

Groupe	Nom	Prénom
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

## Devoir sur table - Novembre 2012

LI101

Durée 1h30

Aucun document ni machine électronique n'est permis à l'exception de la carte de référence de Scheme.

Le sujet comporte 12 pages. Ne pas désagrafer les feuilles.

Répondre sur la feuille même, dans les boîtes appropriées. La taille des boîtes suggère le nombre de lignes de la réponse attendue. Le barème apparaissant dans chaque boîte n'est donné qu'à titre indicatif. Le barème total est lui aussi donné à titre indicatif : 45 points.

La clarté des réponses et la présentation des programmes seront appréciées. Les questions peuvent être résolues de façon indépendante. Il est possible, voire utile, pour répondre à une question, d'utiliser les fonctions qui sont l'objet des questions précédentes.

Pour vous faire gagner du temps, il ne vous est pas systématiquement demandé, en plus de la définition, la spécification entière d'une fonction. Bien lire ce qui est demandé : seulement la définition ? la signature et la définition ? la spécification et la définition ? seulement la spécification ?

**Lorsque la signature d'une fonction vous est demandée, vous veillerez à bien préciser, avec la signature, les éventuelles hypothèses sur les valeurs des arguments.**

## Exercice 1

### Question 1.1

Donner la signature et une définition de la fonction `maj-note` qui, étant donnée une note  $x$  comprise au sens large entre 0 et 20, majore les notes supérieures ou égales à 9,5 de la façon suivante : si  $9,5 \leq x < 12$ , on ajoute 0,5 ; si  $12 \leq x < 15$ , on ajoute 1 ; si  $15 \leq x < 18$ , on ajoute 1,5 ; si  $18 \leq x$ , on arrondit à 20. Par exemple :

`(maj-note 8) → 8`

`(maj-note 9.5) → 10.0`

`(maj-note 12) → 13`

[2/45]

Groupe	Nom	Prénom
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

### Question 1.2

Donner la signature et une définition de la fonction **maj-L-notes** qui, étant donnée une liste  $L$  de notes comprises au sens large entre 0 et 20, rend la liste obtenue en majorant toutes les notes de  $L$  selon la règle énoncée dans la question précédente. Par exemple :

(maj-L-notes '(8 9.5 12 10 17 13 19 14))  $\rightarrow$  (8 10.0 13 10.5 18.5 14 20 15)

(maj-L-notes '())  $\rightarrow$  ()

[3/45]

### Exercice 2

Soit  $a$  un entier strictement supérieur à 1, on appellera dans cet exercice *fonction de Syracuse pour  $a$* , la fonction  $f_a$  ainsi définie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_a(n) = \begin{cases} n \div a & \text{si } n \text{ divisible par } a \\ n + 1 + (n \div a) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $n \div a$  est le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $a$ .

### Question 2.1

Calculer  $f_2(6)$ ,  $f_2(7)$ ,  $f_3(3)$ ,  $f_3(4)$ ,  $f_3(5)$ .

[1/45]

Groupe

Nom

Prénom

**Question 2.2**

Donner la signature et une définition de la fonction **syr** qui, étant donné un entier  $a$  strictement supérieur à 1 et un entier naturel  $n$ , renvoie  $f_a(n)$ . Par exemple :

(syr 2 20)  $\rightarrow$  10

(syr 2 9)  $\rightarrow$  14

(syr 3 15)  $\rightarrow$  5

(syr 3 10)  $\rightarrow$  14

[2/45]

**Suite de Syracuse** Étant donné un entier  $a$  strictement supérieur à 1, la *suite de Syracuse* pour  $a$  est définie à partir d'un entier naturel  $p$  par :

$$u_0 = p \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Par exemple, la suite de Syracuse pour  $a = 2$  définie à partir de  $p = 7$  prend les valeurs suivantes :  $u_0 = 7$ ,  $u_1 = 11$ ,  $u_2 = 17$ ,  $u_3 = 26$ ,  $u_4 = 13$ ,  $u_5 = 20$ , etc.

On appelle *orbite* au rang  $k$  de  $p$  pour  $a$  la suite  $(u_k, u_{k-1}, \dots, u_1, u_0)$  où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite de Syracuse pour  $a$  définie à partir de  $p$ .

**Question 2.3**

Donner la signature et une définition de la fonction **orbite** qui, étant donné un entier  $a$  strictement supérieur à 1 et deux entiers naturels  $p$  et  $k$ , renvoie l'orbite au rang  $k$  de  $p$  pour  $a$ . Veuillez à l'efficacité de la fonction ! Par exemple :

(orbite 2 7 15)  $\rightarrow$  (1 2 1 2 1 2 4 8 5 10 20 13 26 17 11 7)

(orbite 3 7 15)  $\rightarrow$  (47 35 26 19 14 10 7 21 63 47 35 26 19 14 10 7)

(orbite 3 7 0)  $\rightarrow$  (7)

Groupe

Nom

Prénom

[4/45]

### Question 2.4

Donner une définition de la fonction `max-liste` de spécification :

```
;;; max-liste : LISTE[Nombre] -> Nombre  
;;; (max-liste L) renvoie le plus grand élément de la liste L.  
;;; HYPOTHÈSE : L non vide
```

[2/45]

### Question 2.5

Donner une définition de la fonction `apogee` qui, étant donnés un entier  $a$  strictement supérieur à 1, un entier naturel  $p$  et un entier naturel  $k$ , renvoie le plus grand nombre apparaissant dans l'orbite au rang  $k$  de  $p$  pour  $a$ . La spécification de la fonction `apogee` est la suivante :

Groupe

Nom

Prénom

```
;;; apogee : Nat * Nat * Nat -> Nat
;;; (apogee a p k) renvoie le plus grand nombre apparaissant dans
;;; l'orbite au rang k de p pour a.
;;; HYPOTHÈSE : a > 1
```

Par exemple :

(apogee 2 7 15) → 26

[2/45]

## Question 2.6

On considère la fonction `mys` ainsi définie :

```
;;; mys : Nat * Nat * Nat -> Nat
(define (mys a p k)
  (if (= k 1)
      p
      (max p (mys a (syr a p) (- k 1))))))
```

Dérouler l'appel de `(mys 2 7 4)`. Donner la spécification de `mys`.

[3/45]

Groupe

Nom

Prénom

## Exercice 3

Dans cet exercice, on propose d'implanter des fonctions qui permettent d'obtenir un test de divisibilité original. Ce test repose sur les *rubans de Pascal* qui permettent de calculer, à partir d'un entier  $n$  et d'un entier non nul  $d$ , un nombre  $p$  plus petit que  $n$  dont le reste de la division par  $d$  est égal au reste de la division de  $n$  par  $d$ .

### Question 3.1

Donner une définition de la fonction `liste-reste` qui étant donnés une liste d'entiers  $L$  et un entier non nul  $d$  rend la liste des restes de la division euclidienne par  $d$  des éléments de  $L$ . Si  $L$  est de la forme  $(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$ , la fonction rend la liste  $(R(e_1, d) \ R(e_2, d) \ \dots \ R(e_n, d))$  où  $R(x, y)$  est le reste de la division euclidienne de  $x$  par  $y$ .

Voici sa spécification suivie de quelques exemples :

```
;;;liste-reste : LISTE[int] * int -> LISTE[int]
;;;(liste-reste L d) rend la liste des restes de la division euclidienne par d
;;; des éléments de la liste d'origine
;;; HYPOTHESE : d non nul
```

```
(liste-reste (list 2 4 6 8 10) 2) → (0 0 0 0 0)
```

```
(liste-reste (list 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10) 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 0)
```

```
(liste-reste (list 3 5 7 9 11) 2) → (1 1 1 1 1)
```

```
(liste-reste (list) 4) → ()
```

```
(liste-reste (list 3 8 10 12 15 98 102) 10) → (3 8 0 2 5 8 2)
```

[3/45]

Groupe

Nom

Prénom

### Question 3.2

On considère définie la fonction `puiss` :

```

;;; puiss: Nombre * nat -> Nombre
;;; (puiss x n) rend x^n
(define (puiss x n)
  (if (= n 0)
      1
      (* x (puiss x (- n 1)))))

```

Donner une définition de la fonction `liste-puiss` qui étant donnés un nombre  $x$  et un naturel  $n$  rend la liste  $(1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{n-1})$  des  $n$  premières puissances de  $x$  dans cet ordre (la puissance est croissante).

Voici sa spécification :

```

;;; liste-puiss: Nombre * nat -> LISTE[Nombre]
;;; (liste-puiss x n) rend la liste des n premières puissances de x

```

Et voici quelques exemples :

```

(liste-puiss 10 5) → (1 10 100 1000 10000)
(liste-puiss 10 3) → (1 10 100)
(liste-puiss 10 2) → (1 10)
(liste-puiss 10 1) → (1)
(liste-puiss 10 0) → ()

```

[4/45]

### Question 3.3

Donner la signature et une définition de la fonction `ruban-pascal` qui étant donnés un entier naturel non nul  $d$  et un entier naturel  $p$  rend la liste des restes de la division euclidienne des  $p$  premières puissances de 10 par  $d$ . La liste résultat est donc de la forme  $(R(10^0, d) \ R(10^1, d) \ \dots \ R(10^{p-1}, d))$ .

Une liste ainsi construite est appelée **ruban de Pascal de longueur  $p$  pour le diviseur  $d$** .

Groupe

Nom

Prénom

(ruban-pascal 1 5)  $\rightarrow$  (0 0 0 0 0)

(ruban-pascal 2 5)  $\rightarrow$  (1 0 0 0 0)

(ruban-pascal 3 10)  $\rightarrow$  (1 1 1 1 1 1 1 1 1 1)

(ruban-pascal 7 10)  $\rightarrow$  (1 3 2 6 4 5 1 3 2 6)

On pourra utiliser les fonctions précédemment définies.

[2/45]

### Question 3.4

Donner une définition de la fonction **nb-chiffre** qui étant donné un entier naturel  $n$  rend le nombre de chiffres significatifs dans l'écriture de  $n$  en base 10.

Voici la spécification de la fonction suivie de quelques exemples :

```
;;; nb-chiffre : nat -> nat
;;; (nb-chiffre n) rend le nombre de chiffres significatifs dans l'écriture
;;; de l'entier n en base 10
```

(nb-chiffre 4321)  $\rightarrow$  4

(nb-chiffre 432)  $\rightarrow$  3

(nb-chiffre 43)  $\rightarrow$  2

(nb-chiffre 4)  $\rightarrow$  1

(nb-chiffre 1)  $\rightarrow$  1

(nb-chiffre 0)  $\rightarrow$  1

[2/45]



Groupe

Nom

Prénom

### Question 3.5

Donner une définition de la fonction **liste-chiffre** qui étant donné un entier naturel  $n$  rend la liste des chiffres composant l'écriture de  $n$  en base 10. Le chiffre des unités est en tête de la liste résultat.

Voici la spécification de la fonction suivie de quelques exemples :

```
;;; liste-chiffre : nat -> LISTE[nat]
;;; (liste-chiffre n) rend la liste des chiffres de l'écriture de n
;;; en base 10, le chiffre des unités en tête de la liste résultat
```

```
(liste-chiffre 4321) -> (1 2 3 4)
```

```
(liste-chiffre 432) -> (2 3 4)
```

```
(liste-chiffre 43) -> (3 4)
```

```
(liste-chiffre 4) -> (4)
```

```
(liste-chiffre 1) -> (1)
```

```
(liste-chiffre 0) -> (0)
```

[3/45]

### Question 3.6

Donner la signature et une définition de la fonction **mult-liste** qui étant données deux listes de nombres  $L1$  et  $L2$  rend la somme des produits des éléments de  $L1$  et  $L2$  de même rang. On supposera que  $L1$  et  $L2$  sont de même longueur. Si les deux listes sont vides, la fonction rend 0.

Autrement dit, si  $L1$  est de la forme  $(e_1 e_2 \dots e_n)$  et  $L2$  de la forme  $(f_1 f_2 \dots f_n)$  alors le résultat est :  $e_1 * f_1 + e_2 * f_2 + \dots + e_n * f_n$

```
(mult-liste (list 1 4 9) (list 1 10 100)) -> 941
```

```
(mult-liste (list 4 9) (list 10 100)) -> 940
```

```
(mult-liste (list 9) (list 100)) -> 900
```

```
(mult-liste (list) (list)) -> 0
```

Groupe

Nom

Prénom

[3/45]

### Question 3.7

Etant donnés un entier naturel  $n$  et un entier naturel non nul  $d$ , on souhaite calculer un entier que l'on appellera *nombre-P* dans la suite. Ce nombre-P pour  $n$  et  $d$  a pour valeur la somme des produits des éléments de la liste des chiffres composant l'écriture de  $n$  et des éléments du ruban de Pascal pour  $d$  dont la longueur est égale au nombre de chiffres dans l'écriture de  $n$ .

Par exemple, on considère 4321 pour  $n$  et on choisit pour  $d$  la valeur 7. La liste des chiffres de  $n = 4321$  est (1 2 3 4) et il y a 4 chiffres dans son écriture. Le ruban de Pascal de longueur 4 pour l'entier 7 est égale à (R(1,7) R(10,7) R(100,7) R(1000,7)) soit (1 3 2 6). Le nombre-P pour  $n=4321$  et  $d=7$  vaut donc  $1*1 + 2*3 + 3*2 + 4*6$  soit 37.

Donner une définition de la fonction **nombre-P** qui étant donnés un naturel  $n$  et un naturel non nul  $d$  calcule la valeur du nombre-P pour  $n$  et  $d$ .

La spécification de la fonction est la suivante :

```
;;; nombre-P: nat * nat -> nat
;;; (nombre-P n d) rend la somme des produits des éléments de la
;;; liste des chiffres composants l'écriture de n et des éléments du ruban
;;; de Pascal dont la longueur est égale au nombre de chiffres dans l'écriture
;;; de n
;;; HYPOTHESE : d est non nul
```

Et voici quelques applications exemples :

(nombre-P 4321 7) → 37

(nombre-P 4321 10) → 1

(nombre-P 2 5) → 2

Remarque : utiliser les fonctions précédemment définies pour répondre à cette question.

Groupe

Nom

Prénom

[2/45]

### Question 3.8

Pour calculer le nombre-P, on parcourt deux fois l'ensemble des chiffres de l'écriture de  $n$  en base 10 : une fois pour construire la liste des chiffres, une fois pour calculer le nombre de chiffres dans l'écriture de  $n$ . On souhaite ne parcourir qu'une seule fois  $n$  en définissant une fonction `liste-longueur` qui étant donné un naturel  $n$  rend un couple formé de la liste des chiffres de  $n$  et du nombre de chiffres dans l'écriture de  $n$ . Par exemple :

`(liste-longueur 1) → ((1) 1)`

`(liste-longueur 12) → ((2 1) 2)`

`(liste-longueur 123) → ((3 2 1) 3)`

`(liste-longueur 1234) → ((4 3 2 1) 4)`

Donner la signature et une définition de la fonction `liste-longueur`.

[5/45]

Groupe

Nom

Prénom

### Question 3.9

Réécrire une définition de la fonction **nombre-P** qui utilise la fonction **liste-longueur**.

[2/45]