Chương 1:

Bài 1.1: Vẽ đồ thị các hàm biến đổi của x(n)

Cho tín hiệu rời rạc x(n)x(n)x(n), ta cần vẽ các biến đổi của nó:

- **(a) x(n−a)x(n-a)x(n−a)**: Dịch phải nếu a>0a > 0a>0, dịch trái nếu a<0a < 0a<0.
- **(b) x(n+a)x(n+a)x(n+a)**: Ngược lại với (a).
- **(c) x(2n)x(2n)x(2n)**: Co ngắn tín hiệu lại, chỉ giữ lại các giá trị ở n chẵn.
- **(d) x(−n−1)x(-n-1)x(−n−1)**: Đối xứng qua trục dọc rồi dịch trái 1 bước.
- **(e) x(2−n)x(2-n)x(2−n)**: Đối xứng qua trục dọc rồi dịch phải 2 bước.

=> Để vẽ đồ thị chính xác, bạn có thể gửi hình của tín hiệu x(n)x(n)x(n) ban đầu.

Bài 1.2: Phân loại tín hiệu công suất và năng lượng

- **Tín hiệu năng lượng**: Tổng bình phương của tín hiệu hữu hạn.
- **Tín hiệu công suất**: Trung bình bình phương tín hiệu hữu hạn.

Ta xét từng tín hiệu:

- **(a) x(n)=δ(n−2)x(n) = \delta(n-2)x(n)=δ(n−2)**: Đây là xung đơn vị, có tổng bình phương hữu hạn → Tín hiệu năng lượng.
- **(b) x(n)=u(n−2)x(n) = u(n-2)x(n)=u(n−2)**: Bậc thang đơn vị, không có tổng bình phương hữu hạn → Tín hiệu công suất.
- **(c) x(n)=rect4(n−1)x(n) = rect_4(n-1)x(n)=rect4(n−1)**: Hữu hạn → Tín hiệu năng lượng.
- **(d) x(n)=0.2nu(n)x(n) = 0.2^n u(n)x(n)=0.2nu(n)**: Dãy giảm theo mũ, có tổng bình phương hữu hạn → Tín hiệu năng lượng.
- **(e) x(n)=2nejπnu(n)x(n) = 2^n e^{j\pi n} u(n)x(n)=2nejπnu(n)**: Dãy mũ tăng, không hữu hạn → Tín hiệu công suất.
- **(f) x(n)=3nu(n)x(n) = 3^n u(n)x(n)=3nu(n)**: Mũ tăng nhanh → Tín hiệu công suất.

Bài 1.3: Kiểm tra tính tuyến tính và bất biến theo thời gian

Cách kiểm tra tính tuyến tính

Hệ thống HHH là tuyến tính nếu nó thỏa mãn nguyên lý chồng chất:

- Nếu H[x1(n)]=y1(n)H[x_1(n)] = y_1(n)H[x1(n)]=y1(n) và H[x2(n)]=y2(n)H[x_2(n)] = y_2(n)H[x2(n)]=y2(n), thì: H[ax1(n)+bx2(n)]=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]H[a x_1(n) + b x_2(n)] = a H[x_1(n)] + b H[x_2(n)]H[ax1(n)+bx2(n)]=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]
- Nếu hệ thống chứa số mũ, lũy thừa, điều kiện không tuyến tính (ví dụ như x2(n)x^2(n)x2(n)), thì nó không tuyến tính.

Cách kiểm tra tính bất biến theo thời gian (TI)

Hệ thống là bất biến theo thời gian nếu khi dịch tín hiệu đầu vào, đầu ra cũng dịch đi đúng như vậy.

- Nếu x(n)→x(n−k)x(n) \to x(n-k)x(n)→x(n−k), thì đầu ra phải biến đổi từ y(n)→y(n−k)y(n) \to y(n-k)y(n)→y(n−k).
- Nếu xuất hiện biến nnn một cách tường minh trong hệ thống, thì hệ đó không bất biến theo thời gian.

Xét từng hệ thống

(a) y(n)=x2(n)y(n) = x^2(n)y(n)=x2(n)

- Kiểm tra tuyến tính:
  Xét hai tín hiệu x1(n)x_1(n)x1(n) và x2(n)x_2(n)x2(n), áp dụng nguyên lý chồng chất:

H[ax1(n)+bx2(n)]=(ax1(n)+bx2(n))2H[a x_1(n) + b x_2(n)] = (a x_1(n) + b x_2(n))^2H[ax1(n)+bx2(n)]=(ax1(n)+bx2(n))2 ≠ax12(n)+bx22(n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]\neq a x_1^2(n) + b x_2^2(n) = a H[x_1(n)] + b H[x_2(n)]=ax12(n)+bx22(n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]

Do đó, hệ không tuyến tính.

- Kiểm tra bất biến theo thời gian:
  Nếu đầu vào bị trễ: x(n)→x(n−k)x(n) \to x(n-k)x(n)→x(n−k), ta có:

y(n)=(x(n−k))2y(n) = (x(n-k))^2y(n)=(x(n−k))2

Đây chính là y(n−k)y(n-k)y(n−k), nên hệ bất biến theo thời gian.

✅ Kết luận: Không tuyến tính, nhưng bất biến theo thời gian.

(b) y(n)=nx(n)y(n) = n x(n)y(n)=nx(n)

- Kiểm tra tuyến tính:
  Xét hai tín hiệu x1(n)x_1(n)x1(n) và x2(n)x_2(n)x2(n):

H[ax1(n)+bx2(n)]=n(ax1(n)+bx2(n))H[a x_1(n) + b x_2(n)] = n (a x_1(n) + b x_2(n))H[ax1(n)+bx2(n)]=n(ax1(n)+bx2(n)) =anx1(n)+bnx2(n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]= a n x_1(n) + b n x_2(n) = a H[x_1(n)] + b H[x_2(n)]=anx1(n)+bnx2(n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]

Nên hệ tuyến tính.

- Kiểm tra bất biến theo thời gian:
  Nếu trễ đầu vào x(n)→x(n−k)x(n) \to x(n-k)x(n)→x(n−k), ta có:

y(n)=nx(n−k)y(n) = n x(n-k)y(n)=nx(n−k)

Nhưng y(n−k)=(n−k)x(n−k)y(n-k) = (n-k)x(n-k)y(n−k)=(n−k)x(n−k), tức là hệ phụ thuộc vào nnn, không giữ nguyên dạng. Do đó, hệ không bất biến theo thời gian.

✅ Kết luận: Tuyến tính, nhưng không bất biến theo thời gian.

(c) y(n)=x(n2)y(n) = x(n^2)y(n)=x(n2)

- Kiểm tra tuyến tính:
  Xét hai tín hiệu x1(n)x_1(n)x1(n) và x2(n)x_2(n)x2(n):

H[ax1(n)+bx2(n)]=(ax1(n2)+bx2(n2))H[a x_1(n) + b x_2(n)] = (a x_1(n^2) + b x_2(n^2))H[ax1(n)+bx2(n)]=(ax1(n2)+bx2(n2)) ≠aH[x1(n)]+bH[x2(n)]\neq a H[x_1(n)] + b H[x_2(n)]□=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]

Nên hệ không tuyến tính.

- Kiểm tra bất biến theo thời gian:
  Nếu trễ đầu vào x(n)→x(n−k)x(n) \to x(n-k)x(n)→x(n−k), thì:

y(n)=x(n2−k)y(n) = x(n^2 - k)y(n)=x(n2−k)

Không giống với y(n−k)=x((n−k)2)y(n-k) = x((n-k)^2)y(n−k)=x((n−k)2).
Nên hệ không bất biến theo thời gian.

✅ Kết luận: Không tuyến tính, không bất biến theo thời gian.

(d) y(n)=x(−n)y(n) = x(-n)y(n)=x(−n)

- **Kiểm tra tuyến tính:**
  Xét hai tín hiệu x1(n)x_1(n)x1(n) và x2(n)x_2(n)x2(n):

H[ax1(n)+bx2(n)]=x(−n)H[a x_1(n) + b x_2(n)] = x(-n)H[ax1(n)+bx2(n)]=x(−n) =ax1(−n)+bx2(−n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]= a x_1(-n) + b x_2(-n) = a H[x_1(n)] + b H[x_2(n)]=ax1(−n)+bx2(−n)=aH[x1(n)]+bH[x2(n)]

Nên hệ tuyến tính.

- **Kiểm tra bất biến theo thời gian:**
  Nếu trễ đầu vào x(n)→x(n−k)x(n) \to x(n-k)x(n)→x(n−k), thì:

y(n)=x(−(n−k))=x(−n+k)y(n) = x(-(n-k)) = x(-n + k)y(n)=x(−(n−k))=x(−n+k)

Nhưng y(n−k)=x(−(n−k))≠x(−n+k)y(n-k) = x(-(n-k)) \neq x(-n + k)y(n−k)=x(−(n−k))□=x(−n+k).
Nên hệ không bất biến theo thời gian.

✅ **Kết luận: Tuyến tính, nhưng không bất biến theo thời gian.**

Bài 1.4: Tích chập y(n)=x(n)∗h(n)y(n) = x(n) * h(n)y(n)=x(n)∗h(n)

Ta tính tích chập theo công thức:

y(n)=∑k=−∞∞x(k)h(n−k)y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)y(n)=k=−∞∑∞x(k)h(n−k)

(a) Với x(n)={1,2,3}x(n) = \{1,2,3\}x(n)={1,2,3} và h(n)={3,2,1}h(n) = \{3,2,1\}h(n)={3,2,1}, ta tính từng bước tích chập.

(b) Với x(n)=rect4(n)x(n) = rect_4(n)x(n)=rect4(n) và h(n)={4,3,2,1}h(n) = \{4,3,2,1\}h(n)={4,3,2,1}, ta thực hiện nhân chập trực tiếp.

Bài 1.5: Xét tính nhân quả, ổn định của hệ thống

Hệ thống là nhân quả nếu y(n)y(n)y(n) chỉ phụ thuộc vào giá trị hiện tại và quá khứ của x(n)x(n)x(n).
Hệ thống ổn định nếu tổng của đáp ứng xung hội tụ.

Dạng tổng quát:

y(n)=x(n)+ax(n−1)+a2x(n−2)+…y(n) = x(n) + ax(n-1) + a^2x(n-2) + \dotsy(n)=x(n)+ax(n−1)+a2x(n−2)+…

- **Nhân quả**: Có dạng hồi quy trễ → Nhân quả.
- **Ổn định**: Nếu |a|<1|a| < 1|a|<1, hệ thống ổn định.

Bài 1.6: Vẽ sơ đồ khối

Dựa vào phương trình sai phân, ta vẽ sơ đồ khối bằng các bộ trễ, bộ khuếch đại, và tổng.

Bài 1.7, 1.8: Tìm đáp ứng xung h(n)h(n)h(n)

Ta giải phương trình sai phân để tìm đáp ứng xung h(n)h(n)h(n).

Bài 1.9: Giải phương trình sai phân

Dạng tổng quát:

y(n)−3y(n−1)−4y(n−2)=x(n)+x(n−1)y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + x(n-1)y(n)−3y(n−1)−4y(n−2)=x(n)+x(n−1)

Dùng phương pháp giải sai phân với điều kiện đầu.

Bài 1.10: Tương quan

- **Hàm tương quan chéo**:

Rxy(m)=∑nx(n)y(n+m)R_{xy}(m) = \sum_n x(n) y(n+m)Rxy(m)=n∑x(n)y(n+m)

- **Hàm tự tương quan**:

Rxx(m)=∑nx(n)x(n+m)R_{xx}(m) = \sum_n x(n) x(n+m)Rxx(m)=n∑x(n)x(n+m)

Chương 2:

Bài 2.1: Tìm biến đổi Z và miền hội tụ

Chúng ta sử dụng công thức biến đổi Z:

X(z)=∑n=−∞∞x(n)z−nX(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}X(z)=n=−∞∑∞x(n)z−n

Và miền hội tụ (ROC) phụ thuộc vào sự hội tụ của tổng trên.
Ta xét từng trường hợp cụ thể.

(a) x(n)=(13)nu(n)x(n) = \left(\frac{1}{3} \right)^n u(n)x(n)=(31)nu(n)

X(z)=∑n=0∞(13)nz−n=11−13z−1,ROC: |z|>13X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{3}X(z)=n=0∑∞(31)nz−n=1−31z−11,ROC: |z|>31

Tương tự, ta có thể tính cho các câu còn lại.

Bài 2.2: Tìm biến đổi Z ngược

Sử dụng khai triển phân thức thành các thành phần riêng lẻ hoặc sử dụng bảng biến đổi Z ngược.

Ví dụ:
(a) X(z)=3z+4z2X(z) = \frac{3}{z} + \frac{4}{z^2}X(z)=z3+z24

x(n)=3δ(n−1)+4δ(n−2)x(n) = 3\delta(n-1) + 4\delta(n-2)x(n)=3δ(n−1)+4δ(n−2)

Tương tự, ta tiếp tục tính các bài còn lại.

Bài 2.3: Tính y(n)=x(n)∗h(n)y(n) = x(n) * h(n)y(n)=x(n)∗h(n) thông qua biến đổi Z

Áp dụng tính chất tích chập trong miền Z:

Y(z)=X(z)H(z)Y(z) = X(z) H(z)Y(z)=X(z)H(z)

Biến đổi Z của:

x(n)=3nu(n),h(n)=0.5nu(n)x(n) = 3^n u(n), \quad h(n) = 0.5^n u(n)x(n)=3nu(n),h(n)=0.5nu(n)

Tính X(z)X(z)X(z), H(z)H(z)H(z), sau đó nhân lại rồi lấy biến đổi Z ngược.

Bài 2.4: Hàm truyền đạt và ổn định

PTSP:

y(n)+3y(n−1)+2y(n−2)=x(n)y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)y(n)+3y(n−1)+2y(n−2)=x(n)

(a) Hàm truyền đạt:

H(z)=Y(z)X(z)=11+3z−1+2z−2H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}H(z)=X(z)Y(z)=1+3z−1+2z−21

(b) Đáp ứng xung: Lấy biến đổi Z ngược của H(z)H(z)H(z).
(c) Tính y(n)y(n)y(n) với x(n)=3nu(n)x(n) = 3^n u(n)x(n)=3nu(n): Dùng Z biến đổi ngược.

Bài 2.5: Hệ thống nhân quả

(a) Biểu diễn điểm cực và điểm không trên mặt phẳng phức.
(b) Tìm H(z)H(z)H(z) và h(n)h(n)h(n) từ điểm cực.
(c) Viết phương trình sai phân bằng cách biểu diễn H(z)H(z)H(z) dưới dạng phân số.

Bài 2.6: Điều kiện ổn định của hệ thống

Sử dụng điều kiện tất cả các cực phải nằm trong vòng tròn đơn vị để xác định giá trị của kkk sao cho hệ thống ổn định.

Bài 2.7: Hàm truyền đạt và đáp ứng xung

Phân tích H(z)H(z)H(z), tìm đáp ứng xung thỏa mãn các điều kiện nhân quả và ổn định.

Bài 2.8: Giải phương trình sai phân bằng biến đổi Z

(a) y(n)−12y(n−1)=x(n)y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) = x(n)y(n)−21y(n−1)=x(n)
Biến đổi Z, giải phương trình, lấy Z ngược để tìm y(n)y(n)y(n).
Tương tự, giải các phương trình còn lại.

GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1.1 Vẽ đồ thị các hàm biến đổi tín hiệu x(n)

Cho tín hiệu rời rạc x(n), hãy vẽ đồ thị các hàm:

- **(a) x(n-a): Tín hiệu dịch sang phải a đơn vị.**
- **(b) x(n+a): Tín hiệu dịch sang trái a đơn vị.**
- **(c) x(2n): Giãn tín hiệu theo trục thời gian.**
- **(d) x(-n-1): Lật gương qua trái rồi dịch.**
- **(e) x(2-n): Lật gương qua trái và dịch.**

1.2 Xác định tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

- **Tín hiệu năng lượng: E = ∑n=−∞∞|x(n)|2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 hữu hạn.**
- **Tín hiệu công suất: P = limN→∞12N+1∑n=−NN|x(n)|2\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 hữu hạn.**

Phân loại:

- **x(n)=δ(n−2)x(n) = \delta(n-2) →\rightarrow Năng lượng.**
- **x(n)=u(n−2)x(n) = u(n-2) →\rightarrow Công suất.**
- **x(n)=rect(n−1)x(n) = rect(n-1) →\rightarrow Năng lượng.**
- **x(n)=0.2nu(n)x(n) = 0.2^n u(n) →\rightarrow Năng lượng.**
- **x(n)=2jnu(n)x(n) = 2^{j n} u(n) →\rightarrow Có thể phải xét thêm.**
- **x(n)=3nu(n)x(n) = 3^n u(n) →\rightarrow Không phải tín hiệu năng lượng hay công suất.**

1.3 Xét tính tuyến tính và bất biến theo thời gian

- **y(n)=x2(n)y(n) = x^2(n) →\rightarrow Không tuyến tính, bất biến.**
- **y(n)=nx(n)y(n) = n x(n) →\rightarrow Tuyến tính, không bất biến.**

- **y(n)=x(n2)y(n) = x(n^2) →\rightarrow Không tuyến tính, không bất biến.**
- **y(n)=x(−n)y(n) = x(-n) →\rightarrow Tuyến tính, không bất biến.**

1.4 Tính đáp ứng ra y(n)=x(n)∗h(n)y(n) = x(n) * h(n)

(a) Tích chập x(n)={1,2,3}x(n) = \{1,2,3\} và h(n)={1,2,3}h(n) = \{1,2,3\}

Kết quả: y(n)={1,4,10,12,9}y(n) = \{1, 4, 10, 12, 9\}

(b) Tích chập x(n)=rect4(n)x(n) = \text{rect}_4(n) và h(n)={1,2,3,4}h(n) = \{1,2,3,4\}

Kết quả: y(n)={1,3,6,10,9,6,4}y(n) = \{1, 3, 6, 10, 9, 6, 4\}

(Các bài từ 1.5 đến 1.10 sẽ tiếp tục bên dưới)