omega = \left[F - \frac{k}{r}(P_1 + P_2 + P)\right]v.$$

Định lý biến thiên động năng dạng đạo hàm cho ta :

$$\frac{4m + 3m_1}{4}va = \left[F - \frac{k}{r}(P_1 + P_2 + P)\right]v.$$

Vì cơ hệ chuyển động nên $v \neq 0$. Vậy:

$$a = 4\frac{F - \frac{k}{r}(P_1 + P_2 + P)}{4m + 3m_1} = 4\frac{F - \frac{k}{r}(m + 2m_1)g}{4m + 3m_1}$$

2– Tìm lực ma sát tổng cộng do nền tác dụng lên các con lăn. Viết phương trình chuyển động khối tâm cơ hệ ta có

$$m\vec{a} + 2m_1\vec{a_1} = \vec{F} + \sum \vec{F}_{ms} + \sum \vec{P}_k + \sum \vec{N}_k.$$

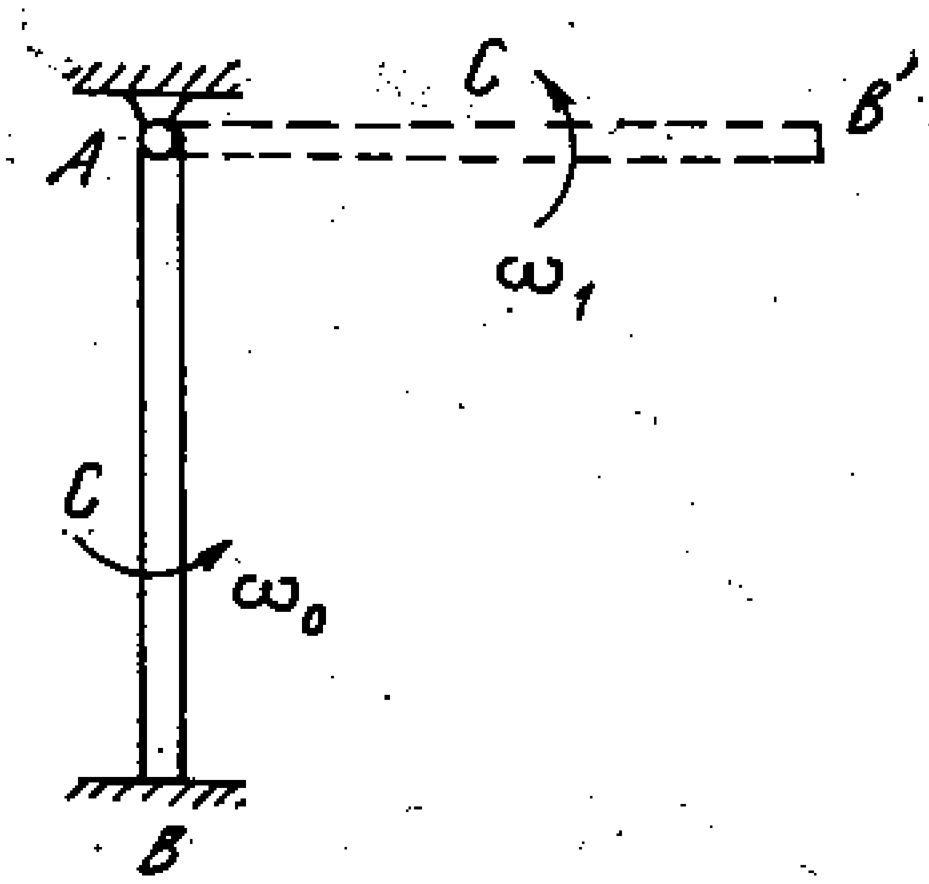
Khi chiếu phương trình vectơ nhận được lên trục nằm ngang ta được

$$ma + 2m_1a_1 = F - \sum F_{ms}$$

Chú ý rằng : $a = 2a_1$, ta tìm được

$$\sum F_{ms} = F - (m + m_1)a =$$

$$= \frac{3m + 2m_1}{4m + 3m_1}F - \frac{m + m_1}{4m + 3m_1}\frac{k}{r}(m + 2m_1)g.$$



HÌNH 6-20

Thí dụ 6-12. Một thanh đồng chất AB có chiều dài 2a, quay được quanh trục A cố định còn đầu B tựa trên sàn. Truyền cho thanh vận tốc góc ban đầu ω_o và khi thanh nằm ở vị trí ngang liên kết tại A bị mất. Tiếp theo thanh chuyển động tự do trong mặt phẳng thẳng đứng dưới tác dụng của trọng lực.

Tìm giá trị của vận tốc góc đầu ω_o của thanh để khi thanh rơi chạm vào sàn thanh ở vị trí thẳng đứng (H. 6-20).

Bài giải. Chuyển động của thanh gồm hai giai đoạn.

Giai đoạn đầu : Thanh từ vị trí thẳng đứng được truyền vận tốc góc ω_o, quay quanh trục cố định qua A và kết thúc khi thanh nằm ở vị trí nằm ngang và liên kết tại A bị mất.

Giai đoạn thứ hai : Liên kết tại A bị mất và thanh chuyển động song phẳng.

Chú ý rằng điều kiện đầu của giai đoạn thứ hai chính là điều kiện cuối của giai đoạn đầu.

Để tìm điều kiện cuối của giai đoạn đầu chúng ta sử dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn

$$T - T_o = \sum A_k,$$

nó có dạng :

$$\frac{1}{2} J_A (\omega_1^2 - \omega_o^2) = -Pa,$$

trong đó ω_1 là vận tốc góc của thanh khi nó quay đến vị trí ngang, J_A là momen quán tính của thanh đối với trục qua A:

$$J_A = \frac{4}{3} Ma^2$$

Từ đó ta tìm được :

$$\omega_1^2 = \omega_o^2 - \frac{3}{2}\frac{g}{a} \qquad \text{(a)}$$

Trong giai đoạn thứ hai thanh chuyển động song phẳng, phương trình chuyển động của nó theo (6–6) có dạng sau :

$$M\ddot{x}_C = 0 \; ; \; M\ddot{y}_C = -Mg \; ; \; J_C\ddot{\varphi} = 0$$

với điều kiện đầu $x_C^o = a$; $\dot{x}_C^o = 0$; $y_C^o = 0$; $\dot{y}_C^o = a\omega_1$; $\varphi^o = 0$; $\dot{\varphi}^o = \omega_1$

Khi tích phân ta nhận được :

$$x_C = a \; ; \; y_C = -g\frac{t^2}{2} + a\omega_1 t$$

$$\varphi = \omega_1 t$$

Để khi thanh rơi chạm vào sàn ở vị trí thẳng đứng, các điều kiện sau phải thỏa mãn :

$$y_C = a \; ; \; \varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \; ; \; k = 0, 1, 2, ...$$

Vậy ta có

$$-g\frac{t^2}{2} + a\omega_1 t = a \; ; \; (2k + 1)\frac{\pi}{2} = \omega_1 t$$

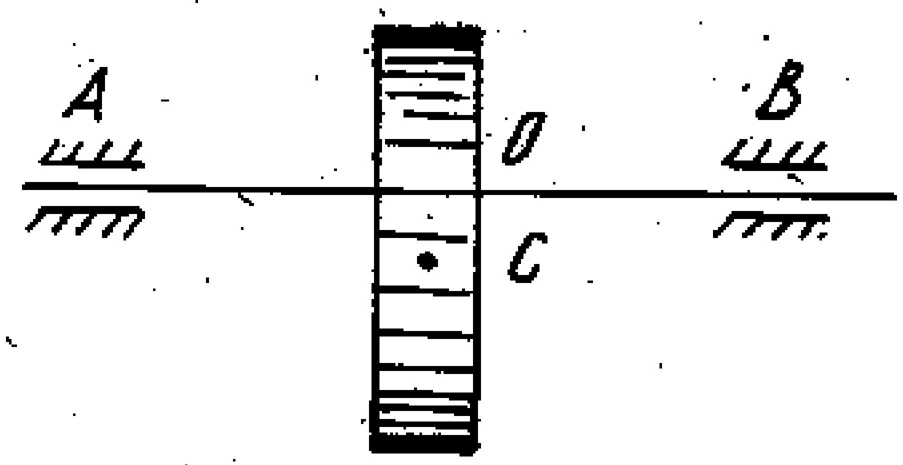
Khử t từ các phương trình nhận được và thay biểu thức của ω_1 từ (a) có :

$$\omega_o^2 = \frac{g}{4a}\left[6 + \frac{\pi^2(2k + 1)^2}{(2k + 1)\pi + 2}\right].$$

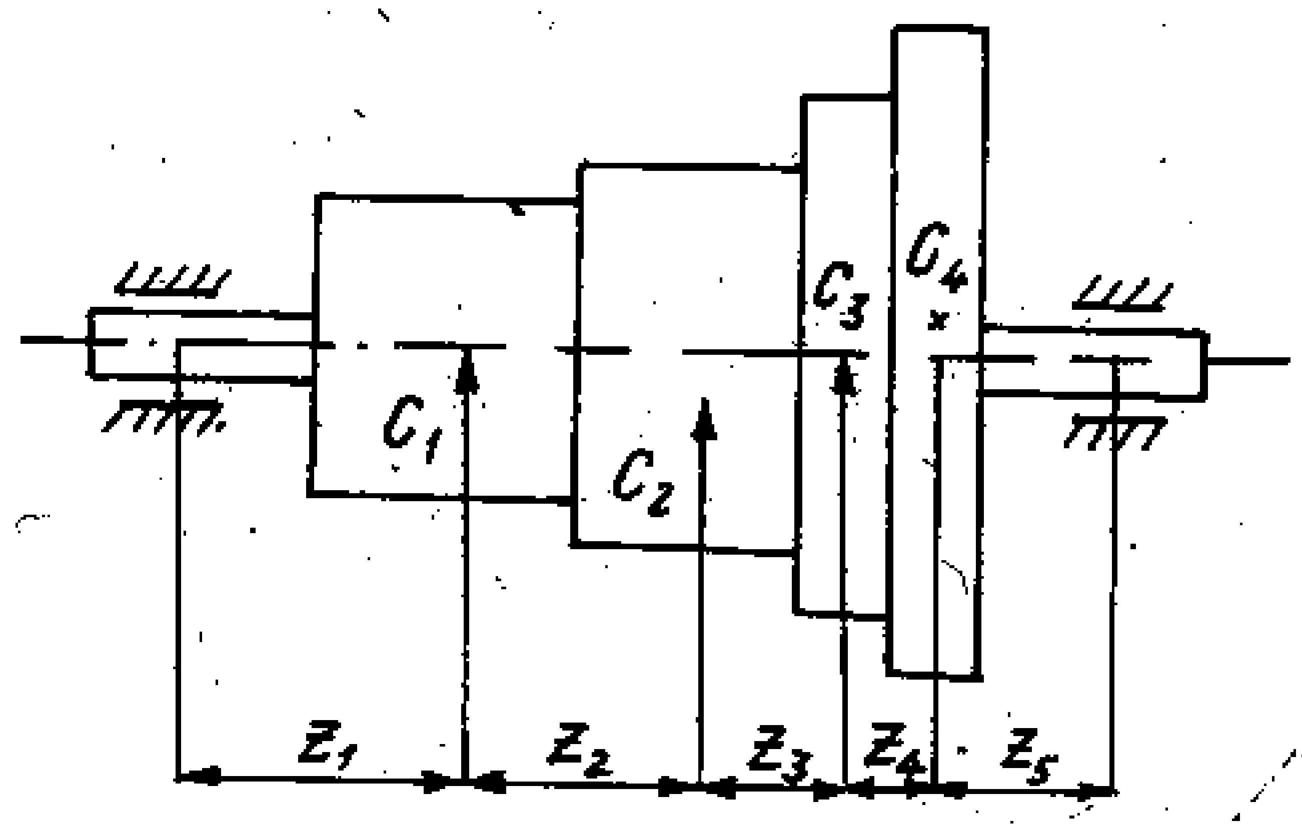
6.5. BÀI TẬP

6–1. Một bánh đà có khối lượng 3000 kg quay quanh trục nằm ngang với tốc độ 1200 vòng/phút. Trọng tâm của bánh đà cách đường trục của trục quay là 1 mm và ở cách đều hai ổ đỡ của trục.

Tìm áp lực của trục lên hai ổ đỡ đó, (H. 6–21).



HÌNH 6–21



HÌNH 6–22

Trả lời : Áp lực tĩnh mỗi bên bằng 14,7 KN hướng thẳng đứng xuống ; áp lực động lực mỗi bên bằng 23,52 KN nằm trong mặt phẳng chứa trục quay và trọng tâm C hướng vuông góc với trục quay và ngược bên với C so với trục quay.

6–2. Rôto trống của tuabin có 4 tầng hình trụ tròn có khối lượng là $m_1 = 900$ kg ; $m_2 = 1300$ kg ; $m_3 = 500$ kg ; $m_4 = 1000$ kg. Hai tầng bị gắn lệch tâm với các độ lệch tâm $e_2 = 0{,}1$ cm; $e_4 = 0{,}1$ cm của hai trọng tâm C_2 và C_4 và hai mặt phẳng qua trục quay và C_2, C_4 tạo với nhau một góc vuông, còn hai tầng kia được gắn đúng tâm. Rôto quay đều với tốc độ n = 3000 vg/phút. Kích thước được cho như sau : $z_1 = 70$ cm ; $z_2 = 80$ cm; $z_3 = 110$ cm ; $z_4 = 75$ cm ; $z_5 = 125$ cm ; khối lượng của trục quay mang rôto là m = 1300 kg (H. 6–22).

Tìm áp lực động lực lên hai ổ đỡ của trục rôto.

Trả lời : Các áp lực động lực gồm hai thành phần hướng theo các trục vuông góc nhau và gắn với trục quay.

$$X_A = 86{,}338 \text{ KN} \; ; \; Y_A = 26{,}8 \text{ KN} \; ;$$

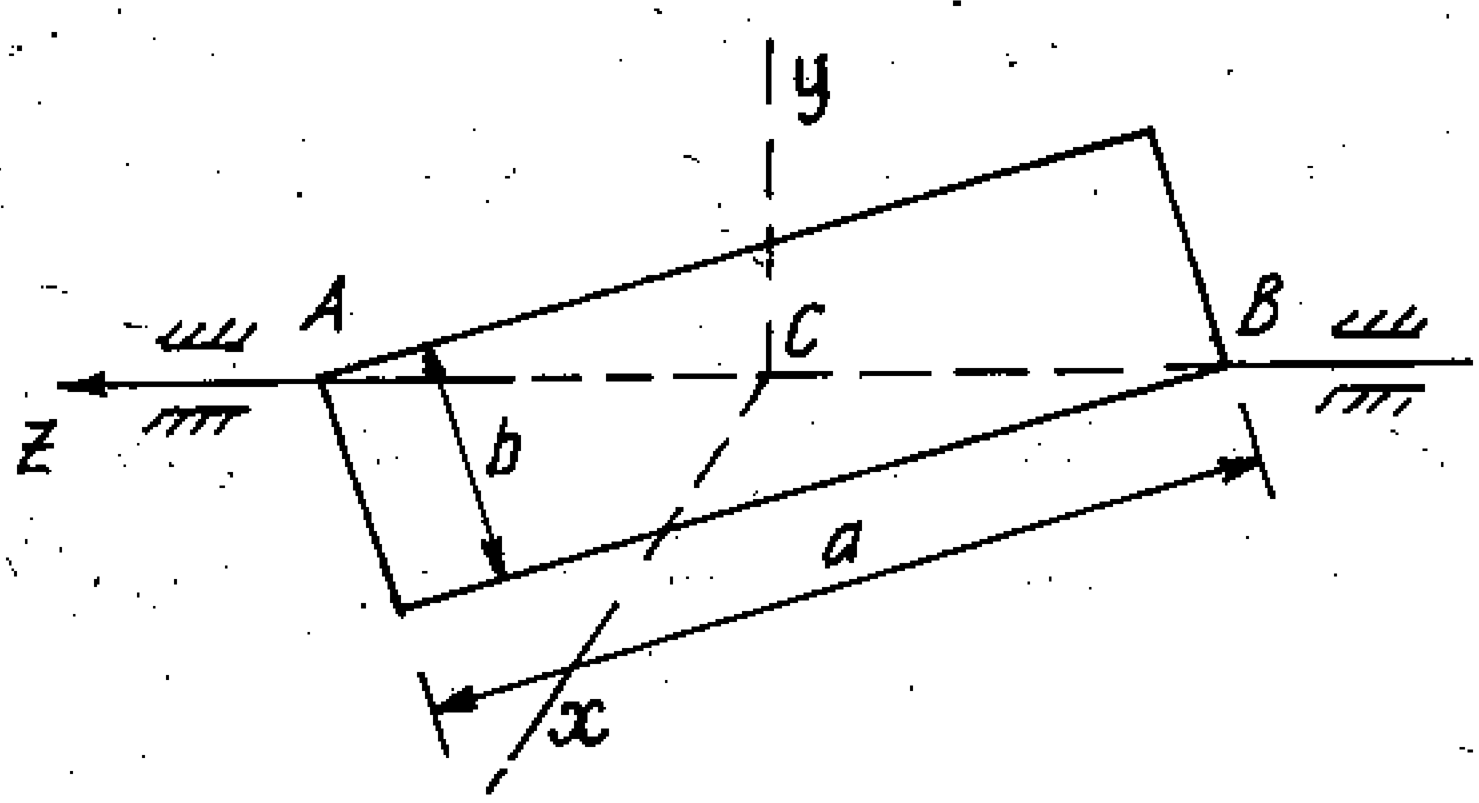
$$X_B = 41{,}8 \text{ KN} \; ; \; Y_B = 71{,}9 \text{ KN}$$

6–3. Một tấm hình chữ nhật đồng chất trọng lượng P quay đều quanh đường chéo AB với vận tốc góc ω.

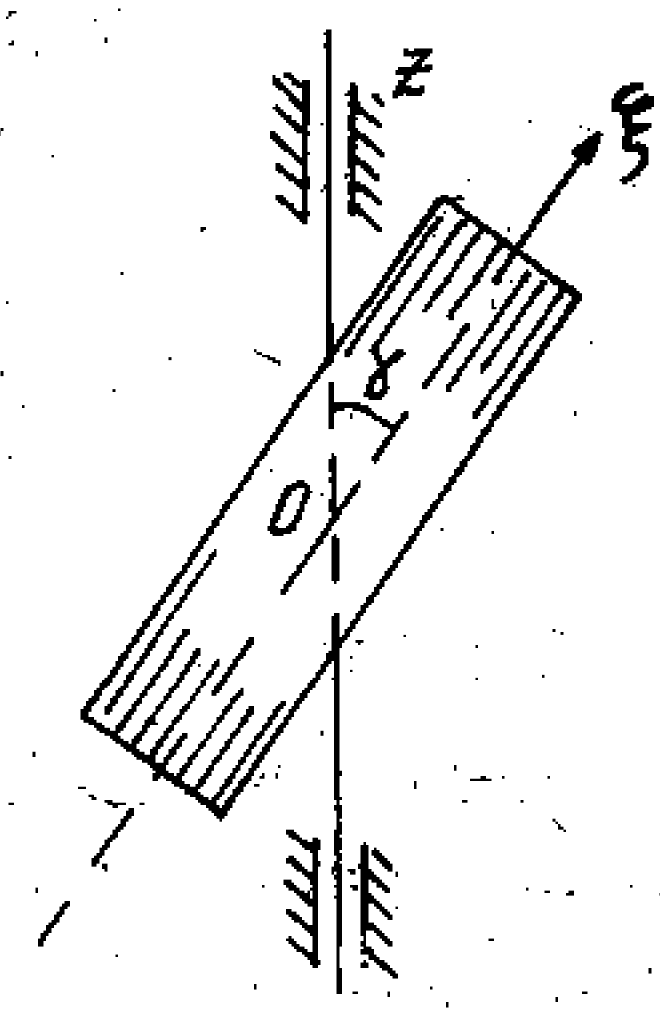
Xác định áp lực động lực của tấm lên các ổ đỡ A và B nếu chiều dài của các cạnh tấm bằng a và b, (H. 6–23).

Trả lời : $X_A = 0 \; ; \; Y_A = -\dfrac{Pab(a^2 - b^2)\omega^2}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}$

$$X_B = 0 \; ; \; Y_B = \frac{Pab(a^2 - b^2)\omega^2}{12g(a^2 + b^2)^{3/2}}$$



HÌNH 6–23

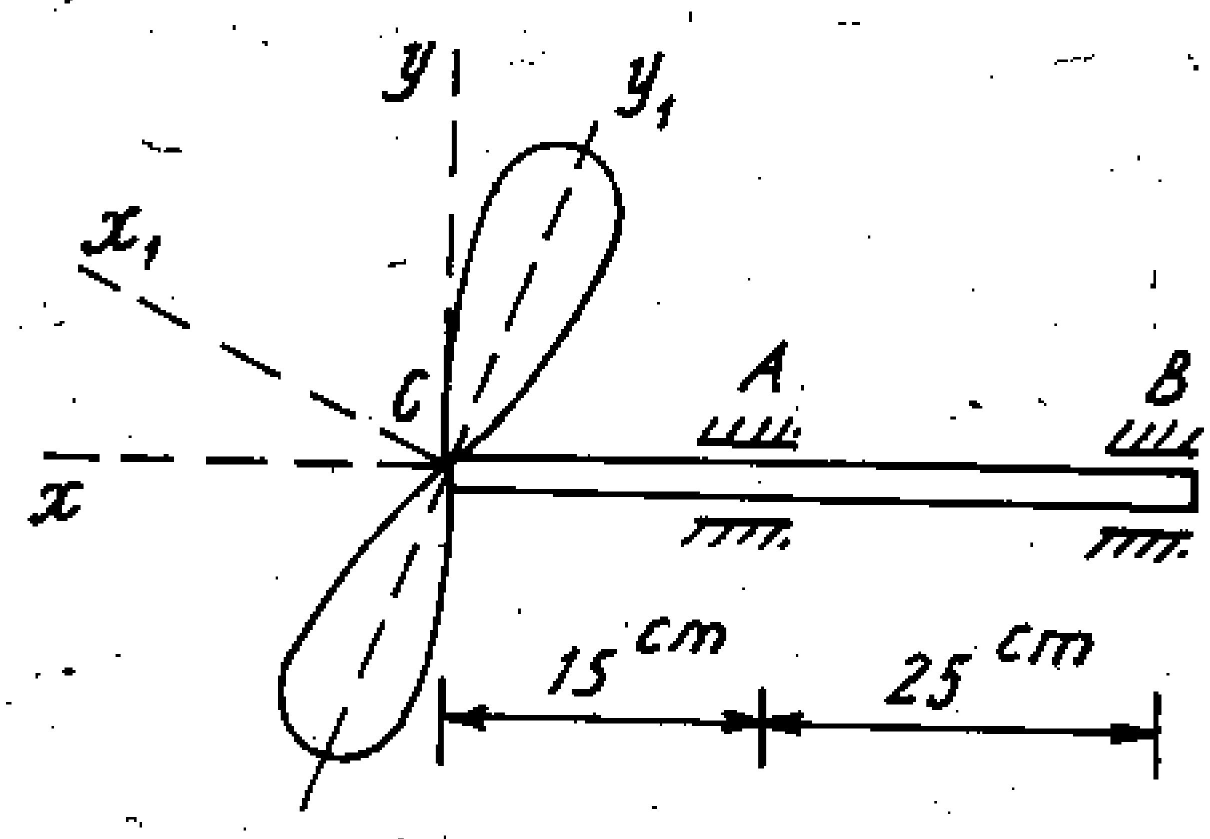


HÌNH 6–24

6–4. Khối trụ đồng chất tròn xoay có khối lượng m, dài 2l, bán kính R, quay đều quanh trục thẳng đứng Oz với vận tốc góc ω. Trục quay qua trọng tâm O của khối trụ và làm với trục đối xứng O của nó một góc α. Cho khoảng cách giữa hai ổ trục là h. Tìm áp lực ngang N_1 và N_2 của trục quay vào hai ổ, (H. 6–24).

Trả lời : $N_1 = N_2 = m \dfrac{\sin 2\alpha}{2h} \left(\dfrac{l^2}{3} - \dfrac{R^2}{4} \right) \omega^2$ và $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ song song ngược chiều nhau.

6–5. Một cái quạt có hai cánh có khối lượng coi như được phân bố đều theo trục đối xứng dọc của nó, quay đều quanh trục ngang qua trọng tâm của nó với tốc độ là n = 3000 v/ph. Do lắp ráp không tốt trục đối xứng vuông góc với mặt phẳng của cánh quạt lệch với trục quay một góc α = 0,015 rad. Khoảng cách giữa trọng tâm của cánh quạt đến ổ đỡ gần nó là a = 15 cm, khoảng cách giữa hai ổ đỡ là h = 25 cm. Cánh quạt có khối lượng bằng 15 kg và mômen quán tính đối với trục ngang là J = 4,9 kgm^2. Các trục Ox, Oy, Oy_1, Ox_1 trên hình vẽ cùng ở trong một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cánh quạt. Tìm áp lực tĩnh và áp lực động lực mà hai ổ đỡ phải chịu (H. 6–25).

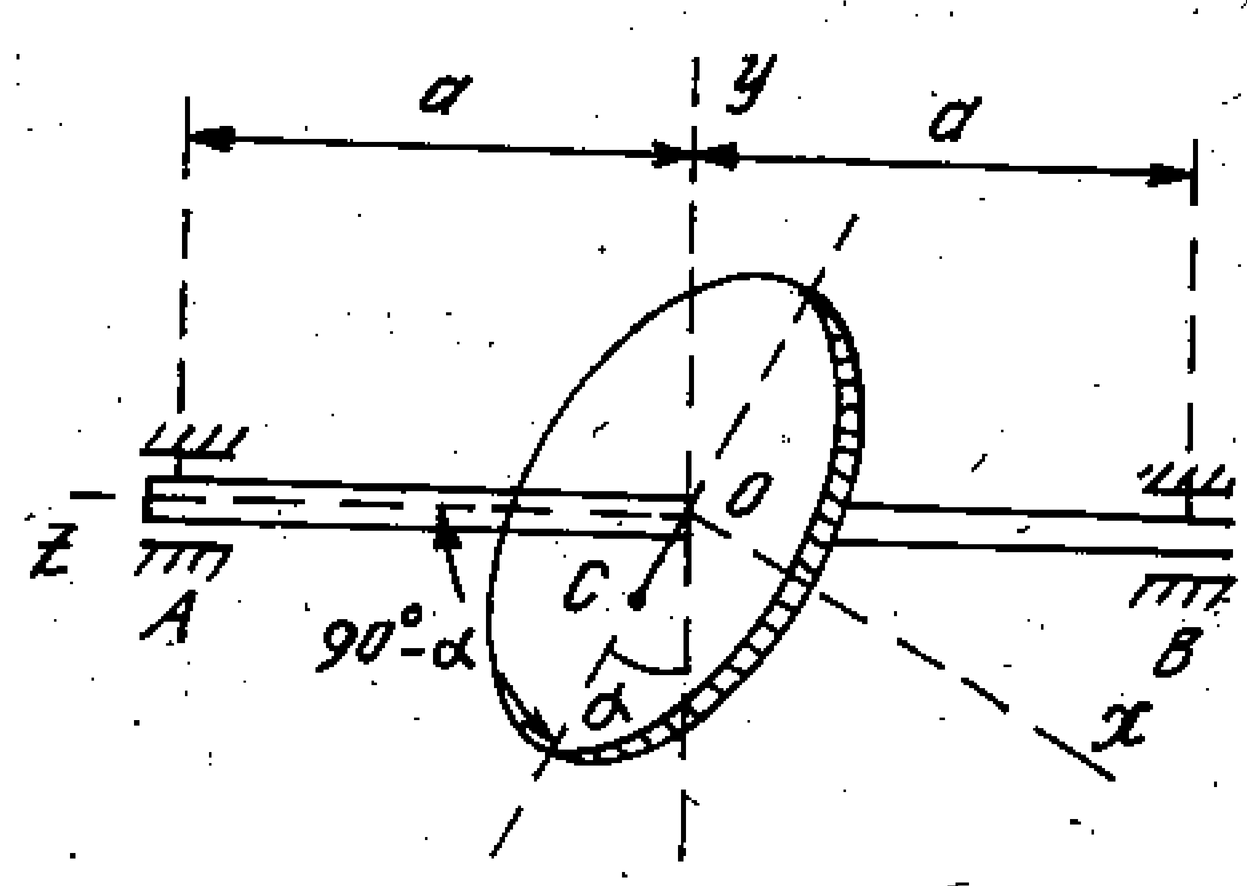


HÌNH 6–25

Trả lời : Áp lực tĩnh : N_A^t = 235,2 N hướng xuống ; N_B^t = 88,2 N hướng lên.

Áp lực động lực : $N_A^d = N_B^d$ = 58,016 KN ; $\vec{N_A^d}$, $\vec{N_B^d}$ song song ngược chiều nhau vuông góc với trục quay và quay cùng với cánh quạt.

6–6. Một đĩa mỏng đồng chất được lắp cứng trên trục quay nằm ngang với độ lệch tâm OC = e và góc nghiêng 90° − α đối với đường tâm trục. Đĩa có trọng lượng P và bán kính r. Xác định áp lực tĩnh và áp lực động lực của các ổ đỡ, khi đĩa quay đều cùng với trục với vận tốc góc ω; khoảng cách giữa hai ổ đỡ AB = 2a (H. 6–26).



HÌNH 6–26

Trả lời : 1– Phản lực tĩnh hướng thẳng đứng lên phía trên và bằng

$$N_A^t = P\frac{a + e\sin\alpha}{2a} \quad ; \quad N_B^t = P\frac{a - e\sin\alpha}{2a}$$

2– Phản lực động lực hướng theo trục Oy nằm trong cùng một mặt phẳng với trọng tâm và trục quay của đĩa và bằng

$$N_A^đ = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha + \frac{\sin2\alpha}{2a}\left(e^2 + \frac{r^2}{4}\right)\right]\omega^2 ;$$

$$N_B^đ = \frac{P}{2g}\left[e\cos\alpha - \frac{\sin2\alpha}{2a}\left(e^2 + \frac{r^2}{2}\right)\right]\omega^2.$$

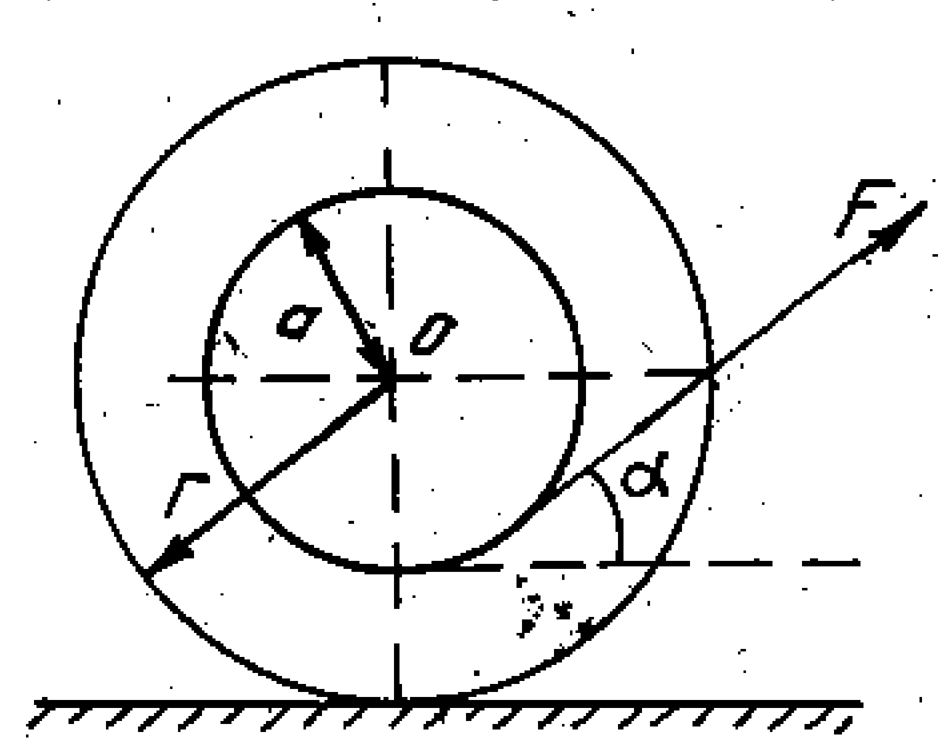
6–7. Dưới tác dụng của trọng lượng bản thân, một khối trụ tròn đồng chất lăn xuống theo đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α. Hệ số ma sát giữa mặt trụ và mặt phẳng nghiêng là f. Tìm góc nghiêng α của mặt phẳng nghiêng để bảo đảm cho chuyển động lăn đó là không trượt và tìm gia tốc của trục khối trụ. Bỏ qua ma sát lăn.

Trả lời : $\alpha \leqslant \text{arctg } 3f$; $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$.

6–8. Một bánh xe đồng chất bán kính r lăn xuống không trượt theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát lăn giữa bánh xe và mặt nghiêng là k. Tìm điều kiện để bánh xe lăn xuống đều.

Trả lời : $k = r\text{tg}\alpha$

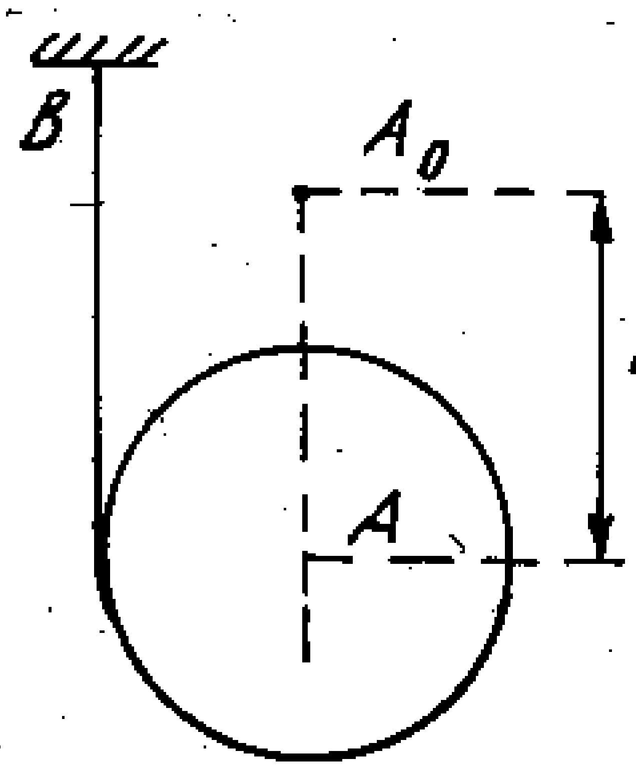
6–9. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn, có trọng lượng P bán kính r, được đặt trên mặt phẳng ngang, không nhẵn, có một sợi dây quấn vào tầng trong của con lăn với bán kính a. Bán kính quán tính của con lăn đối với trục của nó là ρ. Tác dụng lên đầu tự do của dây một lực $\vec{F}$, nghiêng với



HÌNH 6–27

mặt phẳng ngang một góc không đổi α. Tìm quy luật chuyển động của trục O của con lăn, (H. 6–27).

Trả lời : $x = \dfrac{F}{P}\,\dfrac{rg(r\cos\alpha - a)}{2(r^2 + \rho^2)}\,t^2.$

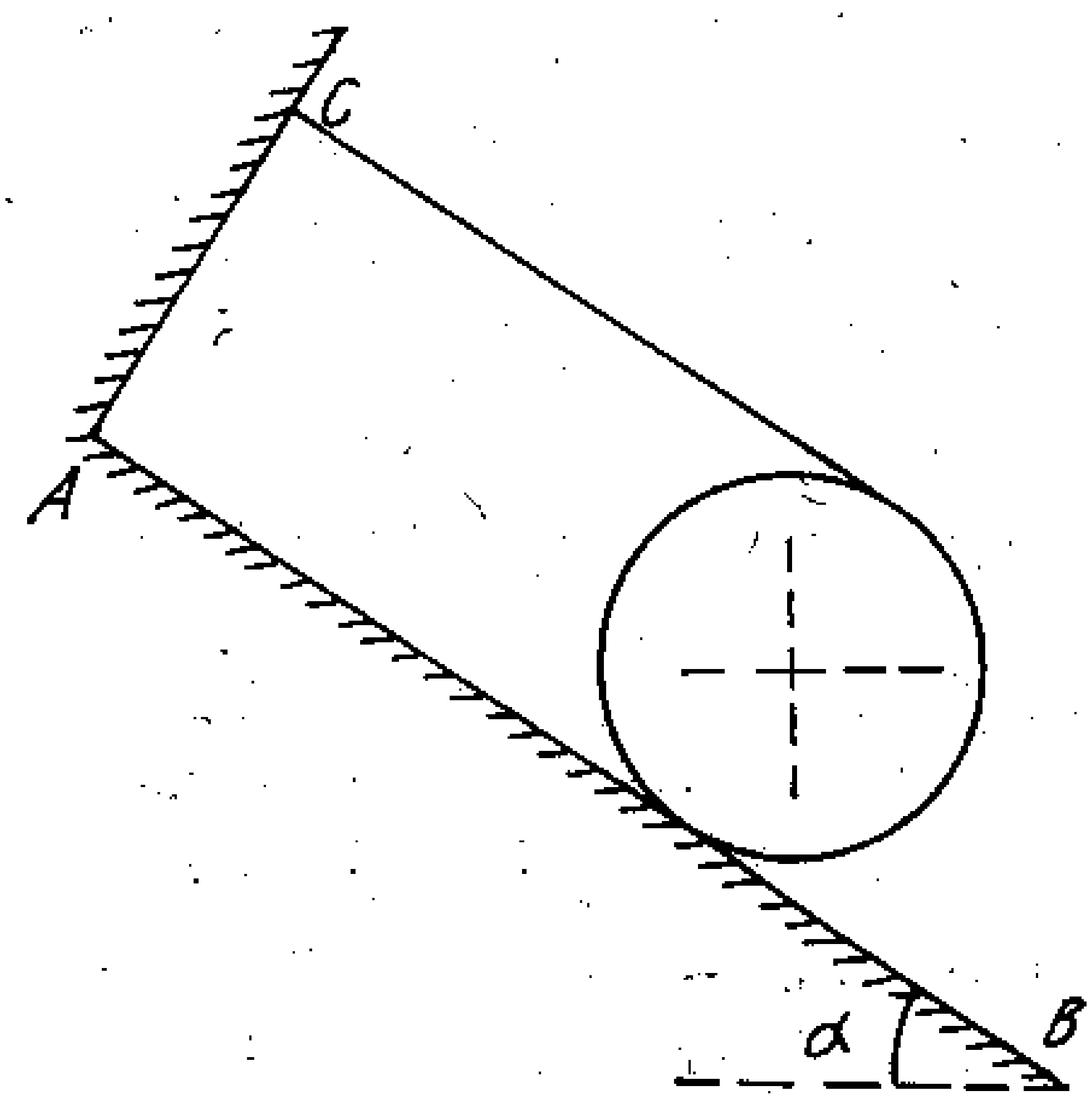


HÌNH 6–28

6–10. Một trụ tròn đồng chất A, có khối lượng m, lăn xuống theo một dây treo thẳng đứng quấn vào nó. Đầu B của dây được buộc chặt và khi trụ rơi không vận tốc đầu thì nhả dây quấn ra. Tìm vận tốc trục khối trụ khi nó đã rơi được một đoạn thẳng h và tìm lực căng của dây treo, (H. 6–28).

Trả lời : $v = \dfrac{2}{3}\sqrt{3gh}$, $T = \dfrac{1}{3}$ mg.

6–11. Người ta quấn hai dây mềm vào một khối trụ tròn đồng chất và quấn dây đối xứng qua mặt phẳng trung bình song song với đáy : khối trụ nặng là P được đặt lên mặt phẳng nghiêng sao cho đường sinh của nó vuông góc với đường dốc chính, và buộc cố định mút tự do của hai dây trên sao cho phần dây tự do song song với đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng AB. Hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và mặt nghiêng là f. Giả thiết rằng trọng lực thắng lực cản do ma sát và khối trụ trượt xuống không vận tốc đầu. Tìm quy luật chuyển động s(t) của trục khối trụ và lực căng của mỗi dây. Cho rằng trong chuyển động đang xét dây quấn chưa bị nhả ra hết, (H. 6–29).



HÌNH 6–29

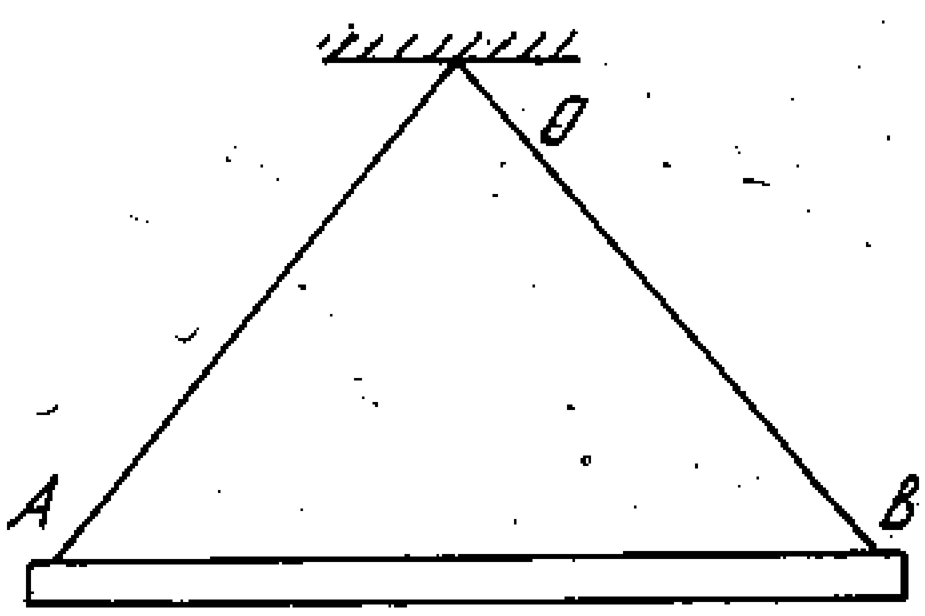
Trả lời : $s(t) = \frac{1}{3}.g(\sin\alpha - 2f\cos\alpha)t^2$;

$$T = \frac{1}{6} P(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Khối trụ đứng yên nếu $tg\alpha < 2f$;

6-12. Một thanh đồng chất AB có trọng lượng P được treo vào điểm O nhờ hai dây có chiều dài bằng nhau và bằng độ dài của thanh. Xác định sức căng của một trong hai nhánh dây tại thời điểm nhánh kia bị dứt (xem hình 6-30).

Trả lời : T = 0,266P



HÌNH 6-30

HÌNH 6-31

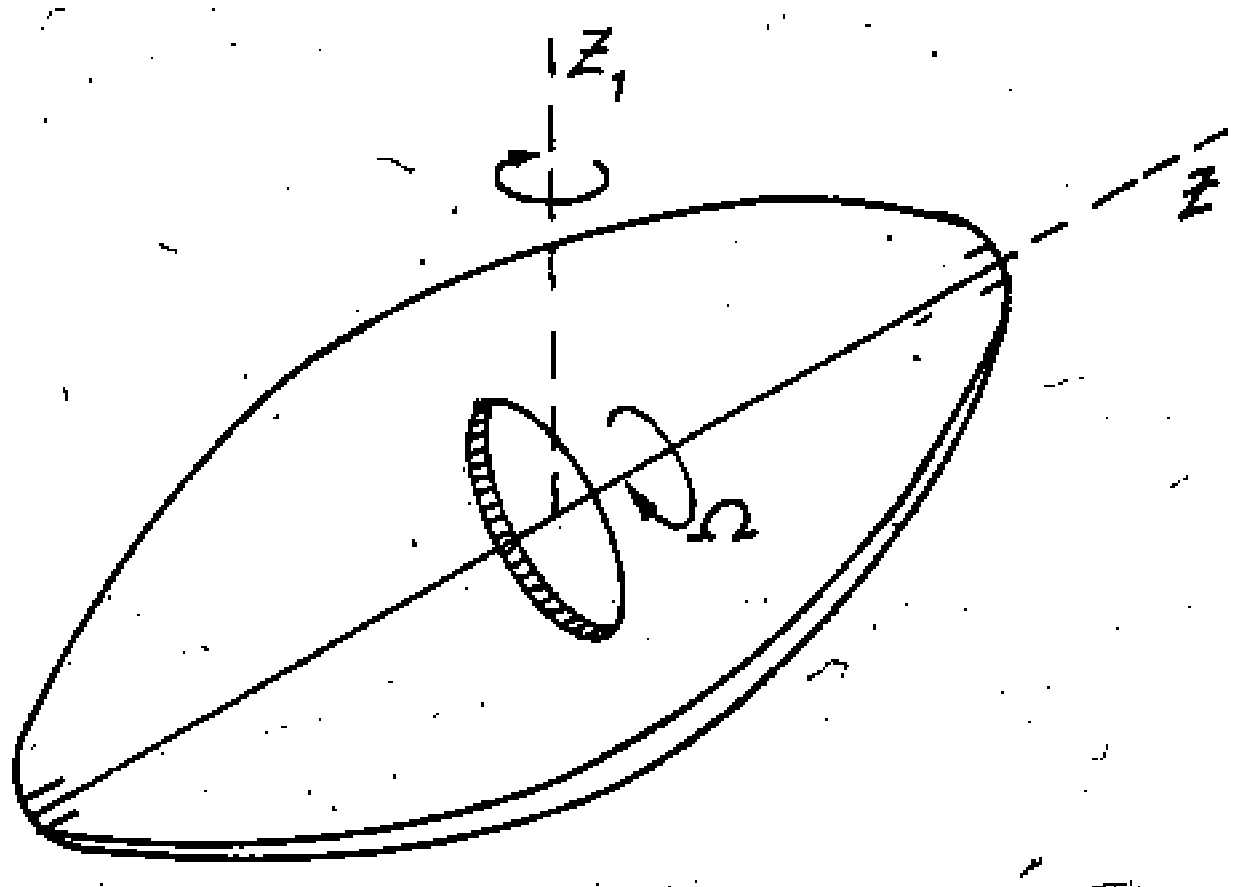
6-13. Một thanh mảnh đồng chất có chiều dài 2l và trọng lượng P nằm trên hai gối đỡ A và B. Trọng tâm C của thanh nằm cách đều hai gối đỡ : CA = CB = a. Áp lực tĩnh trên mỗi gối đỡ bằng P/2.

Tìm sự thay đổi áp lực trên gối đỡ A tại thời điểm khi gối đỡ B bị rơi tức thời, (H. 6-31).

Trả lời : Độ biến thiên của áp lực tại gối đỡ A bằng

$$\frac{l^2 - 3a^2}{2(l^2 + 3a^2)}.P$$

6-14. Tua bin có trục song song với trục dọc của tàu, quay với tốc độ 1500 vòng/phút. Khối lượng rôto là 6 tấn, bán kính quán tính của nó là ρ = 0,70m. Xác định áp lực do hiệu ứng



HÌNH 6–32

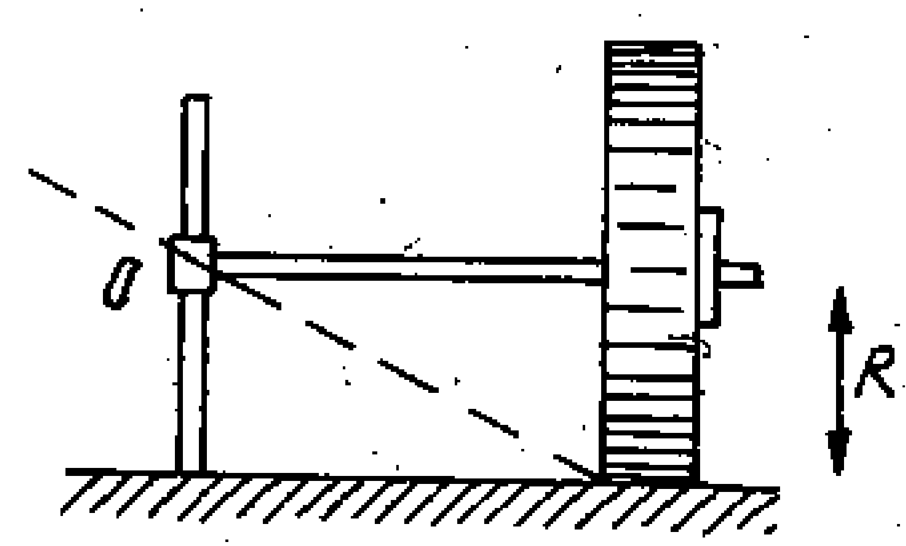
con quay gây ra ở hai ổ trục khi con tàu lái vòng với vận tốc góc $\frac{\pi}{18}$ rad/s. Khoảng cách giữa ổ đỡ là l = 2,7m, (H. 6–32).

Trả lời : 30,282 KN.

6–15. Mômen quán tính của cánh quạt và của rôto môtơ máy bay đối với trục quay chung của chúng là $J = 7{,}84\ kgm^2$, trục này trùng với trục dọc của máy bay. Tốc độ quay của cánh quạt là n = 1200 vòng/phút. Tìm mômen con quay tác dụng lên máy bay khi nó lái vòng ngang với vận tốc v = 40 m/s trên cung tròn có bán kính R = 25m.

Trả lời : M = 1568 Nm, làm chúc máy bay xuống hay cất ngẩng máy bay lên tùy theo chiều lái vòng.

6–16. Trong một máy nghiền dùng thớt nghiền lăn, thớt nghiền được coi là một đĩa tròn đồng chất khối lượng m = 1200 kg có bán kính quán tính là ρ = 0,4 m. Bán kính vòng lăn của bánh là R = 0,5 m. Cho rằng trục quay tức thời của thớt đi qua điểm giữa của đoạn tiếp xúc của thớt và đáy. Tay quay của thớt quay với tốc độ n = 60 v/ph. Xác định áp lực tổng cộng của thớt xuống nền cối xay, (H.6–33).



HÌNH 6–33

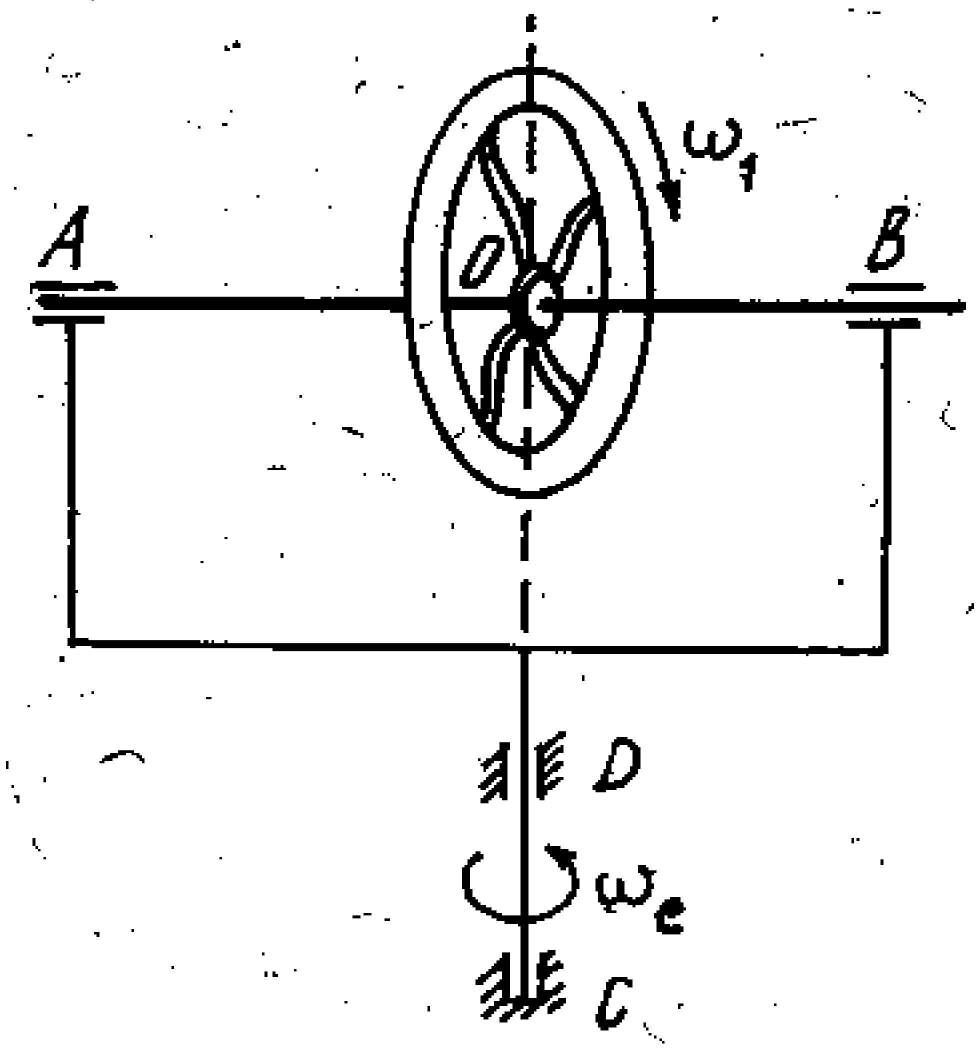
Trả lời : 27,048 KN.

6–17. Bánh xe nặng 2p, có bán kính a, quay quanh trục đối xứng nằm ngang AB của nó với vận tốc góc không đổi ω_1. Trục AB lại quay quanh trục thẳng đứng CD qua trọng tâm của đĩa với vận tốc góc không đổi ω_2. Cho OA = OB = h và giả thiết rằng khối lượng của bánh xe phân bố đều trên vành của nó. Tìm áp lực của trục AB lên hai ổ đỡ A và B, (H.6-34).

Trả lời :

$$N_A = p\left(1 + \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right) ;$$

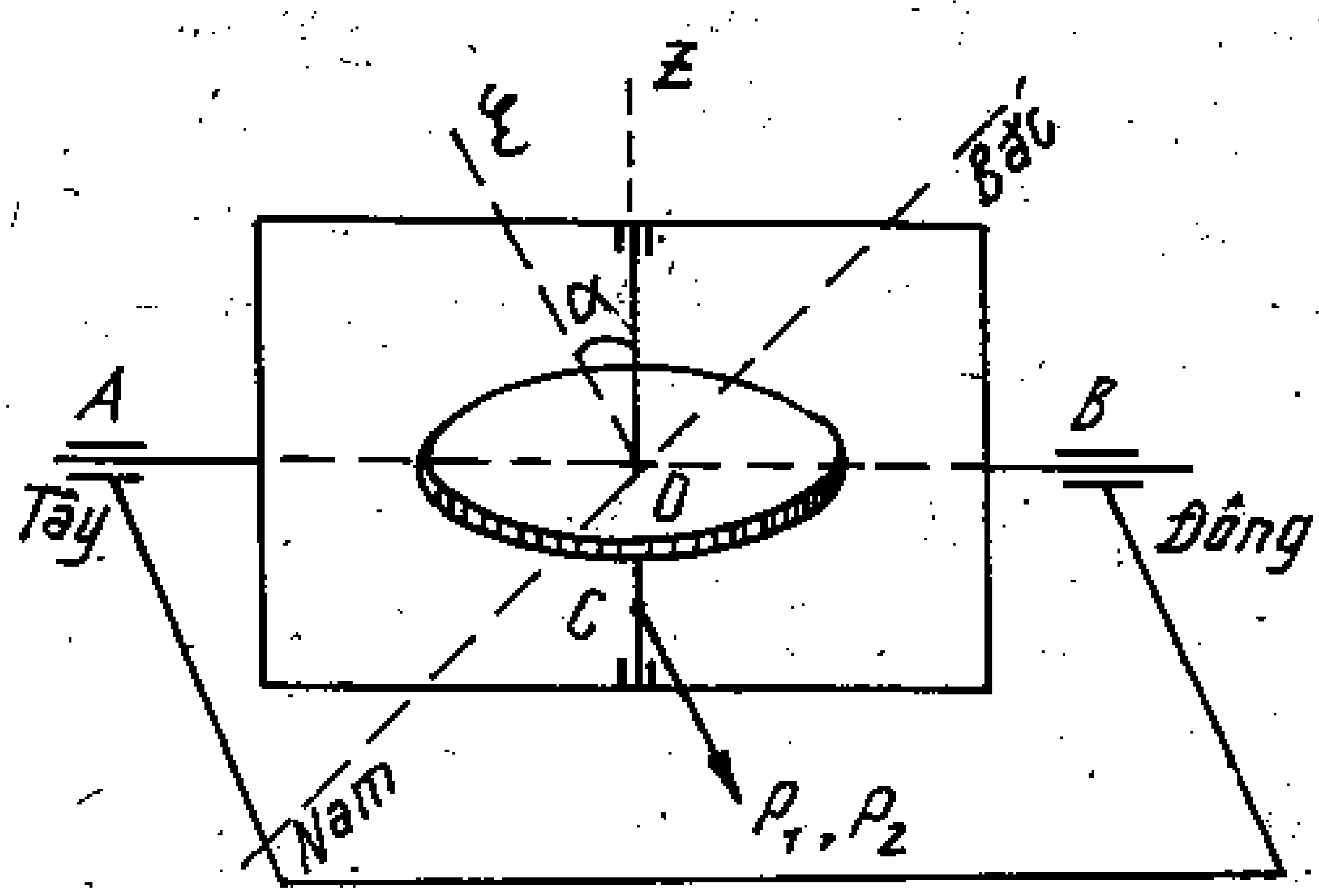
$$N_B = p\left(1 - \frac{a^2\omega_1\omega_2}{gh}\right)$$



HÌNH 6-34

6-18. Một con quay cân bằng được đặt trong giá Cácđăng hai bậc tự do ở một nơi trên bắc bán cầu có vĩ độ $\varphi = 30^o$. Trục AB của giá được đặt nằm ngang theo đường Đông - Tây. Rôto có khối lượng bằng $m_1 = 2$ kg, có bán kính r = 4 cm và quay đều với vận tốc góc $\omega = 3.000$ rad/s quanh trục đối xứng của nó. Trọng tâm chung của rôto và khung mang nó là C ở trên trục Cz qua trọng tâm O của rôto với khoảng cách OC = h.

Mômen tĩnh của con quay là $H = (m_1 + m_2)gh = 128$ Ncm, khi khung cân bằng.



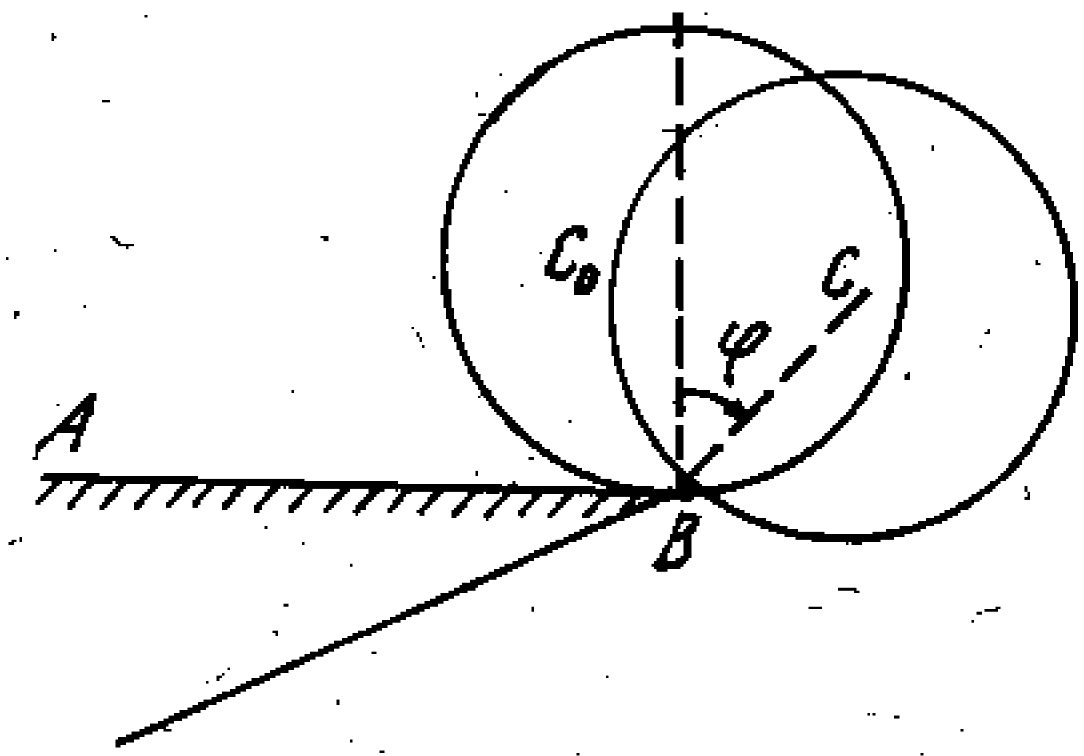
HÌNH 6-35

Tìm góc nghiêng α của trục quay Oz của rôto so với trục thẳng đứng O trong mặt phẳng kinh tuyến của nơi ấy. Coi rôto là một đĩa tròn đồng chất, (H.6-35).

Trả lời : $\alpha = 45^o$

6–19. Một khối trụ tròn đồng chất nặng được đặt trên một sàn ngang AB ở gần mép sắc B của sàn sao cho mép đó song song với đường sinh của hình trụ.

Bán kính khối trụ là R. Truyền cho khối trụ một vận tốc đầu rất nhỏ cho nó lăn xuống không trượt quanh mép B. Giả thử đến lúc mặt phẳng chứa mép B và trục hình trụ tạo với mặt phẳng thẳng đứng góc φ thì khối trụ rời mép B. Bỏ qua ma sát lăn và lực cản của không khí. Tìm giá trị của φ và vận tốc ω của khối trụ lúc ấy, (H.6–36).



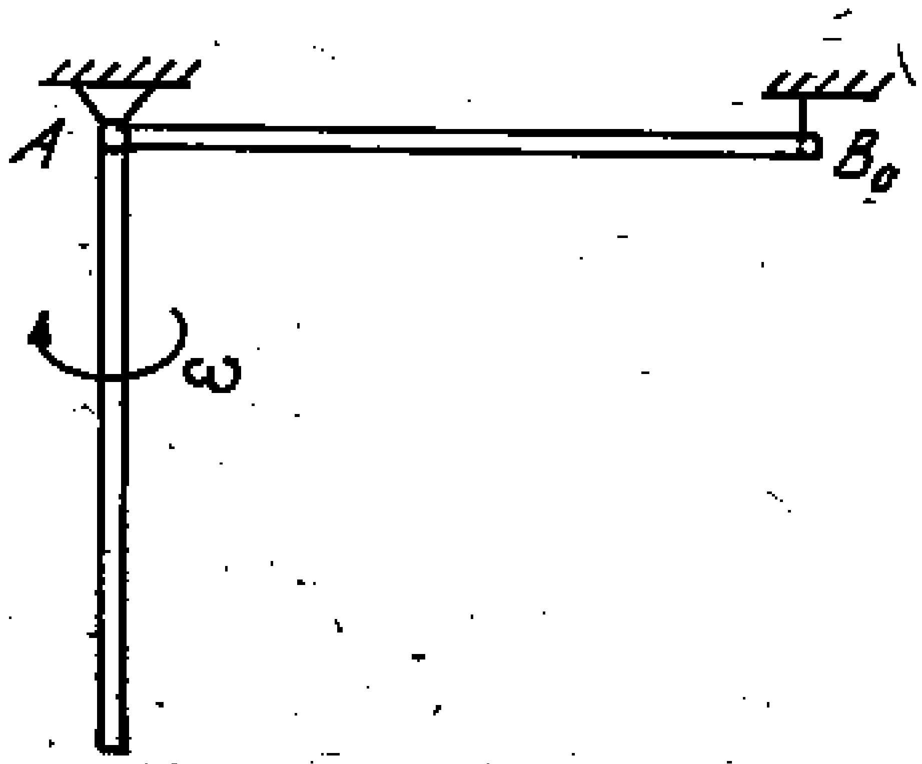
HÌNH 6–36

Trả lời : $\varphi = \arccos\dfrac{4}{7} = 55^o1'$; $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{7R}}$

6–20. Hai trục quay I và II, cùng với những bánh đà và bánh răng gắn trên chúng có mômen quán tính đối với trục quay của chúng lần lượt là $J_1 = 4900$ kg m^2 và $J_2 = 3920$ kgm^2. Tỷ số truyền động giữa 2 trục là $k_{1,2} = 2/3$. Trục I chịu tác dụng của mômen quay $M_1 = 490$ Nm. Hỏi sau khi trục II quay được bao nhiêu vòng thì đạt tốc độ $n_2 = 120$ v/ph. Bỏ qua ma sát ở các chỗ tiếp xúc. Tìm lực ăn khớp giữa các bánh răng. Cho góc ăn khớp là $\alpha = 20^o$, bán kính bánh răng gắn lên trục II là $r_2 = 150$ cm.

Trả lời : Sau 2,34 vòng ; S = 147 N.

6–21. Một dầm nặng đồng chất dài AB = 2l được đặt ở vị trí nằm ngang bằng cách giữ chặt hai đầu của nó. Ở một thời điểm nào đó đầu B được buông ra và dầm bắt đầu chuyển động quay quanh trục nằm ngang đi qua đầu A. Ở thời điểm dầm ở vị trí thẳng đứng đầu A cũng được thả tự do. Xác định quỹ đạo



HÌNH 6–37

của khối tâm của dầm và vận tốc góc của nó trong chuyển động tiếp theo lúc đầu dầm A được tự do, (H.6-37).

Trả lời : Parabôl : $y^2 = 3\,lx - 3\,l^2$; $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2l}}$

6-22. Một thanh nặng đồng chất dài là l. Đầu mút trên của nó được treo vào một trục nằm ngang O. Đang nằm ở vị trí cân bằng thẳng đứng, thanh nhận được vận tốc góc $\omega_o = 3\sqrt{\dfrac{g}{l}}$. Sau khi quay được nửa vòng nó tách ra khỏi trục O. Xác định quỹ đạo trọng tâm và vận tốc góc quay ω của thanh trong chuyển động tiếp theo của nó.

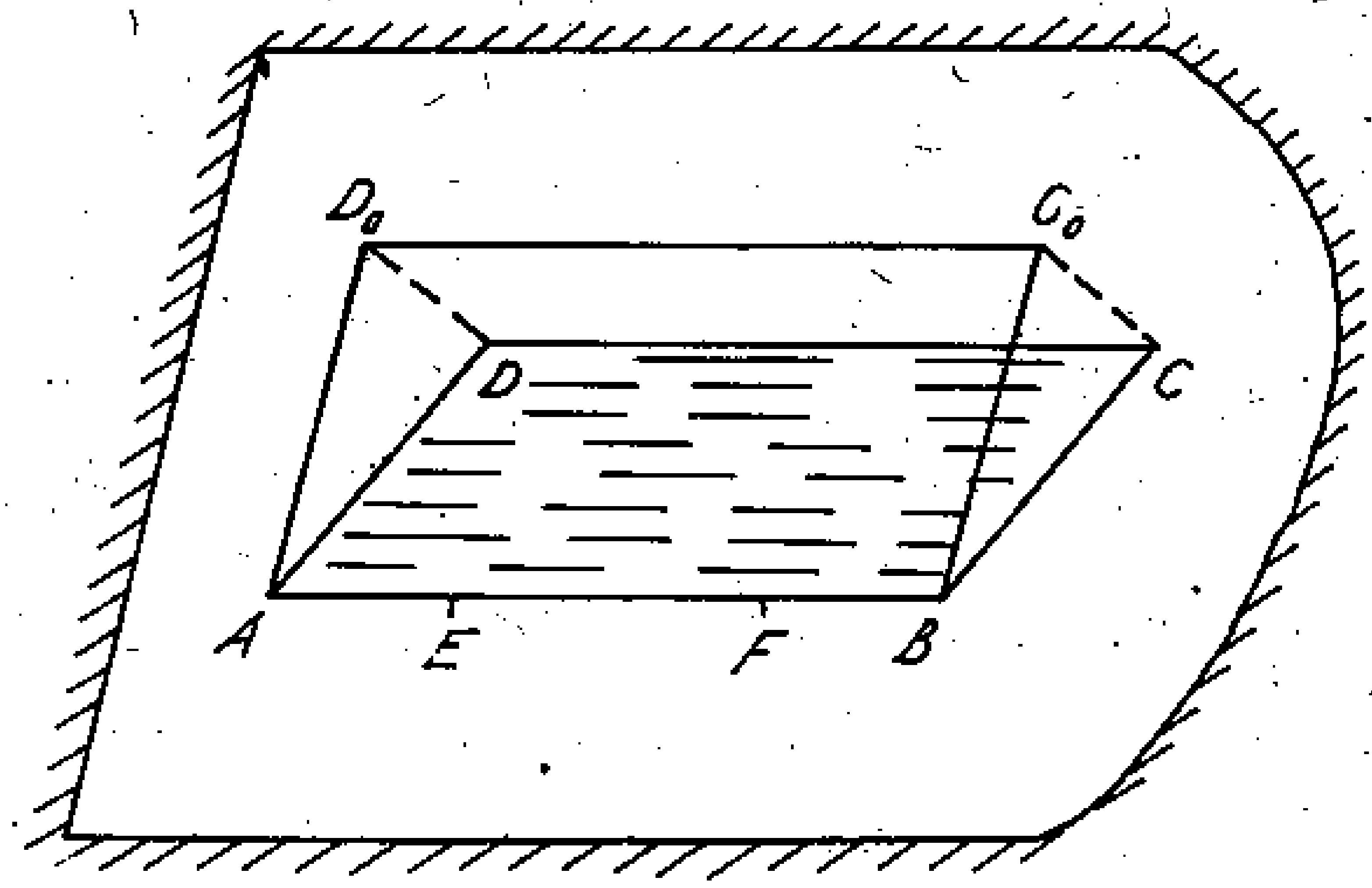
Trả lời : Parabol : $y_C = \dfrac{l}{2} - \dfrac{2}{3l}x_C^2$; $\omega = \sqrt{3\dfrac{g}{l}}$

6-23. Một thanh AB khối lượng m chuyển động phẳng, ở một thời điểm đang xét có gia tốc ω. Bán kính quán tính của thanh đối với trục đi qua trọng tâm C vuông góc với mặt phẳng chuyển động của thanh bằng ρ, khoảng cách từ trọng tâm C đến đầu A và B của thanh lần lượt bằng a và b.

Khối lượng của thanh được thay thế bằng hai khối điểm tập trung ở hai đầu cuối thanh là A và B sao cho tổng khối lượng thu gọn bằng khối lượng của thanh còn khối tâm của những khối lượng thu gọn trùng với trọng tâm của thanh. Hỏi các vectơ chính và mômen chính của hai lực quán tính của các khối lượng thu gọn có bằng vectơ chính và mômen chính của hệ lực quán tính của thanh không.

Trả lời : Các vectơ chính của hai lực quán tính của các khối lượng thu gọn và của hệ lực quán tính của thanh bằng nhau, còn các mômen chính thì khác nhau một lượng $m(ab - \rho^2)\varepsilon$.

6-24. Một bản mỏng đồng chất ABCD hình chữ nhật có chiều cao AD = 2l trọng lượng Q, được đặt tựa vào mặt tường thẳng đứng, tỳ lên hai đinh nhẵn không mũ E và F với khoảng cách AE = FB. Vào một thời điểm nào đó bản bắt đầu rơi với



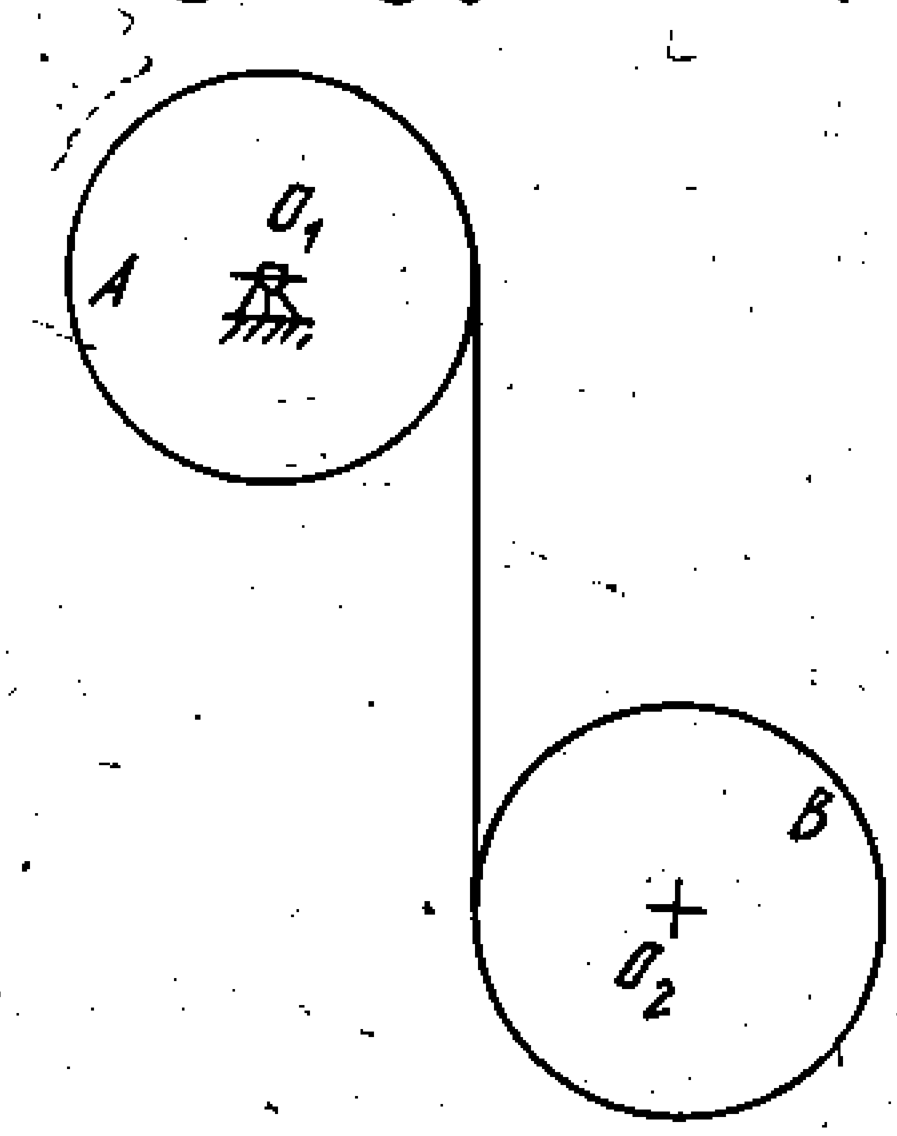
HÌNH 6-38

vận tốc rất bé và quay quanh đường AB nằm ngang. Xác định góc α giữa tường và bản mỏng lúc nó bắt đầu rời khỏi đinh, (giả thiết đinh rất ngắn không làm mắc mứu chuyển động điểm A theo phương ngang) khảo sát chuyển động tự do của bản mỏng sau khi nó rời đinh đỡ, (H.6-38).

Trả lời : $\alpha = \arccos\dfrac{1}{3} = 70^{\circ}32'$

Sau khi rời đinh thì khối tâm tấm phẳng chuyển động song phẳng theo một đường parabol và bản giữ nguyên tốc độ góc như khi nó rời khỏi đinh.

6-25. Hai trụ tròn xoay đồng chất A và B có trọng lượng lần lượt là P_1 và P_2 và bán kính lần lượt là R_1 và R_2. Quấn hai sợi dây mềm vào hai đầu của hai khối trụ một cách đối xứng đối với mặt phẳng trung bình song song với đáy của các khối trụ đó. Khối trụ A quay quanh một trục cố định trùng với đường trục tâm của các khối trụ đó. Khối trụ B



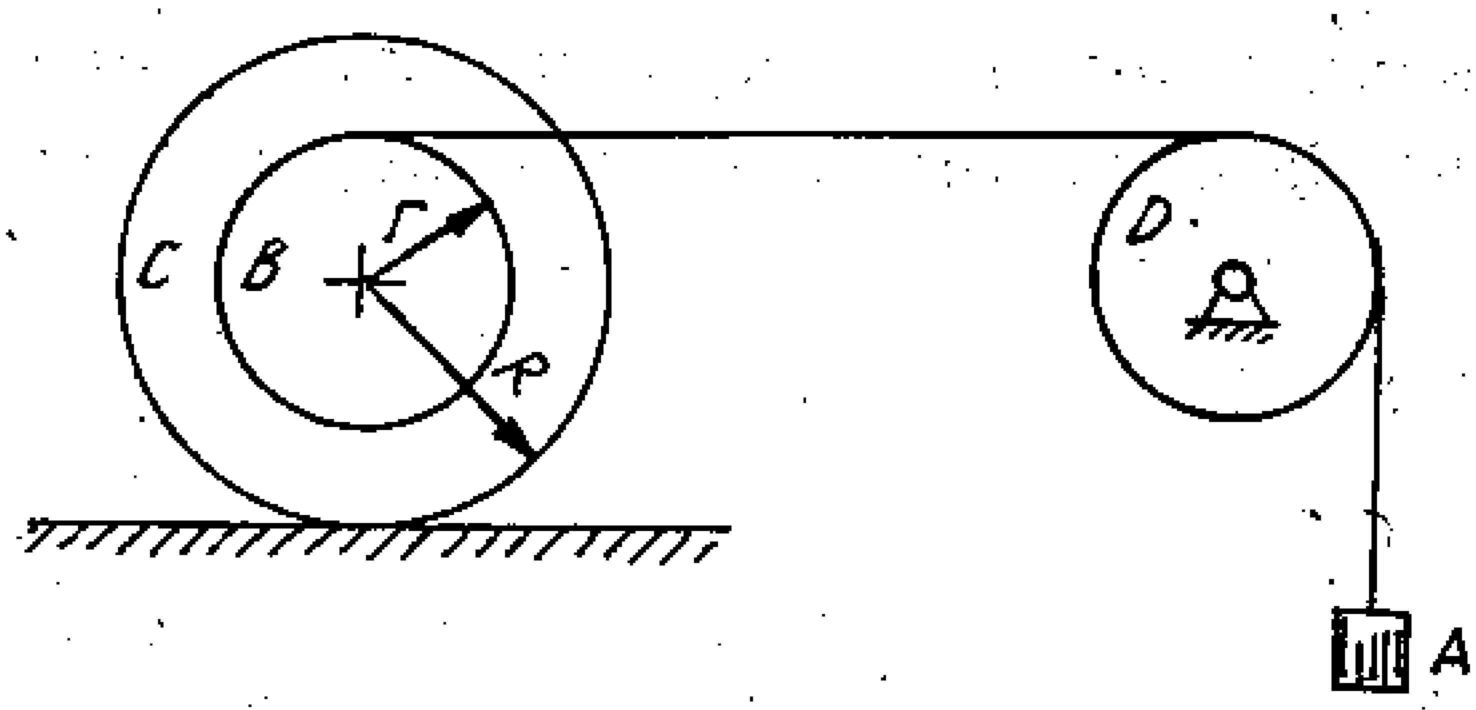
HÌNH 6-39

rơi tự do không vận tốc đầu, nhả dây quấn ra và làm quay cả khối trụ A nữa. Bỏ qua ma sát và các lực cản. Xác định vận tốc góc của hai khối trụ khi dây quấn chưa nhả ra hết. Xác định phương trình chuyển động của trục khối trụ B. Tìm sức căng mỗi dây quấn, (H.6–39).

Trả lời : $\omega_A = \dfrac{2gP_2}{R_1(3P_1 + 2P)}t$; $\omega_B = \dfrac{2gP_1}{R_2(3P_1 + 2P_2)}t$.

$$s = \frac{g(P_1 + P_2)}{3P_1 + 2P_2}t^2 \ ; \ T = \frac{P_1P_2}{2(3P_1 + 2P_2)}$$

6–26. Con lăn đồng chất gồm hai tầng trụ tròn xoay B và C ghép cứng với nhau được liên kết với vật nặng A bằng một dây mềm, mảnh, nhẹ như hình vẽ, vành trụ B quấn dây, ròng rọc có khối lượng không đáng kể và có trục quay cố định. Dưới tác dụng có trọng lực vật A rơi xuống và kéo con lăn lăn không trượt lên mặt phẳng ngang và nhả dần dây quấn ra. Con lăn có trọng lượng Q, bán kính quấn dây r, bán kính lăn R và bán kính quán tính đối với trục tròn xoay là ρ. Vật nặng A có trọng lượng P. Bỏ qua ma sát.



HÌNH 6–40

Tìm gia tốc rơi của vật A. Tìm phản lực ở trục ròng rọc và lực ma sát trượt giữa con lăn và nền đường, (H.6–40).

Trả lời : $a_A = \dfrac{P(R + r)^2 g}{Q(\rho^2 + R^2) + P(R + r)^2}$;

$$R_x = R_y = P\left(1 - \frac{a}{g}\right) = \frac{PQ(R^2 + \rho^2)}{Q(\rho^2 + R^2) + P(R + r)^2} \ ;$$

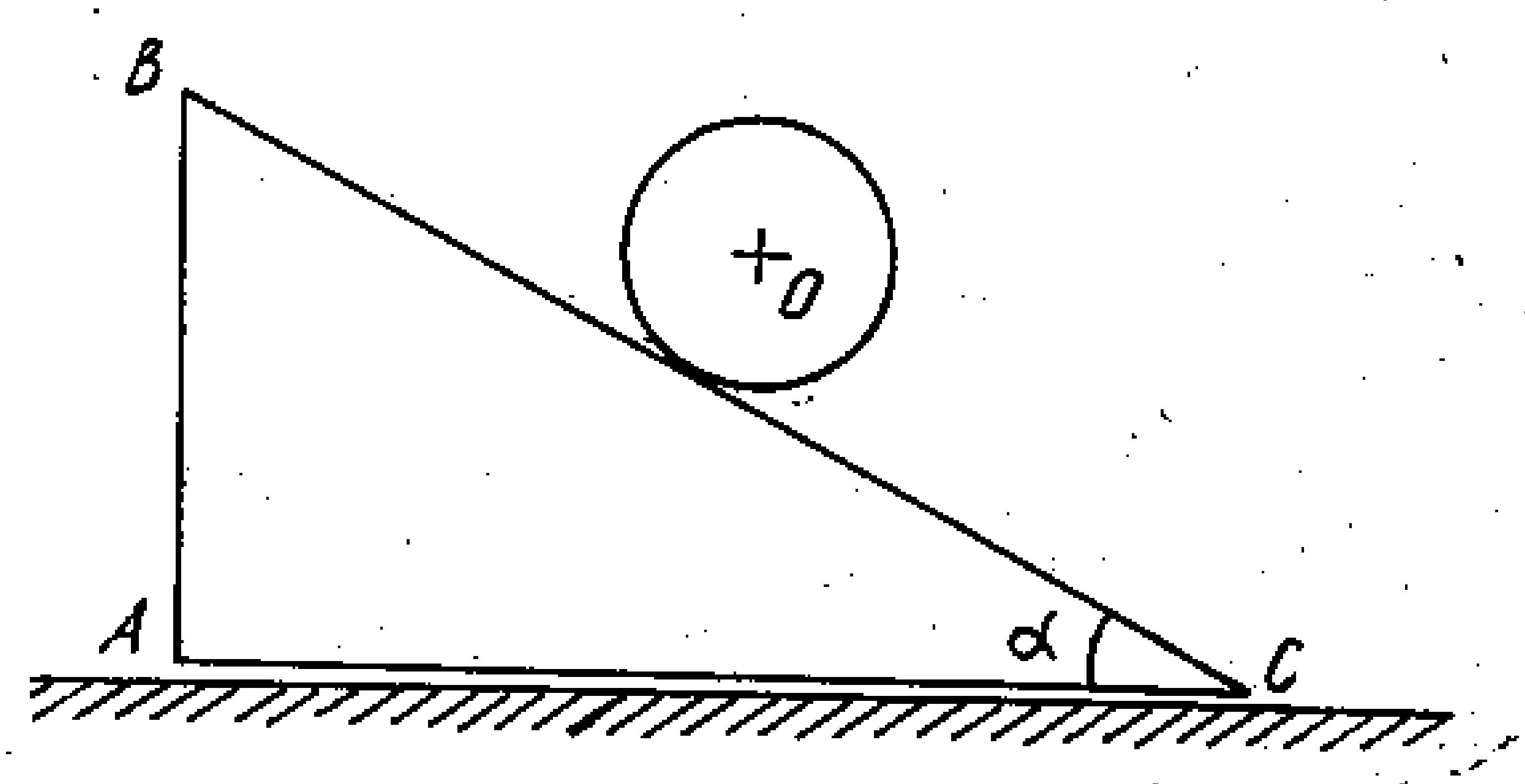
$$F = \frac{PQ(\rho^2 - Rr)}{Q(\rho^2 + R^2) + P(R + r)^2}$$

6-27. Một trụ tròn xoay đồng chất có thể quay được quanh một trục thẳng đứng. Trên mặt trụ có một rãnh nhẵn hình xoắn ốc với góc nghiêng là α. Ban đầu cả hệ đứng yên. Thả một viên bi không vận tốc đầu theo rãnh xoắn thì khối trụ quay. Cho biết viên bi có khối lượng m, mômen quán tính của khối trụ đối với trục quay của nó là $\frac{MR^2}{2}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính khối trụ.

Xác định vận tốc góc của khối trụ khi viên bi đã rơi xuống được một độ cao h.

Trả lời : $\omega = \frac{2m\cos\alpha}{R}\sqrt{\frac{2gh}{(M+2m)(M+2m\sin^2\alpha)}}$.

6-28. Trên một mặt phẳng nhẵn nằm ngang đặt một lăng trụ tam giác ABC có trọng lượng P, nó có thể trượt trơn trên mặt phẳng đó. Một hình trụ tròn đồng chất trọng lượng Q lăn không trượt trên mặt nghiêng của lăng trụ với góc nghiêng α. Xác định chuyển động của lăng trụ, (H.6-41).



HÌNH 6-41

Trả lời : Lăng trụ chuyển động về bên trái với gia tốc không đổi :

$$a = \frac{Q\sin 2\alpha}{2(P+Q)-2Q\cos^2\alpha}g.$$

CHƯƠNG 7

ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

7.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

7.1.1. Bài toán đặt ra

Trong các chương trước chúng ta khảo sát bài toán trong hệ quy chiếu quán tính. Do yêu cầu của thực tế kỹ thuật nhiều bài toán cần phải khảo sát trong hệ quy chiếu không quán tính. Cụ thể bài toán được đặt ra như sau : Một vật thể (chất điểm, cơ hệ, vật rắn và hệ vật rắn...) dưới tác dụng của một hệ lực chuyển động đối với một hệ quy chiếu, hệ quy chiếu đó chuyển động đối với hệ quy chiếu quán tính. Hãy khảo sát chuyển động của vật thể đối với hệ quy chiếu động, được gọi là hệ quy chiếu không quán tính.

7.1.2. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong chuyển động tương đối

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt}, \qquad (7\text{-}1)$$

trong đó m là khối lượng chất điểm, $\vec{a}_r$ là gia tốc tương đối của chất điểm. $\vec{F}$ là lực thật tác dụng lên chất điểm , còn $\vec{F}_e^{qt}$, $\vec{F}_c^{qt}$ lần lượt là các lực quán tính theo và lực quán tính Côriôlic của chất điểm, chúng được xác định theo công thức :

$$\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e \; ; \; \vec{F}_c^{qt} = m\vec{a}_c \; ,$$

trong đó $\overrightarrow{a_e}$ là gia tốc theo còn $\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega_e} \wedge \overrightarrow{v_r}$ là gia tốc Côliôlic của chất điểm ($\overrightarrow{\omega_e}$ là vectơ vận tốc góc của hệ quy chiếu không quán tính, $\overrightarrow{v_r}$ là vận tốc tương đối của chất điểm).

Cũng như trong chuyển động tuyệt đối, từ (7 – 1) ta có thể xây dựng các dạng khác nhau của phương trình vi phân chuyển động trong chuyển động tương đối.

7.1.3. Phương trình cân bằng tương đối của chất điểm

Điều kiện cân bằng của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính được viết như sau :

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_e^{qt}} = 0 \; ; \; \overrightarrow{v_r}(0) = 0 \qquad (7\text{–}2)$$

7.1.4. Các định lí trong động lực học của chuyển động tương đối

Như đã biết, từ phương trình vi phân chuyển động chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính ta xây dựng được các định lí của chất điểm và cơ hệ trong chuyển động tuyệt đối như các định lí tổng quát động lực học, phương trình chuyển động,...

Về mặt hình thức ta nhận thấy phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong chuyển động tương đối có dạng như trong chuyển động tuyệt đối nếu ta xem lực tác dụng lên chất điểm ngoài lực thật còn bao gồm cả các lực quán tính theo và lực quán tính Côriôlic của chất điểm.

Vì vậy về nguyên tắc, tất cả các định lí đã được thiết lập cho chuyển động tuyệt đối còn đúng cho chuyển động tương đối (cả chất điểm và cơ hệ) nếu ngoài lực thật ta thêm vào các lực quán tính theo và lực quán tính Côriôlic của các chất điểm.

7.1.5. Chú ý

a) Định lí biến thiên mômen động lượng cơ hệ trong chuyển động tương đối. Nếu hệ quy chiếu không quán tính có gốc tại khối tâm C của cơ hệ và chuyển động tịnh tiến so với hệ quy chiếu quán tính thì ta có

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_C^{(r)}} = \sum_{k=1}^{N} \vec{m}_C(\overrightarrow{F_k^e}) \quad (7\text{-}3)$$

trong đó $\overrightarrow{L^{(r)}}$ là mômen động lực của cơ hệ đối với hệ quy chiếu không quán tính. Như vậy định lí biến thiên mômen động lượng đối với hệ quy chiếu tịnh tiến cùng với khối tâm giống như trong hệ quy chiếu quán tính.

b) Định lí biến thiên động năng. Vì rằng các lực quán tính Côriôlic thẳng góc với vận tốc tương đối nên trong định lí động năng không có mặt lực quán tính Côriôlic. Nói cách khác

$$dT_r = \sum dA_r(\overrightarrow{F_{ik}}) + \sum dA_r\,(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}}), \quad (7\text{-}4)$$

$$T_r - T_r(0) = \sum A_r(\overrightarrow{F_k}) + \sum A_r\,(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}}), \quad (7\text{-}5)$$

trong đó : $T_r = \frac{1}{2}\sum m_k v_{rk}^2$ là động năng cơ hệ trong chuyển động tương đối, $\sum dA_r(\overrightarrow{F_k})$; $\sum A_r(\overrightarrow{F_k})$; $\sum dA_r(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}})$; $\sum A_r(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}})$ là công nguyên tố và công hữu hạn của các lực hoạt động (thật) và lực quán tính theo.

c) Phương trình Lagrăng loại II trong chuyển động tương đối của hệ với liên kết hôlônôm giữ, dừng và lí tưởng, có n bậc tự do

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_r}{\partial q_i} = Q_i^r(\overrightarrow{F_k}) + Q_i^r(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}}) + Q_i^r(\overrightarrow{F_{ck}^{qt}}),\ (i = \overline{1,n}) \quad (7\text{-}6)$$

trong đó q_i, $\dot{q}_i$ là các tọa độ và vận tốc suy rộng của cơ hệ trong hệ quy chiếu không quán tính, $Q_i^r(\overrightarrow{F_k})$, $Q_i^r(\overrightarrow{F_{ek}^{qt}})$, $Q_i^r(\overrightarrow{F_{ck}^{qt}})$ là lực suy rộng của các lực thật, lực quán tính theo và lực quán tính Côriôlic ứng với các tọa độ suy rộng q_i trong chuyển động tương đối.

Tương tự có thể nhận được phương trình tổng quát động lực học trong chuyển động tương đối.

d) Cân bằng của cơ hệ trong hệ quy chiếu không quán tính

$$\sum \delta A_r(\vec{F}_k) + \sum \delta A_r(\vec{F}^{qt}_{ek}) = 0 \qquad (7-7)$$

tức là tổng công khả dĩ của các lực hoạt động (thật) và tổng công khả dĩ của các lực quán tính theo (tính trong hệ quy chiếu không quán tính) bằng không, hoặc

$$Q^r_i(\vec{F}_k) + Q^r_i(\vec{F}^{qt}_{ek}) = 0 \; ; \; (i = \overline{1,n}) \qquad (7-8)$$

7.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Chúng ta thường gặp các bài toán sau :

– Tìm điều kiện cân bằng tương đối hoặc các áp lực động lực trong chuyển động tương đối (bài toán thuận).

– Tìm quy luật chuyển động tương đối của chất điểm hoặc cơ hệ (bài toán ngược).

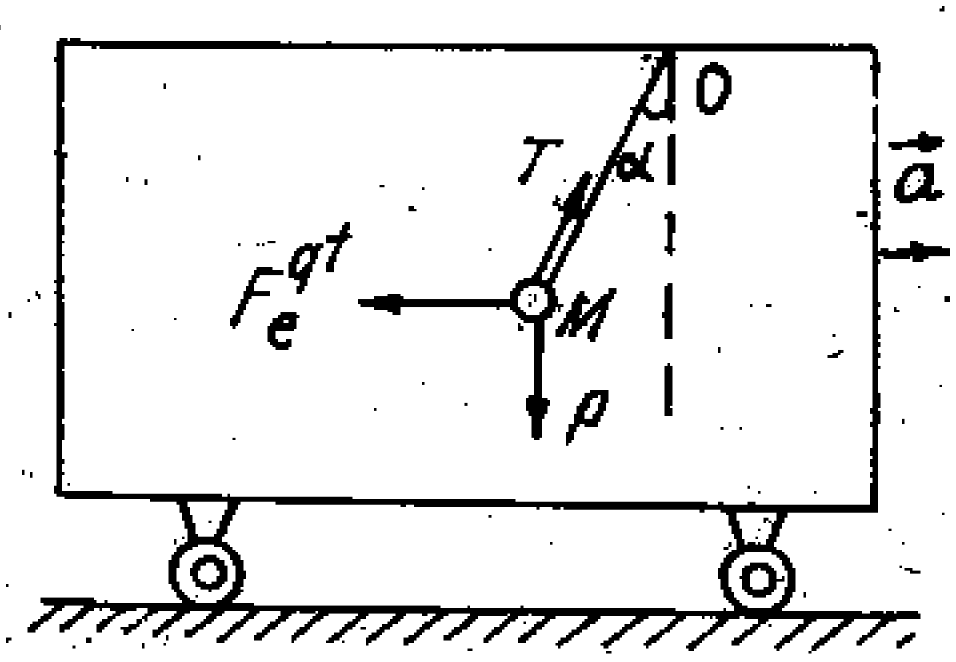
Khi giải quyết những bài toán cụ thể cần đặc biệt chú ý bước phân tích lực. Ngoài các lực thật tác dụng lên chất điểm và cơ hệ phải đặt thêm vào mỗi chất điểm lực quán tính theo và lực quán tính Côriôlic của nó. Sau đó bài toán được giải như trong hệ quy chiếu quán tính.

7.3. BÀI GIẢI MẪU

Thí dụ 7-1. Một toa tàu chuyển động nhanh dần đều với gia tốc a trên đường ray thẳng ngang. Trong toa tàu treo một con lắc vật lý. Tìm vị trí cân bằng của con lắc và tìm chu kỳ dao động của con lắc đó (H. 7-1).

Bài giải 1. Xác định vị trí cân bằng tương đối của con lắc trong hệ quy chiếu không quán tính là toa tàu.

Chất điểm chịu tác dụng các lực thật là trọng lực $\vec{P}$ và lực căng $\vec{T}$ của dây treo. Ta đặt vào chất điểm lực quán tính theo



HÌNH 7 – 1

$$\vec{F}_e^{qt} = -\frac{P}{g}\vec{a}$$

Vậy ta có hệ lực cân bằng :

$$(\vec{P}, \vec{T}, \vec{F}_e^{qt}) \equiv 0.$$

Khi chiếu các lực trên phương ngang và phương thẳng đứng ta nhận được

$$T\sin\alpha - F_e^{qt} = 0 , \; T\cos\alpha - P = 0$$

Từ đó :

$$tg\alpha = \frac{F_e^{qt}}{P} = \frac{a}{g}$$

trong đó α là góc nghiêng của dây treo con lắc với phương thẳng đứng, nó xác định vị trí cân bằng tương đối của con lắc.

Từ góc lệch α ta suy ra được gia tốc của con tàu. Bằng cách đó, ta có một dụng cụ đơn giản để đo gia tốc của con tàu.

2 – Xác định chuyển động của con lắc quanh vị trí cân bằng tương đối.

Gọi θ là góc lệch của dây treo OM ở thời điểm bất kỳ đối với vị trí OA của nó khi con lắc cân bằng. Lực thật tác dụng lên con lắc vẫn là trọng lực $\vec{P}$ và lực căng $\vec{T}$. Lực quán tính theo $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a} = -\frac{P}{g}\vec{a}$, còn lực quán tính Côriôlic thì bằng không vì hệ động chuyển động tịnh tiến.

Trong chuyển động tương đối, chất điểm M chuyển động trên đường tròn tâm O bán kính OM. Ta viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong dạng tọa độ tự nhiên. Ta có :

$$ma^t = F_t + F_{et}^{qt},$$

trong đó t chỉ phương tiếp tuyến với quỹ đạo.

Chúng ta nhận được :

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin(\alpha + \theta) = ma\cos(\alpha + \theta)$$

Coi θ là nhỏ, ta có :

$$\sin(\alpha + \theta) \approx \sin\alpha + \theta\cos\alpha \;;\; \cos(\alpha + \theta) \approx \cos\alpha - \theta\sin\alpha.$$

Khi chú ý đến điều kiện cân bằng tương đối a = gtgα hoặc acosα = gsinα, phương trình vi phân chuyển động của con lắc có thể được viết như sau :

$$l\ddot{\theta} = -(g\sin\alpha + g\cos\alpha\theta) + a\cos\alpha - a\sin\alpha\theta =$$
$$= -g\sin\alpha + a\cos\alpha - \theta(g\cos\alpha + a\sin\alpha) =$$
$$= -\theta(g\cos\alpha + a\sin\alpha).$$

Vậy chuyển động bé của con lắc quanh vị trí cân bằng tương đối có dạng dao động bé

$$l\ddot{\theta} + (g\cos\alpha + a\sin\alpha)\theta = 0,$$

hoặc
$$\ddot{\theta} + k^2\theta = 0,$$

trong đó
$$k^2 = \frac{g\cos\alpha + a\sin\alpha}{l}$$

Phương trình trên chứng tỏ con lắc dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng tương đối với chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha + a\sin\alpha}}.$$

Vì a = gtgα nên

$$\cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}} \;;\; \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+g^2}}.$$

Dễ dàng tìm được

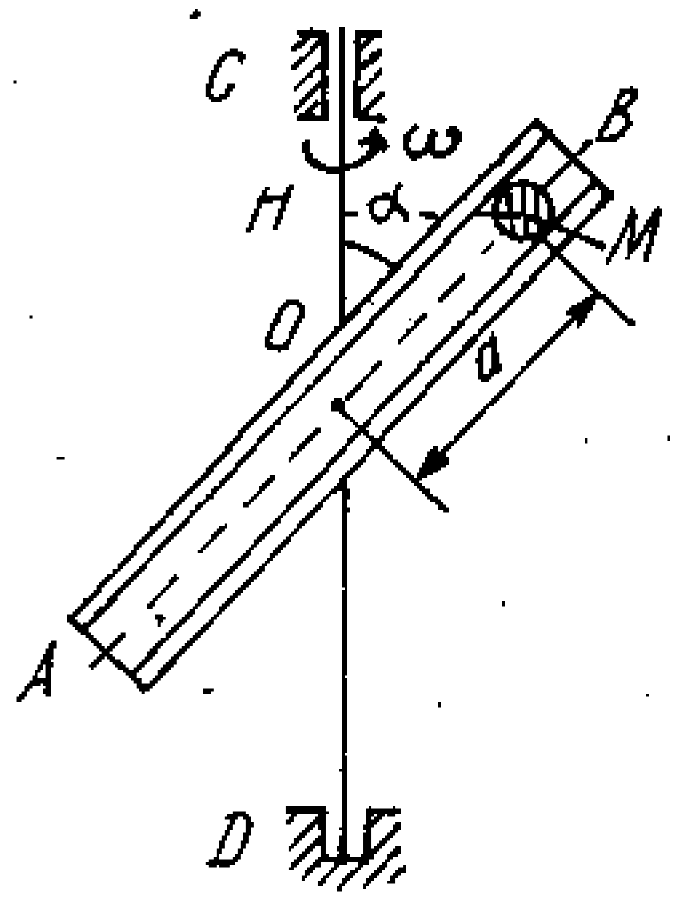
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}} \;;\; v = \sqrt{\frac{16l^2\pi^4}{T^4} - g^2}.$$

Do chu kỳ dao động của con lắc, ta suy ra được gia tốc con tàu.

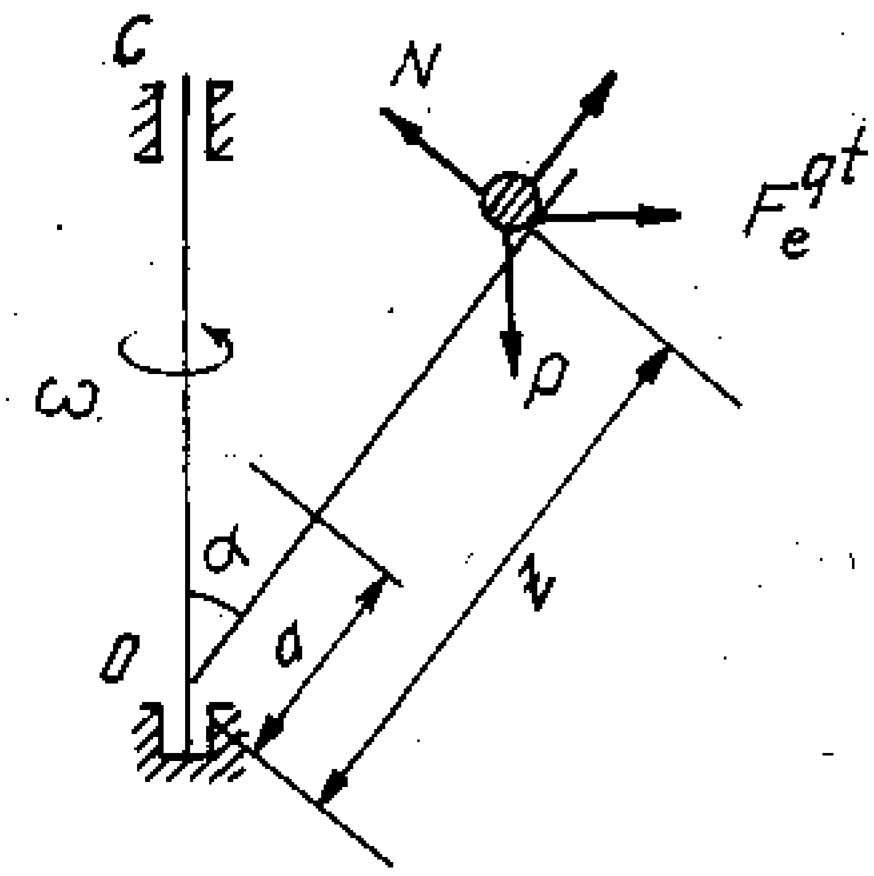
Thí dụ 7 - 2. Ống AB quay với vận tốc góc ω không đổi quanh trục thẳng đứng CD. Góc nghiêng của ống AB với đường thẳng đứng bằng α không đổi.

Lúc đầu chất điểm nằm cách O một đoạn $OM_0 = a$ và có vận tốc tương đối $v(0) = 0$.

Xác định luật chuyển động của chất điểm M dọc ống và tìm điều kiện để chất điểm đứng yên tại M trong ống. Bỏ qua ma sát, (H.7–2).



HÌNH 7–2



HÌNH 7–3

Bài giải. Khảo sát chuyển động của chất điểm M dọc ống AB. Lấy mặt phẳng CDOB làm hệ quy chiếu không quán tính. Lực thật tác dụng lên chất điểm gồm trọng lực $\vec{P}$ và phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ của ống AB. Vì ống quay đều quanh trục thẳng đứng nên lực quán tính theo $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{a}_e$ có phương dọc MH từ trái sang phải và có giá trị $F_e^{qt} = mMH\omega^2 = mz\sin\alpha\,\omega^2$, trong đó $z = OM$. Lực quán tính Côriolic $\vec{F}_c^{qt} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$ hướng vuông góc với $\vec{v}_r$, tức vuông góc với thanh OB (H. 7–3).

Vậy ta có phương trình vi phân chuyển động chất điểm trong chuyển động tương đối

$$m\vec{a}_r = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_c^{qt}.$$

Khi chiếu phương trình này lên trục OB ta có

$$m\ddot{z} = -mg\cos\alpha + m\omega^2\sin^2\alpha.z,$$

hoặc
$$\ddot{z} - \omega^2\sin\alpha.z + g\cos\alpha = 0.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình nhận được có dạng :

$$z = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + C_1e^{\omega\sin\alpha t} + C_2e^{-\omega\sin\alpha t},$$

trong đó C_1 và C_2 là những hằng số tích phân, chúng được xác định từ điều kiện đầu:

$$z(0) = a\ ;\ \dot{z}(0) = 0;$$

$$a = \frac{g\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + C_1 + C_2$$

$$0 = C_1\omega\ \sin\alpha - C_2\omega\sin\alpha.$$

Từ đó

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right).$$

Vậy chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính được mô tả bằng phương trình.

$$z = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha} + \left(a - \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\right)\ \mathrm{ch}(\omega\sin\alpha\, t).$$

Bây giờ ta khảo sát chiều chuyển động của chất điểm M dọc ống AB. Chú ý rằng hàm ch $(\omega\sin\alpha t)$ là hàm tăng theo t khi $t \geqslant 0$. Vậy chiều chuyển động của chất điểm M phụ thuộc lượng : $a - \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$.

Nếu $a > g\cos\alpha / \omega^2\sin^2\alpha$, tức nếu $\omega^2 > g\cos\alpha/a\sin^2\alpha$ thì chất điểm đi lên theo hướng OB.

Nếu $a < g\cos\alpha / \omega^2\sin^2\alpha$ tức nếu $\omega^2 < g\cos\alpha / a\sin^2\alpha$ thì chất điểm sẽ chuyển động theo hướng xuống từ B đến O.

Nếu $a = g\cos\alpha / \sin^2\alpha\omega^2$, tức nếu $\omega^2 = g\cos\alpha / a\sin^2\alpha$ thì chất điểm sẽ cân bằng tương đối trên OB tại M.

Chú ý rằng điều kiện cân bằng tương đối của chất điểm M_o còn có thể tìm được bằng cách lập điều kiện cân bằng tương đối, đó là :

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_c^{qt} = 0 \; ; \; \vec{v}_r(0) = 0$$

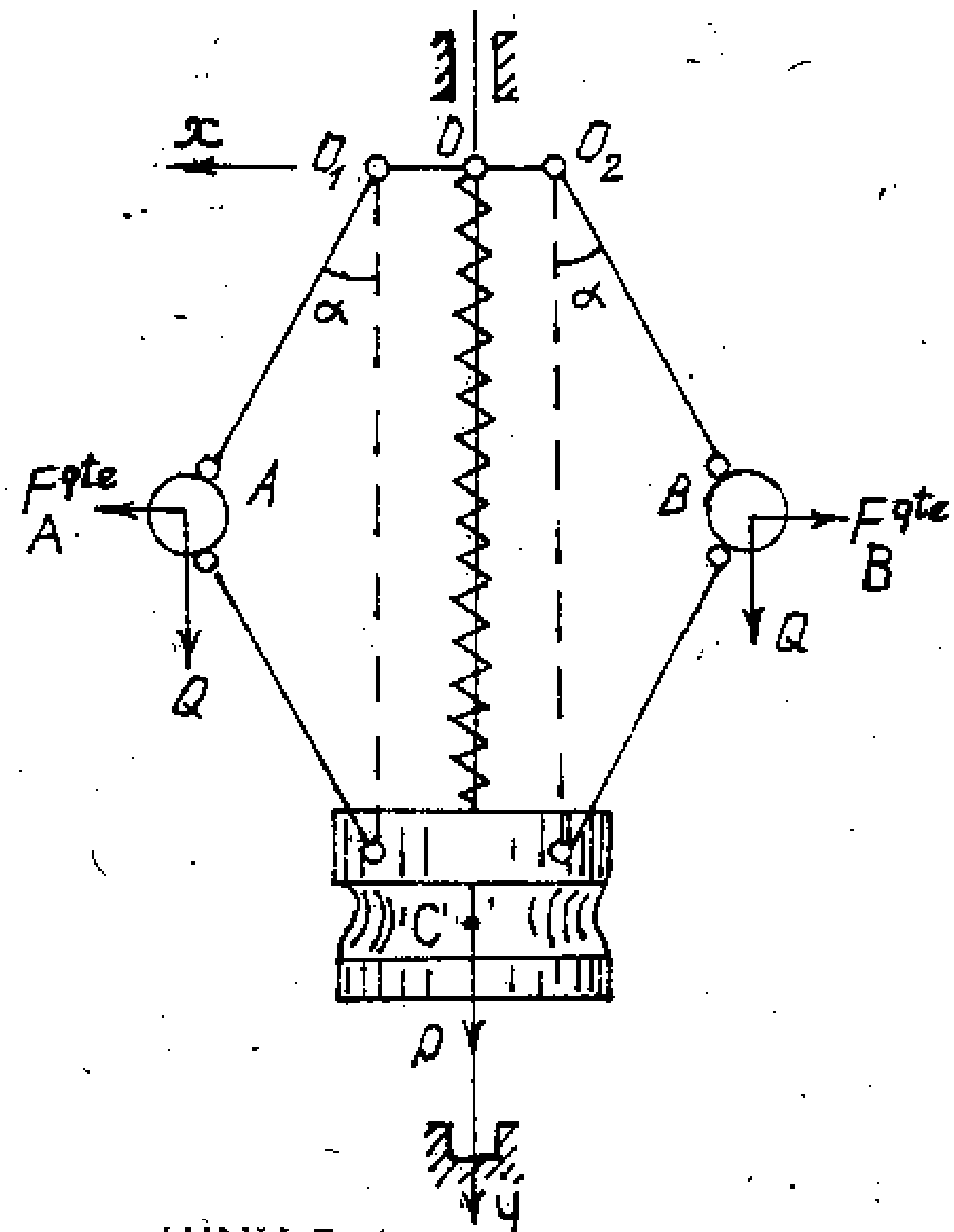
và phương trình chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính có thể nhận được nhờ phương trình Lagờrăng loại II.

Thí dụ 7-3. Trục máy điều tiết ly tâm quay đều với vận tốc góc ω_0. Tìm liên hệ giữa vận tốc góc ω_0 và góc mở α của thanh treo với phương thẳng đứng. Cho biết độ cứng của lò xo là c và khi $\alpha = 0$ thì lò xo không biến dạng ; trọng lượng đối trọng là P, trọng lượng mỗi quả văng là Q, chiều dài các thanh bằng l, bản lề nối các thanh vào đòn treo và vào đối trọng cách đều trục máy là a. Bỏ qua khối lượng của các thanh, của lò xo và bỏ qua ma sát.

Bài giải. Cơ hệ khảo sát gồm toàn bộ cơ cấu điều tiết ly tâm. Cơ hệ có hai bậc tự do. Chọn các tọa độ suy rộng đủ là góc quay φ của mặt phẳng cơ cấu và góc mở α của các thanh với phương thẳng đứng. Vì trục máy quay đều với vận tốc góc ω_0, nên góc $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$. Lúc cơ cấu làm việc ở trạng thái ổn định ($\omega = \omega_0$) ta có α = hằng (xem thí dụ 5-4), lúc đó ta có khung cân bằng trong mặt phẳng quay. Nói cách khác ta có cơ cấu một bậc tự do cân bằng tương đối trong mặt phẳng khung quay.

Không kể liên kết đàn hồi của lò xo, liên kết đặt lên cơ hệ là lý tưởng. Các lực hoạt động gồm các trọng lực, các quả văng và đối trọng C và lực đàn hồi $\vec{F}$ tác dụng lên đối trọng.

Điều kiện cân bằng tương đối của khung có thể thiết lập nhờ nguyên lý di chuyển khả dĩ trong chuyển động



HÌNH 7-4

tương đối, đó là tổng công khả dĩ của các lực hoạt động và lực quán tính theo trong chuyển động tương đối bằng không :

$$\sum \delta A_r(\vec{F}_k) + \sum \delta A_r(\vec{F}_k^{qte}) = 0$$

Lực quán tính theo của hai quả văng theo phương ngang, hướng xa trục quay và có cùng giá trị bằng

$$F_A^{qte} = F_B^{qte} = \frac{Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2.$$

Để tính công khả dĩ ta áp dụng phương pháp tính công trong tọa độ Đềcác. Hệ trục Oxy được chọn như hình vẽ.

$$\vec{P}_C \begin{cases} P_{C_x} = 0 \\ P_{C_y} = P \end{cases} \qquad C \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 2l\cos\alpha \;:\; \delta y_C = -2l\sin\alpha\delta\alpha \;; \end{cases}$$

$$\vec{Q}_A \begin{cases} Q_{A_x} = 0 \\ Q_{A_y} = Q \end{cases} \qquad A \begin{cases} x_A = l\sin\alpha + e \;;\; \delta x_A = l\cos\alpha\delta\alpha \;; \\ y_A = l\cos\alpha \;;\; \delta y_A = -l\sin\alpha\delta\alpha \;; \end{cases}$$

$$\vec{Q}_B \begin{cases} Q_{B_x} = 0 \\ Q_{B_y} = Q \end{cases} \qquad B \begin{cases} x_B = -l\sin\alpha - e \;;\; \delta x_B = -l\cos\alpha\delta\alpha \\ y_B = l\cos\alpha \;;\; \delta y_B = -l\sin\alpha\delta\alpha \,. \end{cases}$$

$$\vec{F}_A^{qte} \begin{cases} F_{Ax}^{qte} = \dfrac{Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2 \;; \\ F_{Ay}^{qte} = 0 \,. \end{cases}$$

$$\vec{F}_B^{qte} \begin{cases} F_{Bx}^{qte} = -\dfrac{Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2 \\ F_{By}^{qte} = 0 \,. \end{cases}$$

$$\vec{F}_{dh} \begin{cases} F_{dhx} = 0 \,, \\ F_{dhy} = F = 2cl(1 - \cos\alpha) \,. \end{cases}$$

Vậy điều kiện cân bằng tương đối của cơ cấu được viết như sau :

$$P_C\delta y_C + Q_{Ay}\delta y_A + Q_{By}\delta y_B + F_A^{qte}\delta x_A + F_B^{qte}\delta x_B + F_{dh}\delta y_C = 0 \,,$$

hay $-2Pl\sin\alpha\,\delta\alpha - 2Ql\sin\alpha\delta\alpha + \dfrac{2Q}{g}(a + l\sin\alpha)\,\omega^2 l\cos\alpha\delta\alpha -$

$$- 4cl^2\sin\alpha(1 - \cos\alpha)\,\delta\alpha = 0$$

Khi giản ước cho $\delta\alpha \neq 0$, ta có :

$$\omega^2 = g\,\frac{P + Q + 2cl(1 - \cos\alpha)}{Q(a + l\sin\alpha)}\,tg\alpha.$$

Chú ý rằng có thể thiết lập điều kiện cân bằng tương đối của cơ cấu trong mặt phẳng quay của khung nhờ điều kiện cân bằng tương đối của cơ hệ trong tọa độ suy rộng đủ, tức là :

$$Q_i + Q_i^{qte} = 0, \qquad i = \overline{1,n}$$

trong đó Q_i là lực suy rộng của các lực hoạt động, Q_i^{qte} là lực suy rộng của các lực quán tính theo.

Khi chọn α làm tọa độ suy rộng đủ của cơ cấu trong hệ quy chiếu động (tức đối với mặt phẳng khung quay) ta dễ dàng tính được :

$$Q_\alpha = -2l\sin\alpha\,[P + Q + 2cl\,(1 - \cos\alpha)],$$

$$Q_\alpha^{qte} = \frac{2Q}{g}\,(a + l\sin\alpha)\omega^2 l\cos\alpha.$$

Từ đó

$$-2l\sin\alpha[P + Q + 2cl(1 - \cos\alpha)] + \frac{2Q}{g}(a + l\sin\alpha)\omega^2 l\cos\alpha = 0,$$

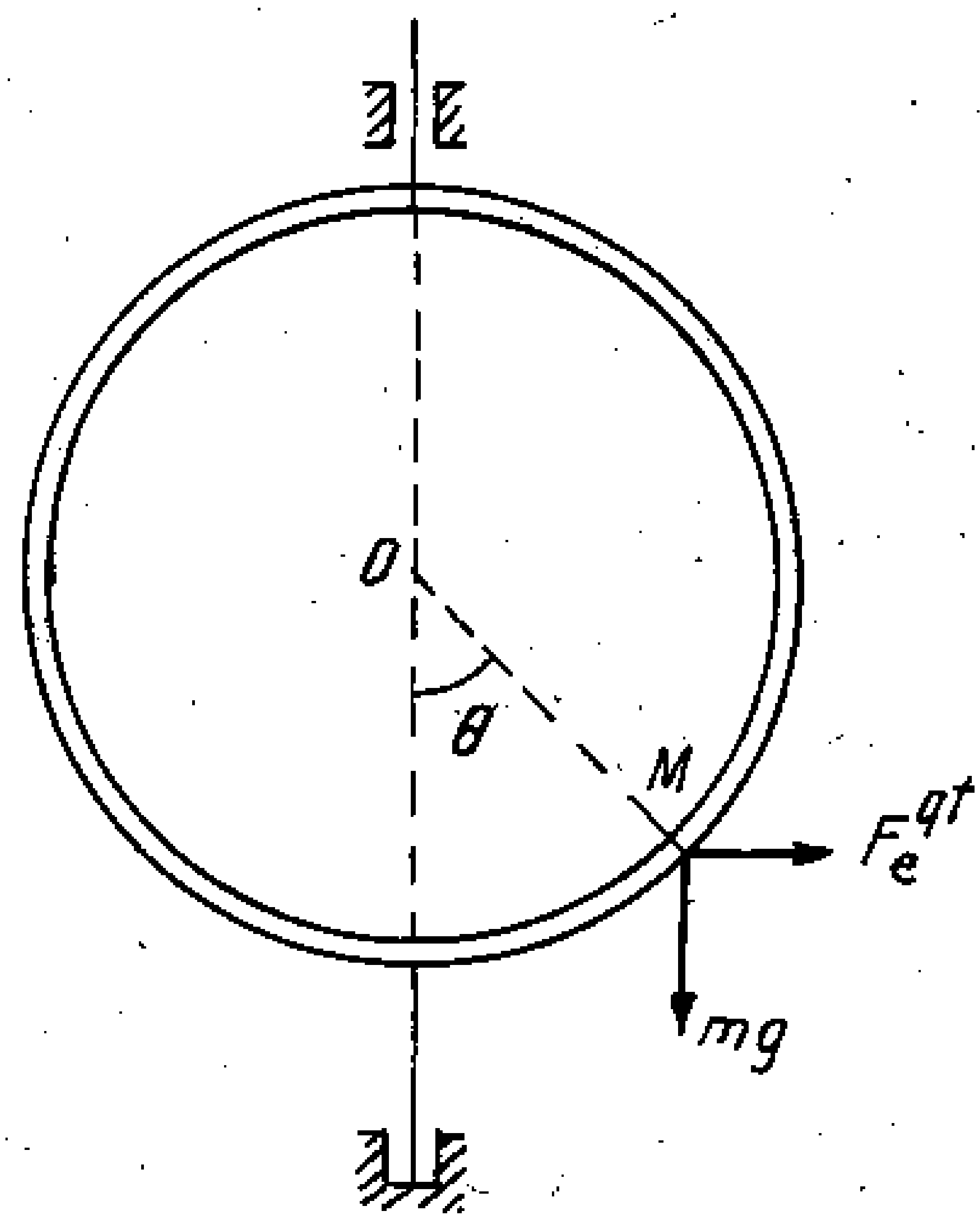
Bằng cách đó chúng ta nhận được kết quả đã tìm ở trên.

Thí dụ 7-4. Một chất điểm có khối lượng m chuyển động theo vòng tròn bán kính a, đồng thời vòng tròn quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω.

Thành lập phương trình chuyển động của chất điểm đối với khung. Bỏ qua ma sát.

Bài giải. Khảo sát chuyển động của chất điểm M.

Nếu chọn khung quay làm hệ động thì chuyển động của chất điểm M đối với khung là chuyển động tương đối. Như vậy, cần



HÌNH 7 - 5

thành lập phương trình chuyển động của chất điểm M trong chuyển động tương đối.

Trong chuyển động tương đối chất điểm M có một bậc tự do.

Vì bỏ qua ma sát nên liên kết đặt lên chất điểm M là lý tưởng. Lực hoạt động là trọng lực đặt vào chất điểm.

Vị trí của chất điểm đối đối với hệ động được xác định nhờ tọa độ suy rộng đủ $q = \theta$ là góc giữa bán kính OM với trục thẳng đứng của khung.

Để viết phương trình chuyển động của chất điểm trong chuyển động tương đối ta có thể sử dụng phương trình Lagờrăng loại II trong chuyển động tương đối. Khi chú ý rằng lực suy rộng của các lực quán tính Côriôlic đối với tọa độ suy rộng θ bằng không, chúng ta có :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} = Q_\theta + Q_\theta^{qte}$$

trong đó T_r là động năng của chất điểm trong chuyển động tương đối, Q_θ là lực suy rộng của các lực hoạt động, Q_θ^{qte} là lực suy rộng của lực quán tính theo. Lực quán tính theo hướng nằm ngang xa trục quay và có giá trị (H.7 - 5)

$$F^{qte} = ma \, . \, \sin\theta \, . \, \omega^2$$

Để tính lực suy rộng Q_θ ta cho chất điểm một di chuyển khả dĩ ứng với góc $\delta\theta$ và tính công khả dĩ của trọng lực đặt lên chất điểm trong di chuyển khả dĩ đó

$$\delta A(\vec{F}) = -mg\sin\theta \, . \, a \, . \, \delta\theta.$$

Vậy
$$Q_\theta = \frac{\delta A(\vec{F})}{\delta\theta} = -mg\sin\theta.$$

Bây giờ tính lực suy rộng của lực quán tính theo
$$\delta A\ (\vec{F}^{qte}) = F^{qte}\cos\theta\ .\ a\ .\ \delta\theta = ma^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2\delta\theta.$$
Do đó
$$Q_i^{qte} = \delta A\,\frac{(\vec{F}^{qte})}{\delta\theta} = ma^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2$$

Dễ dàng chỉ ra rằng lực suy rộng của các lực quán tính Côriolic bằng không, tức là.
$$Q_\theta^{qtc} = 0$$

Ta chuyển sang tính động năng của hệ trong chuyển động tương đối :
$$T_r = \frac{1}{2}mv_r^2.$$

Vì chất điểm chuyển động trên đường tròn với luật $s = a\theta$ nên :
$$v_r = \frac{ds}{dt} = a\dot{\theta}.$$

Do đó
$$T_r = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2.$$

Để viết phương trình Lagrăng loại II, ta tính các biểu thức đạo hàm
$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0\ \ ;\ \ \frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta}\ \ ;\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = ma^2\ddot{\theta}.$$

Vậy phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm trong ống vòng là :
$$ma^2\ddot{\theta} = ma(a\sin\theta\cos\theta\ .\ \omega^2 - g\sin\theta),$$
hay :
$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0.$$

Chú ý : 1 – Để viết phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong chuyển động tương đối, do chất điểm có một bậc tự do, ta có thể sử dụng định lí biến thiên động năng trong dạng :

$$\frac{dT_r}{dt} = W(\vec{F}) + W(\vec{F}^{qte}),$$

trong đó $W(\vec{F})$ là công suất của các lực hoạt động, $W(\vec{F}^{qte})$ là công suất của các lực quán tính theo. Dễ dàng tính được

$$W(\vec{F}) = \vec{P}\,\vec{v}_r = -mga\sin\theta\dot{\theta},$$

$$W(\vec{F}^{qte}) = \vec{F}^{qte}\,\vec{v}_r = ma^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2\,\dot{\theta}.$$

$$\frac{dT_r}{dt} = ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta}.$$

Từ đó :

$$ma^2\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} = ma^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\,\omega^2 - mga\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Vì chất điểm đang chuyển động nên $\dot{\theta} \neq 0$. Sau khi rút gọn và chuyển vế ta nhận được.

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0$$

Bằng cách như vậy ta tìm lại được kết quả đã tìm ra ở trên.

2 – Cũng có thể sử dụng định lý biến thiên mômen động trong chuyển động tương đối cho bài toán đã nêu trên.

3 – Trong trường hợp cần xác định biểu thức của vận tốc tương đối của chất điểm hàm theo góc ta có thể phân tích phương trình vi phân chuyển động của chất điểm (tìm tích phân đầu) hoặc sử dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn trong chuyển động tương đối

$$T_r - T_r(0) = \sum A_r(\vec{F}_k) + \sum A_r(\vec{F}_k^{qt}),$$

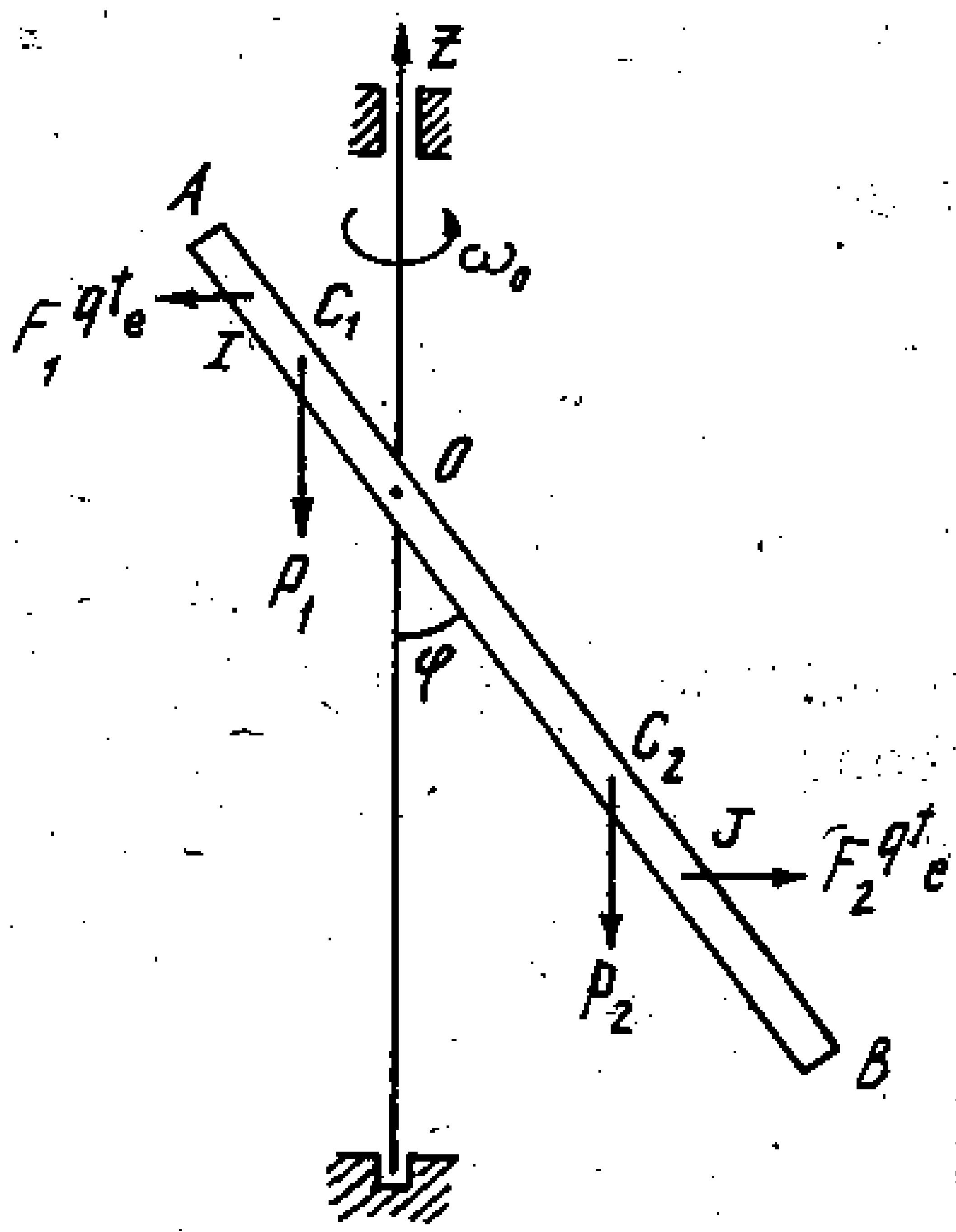
trong đó T_r và $T_r(0)$ là biểu thức động năng tương đối của cơ hệ (hoặc chất điểm) ứng với thời điểm đang xét và thời điểm đầu ; $\sum A_r(\vec{F}_k)$, $\sum A_r(\vec{F}^{qte})$ là công của các lực hoạt động và các lực quán tính theo trong di chuyển tương đối ứng với khoảng thời gian khảo sát. Cụ thể ta có :

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2}mv_{ro}^2 = mga(\cos\theta - \cos\theta_o) + \frac{ma}{2}\omega^2(\sin^2\theta - \sin^2\theta_o).$$

4 – Để nhận được lời giải của bài toán có thể viết phương trình Lagờrăng loại II trong hệ quy chiếu cố định và trong phương trình vi phân chuyển động ta đặt điều kiện để ống vòng quay đều. Bằng cách đó cũng nhận được phương trình vi phân chuyển động của chất điểm M trong chuyển động tương đối.

Thí dụ 7-5. Một thanh đồng chất AB được gắn bằng bản lề O vào một trục quay thẳng đứng, trong đó chốt bản lề O thẳng góc với mặt phẳng ∏ chứa thanh AB và trục quay. Cho OA = a, OB = b. Bỏ qua ma sát, xác định chuyển động của thanh AB trong mặt phẳng ∏ khi trục quay với vận tốc ω.

Bài giải. Khảo sát chuyển động của thanh AB. Nếu chọn mặt phẳng ∏ chứa thanh AB và trục quay làm hệ động thì chuyển động của thanh AB trong mặt phẳng ∏ là chuyển động tương đối. Để xác định chuyển động tương đối của thanh AB cần thành lập phương trình vi phân chuyển động của nó. Trong chuyển động tương đối thanh AB có một bậc tự do, vị trí của nó được xác định nhờ tọa độ suy rộng q = φ là góc giữa thanh và trục quay thẳng đứng.



HÌNH 7-6

Bỏ qua ma sát, liên kết đặt lên thanh là lý tưởng. Lực hoạt động chỉ là trọng lực của thanh.

Chúng ta viết phương trình Lagờrăng loại hai trong chuyển động tương đối của thanh, nó có dạng :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = Q_\varphi + Q_\varphi^{qte} + Q_\varphi^{qtc}$$

trong đó, T_r là động năng của thanh trong chuyển động tương đối, Q_φ – lực suy rộng của các lực hoạt động, Q_φ^{qte} – lực suy rộng của các lực quán tính theo, Q_{φ}^{qtc} – lực suy rộng của các lực quán tính Côriôlic. Trong trường hợp này dễ dàng chỉ ra rằng $Q_{\varphi}^{qtc} = 0$.

Để tính lực suy rộng của các lực hoạt động cho thanh một di chuyển khả dĩ ứng với góc $\delta\varphi$ và tính tổng công khả dĩ của các lực trong di chuyển khả dĩ đó, hệ số của $\delta\varphi$ trong biểu thức tổng công khả dĩ đó sẽ là lực suy rộng.

Vì lực hoạt động là trọng lực $\vec{P_1}$ và $\vec{P_2}$ của phần OA và OB tương ứng nên :

$$\sum \delta A\ (\vec{F}) = P_1 \frac{a}{2} . \sin\varphi.\delta\varphi - P_2 \frac{b}{2} \sin\varphi\delta\varphi = (P_1 a - P_2 b)\ \sin\frac{\varphi}{2}\delta\varphi.$$

Từ đó

$$Q_{\varphi} = \frac{1}{2}\ (P_1 a - P_2 b) \sin\varphi.$$

Bây giờ tính lực suy rộng của các lực quán tính theo. Nhận xét rằng lực quán tính theo của mỗi phân tố của thanh gồm lực quán tính theo pháp và lực quán tính theo tiếp, trong đó tổng công của các lực quán tính theo tiếp trong di chuyển khả dĩ tương đối bằng không (lực vuông góc với quỹ đạo tương đối), còn lực quán tính theo pháp có thể đưa được về hai lực đặt tại các điểm I và J $\left(OI = \frac{2}{3} OA\ ;\ OJ = \frac{2}{3} OB\right)$ có phương chiều như hình vẽ và có giá trị (xem thí dụ 4–4)

$$F_1^{qte} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g} a\sin\varphi\omega^2\ ;\ F_2^{qte} = \frac{P_2}{2g} b\sin\varphi\omega^2.$$

$$\sum \delta A(\vec{F_k^{qte}})\ F_1^{qte} \frac{2}{3} a\cos\varphi\delta\varphi + F_2 qte \frac{2}{3} b\cos\varphi\delta\varphi =$$

$$= \frac{1}{3g} (P_1 a^2 + P_2 b^2) \sin\varphi \cos\varphi\ \omega^2 \delta\varphi$$

Vậy :

$$Q_{\varphi}^{qte} = \frac{1}{3g} (P_1 a^2 + P_2 b^2) \sin\varphi \cos\varphi\ \omega^2.$$

Trong chuyển động tương đối thanh quay quanh trục O thẳng góc với mặt phẳng $\prod$, nên

$$T_r = \frac{1}{2} J_o \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{P_1}{g}\frac{a^2}{3} + \frac{P_2}{g}\cdot\frac{P_2}{g}\cdot\frac{b^2}{3}\right]\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{6g}(P_1 a^2 + P_2 b^2)\dot{\varphi}^2.$$

Vì

$$\frac{\partial T_r}{\partial \varphi} = 0 \; ; \quad \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3g}(P_1 a^2 + P_2 b^2)\dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3g}(P_1 a^2 + P_2 b^2)\ddot{\varphi},$$

nên phương trình Lagờrăng loại hai trong chuyển động tương đối có dạng :

$$\frac{1}{3g}(P_1 a^2 + P_2 b^2)\ddot{\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}(P_1 a - P_2 b)\sin\varphi + \frac{1}{3g}(P_1 a^2 + P_2 b^2)\sin\varphi\cos\varphi\,\omega^2,$$

nó mô tả chuyển động của thanh AB trong mặt phẳng $\prod$, tức chuyển động tương đối của thanh.

Rõ ràng phương trình vi phân chuyển động của thanh có một nghiệm riêng khi

$$\omega = \text{const} = \omega_o \; (\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0 \; ; \; \varphi = \text{const}).$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{3g}{2\omega_o^2}\cdot\frac{b^2 - a^2}{a^3 + b^3)}\right] =$$

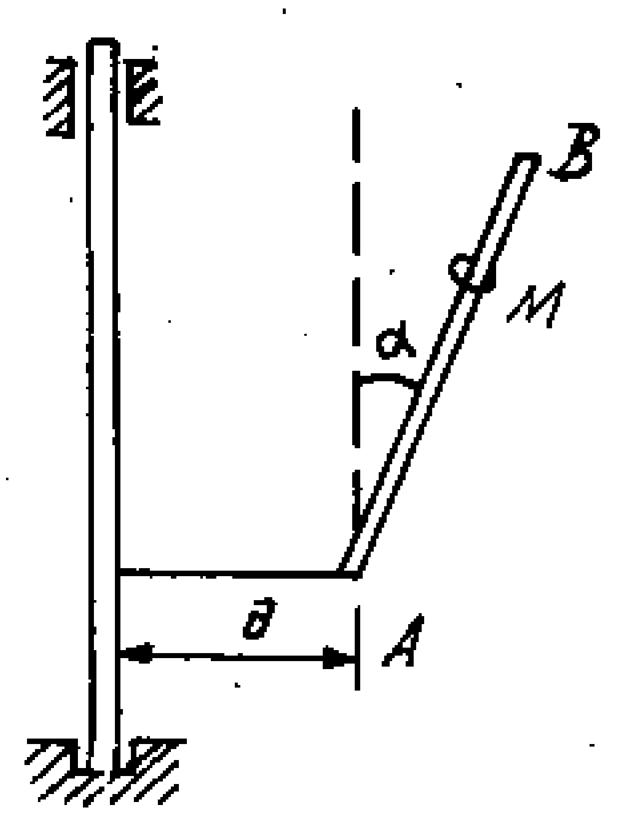
$$\arccos\left[\frac{3g}{2\omega_o^2}\cdot\frac{b - a}{(a^2 - ab + b^2)}\right] = \text{const},$$

nó ứng với chế độ ổn định : $\omega = \omega_o = \text{const}$; $\varphi = \text{const}$, tức khi trục quay đều, thanh AB tách khỏi trục quay một góc không đổi φ.

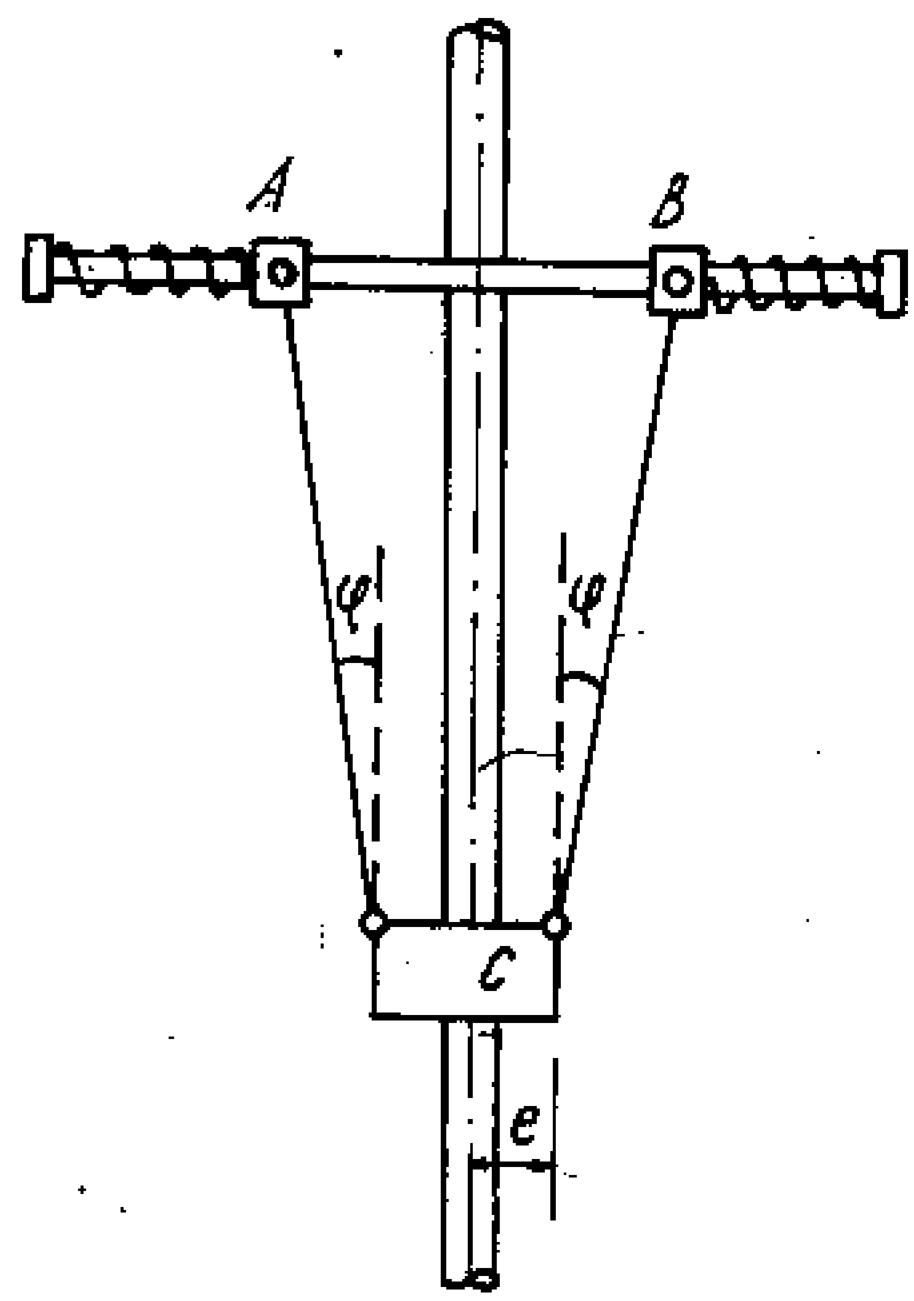
Chú ý : Để giải bài toán trên cũng có thể sử dụng hoặc phương trình vi phân vật quay hoặc định lí biến thiên động năng trong chuyển động tương đối.

7.4. BÀI TẬP

7-1. Thanh nhẵn AB quay đều quanh trục thẳng đứng, hợp với nó góc α = hằng. Xác định giá trị cực đại của vận tốc góc để một vòng nhỏ M lồng trên thanh có thể cân bằng tương đối ở vị trí thấp nhất A. Cho biết khoảng cách a từ A tới trục quay (H.7-7).



HÌNH 7-7



HÌNH 7-8

Trả lời : $\omega_{max} = \sqrt{\dfrac{g\cot g\alpha}{a}}$.

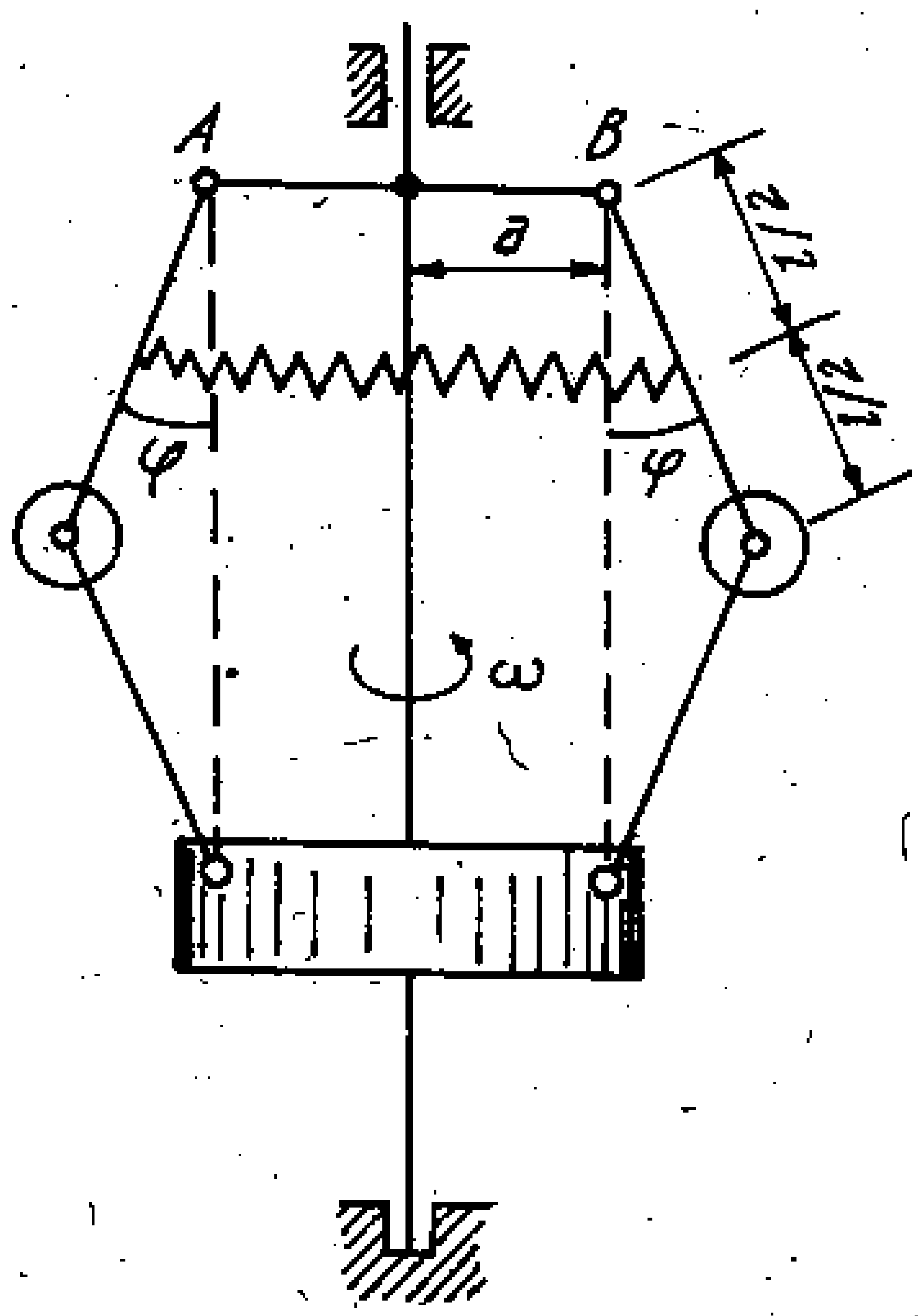
7-2. Một máy điều tiết li tâm dùng lò xo gồm có hai vật nặng A và B, trọng lượng mỗi vật bằng P, có thể trượt trên các trục nhẵn nằm ngang gắn cứng vào trục quay của máy. Đối trọng C có trọng lượng Q được nối với các vật A và B bằng cách thanh cứng và nhẹ có độ dài l. Khoảng cách từ bản lề nối thanh vào đối trọng C đến trục máy bằng e. Các lò xo có độ cứng c.

Tìm góc lệch φ làm bởi thanh BC và đường thẳng đứng khi trục quay đều với vận tốc góc ω_o (lúc đó φ = hằng). Cho biết khi thanh nghiêng với đường thẳng đứng góc φ_o thì lò xo không biến dạng, (H.7-8).

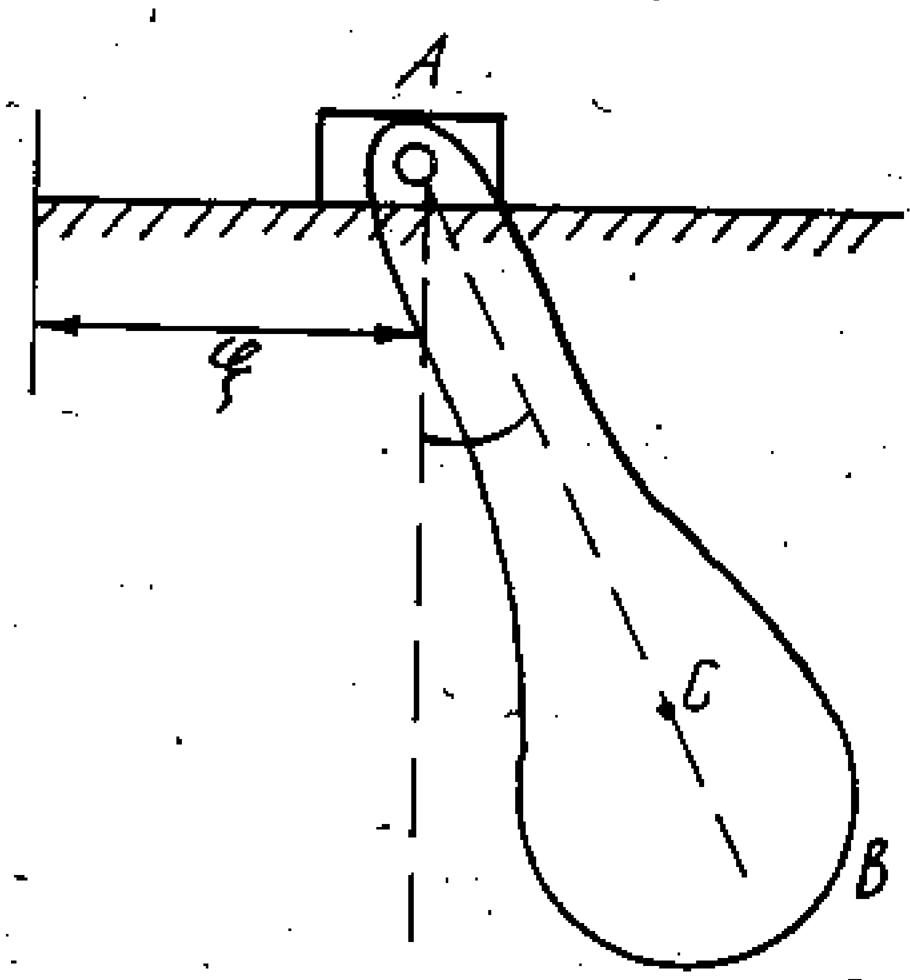
Trả lời : $$\omega^2 = g\,\frac{Qtg\varphi + 2cl\,(\sin\varphi - \sin\varphi_o)}{2P\,(e + l\sin\varphi)}$$

7-3. Cơ cấu điều tiết li tâm quay đều với vận tốc góc ω. Tìm liên hệ giữa ω và góc nghiêng φ của thanh với phương thẳng đứng. Khi cơ hệ cân bằng tương đối, cho biết các thanh có cùng chiều dài là l, trọng lượng của mỗi quả cầu là P, trọng lượng của đối trọng là Q, độ cứng lò xo là c và khi bằng $\varphi = 0$ thì lò xo không bị biến dạng. Lò xo được gắn vào các điểm treo A và B. Trục treo của các thanh cách trục quay một đoạn a (H.7-9).

Trả lời : $$\omega^2 = g\,\frac{\left(P + Q + \frac{cl}{2}\cos\varphi\right)}{P(a + l\sin\varphi)}\,tg\varphi$$



HÌNH 7-9



HÌNH 7-10

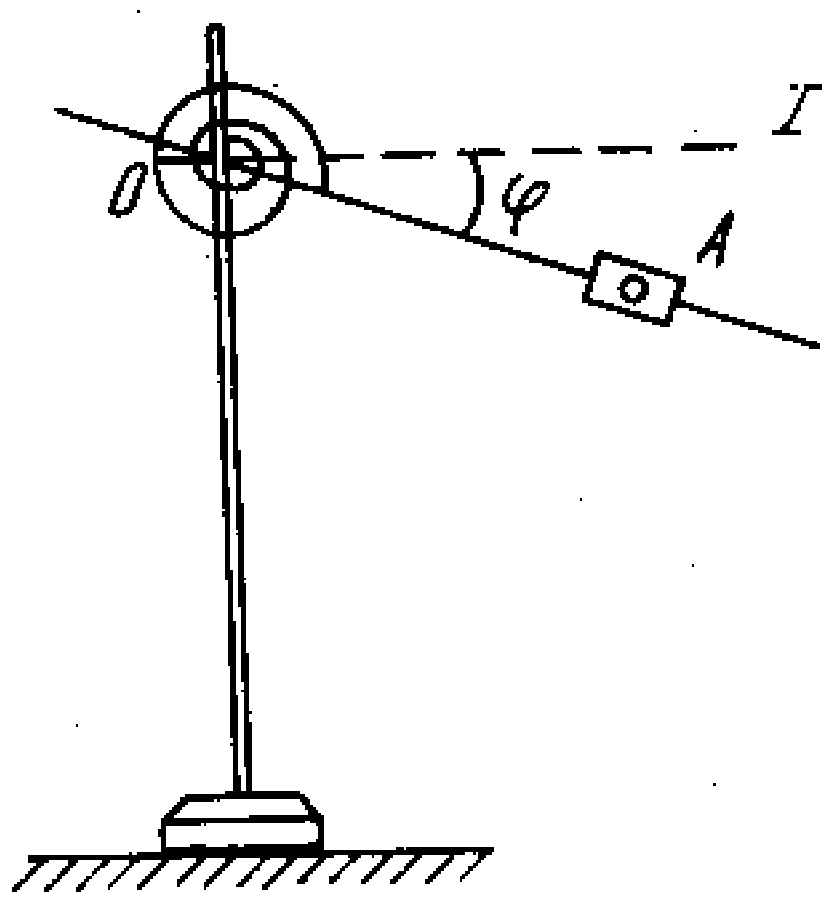
7-4. Một con lắc vật lý AB treo vào khối A như trên hình vẽ sao cho con lắc chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng.

Cho mômen quán tính của con lắc với trục quay của nó là J. Khoảng cách từ A đến khối tâm C của con lắc là a và khối lượng của con lắc bằng m.

Lập phương trình vi phân chuyển động của con lắc đối với khối A khi khối này chuyển động dao động ngang theo quy luật ξ = hsinpt. Bỏ qua ma sát (H.7-10).

Trả lời : $J\ddot{\varphi} + mga\varphi = map^2\sin pt$, trong đó φ là góc giữa AC và đường thẳng đứng.

7-5. Một máy ghi chấn thẳng đứng của nền móng có bộ phận chủ yếu được biểu diễn như trên hình vẽ. Đòn OA có khối lượng m, khối tâm C với OC = a, có mômen quán tính đối với trục O là J. Lò xo xoắn tác dụng lên đòn OA ngẫu lực xoắn có momen $M = c\varphi$, trong đó φ là góc giữa OA và OI (I là mút tự do của lò xo xoắn khi lò xo không làm việc), c là hệ số cứng.



HÌNH 7-11

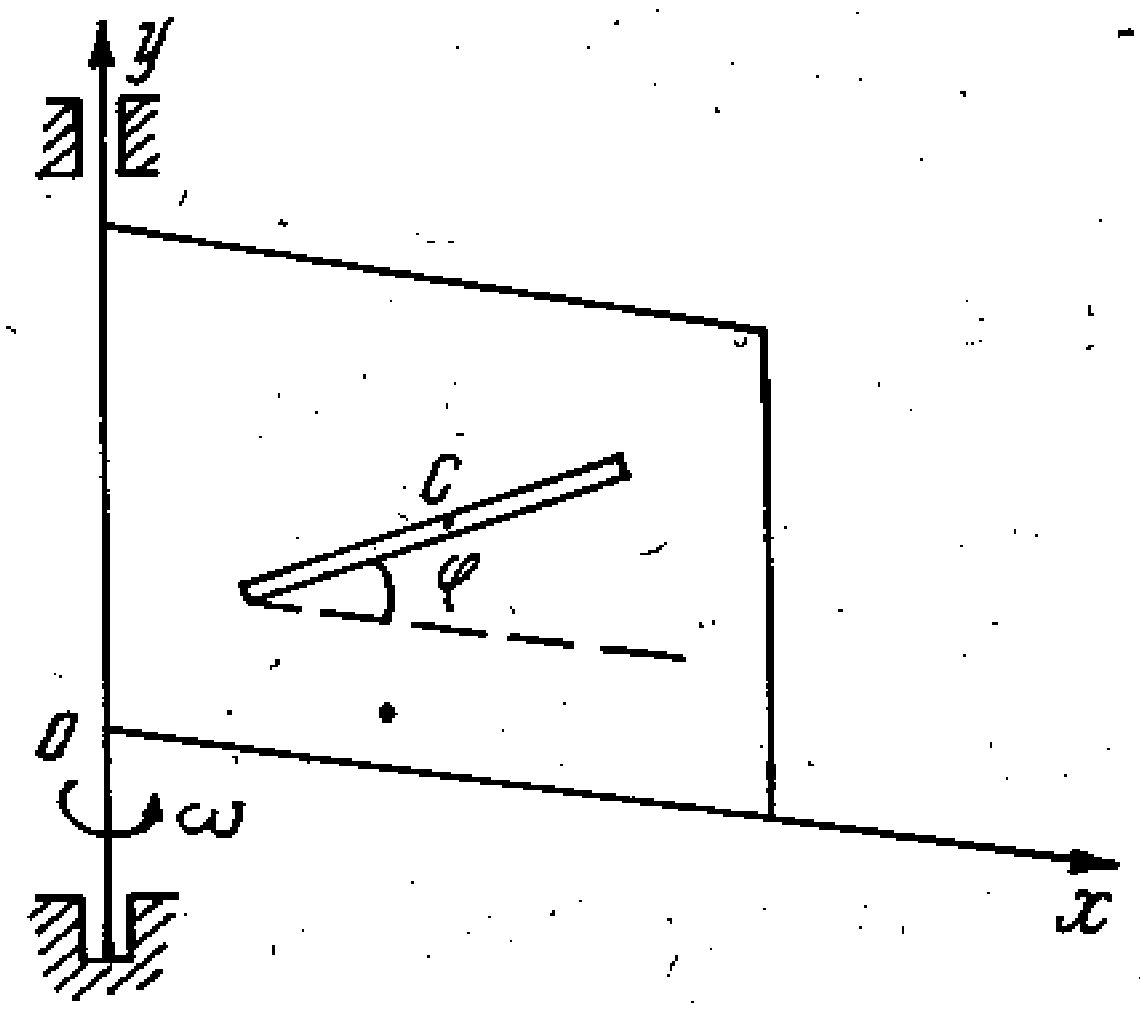
Đặt máy ghi lên nền rung thẳng đứng theo quy luật $\xi = \xi(t)$. Bỏ qua các lực cản. Lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của đòn OA đối với giá mang nó (hay đối với nền móng) khi nền không rung thì OA cân bằng tĩnh ở vị trí nằm ngang (H.7-11).

Trả lời : $J\ddot{\varphi} + c\varphi = ma\ddot{\xi}$. Trong đó φ là góc lệch của OA so với phương ngang.

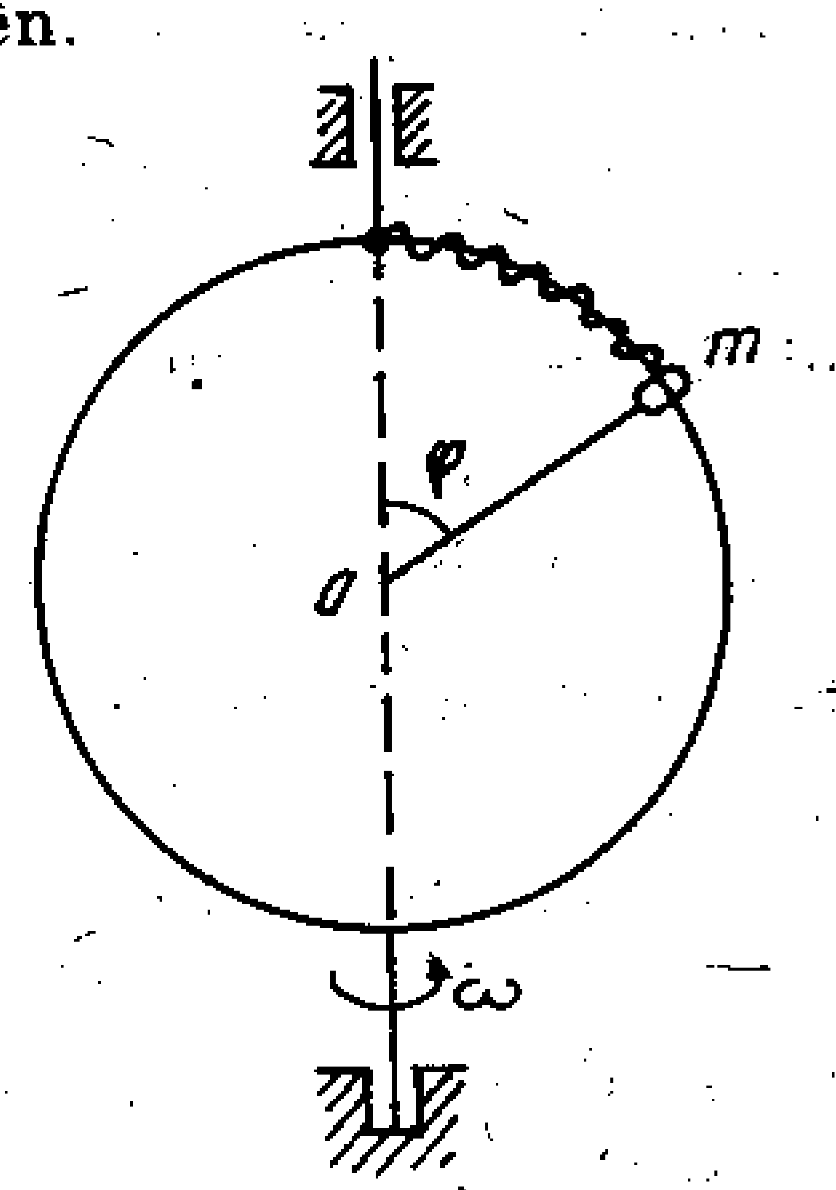
7-6. Một thanh đồng chất có thể chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng Oxy, mặt phẳng này lại quay với vận tốc góc không đổi ω quanh trục thẳng đứng Oy. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của thanh đối với mặt phẳng quay. Hãy so sánh với trường hợp khi mặt phẳng quay với vận tốc góc ω biến đổi (H.7-12).

Trả lời : $\ddot{x}_c - \omega^2 x_c = 0$; $\ddot{y}_c + g = 0$; $2\ddot{\varphi} + \omega^2\sin 2\varphi = 0$.

Trong trường hợp mặt phẳng quay với vận tốc góc biến đổi $\omega = \omega(t)$ phương trình chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng quay cũng có dạng như trên.



HÌNH 7-12

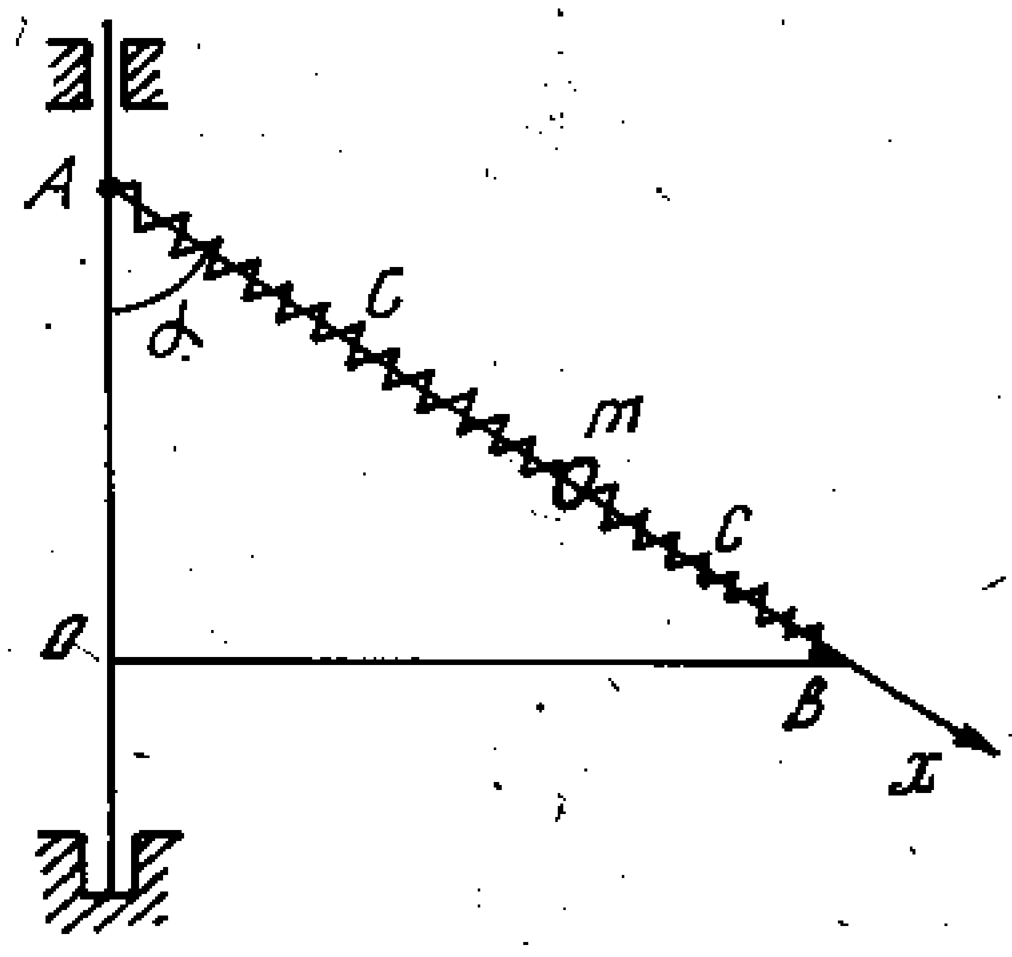


HÌNH 7-13

7-7. Một vòng tròn nhẵn bán kính R quay quanh đường kính thẳng đứng của mình với vận tốc góc không đổi ω. Một vành khuyên khối lượng m lồng trên vành tròn và nối với điểm cố định O nhờ lò xo có độ cứng c. Độ dài của lò xo khi không biến dạng bằng $R\varphi_0$. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của khuyên trong chuyển động của nó dọc theo vành tròn (H.7-13).

Trả lời : $\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}\omega^2\sin 2\varphi + \frac{c}{2m}(\varphi - \varphi_0) - \frac{g}{R}\sin\varphi = 0.$

7-8. Một khuyên khối lượng m có thể trượt dọc theo một thanh nhẵn AB có chiều dài 2l, các đầu của thanh được hàn vào khung OAB vuông góc tại O, khung này quay quanh trục thẳng đứng OA với vận tốc góc không đổi ω. Khuyên được nối với hai điểm cố định A và B nhờ hai lò xo có độ cứng như nhau và bằng c. Độ dài của mỗi lò xo khi không làm việc



HÌNH 7-14

bằng l. Cho góc $\widehat{OAB} = \alpha$. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của khuyên dọc thanh AB (H.7-14).

Trả lời :

$$x = a\sin(\sqrt{\lambda}t + \beta) + \frac{1}{\lambda}(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha),$$

khi $2c > m\,\omega^2\sin^2\alpha$;

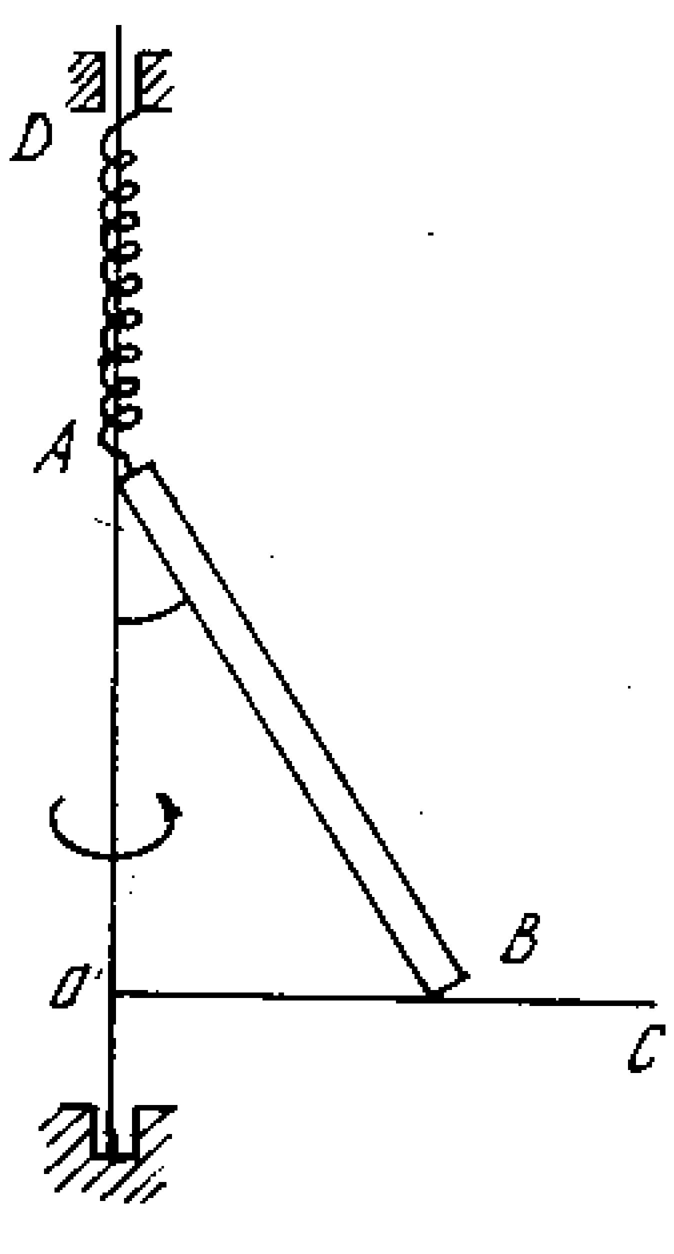
$$x = b\,\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}t + \gamma) + \frac{1}{\lambda}(g\cos\alpha + \omega^2 l\sin^2\alpha),$$

khi $2c < m\omega^2\sin^2\alpha$;

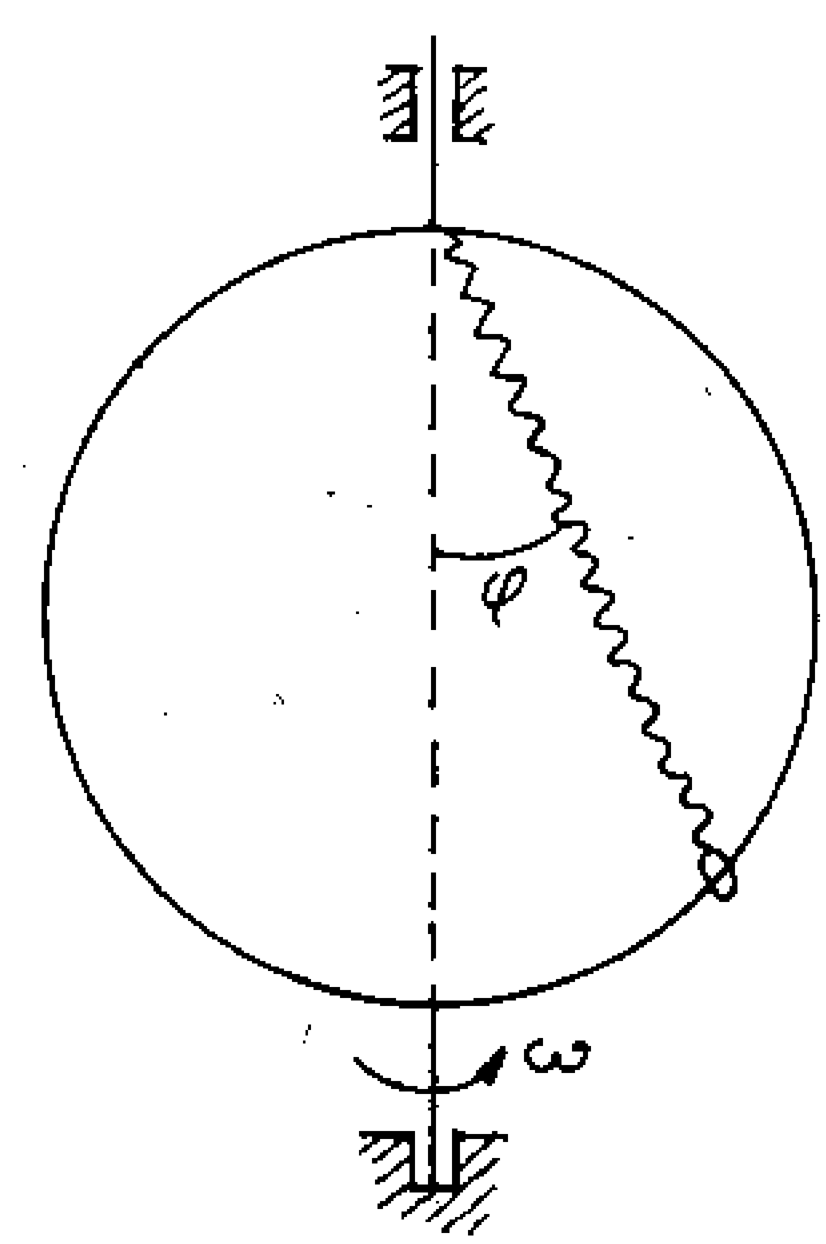
$$x = (g\cos\alpha + \omega l\sin^2\alpha)\frac{t^2}{2} + d_1t + d_2\text{ , khi } 2c = m\omega^2\sin^2\alpha\text{ ,}$$

trong đó a, b, d_1, d_2, β, γ là các hằng số tùy ý và $\lambda = \left|\dfrac{2c}{m} - \omega^2\sin^2\alpha\right|$

7-9. Một thanh đồng chất AB, khối lượng m và chiều dài l, có thể trượt không ma sát theo các cạnh của góc vuông DOC, cạnh OD của nó theo phương thẳng đứng. Điểm A của thanh nối với điểm cố định D trên trục quay OD nhờ lò xo có độ



HÌNH 7-15



HÌNH 7-16

cứng c. Góc DOC quay quanh trục OD với vận tốc góc không đổi. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của thanh trong mặt phẳng quay DOC. Cho biết khi $\varphi = \varphi_o$ lò xo không bị biến dạng (H.7-15).

Trả lời : $\ddot{\varphi} - \frac{\omega^2}{2}\sin 2\varphi - \frac{3c}{m}(\cos\varphi - \cos\varphi_o)\sin\varphi - \frac{3g}{2l}\sin\varphi = 0$

7-10. Một vành tròn nhẵn bán kính R quay với vận tốc góc ω không đổi quanh đường kính thẳng đứng của mình. Một khuyên khối lượng m nối với điểm cố định của vành nhờ lò xo có độ cứng c. Thành lập phương trình chuyển động tương đối của khuyên dọc vành tròn (H.8-16).

Trả lời :

$$4mR\ddot{\varphi} - m\omega^2 R\sin 4\varphi + 2mg\sin 2\varphi - 2c\sin\varphi(2R\cos\varphi - l_o) = 0.$$

7-11. Trở lại bài 4-12. Thành lập phương trình vi phân chuyển động tương đối của thanh gãy khúc AB.

Trả lời :

$$(a^2 + b^2)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}(a^2\sin\varphi - b^2\cos\varphi) - \frac{1}{2}\omega^2(b^3 - a^3)\sin 2\varphi = 0.$$

CHƯƠNG 8

VA CHẠM

8.1. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

8.1.1. Hiện tượng, các đặc điểm và các giả thiết về va chạm

Va chạm là một quá trình động lực xảy ra trong một thời gian rất ngắn, trong đó vận tốc các chất điểm của cơ hệ thay đổi đột ngột.

Khảo sát kỹ, ta thấy nói chung quá trình va chạm gồm hai giai đoạn, giai đoạn biến dạng và giai đoạn khôi phục. Giai đoạn biến dạng kể từ lúc bắt đầu xảy ra va chạm cho đến khi các vật va chạm hết biến dạng. Giai đoạn khôi phục kể từ lúc kết thúc biến dạng, các vật khôi phục hình dạng cũ cho đến lúc kết thúc va chạm.

Va chạm được phân thành : va chạm mềm, va chạm đàn hồi và va chạm hoàn toàn đàn hồi.

Đặc điểm của va chạm mềm là sau giai đoạn biến dạng hình dáng cũ của các vật va chạm không được khôi phục lại mà chúng gắn liền lại với nhau thành một vật, nghĩa là không xảy ra giai đoạn khôi phục, mà chỉ có giai đoạn biến dạng. Nếu trong va chạm xảy ra cả hai giai đoạn biến dạng và khôi phục thì va chạm được gọi là và chạm đàn hồi. Trong va chạm đàn hồi sau khi kết thúc va chạm các vật chỉ khôi phục được một phần hình dáng của mình trước khi va chạm. Nếu sau khi va chạm mà các vật khôi phục toàn bộ hình dạng của mình trước khi va chạm thì va chạm được gọi là hoàn toàn đàn hồi.

Trong quá trình va chạm các vật thể chịu tác dụng của hai loại lực : lực thường và lực va chạm.

Lực va chạm là những phản lực liên kết động lực xuất hiện khi hai vật va chạm nhau. Ngoài lực va chạm các lực khác tác dụng lên cơ hệ được gọi là lực thường. Lực va chạm là lực có xung lượng giới nội trong thời gian va chạm, còn lực thường có xung lượng cùng bậc với thời gian va chạm vô cùng bé.

Xung lượng của lực va chạm được gọi tắt là xung lực va chạm.

Các giai đoạn va chạm thường được đánh giá qua các xung lực va chạm trong các giai đoạn đó. Nếu gọi S_1 và S_2 là xung lực va chạm trong giai đoạn biến dạng và khôi phục tương ứng, quá trình va chạm thường được đánh giá qua tỷ số, được gọi là hệ số khôi phục, được định nghĩa như sau :

$$k = \frac{S_2}{S_1} . \qquad (8\text{-}1)$$

Rõ ràng ta có $k = 0$ trong va chạm mềm ;

$k = 1$ trong va chạm hoàn toàn đàn hồi ;

$0 < k < 1$ trong va chạm đàn hồi.

Chú ý rằng trong va chạm của cơ hệ có thể xảy ra đồng thời va chạm giữa các vật thuộc cơ hệ và va chạm của các vật đó với các vật ngoài cơ hệ đang xét. Va chạm loại đầu gọi là va chạm trong, va chạm loại sau được gọi là va chạm ngoài. Xung lực va chạm ngoài tác dụng vào cơ hệ được ký hiệu là $\vec{S}_{e1}$, $\vec{S}_{e2}$ ... Xung lực va chạm trong bao giờ cũng xuất hiện từng đôi một trực đối nhau, ký hiệu là $\vec{S}_{i_1}$, $\vec{S}_{i_2}$ ...

Quá trình va chạm là quá trình rất phức tạp. Để đơn giản dựa vào các đặc điểm của quá trình va chạm người ta đưa ra các giả thiết sau :

Giả thiết thứ nhất : Trong quá trình va chạm các lực thường được bỏ qua và chỉ xét các lực va chạm.

Giả thiết thứ hai : Trong quá trình va chạm các chất điểm không di chuyển.

Giả thiết thứ ba : Trong quá trình va chạm, hệ số khôi phục là hằng số đối với các thông số động học của quá trình va chạm (giả thiết này tương đương với giả thiết của niutơn).

8.1.2. Phương trình cơ bản của lý thuyết va chạm

a) Đối với chất điểm

$$m\vec{u} - m\vec{v} = \vec{S} \qquad (8\text{-}2)$$

trong đó m là khối lượng của chất điểm ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ là vận tốc của chất điểm sau và trước va chạm ; $\vec{S}$ là xung lực va chạm.

b) Đối với cơ hệ : Để giải quyết bài toán va chạm của cơ hệ người ta sử dụng định lý biến thiên động lượng của cơ hệ (trong dạng định lí chuyển động khối tâm) và định lí biến thiên mômen động lượng cơ hệ đối với một tâm hay một trục cố định. Đó là :

$$M\vec{u}_c - M\vec{v}_c = \sum \vec{S}_{ck}. \qquad (8\text{-}3)$$

$$\vec{L}_o^{(2)} - \vec{L}_o^{(1)} = \sum \vec{m}_o\,(\vec{S}_{ek}), \qquad (8\text{-}4)$$

$$\bar{L}_z^{(2)} - \bar{L}_z^{(1)} = \sum \bar{m}_z\,(\vec{S}_{ek}), \qquad (8\text{-}5)$$

trong đó M là khối lượng toàn hệ ; $\vec{u}_c$, $\vec{v}_c$ là vận tốc sau và trước va chạm của khối tâm C cơ hệ ; $\vec{S}_{ek}$ là xung lực va chạm ngoài tác dụng lên chất điểm thứ k thuộc cơ hệ ; $\vec{L}_o$, $\bar{L}_z$ là mômen động lượng cơ hệ đối với tâm O cố định và trục z cố định tương ứng ; chỉ số (2) và (1) chỉ thời điểm sau và trước va chạm.

8.1.3. Hiện tượng mất động năng trong va chạm

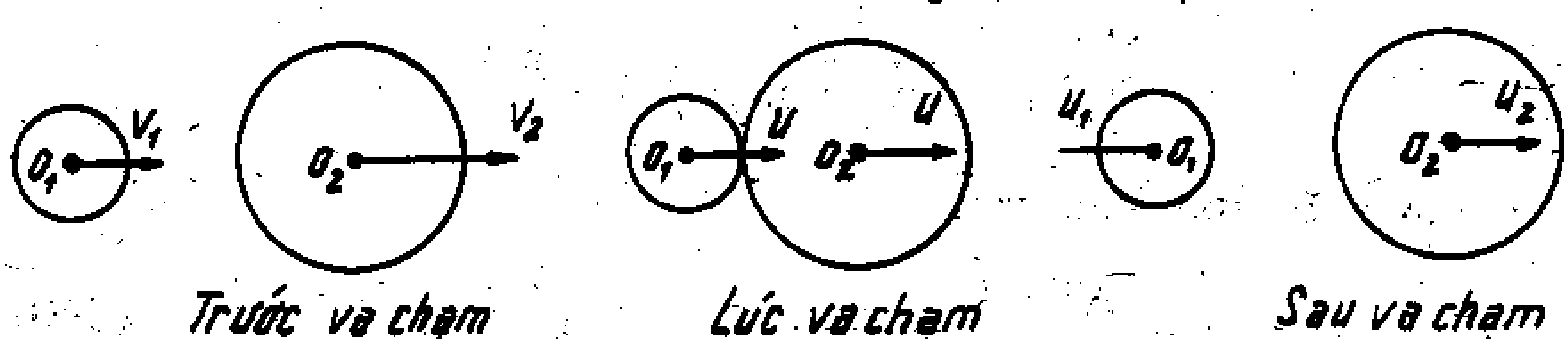
Trong va chạm bao giờ cũng có quá trình biến dạng và do đó bị mất động năng cho quá trình này. Vì vậy trong bài toán va chạm không áp dụng được định lí biến thiên động năng.

Gọi động năng của hệ trước và sau va chạm là T_o và T tương ứng, bao giờ ta cũng có $T \leq T_o$. Lượng $\Delta T = T_o - T$ là phần động năng bị mất đi qua va chạm. Trong quá trình va chạm, việc tính lượng động năng bị mất đi qua quá trình va chạm là một nhiệm vụ quan trọng của bài toán va chạm, nó chỉ được tính cụ thể trong từng loại va chạm mà không có công thức tổng quát. Lượng mất động năng trong va chạm quan hệ mật thiết với biến dạng trong va chạm. Va chạm càng đàn hồi thì lượng mất động năng càng nhỏ, trái lại nếu va chạm càng mềm, tức là biến dạng nhiều và khôi phục ít, thì lượng mất động năng càng lớn. Vì vậy nếu mục đích của va chạm là làm biến dạng các vật thể thì ta phải tìm cách tăng lượng mất động năng trong va chạm (ví dụ quá trình rèn, dập), còn nếu muốn hạn chế biến dạng phải tìm cách giảm lượng mất động năng trong va chạm (ví dụ quá trình đóng cọc).

8.1.4. Áp dụng

a) Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến (H. 8-1)

Ký hiệu m_1, m_2 là khối lượng của vật thứ nhất và vật thứ hai ; v_1, v_2 là vận tốc của chúng trước va chạm ; u_1, u_2 – vận tốc của chúng sau va chạm ; u là vận tốc chung của hai vật sau giai đoạn biến dạng (và là vận tốc của hai vật đầu giai đoạn khôi phục) ; S_1, S_2 là xung lực va chạm trong giai đoạn biến dạng và khôi phục ; k là hệ số khôi phục. Ta có :



Trước va chạm *Lúc va chạm* *Sau va chạm*

HÌNH 8-1

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \qquad (8-6)$$

$$u_1 = v_1 - (1 + k)\frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) ;$$

$$u_2 = v_2 + (1 + k)\frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2),$$

$$S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}|v_1 - v_2| \ ; \ S_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}|u_1 - u_2| . \quad (8\text{-}7)$$

Lượng mất động năng trong va chạm $\Delta T = T_1 - T_2$,

trong đó $T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$; $T_2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$,

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2. \quad (8\text{-}8)$$

Xét va đập của búa lên vật đứng yên. Gọi vận tốc trước va đập của búa là v_1, của vật chịu va đập là $v_2 = 0$. Khi đó

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)v_1^2.$$

Gọi động năng hệ trước va chạm là $T_o = \frac{m_1 v_1^2}{2}$,

$$\frac{\Delta T}{T_o} = \frac{m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2).$$

Hiệu suất của búa rèn

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_o} = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}(1 - k^2). \quad (8\text{-}9)$$

Hiệu suất của búa đóng cọc :

$$\eta_o = \frac{T_o - \Delta T}{T_o} = 1 - \eta = \frac{k^2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (8\text{-}10)$$

b) Va chạm của vật quay quanh một trục cố định (xét trường hợp vật là tấm phẳng và trục quay thẳng góc với mặt phẳng của tấm) (H. 8–2).

Ký hiệu S_{ox}, S_{oy} là xung lượng của phản lực va chạm tại trục quay O ; $\overline{\omega}$, $\overline{\omega}_o$ là vận tốc góc của tấm sau và trước va chạm ; S là xung lượng của lực va chạm tác dụng lên tấm, α là góc nghiêng của xung lượng va chạm $\vec{S}$ đối với đường thẳng qua trục và khối tâm C của tấm ; OC = a ; OI = d (I là giao điểm của đường tác dụng của xung lực va chạm S và OC. Ta có :

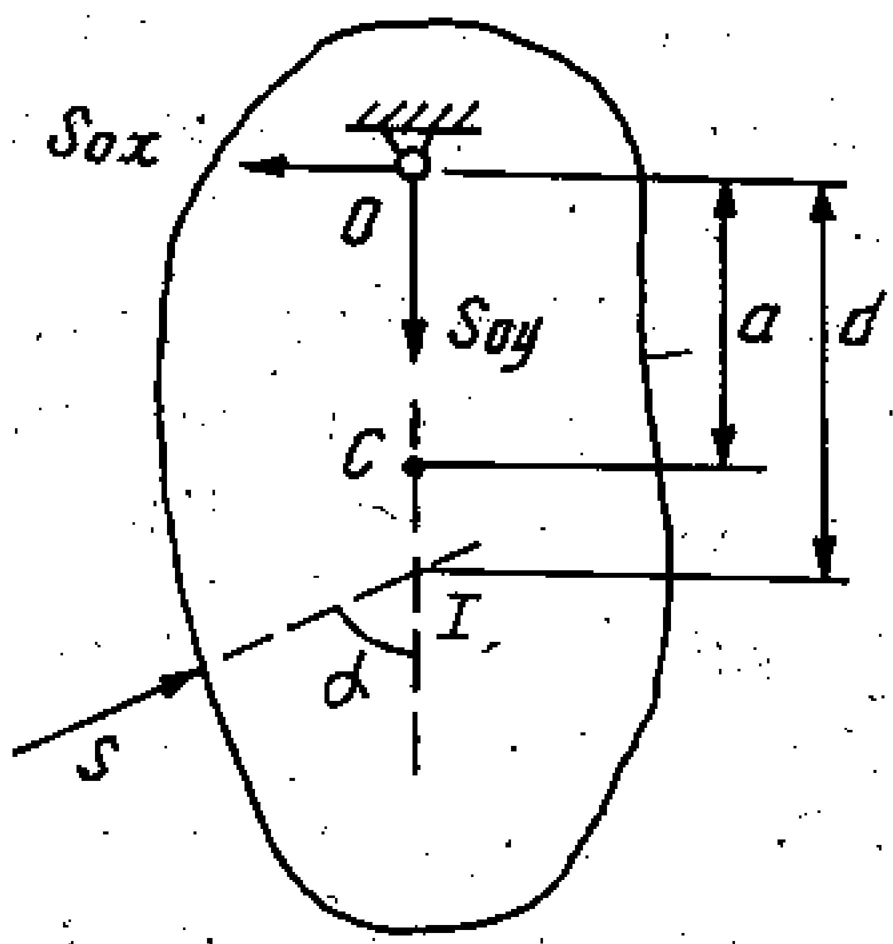
$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_o + \frac{S\sin\alpha d}{J} \tag{8–11}$$

$$S_{ox} = S\sin\alpha\left(\frac{Mda}{J_z} - 1\right) \; ; \; S_{oy} = S\cos\alpha, \tag{8–12}$$

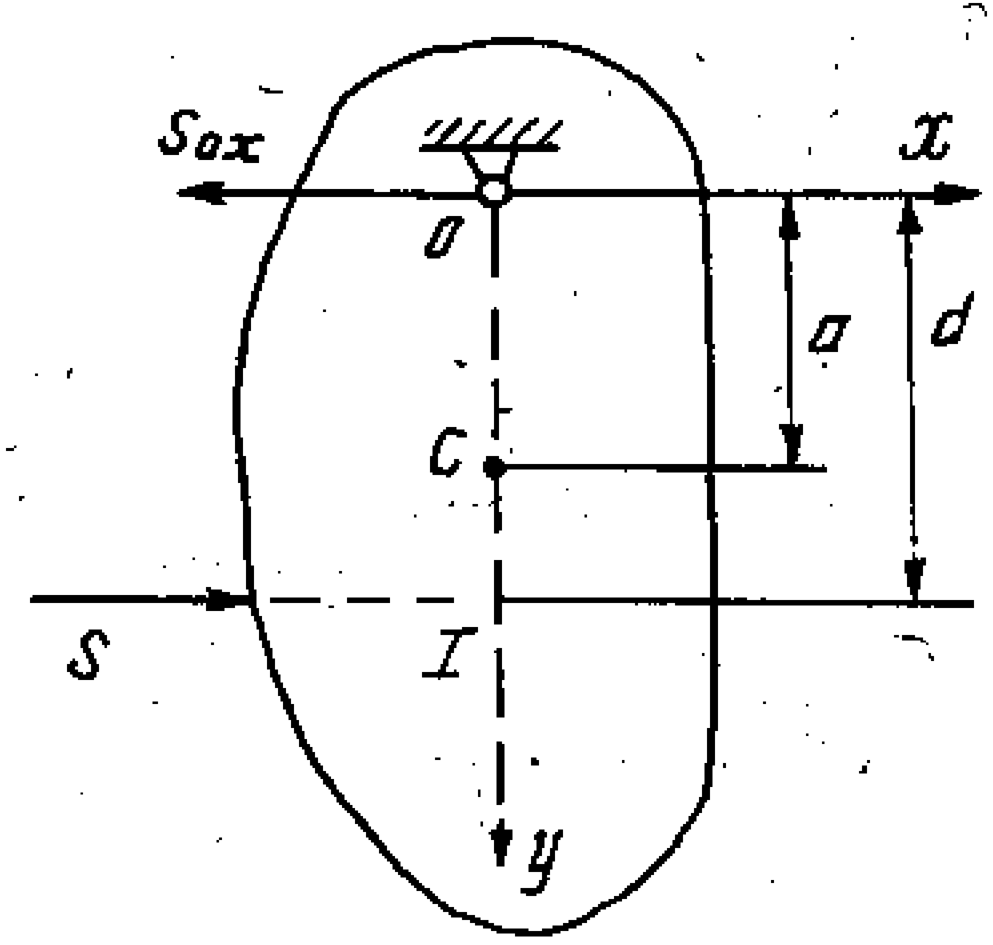
trong đó M là khối lượng của tấm, J_z là momen quán tính của tấm đối với trục quay. Điều kiện I là tâm va chạm tức là khi đường tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ qua A thì xung lượng của phản lực va chạm tại O bằng không ($S_{ox} = 0$; $S_{oy} = 0$), sẽ là (H.8–3)

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \; ; \; d_o = \sqrt{\frac{J_z}{Ma}} = \sqrt{\frac{\rho^2}{a}} \tag{8–13}$$

trong đó ρ là bán kính quán tính của tấm đối với trục quay qua O.



HÌNH 8–2



HÌNH 8–3

8.2. HƯỚNG DẪN ÁP DỤNG

Các bài toán va chạm thường bao gồm các bài toán thuận, bài toán ngược và bài toán tổng hợp.

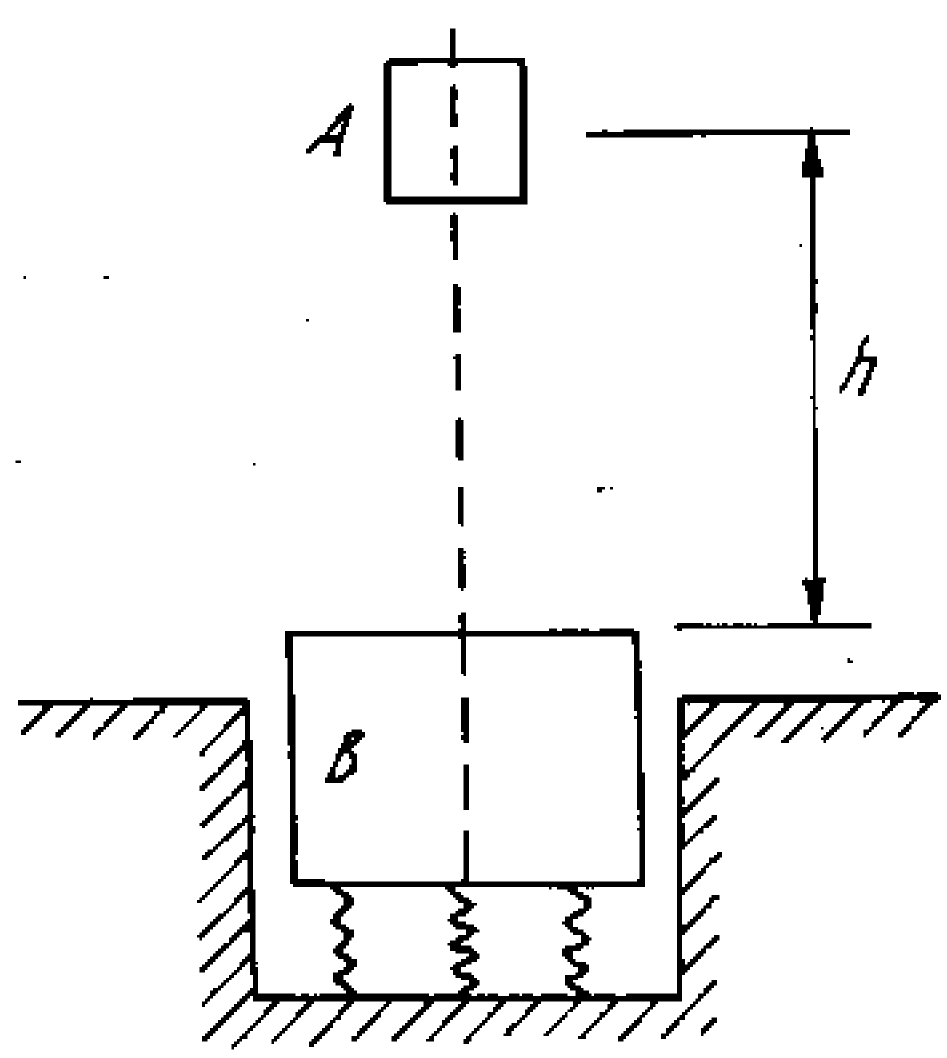
Bài toán ngược : Cho cơ hệ và các xung lực va chạm ngoài cùng với hệ số khôi phục và các yếu tố động học trước va chạm của cơ hệ. Tìm các yếu tố động học của cơ hệ sau va chạm.

Bài toán thuận : Cho biết trạng thái động học của cơ hệ trước và sau va chạm. Tìm các xung lực va chạm và lượng mất động năng.

Bài toán tổng hợp bao gồm cả hai bài toán trên.

Khi giải các bài toán va chạm, điều quan trọng nhất là phải nhận biết được quá trình va chạm và các quá trình không va chạm. Trong các quá trình không va chạm (quá trình trước va chạm và sau va chạm) ta áp dụng các định lý đã thiết lập cho quá trình động lực không va chạm, còn trọng các quá trình va chạm chúng ta sử dụng các công thức nêu ra trọng chương này. Nói cách khác, việc giải bài toán va chạm bao giờ cũng kèm theo giải các bài toán không va chạm.

8.3. BÀI GIẢI MẪU



HÌNH 8-4

Thí dụ 8-1. Từ trên cao 4,905m búa A rơi xuống mặt đe B đặt trên một lò xo gắn chặt vào đe và vào nền. Búa có khối lượng 10kg, đe có khối lượng 5kg. Cho biết va chạm hoàn toàn mềm. Tìm vận tốc chung của búa và đe sau lúc va chạm (H.8-4).

Bài giải. Ta có bài toán va chạm thẳng xuyên tâm và mềm của hai vật tịnh tiến. Quá trình va chạm chỉ xảy ra giai đoạn biến dạng và không có giai đoạn khôi phục. Vận tốc chung của búa và đe cuối giai đoạn biến dạng u được xác định theo công thức (8–6), ở đó $v_1 = v_A$, $v_2 = v_B = 0$

$$u = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$$

trong đó v_A là vận tốc của búa vừa chạm vào mặt đe. Dễ dàng tìm được

$$v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}905} = 9{,}81 \text{m/s}.$$

Vậy $$u = \frac{10 \cdot 9{,}81}{10 + 5} = 6{,}54 \text{m/s}$$

Thí dụ 8–2. Một búa hơi có khối lượng $m_1 = 2$ tấn đập vào mặt đe với tốc độ $v_1 = 5$m/s. Khối lượng của đe cùng với khối lượng của vật rèn là $m_2 = 250$ tấn. Va chạm được xem là hoàn toàn mềm. Tính công A_1 tiêu hao làm biến dạng vật rèn, công A_2 tiêu hao làm rung móng và tính hiệu suất của búa.

Bài giải. Sau búa đập vào đe, hệ búa đe cùng chuyển động với vận tốc u, được tính theo công thức (8–6).

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Động năng còn lại sau va chạm là :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)}.$$

Phần động năng này được tiêu hao trong quá trình chấn động của nền móng. Còn phần động năng tiêu hao cho quá trình rèn bằng :

$$\Delta T = T_o - T = \frac{m_1^2 v_1^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right).$$

Vậy hiệu suất của búa là

$$\eta = \frac{\Delta T}{T_o} = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$$

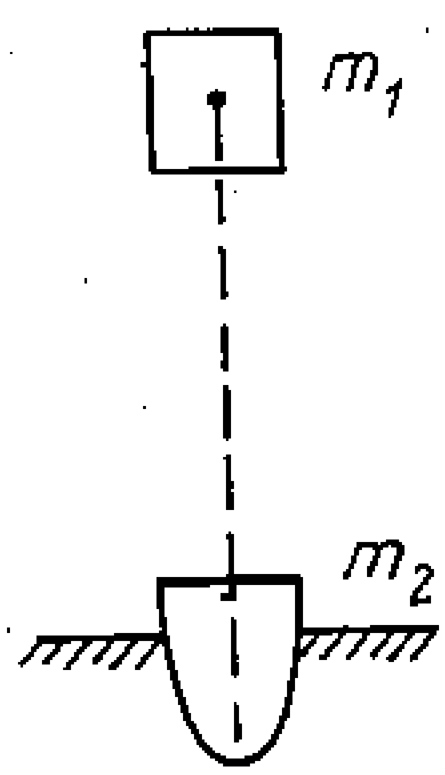
Để cho búa có hiệu suất lớn thì $m_2 >> m_1$, tức đe phải nặng hơn búa nhiều lần. Công A_1 làm biến dạng vật rèn chính là ΔT, tức bằng

$$A_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$= \frac{12 . 10^3 \times 5^2}{2}\left(1 - \frac{12}{250 + 12}\right) = 143{,}080\text{kW}.$$

Công A_2 tiêu hao và chấn động nền móng chính bằng động năng T :

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)} = \frac{(12 . 10^3)^2 . 5^2}{2(250 + 12)} = 6{,}860\text{kW}$$



HÌNH 8–5

Thí dụ 8–3. Để gia cố móng nhà người ta đóng cọc xuống đất. Búa có khối lượng m_1 = 450kg, rơi không vận tốc đầu từ độ cao 2m xuống đầu cọc. Cọc có khối lượng m_2 = 50kg, cứ sau 10 lần chịu đập lại ngập sâu xuống một đoạn δ = 5cm. Tìm lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc. Xem va chạm là va chạm mềm (H.8–5).

Bài giải. Ta gặp hiện tượng va chạm xuyên tâm của hai vật tịnh tiến. Quá trình va chạm bắt đầu từ khi hai vật va đập vào nhau và kết thúc ngay sau đó. Quá trình búa rơi tự do từ độ cao h = 2m đến va đập vào cọc là quá trình không va chạm. Còn quá trình sau va chạm cọc và búa cùng nhận được vận tốc u và lún sâu một đoạn δ sau mười lần va chạm cũng là quá trình không va chạm. Quá trình va chạm bắt đầu từ lúc búa đập vào cọc với vận tốc $v_1 = \sqrt{2gh}$ và kết thúc ngay sau khi búa và cọc nhận được vận tốc u được tính theo công thức (8–6), trong đó ta đặt $v_2 = 0$.

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\sqrt{2hg}}{m_1 + m_2}.$$

Từ đó

$$u^2 = 2\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}gh.$$

Sau khi nhận được vận tốc u, búa và cọc có động năng

$$T_o = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

và với năng lượng đó búa và cọc lún sâu xuống một đoạn $\delta/10$ sau một lần đập. Gọi F là lực cản của đất tác dụng lên cọc. Áp dụng định lý biến thiên động năng cho quá trình không va chạm này, ta có.

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = -\int_o^{\delta_1} F \,.\, ds = -F_{tb}\delta_1,$$

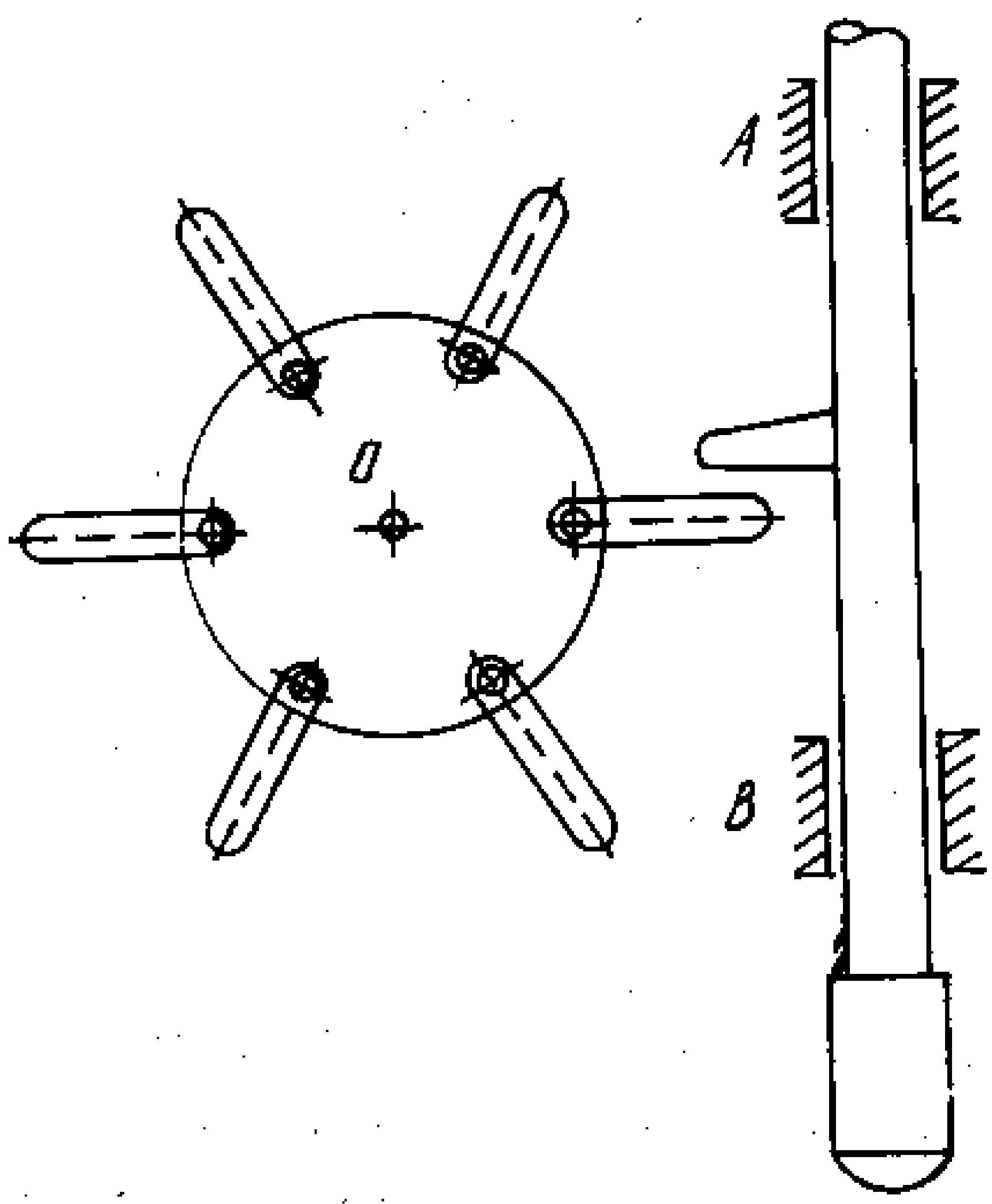
trong đó F_{tb} ký hiệu của lực cản trung bình của đất tác dụng lên cọc.

Vậy

$$F_{tb} = \frac{1}{2\delta_1}(m_1 + m_2)u^2 = \frac{1}{2\delta_1}(m_1 + m_2)\,.\,2\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}gh =$$

$$= \frac{m_1^2 gh}{\delta_1(m_1 + m_2)} = \frac{(450)^2 . 9{,}81 . 2}{0{,}05(450 + 50)} = 158{,}92\text{KN}.$$

Thí dụ 8–4. Ghép vào trục quay một vô lăng có mang những tay gạt để truyền chuyển động sang một cái chày. Giả thiết va chạm giữa tay gạt và chày là hoàn toàn mềm. Cho biết trước lúc va chạm chày đứng yên và trục quay với vận tốc góc



HÌNH 8–6

$\omega_o = 2\pi$rad/s, thời gian va chạm là $\tau = 0{,}05$s, mômen quán tính của trục quay với vô lăng đối với trục hình học của nó là $J = 49$kgm^2. Chày có khối lượng m = 25kg, khoảng cách từ điểm va chạm đến trục quay O là r = 20cm. Tìm vận tốc góc của vô lăng và vận tốc chày ngay sau khi va chạm và lực va chạm trung bình giữa tay gạt và chày. Bỏ qua ma sát (H. 8–6).

Bài giải. Ta gặp va chạm giữa một vật quay và một vật chuyển động tịnh tiến. Ở đây đã biết trạng thái động học của cơ hệ trước va chạm, đó là trục quay với vận tốc góc ω_o và chày đứng yên.

Đầu tiên ta xét va chạm của chày. Vì chày chuyển động tịnh tiến nên ta có

$$mu - 0 = S,$$

trong đó m là khối lượng của chày, u là vận tốc chày sau va chạm (vận tốc chày trước va chạm bằng không), S là xung lực va chạm do tay gạt tác động lên chày.

Bây giờ ta khảo sát chuyển động va chạm của vô lăng. Sử dụng phương trình va chạm vật quay (8–11) ta có

$$\omega = \omega_o - \frac{Sr}{J_z}.$$

Vì va chạm là mềm, vận tốc tiếp điểm của hai vật ngay sau va chạm bằng nhau, nên

$$u = \omega r.$$

Kết hợp các kết quả đã tìm, ta có :

$$\omega = \frac{J_z}{J_z + mr^2}\omega_o.$$

Thay các giá trị bằng số ta được :

$$\omega = \frac{49}{49 + 25(0,2)^2} . 2\pi = 6,15 l/s.$$

Từ đó : $u = \omega r = 6,15 . 0,2 = 1,23 m/s$

$$F_{tb} = \frac{S}{\tau} = \frac{mu}{\tau} = \frac{25 . 1,23}{0,05} = 6,15N.$$

Chúng ta có thể tính dễ dàng xung lượng của phản lực liên kết tại trục quay của vô lăng. Lượng mất động năng trong va chạm bằng :

$$\Delta T = T_o - T,$$

trong đó :

$$T_o = \frac{1}{2} J_z\omega_o^2,$$

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2 + \frac{mu^2}{2} = \frac{J_z + mr^2}{2} . \omega^2.$$

Vậy :

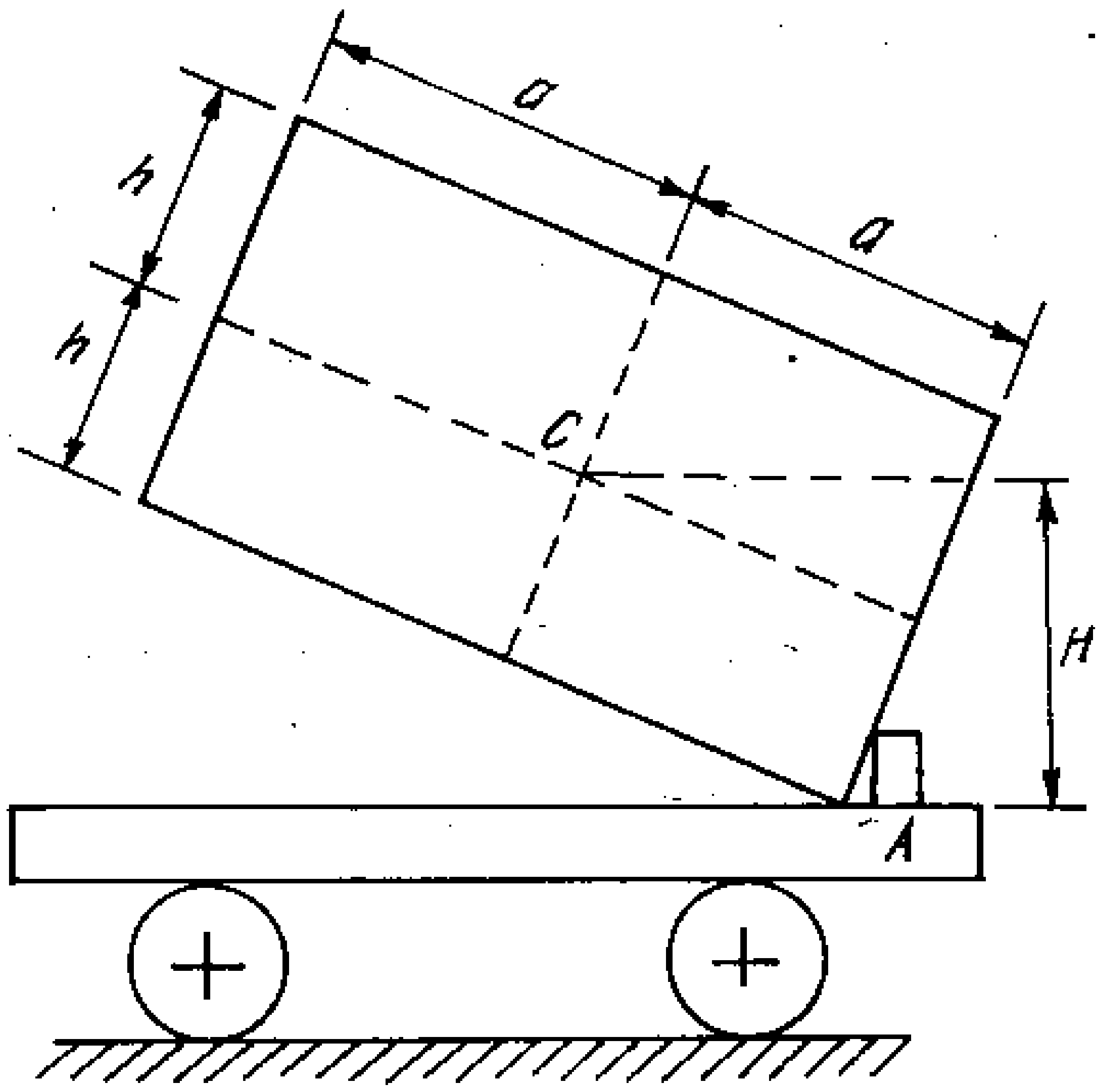
$$\Delta T = \frac{1}{2}J_z\omega_o^2 - \frac{1}{2}(J_z + mr^2)\omega^2 = J_z \frac{\omega_o^2}{2}\left(1 - \frac{J_z}{J_z + mr^2}\right)$$

Thay các giá trị bằng số vào ta được

$$\Delta T = \frac{49 . 4\pi^2}{2}\left(1 - \frac{49}{49 + 1}\right) = 98J.$$

Bỏ qua ma sát, hiệu suất của máy bằng

$$\eta = \frac{T_o - \Delta T}{T_o} = \frac{T}{T_o} = \frac{\dfrac{J_z^2 \omega_o^2}{2(J_z + mr^2)}}{J_z \dfrac{\omega_o^2}{2}} = \frac{J_z}{J_z + mr^2} = \frac{49}{49+1} = 0{,}89.$$



HÌNH 8–7

Thí dụ 8–5. Một cái sàn xe chở một vật nặng hình hộp chữ nhật đồng chất như trên hình vẽ. Sàn xe đang chạy thẳng với tốc độ v. Trên sàn có mấu A để cản không cho khối nặng trượt về phía trước. Chiều cao của khối là 2h và chiều dài của nó là 2a. Tìm vận tốc của khối hộp khi xe bị hãm đứng lại tức thời và vận tốc giới hạn của sàn xe ứng với trường hợp khối hộp bị lật nhào quanh mép A (H. 8–7).

Áp dụng số cho a = 2m ; h = 1,5m ; v = 9,8m/sec.

Bài giải. 1) Tìm vận tốc góc của khối hộp khi xe dừng lại tức thời. Khi xe dừng lại tức thời thì xảy ra va chạm giữa khối hộp và mấu A. Ngay trước khi va chạm khối hộp chuyển động tịnh tiến ngang với vận tốc v của sàn xe, sau khi va chạm khối hộp quay quanh trục cố định trùng với mép A với vận tốc góc ω.

Xung lực va chạm ngoài tác dụng vào khối nặng ngay tại mép A, do đó :

$$\sum \overline{m}_A (\overrightarrow{S_{ek}}) = 0,$$

và momen động lượng của khối nặng đối với mép A được bảo toàn qua va chạm, tức là :

$$\overline{m}_A (\overrightarrow{mv}) = J_{A_z} \omega_1.$$

Từ đó

$$mvh = J_{A_z} \omega_1.$$

Rút ra

$$\omega_1 = \frac{mh}{J_{A_z}} v.$$

Vì

$$J_{x_c} = \frac{ma^2}{12} ; \ J_{y_c} = \frac{mh^2}{12}.$$

Sử dụng định lý Stêne :

$$J_x = J_{x_c} + md^2 = \frac{ma^2}{12} + ma^2 = \frac{13ma^2}{12},$$

$$J_y = J_{y_c} + md_1^2 = \frac{mh^2}{12} + mh^2 = \frac{13}{12} mh^2.$$

Vì

$$J_{Az} = J_{Ax} + J_{Ay}$$

nên
$$J_{Az} = \frac{13}{12} m(a^2 + h^2).$$

Vậy

$$\omega_1 = \frac{mh}{\frac{13}{12} m(a^2 + h^2)} v = \frac{12}{13} \frac{h}{(a^2 + h^2)}.$$

2) Bây giờ ta tìm vận tốc giới hạn của sàn xe mà ta ký hiệu là v_{max}, ứng với trường hợp khối hộp bị lật nhào quanh mép A khi xe dừng lại tức thời.

Muốn thế ta khảo sát chuyển động quanh mép A của khối hộp sau khi kết thúc va chạm. Khối hộp quay chậm dần dưới tác dụng của trọng lực (quá trình không va chạm) nó sẽ bị lật nhào khi trọng tâm của nó đã lên vị trí cao nhất mà vận tốc của nó vẫn khác không. Sử dụng định lí biến thiên động năng với chuyển động này, ta có

$$J_{Az}\,(\omega_1^2 - \omega^2) = 2mg(H-h),$$

trong đó H là độ cao của trọng tâm của khối hộp so với mặt sàn xe ; ω là vận tốc góc của khối hộp khi độ cao của trọng tâm khối hộp là H ; ω_1 là vận tốc góc của khối hộp sau va chạm, còn ω_1 tính theo biểu thức nhận được ở phần 1).

Từ đó :

$$\omega^2 = \omega_1^2 - \frac{2mg}{J_{Az}}\,(H - h)$$

Khi $H = H_1 = AC = \sqrt{a^2 + h^2}$, tức là trọng tâm khối hộp ở vị trí cao nhất, vận tốc góc khối hộp bằng

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 - \frac{2mg}{J_{Az}}\,(\sqrt{a^2 + h^2} - h)\,.$$

Vậy khối hộp bị lật nhào quanh A nếu $\omega_2^2 > 0$, tức là

$$\omega_1^2 - \frac{2mg}{J_{A_z}}\,(\sqrt{a^2 + h_2} - h) > 0\,.$$

Do đó :

$$\frac{m^2h^2}{J_{Az}^2}\,v^2 - \frac{2mg}{J_{A_z}}\,(\sqrt{a^2 + h^2} - h) > 0\,.$$

Sau khi rút gọn ta nhận được điều kiện để khối hộp lật quanh mép A, đó là

$$v > \sqrt{\frac{13}{6h^2} g(a^2 + h^2) (\sqrt{a^2 + h^2} - h)}.$$

Vậy muốn cho khối hộp không bị lật nhào quanh mép A khi xe dừng đột ngột, vận tốc của sàn xe phải thỏa mãn điều kiện :

$$v \leq \sqrt{\frac{13}{6h^2} g(a^2 + h^2) (\sqrt{a^2 + h^2} - h)}.$$

Thay số vào ta có

$$v \leq 21,5 km/s.$$

8.4. BÀI TẬP

8–1. Xác định tỉ số khối lượng của hai quả cầu đàn hồi trong các trường hợp sau đây :

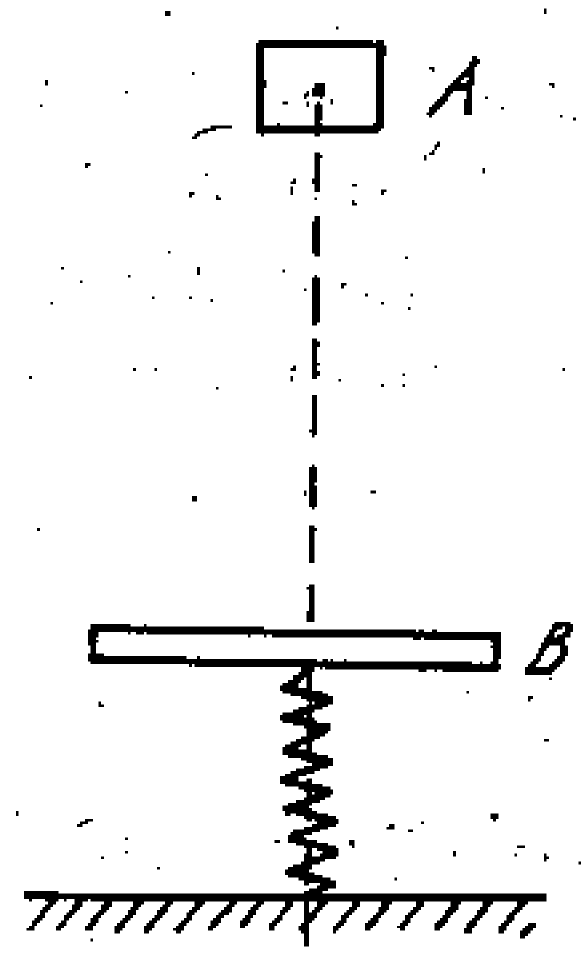
1 – Quả thứ nhất đang đứng yên bị quả cầu thứ hai va chạm thẳng vào nó làm cho nó chuyển động, còn quả cầu thứ hai thì đứng lại ;

2 – Hai quả cầu va chạm thẳng vào nhau với cùng giá trị vận tốc nhưng chuyển động ngược chiều nhau, sau đó quả cầu thứ nhất dừng lại.

Trả lời : 1) $\frac{m_2}{m_1} = k$;

2) $\frac{m_2}{m_1} = 1 + 2k$,

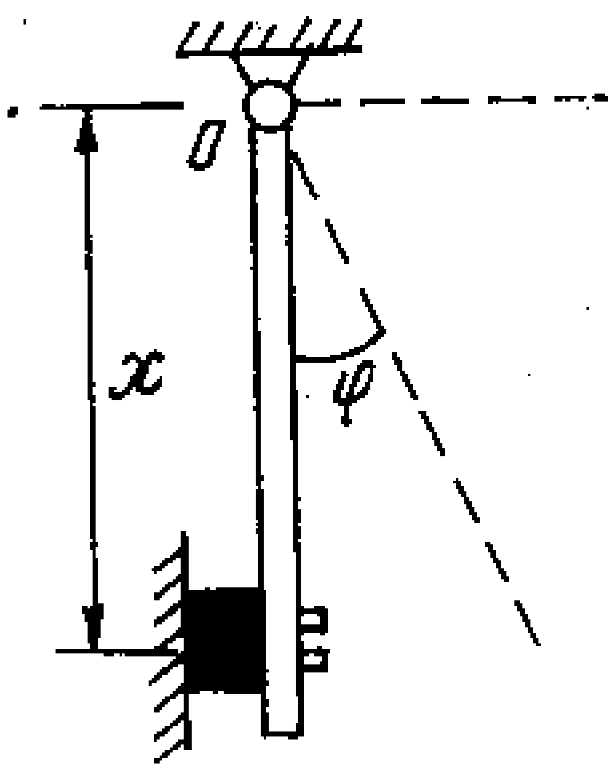
trong đó k là hệ số khôi phục.



HÌNH 8–8

8–2. Tấm B trọng lượng là Q được gắn chặt vào một lò xo có độ cứng c. Từ một độ cao h một vật A có trọng lượng P rơi tự do va chạm vào tấm B. Giải thiết va chạm là hoàn toàn mềm (H.8–8).

Tìm đoạn co ép của lò xo sau va chạm.



HÌNH 8-9

Trả lời :

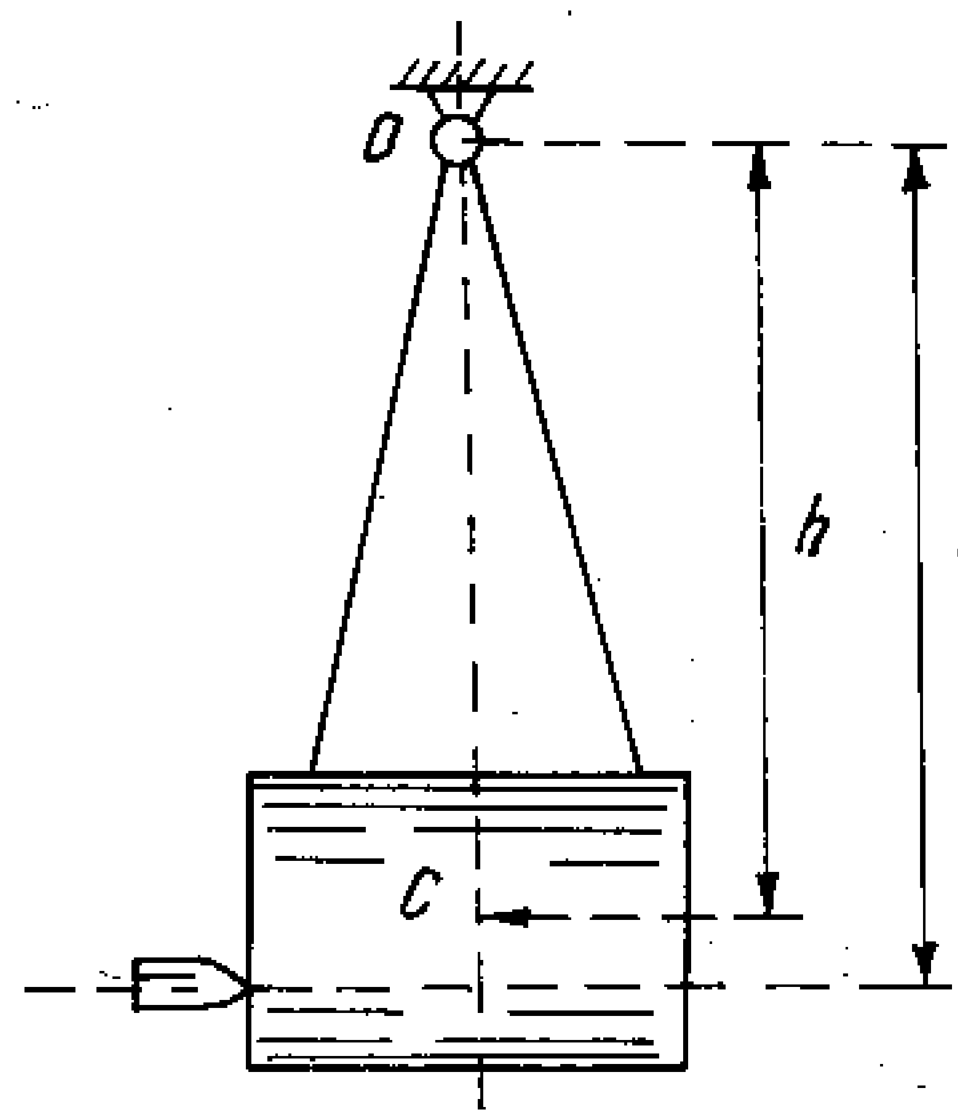
$$s = \frac{P}{c} + \sqrt{\frac{P^2}{c^2} + 2h\frac{P^2}{c(P+Q)}}.$$

8-3. Thiết bị dùng để xác định hệ số khôi phục của vật liệu bằng thực nghiệm, gồm một thanh quay được trong mặt phẳng thẳng đứng quanh trục nằm ngang qua O. Cách O một đoạn x nào đó người ta gắn lên thanh mẫu cần thử. Thả cho thanh rơi không vận tốc đầu từ vị trí nằm ngang, thanh quay quanh O và khi đến vị trí thẳng đứng thì mẫu thử đập vào mẫu cố định cũng được chế tạo bằng cùng vật liệu như mẫu nói trên. Chiều dài của thanh bằng l.

Xác định hệ số khôi phục k nếu sau va chạm thanh bị bật lại một góc φ so với vị trí thẳng đứng và tìm khoảng cách x đặt mẫu thử so với trục quay O để khi va chạm không sinh ra phản lực va chạm tại O, (H.8-9).

Trả lời :

$$k = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2}\ ;\ x = \frac{2}{3}l.$$



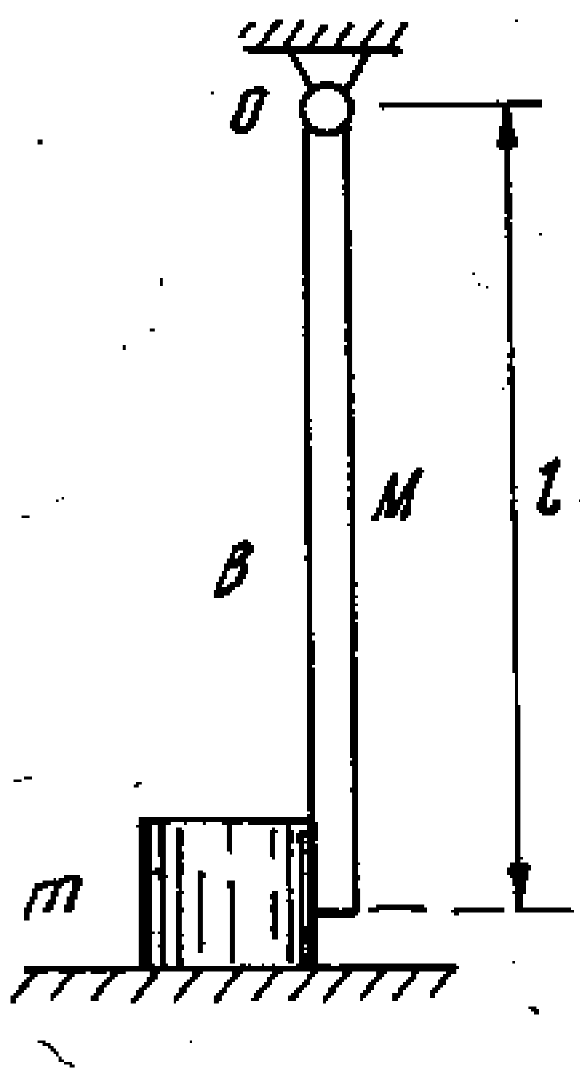
HÌNH 8-10

8-4. Một con lắc thử đạn gồm có trục AB được treo vào trục O nằm ngang. Khối trụ chứa đầy cát. Viên đạn được bắn vào khối trụ, xuyên vào cát làm cho khối trụ quay quanh trục O một góc α nào đó so với đường thẳng đứng. Cho biết khối lượng của trụ bằng M, khoảng cách từ đường va chạm đến trục quay O bằng a. Giả thiết rằng trục O không chịu tác dụng của lực va chạm, nghĩa là ah $= \rho^2$. Khối lượng riêng viên đạn bằng m (H.8-10).

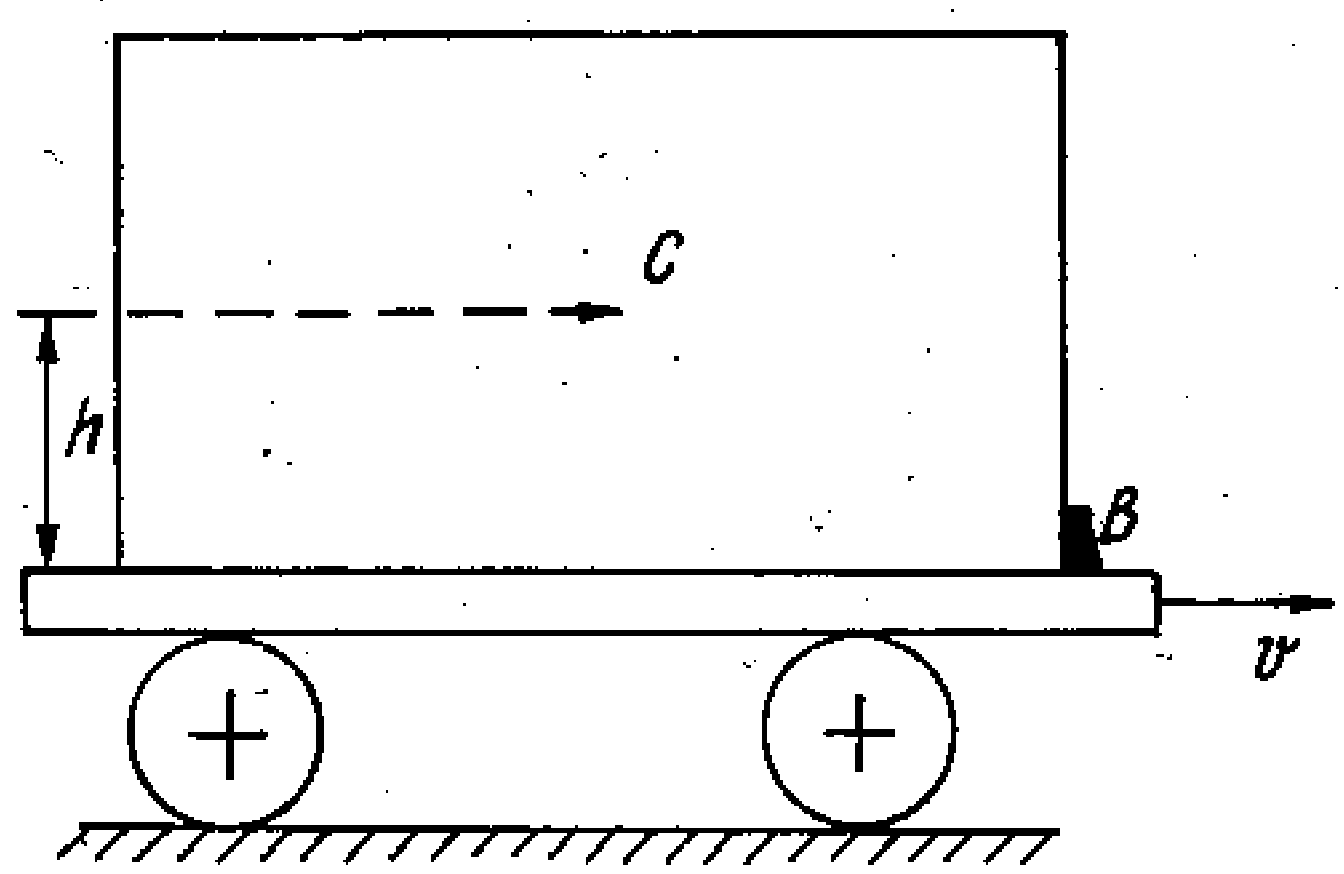
Tìm vận tốc của viên đạn theo góc lệch α của con lắc.

Trả lời : $v = \dfrac{2(Mh + ma)}{m}\sqrt{\dfrac{g}{a}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

8-5. Một thanh đồng chất có khối lượng M và độ dài l có thể quay quanh trục thẳng góc với mặt phẳng qua O. Thanh



HÌNH 8-11



HÌNH 8-12

rơi tự do từ vị trí nằm ngang. Vị trí thẳng đứng thanh đập vào một vật có khối lượng m làm cho vật chuyển động theo mặt phẳng ngang có hệ số ma sát trượt bằng f.

Hãy xác định đoạn đường đi được của vật khi xem va chạm là hoàn toàn mềm (H.8-11).

Trả lời : $s = \dfrac{3l}{2f}\dfrac{M^2}{(M + 3m)^2}$.

8-6. Một khối hộp AB được đặt trên một tấm lăn theo đường ray nằm ngang với vận tốc v. Nhờ một mấu B trên tấm, khối hình hộp không bị trượt đối với tấm nhưng có thể quay quanh mấu B. Cho h là chiều cao của trọng tâm của khối hình hộp đối với tấm, ρ là bán kính quán tính của khối hình hộp với mấu B.

1 – Xác định vận tốc góc ω của khối hình hộp quanh mấu B khi tấm bị dừng tức thời.

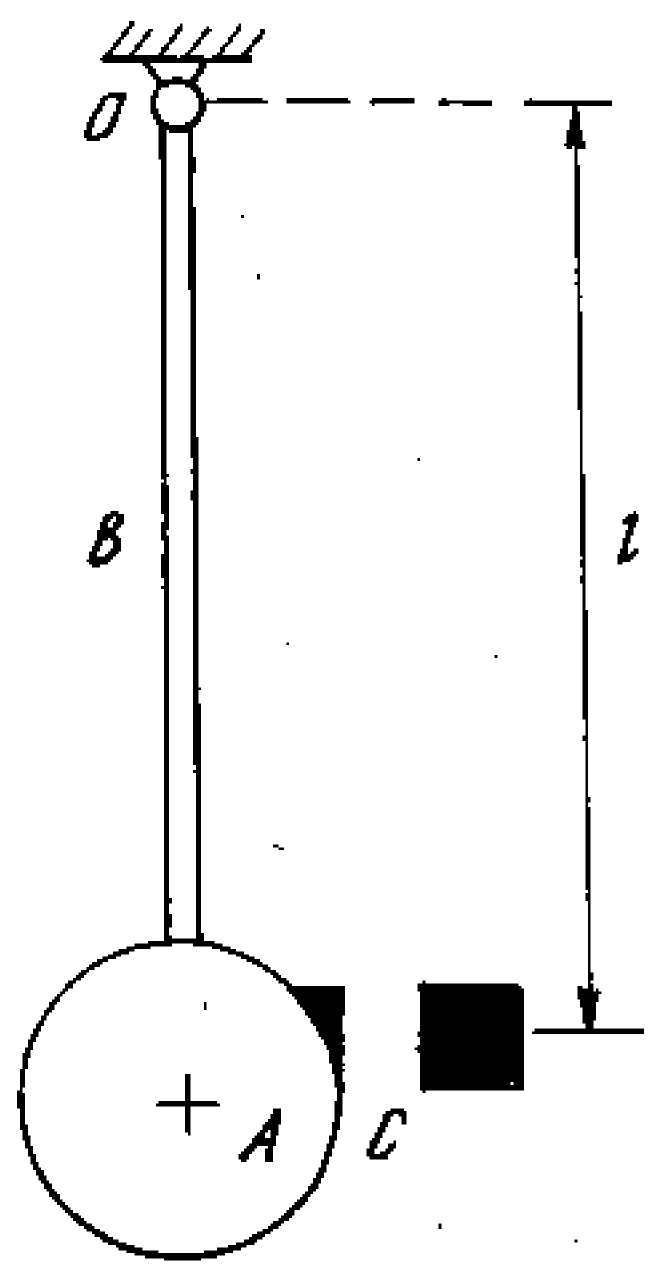
2 – Xem khối hình hộp là vật đồng chất có chiều cao h = 3m, chiều dài dọc tấm bằng 4m. Tìm vận tốc v của tấm để khối hình hộp AB bị lật nhào quanh mấu B (H.8–12).

Trả lời : 1) $\omega = \dfrac{h}{\rho^2} v$; 2) v = 30,7km/h

8–7. Một con lắc của máy va đập gồm một đĩa thép A với bán kính bằng 10cm và chiều dày bằng 5cm và một trụ tròn bằng thép chiều dài 90cm và đường kính 2cm.

Xác định vị trí của điểm va đập C để khi va đập tại O không có phản lực va chạm.

Giả thiết rằng hướng va chạm theo phương ngang (H.8–13).

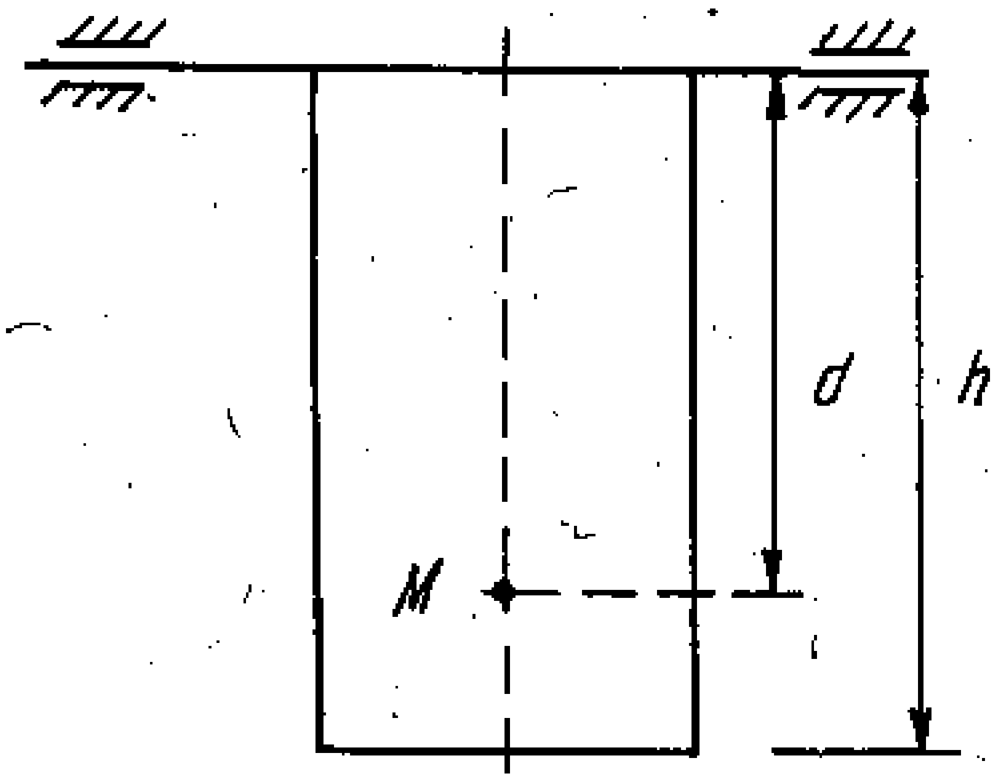


HÌNH 8–13

Trả lời : l = 97,5cm.

8–8. Xác định tâm va chạm của tấm bia bắn khi xem bia là tấm hình chữ nhật có chiều cao h (H.8–14).

Trả lời : $d = \dfrac{2}{3} h$



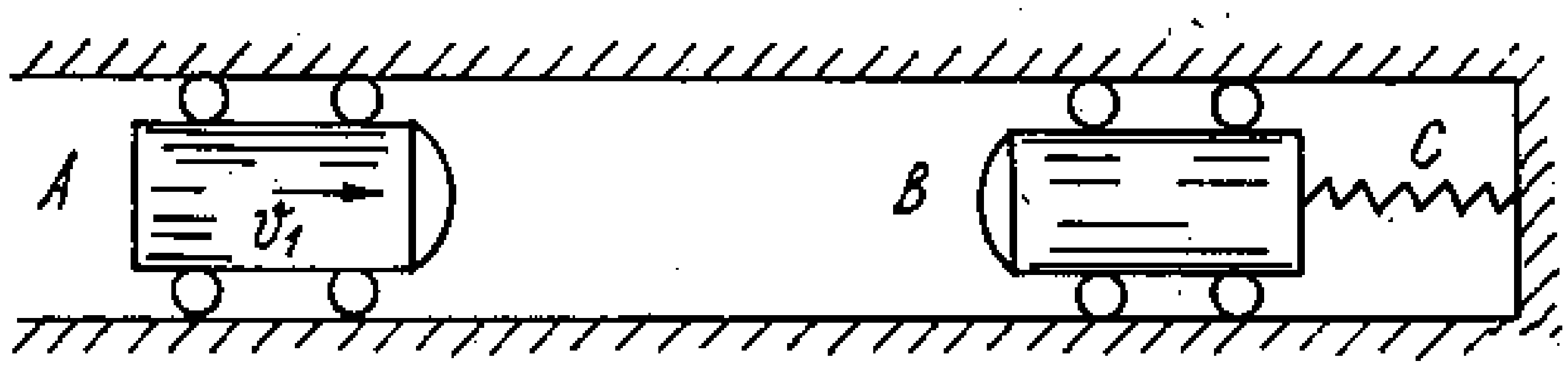
HÌNH 8–14

8–9. Hai ròng rọc quay trong cùng một mặt phẳng quanh các trục quay của mình với vận tốc góc ω_{10} và ω_{20}.

Xác định các vận tốc góc của các ròng rọc sau khi mắc đai truyền vào chúng. Xem ròng rọc là những đĩa tròn đồng chất, có cùng tỷ khối, có các bán kính tương ứng là R_1 và R_2. Bỏ qua khối lượng đai truyền và sự trượt giữa đai truyền và các ròng rọc.

Trả lời : $\omega_1 = \dfrac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}$; $\omega_2 = \dfrac{R_1^3\omega_{10} + R_2^3\omega_{20}}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}$.

8–10. Khảo sát va chạm của cơ hệ gồm hai vật A và B, trong đó vật A có thể chuyển động tự do theo hướng ngang,



HÌNH 8–15

còn vật B được gắn vào lò xo có hệ số cứng c. Giả sử rằng trước va chạm vật A có vận tốc $v_{10} > 0$ còn vật B có vận tốc $v_{20} = 0$. Tìm vận tốc của hai vật sau va chạm và thời điểm t_1 hai vật lại va chạm vào nhau tiếp theo va chạm lần đầu. Cho biết khối lượng các vật tương ứng bằng m_1 và m_2, hệ số khôi phục bằng k (H.8-15).

Trả lời : $v_A = \dfrac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_{10}$; $v_B = \dfrac{m_1 + m_2 k}{m_1 + m_2} v_{10}$

và khoảng thời gian t_1 được xác định từ phương trình siêu việt

$$\frac{\sin v t_1}{v t_1} = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2},$$

trong đó $$v = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Мещерский И.В., Сборник задач по теоретической механике. 34-е изд. М.наука 1975.

2. Лятничкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н., Сборник задач по аналитической механике изд. Наука, 1980.

3. Nguyễn Nhượng, Đỗ Sanh, Nguyễn Thế Tiến
Bài tập cơ học lí thuyết (có hướng dẫn và giải mẫu), Tập III – Động lực học, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1968.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc PHẠM VĂN AN

Tổng biên tập NGUYỄN NHƯ Ý

Biên tập tái bản :

DƯƠNG VĂN BẰNG

Trình bày bìa :

ĐOÀN HỒNG

Sửa bản in :

LÊ NHƯ HÀ

Sắp chữ :

PHÒNG CHẾ BẢN (NXB GIÁO DỤC)

BÀI TẬP CƠ HỌC

Tập hai ĐỘNG LỰC HỌC

In 5.600 bản (QĐ.5STK) khổ 14,5 x 20,5 cm. Tại Xí nghiệp in 19 - 8.
Số 3 đường Nguyễn Phong Sắc - Nghĩa Tân - Cầu Giấy - Hà Nội.
Số in 984. Giấy phép XB 223/491 - 99
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 1999

Giá: 15.200đ