Chương 3

Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

TUẦN 9

3.1 Khái niệm và phân loại biến ngẫu nhiên nhiều chiều

3.1.1 Khái niệm

Một biến ngẫu nhiên n chiều (véc-tơ ngẫu nhiên n chiều) là một bộ có thứ tự $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ với các thành phần $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là n biến ngẫu nhiên xác định trong cùng một phép thử.

Ký hiệu biến ngẫu nhiên hai chiều là (X, Y), trong đó X là biến ngẫu nhiên thành phần thứ nhất và Y là biến ngẫu nhiên thành phần thứ hai.

3.1.2 Phân loại

Biến ngẫu nhiên n chiều $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là liên tục hay rời rạc nếu tất cả các biến ngẫu nhiên thành phần $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là liên tục hay rời rạc.

Để cho đơn giản, ta nghiên cứu biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y), trong đó X, Y là các biến ngẫu nhiên một chiều. Hầu hết các kết quả thu được đều có thể mở rộng cho trường hợp biến ngẫu nhiên n chiều.

Trong chương này ta không xét trường hợp biến ngẫu nhiên hai chiều có một biến ngẫu nhiên rời rạc và một biến ngẫu nhiên liên tục.

3.2 Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

3.2.1 Bảng phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 3.1 (Hàm khối lượng xác suất đồng thời)**.** Hàm khối lượng xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) là

$$\boxed{P_{XY}(x,y) = P(X = x, Y = y)} \tag{3.1}$$

Định nghĩa 3.2 (Bảng phân phối xác suất đồng thời)**.** Bảng phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) là

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	$\sum_j$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	$P(X = x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	$P(X = x_i)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	$\dots$	p_{mj}	$\dots$	p_{mn}	$P(X = x_m)$
$\sum_i$	$P(Y = y_1)$	$\dots$	$P(Y = y_j)$	$\dots$	$P(Y = y_n)$	1

trong đó x_i, $i = 1, \dots, m$, y_j, $j = 1, \dots, n$ là các giá trị có thể có của các thành phần X, Y tương ứng; p_{ij} là hàm khối lượng xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) xác định bởi

$$\boxed{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n} \tag{3.2}$$

Bảng này có thể ra vô hạn nếu m, n nhận giá trị ∞.

Hàm khối lượng xác suất đồng thời $P_{XY}(x_i, y_j)$ có tính chất sau.

Tính chất 3.1. (a) $0 \le p_{ij} \le 1$ với mọi $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

(b) $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Định nghĩa 3.3 (Biến ngẫu nhiên độc lập)**.** Biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y), trong đó X nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots, x_m$, Y nhận các giá trị $y_1, y_2, \dots, y_n$, với hàm khối lượng xác suất đồng thời (3.2), là độc lập nếu

$$\boxed{P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n} \tag{3.3}$$

Ví dụ 3.1. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ một hộp gồm 3 bi đỏ, 5 bi xanh và 4 bi vàng. Gọi X, Y lần lượt là số bi xanh, bi vàng trong 3 bi lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất đồng thời cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y).

Lời giải: Bảng phân phối xác suất cần tìm là

X \ Y	0	1	2	3	$P(X=i)$
0	1/220	12/220	18/220	4/220	35/220
1	15/220	60/220	30/220	0	105/220
2	30/220	40/220	0	0	70/220
3	10/220	0	0	0	10/220
$P(Y=j)$	56/220	112/220	48/220	4/220	1

3.2.2 Bảng phân phối xác suất thành phần (biên)

Định lý 3.1. Nếu biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) có hàm khối lượng xác suất đồng thời $P_{XY}(x, y)$, thì hàm khối lượng xác suất biên được xác định bởi

$$\boxed{P_X(x) = \sum_{y \in \mathbf{S}_Y} P_{XY}(x, y), \quad P_Y(y) = \sum_{x \in \mathbf{S}_X} P_{XY}(x, y)} \tag{3.4}$$

Chú ý 3.1. Từ Định nghĩa 3.2 ta suy ra:

(a) Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên thành phần X:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
P	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	$\ldots$	$P(X=x_m)$

trong đó $P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij},\ i = 1, \ldots, m$.

(b) Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên thành phần Y:

Y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
P	$P(Y=y_1)$	$P(Y=y_2)$	$\ldots$	$P(Y=y_n)$

trong đó $P(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{m} p_{ij},\ j = 1, \ldots, n$.

Nhận xét 3.1. Từ các bảng phân phối thành phần ta có thể dễ dàng xác định các tham số đặc trưng của các biến ngẫu nhiên thành phần X và Y.

Ví dụ 3.2. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau

X \ Y	1	2	3
1	0,12	0,15	0,03
2	0,28	0,35	0,07

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X và Y.

(b) Chứng minh rằng X và Y độc lập.

(c) Tìm quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $Z = XY$.

(d) Tính $E(Z)$ bằng hai cách và kiểm tra $E(Z) = E(X)E(Y)$.

Lời giải:

(a) Bảng phân phối xác suất của X và Y là:

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	1	2	3
P	0,4	0,5	0,1

(b) Từ đầu bài và ý (a) ta kiểm tra được

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j), \quad \forall i = 1,2;\ j = 1,2,3$$

nên X, Y độc lập.

(c) Quy luật phân phối xác suất của $Z = XY$ là:

Z	1	2	3	4	6
P	0,12	0,43	0,03	0,35	0,07

(d) Tính $E(Z) = E(XY) = E(X) \times E(Y) = 1,7 \times 1,7 = 2,89$ vì X, Y độc lập, trong đó $E(X) = 1 \times 0,3 + 2 \times 0,7 = 1,7$, $E(Y) = 1 \times 0,4 + 2 \times 0,5 + 3 \times 0,1 = 1,7$.

Hoặc $E(Z) = 1 \times 0,12 + 2 \times 0,43 + 3 \times 0,03 + 4 \times 0,35 + 6 \times 0,07 = 2,89$.

Ví dụ 3.3. Từ kết quả phân tích các số liệu thống kê trong tháng về doanh số bán hàng (X) và chi phí cho quảng cáo (Y) (đơn vị triệu đồng) của một công ty, thu được bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

Y \ X	100	200	300
1	0,15	0,1	0,14
1,5	0,05	0,2	0,15
2	0,01	0,05	0,15

(a) Tính giá trị trung bình và phương sai của doanh số bán hàng.

(b) Tính giá trị trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo.

Lời giải: Lập bảng phân phối xác suất của X và Y:

X	100	200	300
P	0,21	0,35	0,44

Y	1	1,5	2
P	0,39	0,4	0,21

(a) Trung bình và phương sai của doanh số bán hàng là $E(X)$ và $V(X)$:

$$E(X) = 100 \times 0,21 + 200 \times 0,35 + 300 \times 0,44 = 223$$
$$E(X^2) = 100^2 \times 0,21 + 200^2 \times 0,35 + 300^2 \times 0,44 = 55700$$
$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 55700 - (233)^2 = 1411.$$

(b) Trung bình và phương sai của chi phí cho quảng cáo là $E(Y)$ và $V(Y)$:

$$E(Y) = 1 \times 0,39 + 1,5 \times 0,4 + 2 \times 0,21 = 1,41$$
$$E(Y^2) = 1^2 \times 0,39 + 1,5^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,21 = 2,13$$
$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2,13 - (1,41)^2 = 0,2419.$$

3.2.3 Phân phối có điều kiện

Từ Định nghĩa 3.2 ta suy ra:

(a) Bảng phân phối xác suất của X với điều kiện $(Y = y_j)$:

$X\|(Y = y_j)$	x_1	x_2	$\ldots$	x_m
P	$p(x_1\|y_j)$	$p(x_2\|y_j)$	$\ldots$	$p(x_m\|y_j)$

trong đó $p(x_i|y_j) = P[(X = x_i)|(Y = y_j)], i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$

(b) Bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện $(X = x_i)$:

$Y\|(X = x_i)$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
P	$p(y_1\|x_i)$	$p(y_2\|x_i)$	$\ldots$	$p(y_n\|x_i)$

trong đó $p(y_j|x_i) = P[(Y = y_j)|(X = x_i)], i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n.$

Nhận xét 3.2. (a) Từ bảng phân phối xác suất có điều kiện ta có thể tính được kỳ vọng (có điều kiện) của từng biến ngẫu nhiên.

(b) Các xác suất có điều kiện được tính như thông thường, tức là

$$P\left(X = x_i|Y = y_j\right) = \frac{P(X = x_i,\ Y = y_j)}{P(Y = y_j)} \quad \text{hoặc}$$
$$P\left(X = x_i|Y \in D\right) = \frac{P(X = x_i,\ Y \in D)}{P(Y \in D)}$$

và

$$P\left(Y = y_j|X = x_i\right) = \frac{P(Y = y_j,\ X = x_i)}{P(X = x_i)} \quad \text{hoặc}$$
$$P\left(Y = y_j|X \in D\right) = \frac{P(Y = y_j,\ X \in D)}{P(X \in D)}.$$

Ví dụ 3.4. Với giả thiết của Ví dụ 3.3,

(a) Nếu chi phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng thì doanh số trung bình là bao nhiêu?

(b) Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo bao nhiêu?

Lời giải: Các bảng phân phối xác suất có điều kiện là:

$X\|(Y=1,5)$	100	200	300
P	0,125	0,5	0,375

$Y\|(X=300)$	1	1,5	2
P	$\frac{14}{44}$	$\frac{15}{44}$	$\frac{15}{44}$

(a) Nếu chỉ chi phí cho quảng cáo 1,5 triệu đồng thì doanh số trung bình là

$$E(X|(Y=1,5)) = 100\times 0,125 + 200\times 0,5 + 300\times 0,375 = 225.$$

(b) Nếu muốn doanh số là 300 triệu đồng thì trung bình phải chi phí cho quảng cáo là

$$E(Y|(X=300)) = 1\times\frac{14}{44} + 1,5\times\frac{15}{44} + 2\times\frac{15}{44} \simeq 1,5136.$$

3.3 Hàm phân phối xác suất

3.3.1 Hàm phân phối xác suất đồng thời

Định nghĩa 3.4 (Hàm phân phối đồng thời)**.** Hàm hai biến $F_{XY}(x,y)$ xác định bởi:

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = P(X<x, Y<y), \quad x,y\in\mathbb{R}} \tag{3.5}$$

được gọi là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) và còn được gọi là hàm phân phối xác suất đồng thời của các biến ngẫu nhiên X và Y.

Từ (3.5) và Định nghĩa 3.2, hàm phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên 2 chiều rời rạc (X,Y) được xác định bởi

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} P(X=x_i, Y=y_j)} \tag{3.6}$$

Ví dụ 3.5. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y):

X \ Y	1	2	3
1	0,10	0,25	0,10
2	0,15	0,05	0,35

Tính $F(2;3)$.

Lời giải: Ta có $F(2,3) = \sum\limits_{x_i<2} \sum\limits_{y_j<3} P(X = x_i, Y = y_j) = p_{11} + p_{12} = 0,35$.

Sau đây là một số tính chất của hàm phân phối xác suất đồng thời của hai biến ngẫu nhiên X và Y.

Tính chất 3.2. (a) $0 \le F_{XY}(x,y) \le 1$.

(b) Nếu $x < x_1, y < y_1$ thì $F_{XY}(x,y) \le F_{XY}(x_1,y_1)$.

(c) $F_{XY}(-\infty,y) = F_{XY}(x,-\infty) = 0$; $F_{XY}(+\infty,+\infty) = 1$ (giá trị ∞ hiểu theo nghĩa lấy giới hạn).

(d) Với $x_1 < x_2, y_1 < y_2$ ta luôn có

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_2,y_1) - F_{XY}(x_1,y_2) + F_{XY}(x_1,y_1).$$

3.3.2 Hàm phân phối xác suất thành phần (biên)

Các hàm

$$F_X(x) = P(X < x) = P(X < x, Y < +\infty) = \lim_{y\to+\infty} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(x,+\infty),$$
$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X < +\infty, Y < y) = \lim_{x\to+\infty} F_{XY}(x,y) = F_{XY}(+\infty,y)$$

gọi là các phân phối biên của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y). Đây cũng chính là các phân phối (một chiều) thông thường của X và Y tương ứng.

Định nghĩa 3.5 (Biến ngẫu nhiên độc lập)**.** Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nếu

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \quad x,y \in \mathbb{R}} \tag{3.7}$$

trong đó $F_X(x)$, $F_Y(y)$ lần lượt là hàm phân phối xác suất của X và Y.

3.4 Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục

3.4.1 Hàm mật độ xác suất đồng thời

Định nghĩa 3.6 (Hàm mật độ đồng thời)**.** Giả sử hàm phân phối xác suất (đồng thời) của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) là $F_{XY}(x,y)$. Khi đó, hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) là hàm hai biến $f_{XY}(x,y) \ge 0$ thỏa mãn:

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(u,v)dudv} \tag{3.8}$$

$f_{XY}(x,y)$ còn được gọi là hàm mật độ xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y).

Nhận xét 3.3. Về mặt hình học, hàm $f_{X,Y}(x,y)$ có thể xem như là một mặt cong trong $\mathbb{R}^3$ và được gọi là mặt phân phối xác suất.

Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) có các tính chất sau.

Tính chất 3.3. (a) $f_{XY}(x,y) \geq 0$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$.

(c) $P\Big((X,Y) \in D\Big) = \int\int_{D\cap \mathbf{S}_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy$, với $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{S}_{XY}$ là miền giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y).

(d) Nếu $f_{XY}(x,y)$ liên tục theo cả hai biến thì $f_{XY}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Ví dụ 3.6. Biến ngẫu nhiên liên tục X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời là

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

Hãy tìm hằng số k và tính $P(2 \leq X < 3, 1 \leq Y < 3)$.

Lời giải: Sử dụng Tính chất 3.3(a),(b), ta có $k \geq 0$ và

$$1 = \int\limits_0^5\int\limits_0^3 kdydx = 15k.$$

Suy ra, $k = 1/15$.

Sử dụng Tính chất 3.3(c) suy ra

$$P(2 \leq X < 3, 1 \leq Y < 3) = \int\limits_2^3\int\limits_1^3 \frac{1}{15}dxdy = 2/15.$$

Ví dụ 3.7 (Đề thi cuối kỳ 20183)**.** Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) có hàm mật độ xác suất là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx^2, & \text{nếu } \quad -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm k.

(b) Tính $P\Big(Y \leq \dfrac{1}{4}\Big)$.

Lời giải: (a) Sử dụng Tính chất 3.3(a),(b) ta suy ra $k = 5/2$.

(b) Sử dụng Tính chất 3.3(c) ta tính

$$P\Big(Y \leq \frac{1}{4}\Big) = 2\Big[\int\limits_0^{1/2} dx \int\limits_0^{x^2} \frac{5}{2}x^2 dy + \int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_0^{1/4} \frac{5}{2}x^2 dy\Big] = \frac{19}{48} \simeq 0,3958.$$

3.4.2 Hàm mật độ xác suất biên

Định lý 3.2. Nếu X và Y là hai biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{XY}(x,y)$ thì hàm mật độ biên của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) được xác định bởi

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx} \tag{3.9}$$

Định nghĩa 3.7 (Biến ngẫu nhiên độc lập)**.** Giả sử biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{XY}(x,y)$. Khi đó X, Y độc lập nếu

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)} \tag{3.10}$$

trong đó $f_X(x)$, $f_Y(y)$ lần lượt là hàm mật độ xác suất của X và Y.

Ví dụ 3.8. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời là

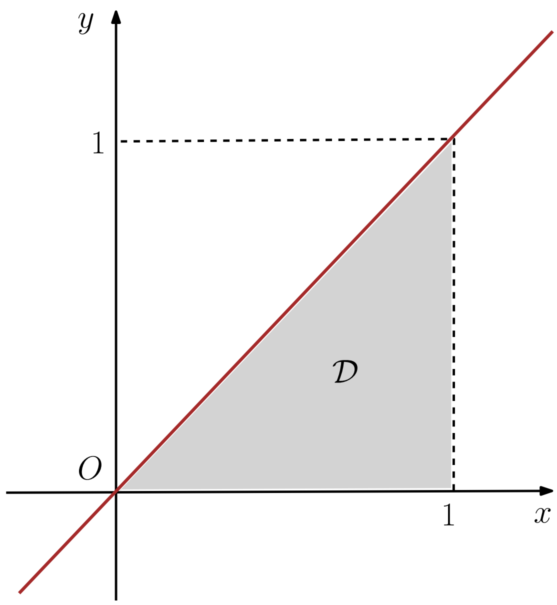
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} kx, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hằng số k.

(b) Tìm các hàm mật độ xác suất của X và Y.

(c) X và Y có độc lập không?

Lời giải: Ký hiệu $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1; 0 < y < x\}$.



Hình 3.1: Miền $\mathcal{D}$ của Ví dụ 3.8

(a) Theo Tính chất 3.3(a) thì $k \geq 0$ và theo Tính chất 3.3(b)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x kxdy = k\int_0^1 x^2dx = \frac{k}{3}.$$

Suy ra $k = 3$ và hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x, & \text{nếu } (x,y) \in \mathcal{D}, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$

(b) Tìm các hàm mật độ biên từ (3.9),

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x 3xdy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 3xdx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại.} \end{cases}$$

(c) Vì $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \times f_Y(y)$ với $(x,y) \in \mathcal{D}$ nên X, Y không độc lập.

3.4.3 Hàm mật độ xác suất có điều kiện

Định lý 3.3. Hàm mật độ có điều kiện của thành phần X biết $Y = y$ là:

$$\boxed{f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx}} \tag{3.11}$$

Hàm mật độ có điều kiện của thành phần Y biết $X = x$ là:

$$\boxed{f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy}} \tag{3.12}$$

Ví dụ 3.9. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ đồng thời là

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{nếu } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{nếu trái lại.} \end{cases}$$

(a) Tìm hàm mật độ xác suất biên của X và Y.

(b) Tìm hàm mật độ xác suất có điều kiện $f_X(x|y)$; $f_Y(y|x)$.

Lời giải:

(a) Các hàm mật độ biên của X, Y là:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{x}dy, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x}dx, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại}, \end{cases} = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{trái lại}. \end{cases}$$

(b) Các hàm mật độ có điều kiện là:

$$f_X(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} -\frac{1}{x\ln y}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại}. \end{cases}$$

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{trái lại}. \end{cases}$$

3.5 Tính độc lập của các biến ngẫu nhiên

Một số dấu hiệu nhận biết tính độc lập của hai biến ngẫu nhiên X và Y dựa trên tính chất của hàm phân phối xác suất đồng thời, hàm khối lượng xác suất đồng thời, hàm mật độ xác suất đồng thời như trong Định nghĩa 3.3, 3.5 và 3.7 với các công thức (3.3), (3.7) và (3.10) tương ứng.

TUẦN 10

3.6 Đặc trưng của biến ngẫu nhiên hai chiều

3.6.1 Kỳ vọng, phương sai của biến ngẫu nhiên thành phần

Định nghĩa 3.8 (Kỳ vọng. Phương sai). (a) Nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc có bảng phân phối xác suất đồng thời như trong Định nghĩa 3.2 thì

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = \sum_i \sum_j x_i p_{ij}; \quad E(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j) = \sum_j \sum_i y_j p_{ij} \tag{3.13}$$

$$V(X) = \sum_i \sum_j x_i^2 p_{ij} - (E(X))^2; \quad V(Y) = \sum_j \sum_i y_j^2 p_{ij} - (E(Y))^2. \tag{3.14}$$

(b) Nếu (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{XY}(x,y)$ thì

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{XY}(x,y)dxdy; \qquad E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_{XY}(x,y)dxdy \tag{3.15}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{XY}(x,y)dxdy-(E(X))^2; \quad V(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_{XY}(x,y)dxdy-(E(Y))^2. \tag{3.16}$$

3.6.2 Hiệp phương sai

Định nghĩa 3.9 (Hiệp phương sai)**.** Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y), hiệp phương sai của hai thành phần X và Y, ký hiệu là $cov(X,Y)$ được xác định bởi

$$\boxed{cov(X,Y)=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]} \tag{3.17}$$

Từ tính chất của kỳ vọng ta nhận được

$$\boxed{cov(X,Y)=E(XY)-E(X).E(Y)} \tag{3.18}$$

trong đó $E(XY)$ được xác định theo công thức

$$E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jp_{ij}, & \text{(nếu } (X,Y) \text{ rời rạc)}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy, & \text{(nếu } (X,Y) \text{ liên tục).}\end{cases}$$

Tính chất 3.4. (a) $cov(X,Y)=cov(Y,X)$.

(b) $V(X)=cov(X,X)$, $V(Y)=cov(Y,Y)$.

(c) Nếu X,Y độc lập thì $cov(Y,X)=0$, điều ngược lại chưa chắc đã đúng.

(d) $cov(aX,Y)=acov(X,Y)$.

(e) $cov(X+Z,Y)=cov(X,Y)+cov(Z,Y)$.

(f) $cov\big(\sum_{i=1}^n X_i,Y\big)=\sum_{i=1}^n cov(X_i,Y)$.

Nhận xét 3.4. Hiệp phương sai được dùng làm độ đo quan hệ giữa hai biến X và Y:

(a) $cov(X,Y)>0$ cho thấy xu thế Y tăng khi X tăng.

(b) $cov(X,Y)<0$ cho thấy xu thế Y giảm khi X tăng.

Ví dụ 3.10. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$4/15$	$1/15$	$4/15$
0	$1/15$	$2/15$	$1/15$
1	0	$2/15$	0

(a) Tìm $E(X)$, $E(Y)$, $cov(X,Y)$.

(b) X và Y có độc lập không?

(c) Tìm bảng phân phối xác suất của X và Y.

Lời giải:

(a) Ta có

$$E(X) = (-1) \times \frac{9}{15} + 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{2}{15} = -\frac{7}{15}.$$
$$E(Y) = (-1) \times \frac{5}{15} + 0 \times \frac{5}{15} + 1 \times \frac{5}{15} = 0.$$
$$E(XY) = (-1) \times (-1) \times \frac{4}{15} + (-1) \times (1) \times \frac{4}{15} + 1 \times (-1) \times 0 + 1 \times 1 \times 0 = 0.$$

Suy ra $cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = 0$.

(b) Dễ kiểm tra được $P(X=-1, Y=-1) \neq P(X=-1) \times P(Y=-1)$ nên X, Y không độc lập.

(c) Bảng phân phối xác suất của X, Y:

X	-1	0	1
P	$9/15$	$4/15$	$5/15$

Y	-1	0	1
P	$5/15$	$5/15$	$5/15$

Định nghĩa 3.10 (Ma trận hiệp phương sai)**.** Ma trận hiệp phương sai của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) được xác định bởi

$$\Gamma = \begin{bmatrix} cov(X,X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & cov(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}$$

Tính chất 3.5. (a) Ma trận hiệp phương sai là ma trận đối xứng.

(b) Ma trận hiệp phương sai là ma trận của dạng toàn phương không âm.

Nhận xét 3.5. Hiệp phương sai có hạn chế cơ bản là khó xác định được miền biến thiên, nó thay đổi từ cặp biến thiên này sang cặp biến thiên khác. Chưa kể về mặt vật lý nó có đơn vị đo bằng bình phương đơn vị đo của biến ngẫu nhiên X, Y (nếu chúng cùng đơn vị đo). Vì thế cần đưa ra một số đặc trưng khác để khắc phục hạn chế này, đó là "hệ số tương quan".

3.6.3 Hệ số tương quan

Định nghĩa 3.11 (Hệ số tương quan)**.** Hệ số tương quan của hai biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu là ρ_{XY}, được xác định như sau:

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X).V(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}} \tag{3.19}$$

Tính chất 3.6. (a) $|\rho_{XY}| \leq 1$.

(b) Nếu $\rho_{XY} = \pm 1$ ta nói hai biến ngẫu nhiên X và Y có quan hệ tuyến tính (tức là tồn tại a và b sao cho $Y = aX + b$).

(c) Nếu $\rho_{XY} = 0$ ta nói hai biến ngẫu nhiên X và Y là không tương quan.

Nói chung $0 < |\rho_{XY}| < 1$, trong trường hợp này ta nói hai biến X và Y tương quan với nhau. Chú ý rằng, hai biến tương quan thì phụ thuộc (không độc lập), nhưng không tương quan thì chưa chắc độc lập.

Nhận xét 3.6. Hệ số tương quan đo mức độ phụ thuộc tuyến tính giữa X và Y. Khi $|\rho_{XY}|$ càng gần 1 thì tính chất tương quan tuyến tính càng chặt. Khi $|\rho_{XY}|$ càng gần 0 thì sự phụ thuộc tuyến tính càng ít, càng lỏng lẻo. Khi $\rho_{XY} = 0$ ta nói X và Y không tương quan. Như vậy hai biến ngẫu nhiên độc lập thì không tương quan, nhưng ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ 3.11. Cho biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) có bảng phân bố xác suất đồng thời là

X \ Y	1	2	3
1	0,17	0,13	0,25
2	0,10	0,30	0,05

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y.

(b) Lập ma trận Covarian của X, Y.

(c) Tìm hệ số tương quan.

Lời giải:

(a) Bảng phân phối xác suất của X và Y:

X	1	2
P	0,55	0,45

Y	1	2	3
P	0,27	0,43	0,3

(b) Từ các bảng phân phối xác suất của X, Y ta có

$E(X) = 1 \times 0,55 + 2 \times 0,45 = 1,45;\ V(X) = 1 \times 0,55 + 4 \times 0,45 - (1,45)^2 = 0,2475.$

$E(Y) = 2,03;\ V(Y) = 0,5691.$

$E(XY) = 2,88 \Longrightarrow cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \times E(Y) = -0,0635.$

Vậy ma trận hiệp phương sai

$$\Gamma = \begin{pmatrix} V(X) & cov(X,Y) \\ cov(Y,X) & V(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2475 & -0,0635 \\ -0,0635 & 0,5691 \end{pmatrix}$$

(c) Hệ số tương quan $\rho_{XY} = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = -0,1692.$

3.7 Hàm của hai biến ngẫu nhiên

Xét biến ngẫu nhiên $Z = g(X,Y)$, trong đó (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều đã biết luật phân phối.

Định nghĩa 3.12 (Kỳ vọng)**.** Nếu biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) có phân phối đã biết và ta xác định một biến mới $Z = g(X,Y)$ (g là hàm đo được) thì

$$E(Z) = E\left[g(X,Y)\right] = \sum_i \sum_j g(x_i,y_j)P(x_i,y_j) \quad \text{(nếu } (X,Y) \text{ rời rạc)} \tag{3.20}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)dxdy \quad \text{(nếu } (X,Y) \text{ liên tục).} \tag{3.21}$$

Đặc biệt, khi $g = X$ thay vào các công thức trên ta sẽ có $E(X)$.

Bây giờ ta sẽ xét luật phân phối xác suất của Z trong một số trường hợp đơn giản theo cách sau:

$$\boxed{F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(g(X,Y) < z\right) = P\left((X,Y) \in \mathcal{D}\right)} \tag{3.22}$$

trong đó $\mathcal{D} = \{(x,y) | g(x,y) < z\}$.

Ví dụ 3.12. Hai người bạn hẹn gặp nhau ở công viên trong khoảng thời gian từ 17h đến 18h. Họ hẹn nhau nếu người nào đến trước thì sẽ đợi người kia trong vòng 10 phút. Sau 10 phút đợi nếu không gặp sẽ về. Thời điểm đến của hai người là ngẫu nhiên và độc lập với nhau trong khoảng thời gian trên. Tính xác suất hai người gặp được nhau.

Lời giải: Quy gốc thời gian về lúc 17h. Gọi X, Y là biến ngẫu nhiên chỉ thời điểm người A, B đến, ta có $X, Y \sim \mathcal{U}(0;60)$. Do X, Y độc lập nên chúng có hàm mật độ đồng thời

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3600}, & (x,y) \in [0,60]^2, \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Gọi Z là biến ngẫu nhiên chỉ khoảng thời gian giữa thời điểm đến của hai người. Ta có $Z = |X - Y|$. Khi đó, xác suất hai người gặp nhau là

$$P(Z < 10) = P\left(|X - Y| < 10\right) = P\left((X,Y) \in \mathcal{D}\right),$$

trong đó $\mathcal{D}$ là giao của miền $|X - Y| < 10$ và hình vuông $[0,60]^2$. Vậy

$$P(Z < 10) = \frac{S_{\mathcal{D}}}{3600} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}.$$

Ví dụ 3.13. Cho X, Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập với nhau có cùng phân phối đều trên $[0,2]$.

(a) Tìm hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên $Z = X + Y$, $T = XY$, $U = X - Y$.

(b) Tính $P(-1 \le Y - X \le 1)$

Lời giải: Vì X và Y độc lập nên ta có hàm mật độ đồng thời của (X,Y) là

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x,y) \in \mathcal{D}, \\ 0, & \text{trái lại,} \end{cases}$$

trong đó $\mathcal{D} := \{0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2\}$.

(a1) Vì $Z = X + Y$ nên $0 \le Z \le 4$. Hàm phân phối xác suất của Z:

$$F_Z(z) = P\left(X + Y < z\right) = \iint\limits_{\{x+y<z\}\cap\mathcal{D}} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{1}{4} \iint\limits_{\{x+y<z\}\cap\mathcal{D}} dxdy.$$

Nếu $z \le 0$ thì $F_Z(z) = 0$.

Nếu $0 < z \le 2$ thì $F_Z(z) = \frac{1}{4}\int_0^z \Big(\int_0^{z-x} dy\Big)dx = \frac{1}{4} \times \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{8}$.

Nếu $2 < z \le 4$ thì

$$F(z) = \frac{1}{4}\int\limits_{z-2}^{2} \Big(\int\limits_{z-x}^{2} dy\Big)dx = \frac{1}{4}\int\limits_{z-2}^{2} (2 - z + x)dx = \frac{1}{8}\Big(z^2 - 8z + 16\Big).$$

Nếu $z > 4$ thì $F_Z(z) = \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy = 1$. Vậy

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } z \le 0, \\ \frac{z^2}{8}, & \text{nếu } 0 < z \le 2, \\ \frac{1}{8}(z^2 - 8z + 16), & \text{nếu } 2 < z \le 4, \\ 1, & \text{nếu } z > 4. \end{cases}$$

(a2) Do $T = XY$ nên ta có $0 \le T \le 4$. Hàm phân phối của T được xác định như sau:

Nếu $t \le 0$, $F_T(t) = 0$.

Nếu $0 < t \le 4$, $F_T(t) = \dfrac{1}{4}\Big(\displaystyle\int_0^{t/2} dx \int_0^2 dy + \int_{t/2}^2 dx \int_0^{t/x} dy\Big) = \dfrac{1}{4}\left(t + t\ln 2 - t\ln\dfrac{t}{2}\right)$.

Nếu $t > 4$, $F_T(t) = 1$. Vậy

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t \le 0,\\ \dfrac{1}{4}\Big(t + t\ln 2 - t\ln\dfrac{t}{2}\Big), & \text{nếu } 0 < t \le 4,\\ 1, & \text{nếu } t > 4. \end{cases}$$

(a3) Do $U = X - Y$ nên ta có $-2 \le U \le 2$. Từ đó hàm phân phối của U được xác định như sau:

Nếu $u \le -2$, $F_U(u) = 0$.

Nếu $-2 < u \le 0$, $F_U(u) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{u+2} dx \int_{x-u}^2 dy = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}(2+u)^2 = \dfrac{1}{8}(2+u)^2$.

Nếu $0 < u \le 2$ thì $F_U(u) = \dfrac{1}{4}\left[4 - \dfrac{1}{2}(2-u)^2\right] = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{u^2}{2} + 2u + 2\right)$.

Nếu $u > 2$, $F_U(u) = 1$. Vậy

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } u \le -2,\\ \dfrac{1}{8}(2+u)^2, & \text{nếu } -2 < u \le 0,\\ \dfrac{1}{8}(-u^2 + 4u + 4), & \text{nếu } 0 < u \le 2,\\ 1, & \text{nếu } u > 2. \end{cases}$$

(b) $P(-1 \le Y - X \le 1) = P(X - 1 \le Y \le X + 1) = \dfrac{1}{4}\left(4 - 2 \times \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 3.14 (Đề thi cuối kỳ 20191)**.** Cho U và V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, độc lập với nhau và có cùng phân phối đều trên $[10; 30]$.

(a) Tìm hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{U,V}(u, v)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (U, V).

(b) Tính $P(|U - V| < 10)$.

Lời giải:

(a) Vì U, V là hai biến ngẫu nhiên liên tục, có phân phối đều trên $[10; 30]$ nên

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & u \in [10;30], \\ 0, & u \notin [10;30], \end{cases} \quad f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & v \in [10;30], \\ 0, & v \notin [10;30]. \end{cases}$$

Mặt khác vì U và V độc lập nên $f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{400}, & (u,v) \in [10;20]^2, \\ 0, & (u,v) \notin [10;20]^2. \end{cases}$

(b) $P(|U-V| < 10) = \displaystyle\int\int_{D\cap S_{U,V}} f_{U,V}(u,v)dudv$ với $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u-v| < 10\}$. Sử dụng tính chất của tích phân hai lớp suy ra $P(|U-V| < 10) = \dfrac{1}{400}(20^2 - 10^2) = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

3.8 Luật số lớn và định lý giới hạn trung tâm

3.8.1 Luật số lớn

Bất đẳng thức Trê-bư-sep

Định lý 3.4. Cho Y là biến ngẫu nhiên không âm. Khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý cho trước ta có:

$$\boxed{P(Y \geq \epsilon) < \frac{E(Y^2)}{\epsilon^2}} \tag{3.23}$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp Y là biến ngẫu nhiên liên tục.

$$P(Y \geq \varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(y)dy = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 f(y)dy \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} y^2 f(y)dy \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{0}^{+\infty} y^2 f(y)dy = \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2}.$$

Dấu bằng không thể đồng thời xảy ra ở cả 2 dấu "=" và "$\leq$" trong biểu thức trên.

Định lý 3.5. Cho X là biến ngẫu nhiên có $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$ hữu hạn. Khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý cho trước ta có:

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq \epsilon) < \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}} \tag{3.24}$$

hay tương đương

$$\boxed{P(|X-\mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}} \tag{3.25}$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp X là biến ngẫu nhiên liên tục. Ta chỉ cần đặt $Y = |X-\mu|$ và áp dụng Định lý 3.4.

Luật số lớn Trê-bư-sep

Áp dụng Định lý (3.5) với $X = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ta có luật số lớn Trê-bư-sep.

Định lý 3.6. Nếu dãy các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập, có kỳ vọng hữu hạn và phương sai bị chặn đều ($V(X_i) \leq C, \forall i = 1, 2, \ldots, C$ là hằng số dương), khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý cho trước ta có:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\Big| < \epsilon\Big) = 1} \tag{3.26}$$

Hệ quả 3.1. Nếu dãy các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ độc lập, có cùng kỳ vọng hữu hạn ($E(X_i) = \mu, i = 1, 2, \ldots$) và phương sai bị chặn đều ($V(X_i) \leq C\ \forall i = 1, 2, \ldots, C$ là hằng số dương), khi đó với $\epsilon > 0$ tùy ý cho trước ta có:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\Big| < \epsilon\Big) = 1} \tag{3.27}$$

Nhận xét 3.7. Kết quả này cho phép ta ước lượng kỳ vọng bằng trung bình cộng các kết quả đo đạc độc lập của biến ngẫu nhiên có kỳ vọng đó.

Luật số lớn Béc-nu-li

Áp dụng luật số lớn Trê-bư-sep với trường hợp $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ chính là số lần xảy ra A trong phép thử thứ i ta có luật số lớn Béc-nu-li.

Định lý 3.7. Giả sử ta có n phép thử Béc–nu–li với $P(A) = p$ và m là số lần xảy ra A trong n phép thử đó. Khi đó với $\varepsilon > 0$ tùy ý cho trước ta có:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{m}{n} - p\Big| < \epsilon\Big) = 1} \tag{3.28}$$

Nhận xét 3.8. Với luật số lớn Béc-nu-li ta đã chứng minh được điều thừa nhận trong phần Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê ở Chương 1: Khi $n \to +\infty$ thì $\frac{m}{n} \to p$.

3.8.2 Định lý giới hạn trung tâm

Giả sử $\{X_n\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với $E(X_n) = \mu$, $V(X_n) = \sigma^2$ với mọi n. Đặt $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Khi đó với n đủ lớn ta có:

$$\boxed{\overline{X}_n \sim \mathcal{N}\Big(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\Big)} \tag{3.29}$$

hay

$$\boxed{\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0; 1)} \tag{3.30}$$

Nhận xét 3.9. Ý nghĩa của Định lý giới hạn trung tâm là khi có nhiều nhân tố ngẫu nhiên tác động (sao cho không có nhân tố nào vượt trội lấn át các nhân tố khác) thì kết quả của chúng có dạng phân phối tiệm cận chuẩn.