

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

1. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

- Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

- Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.

- Tìm cực trị của hàm số.

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Lập bảng biến thiên của hàm số.

3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý. Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trục).

2. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC BA

Ví dụ 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: \mathbb{R} .

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$. Vậy $y' = 0$ khi $x = 0$ hoặc $x = 2$.

- Trên khoảng $(0; 2)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến. Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu $y_{CT} = -4$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 0$.

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3} \right) = -\infty$.

- Bảng biến thiên:

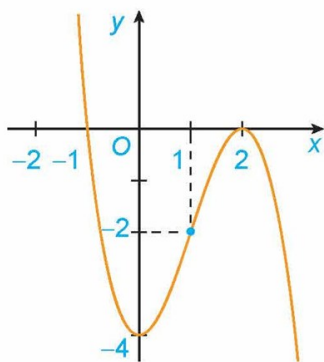
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		-4		0		$-\infty$

3. Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -4)$.

- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow -(x-2)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $(1; -2)$.



Chú ý. Đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$:

- Có tâm đối xứng là điểm có hoành độ thỏa mãn $y'' = 0$, hay $x = -\frac{b}{3a}$.

- Không có tiệm cận.

Ví dụ 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: \mathbb{R} .

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Vậy $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

- Giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$		$+\infty$

3. Đồ thị

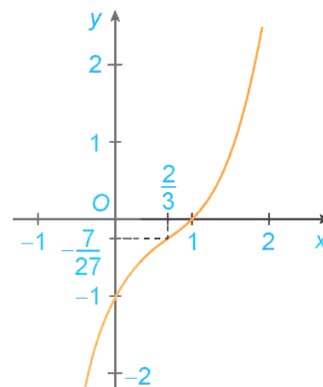
- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -1)$.

- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(1; 0)$.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là điểm $\left(\frac{2}{3}; -\frac{7}{27}\right)$.



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Câu 1. (CD12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số sau: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

Câu 2. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$.

Câu 3. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Câu 4. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$;

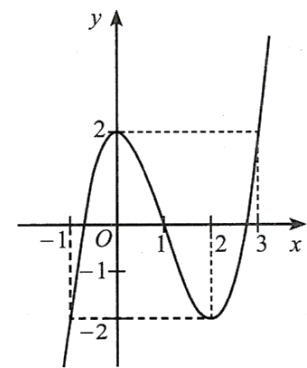
b) $y = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$

Câu 5. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x(x^2 - 4x)$

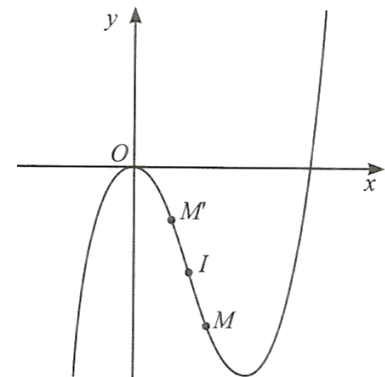
b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Câu 6. (CD12) Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như Hình.
Căn cứ vào đồ thị hàm số:



- Tìm khoảng đơn điệu, điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.
- Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$.
- Tìm điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ bằng 2.
- Tìm điểm trên đồ thị hàm số có tung độ bằng 2.
- Đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại mấy điểm?
- Với giá trị nào của x thì $-2 < f(x) < 2$?
- Tìm công thức xác định hàm số $f(x)$.

Câu 7. (CTST12) Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị được cho ở Hình.



- Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$, tìm tọa độ của điểm $I(x_0; f(x_0))$.
- Với t tùy ý ($t \neq 0$), gọi M và M' lần lượt là hai điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ $x_M = x_0 - t$ và $x_{M'} = x_0 + t$. Chứng tỏ rằng tung độ điểm I chính là trung bình cộng của y_M và $y_{M'}$.
Từ đó, suy ra rằng hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua I .

Câu 8. (CTST12) Cho hàm số $y = (m-1)x^3 + 2(m+1)x^2 - x + m - 1$ (m là tham số).

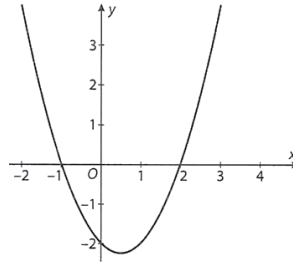
- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.
- Tìm giá trị của m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số có hoành độ $x_0 = -2$.

Câu 9. (CTST12) Cho hàm số $y = 2x^3 + 6x^2 - x + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại tâm đối xứng của nó.

Câu 10. (CTST12) Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có tâm đối xứng nằm trên trục Ox ? Khi đó, có thể kết luận gì về số giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành?

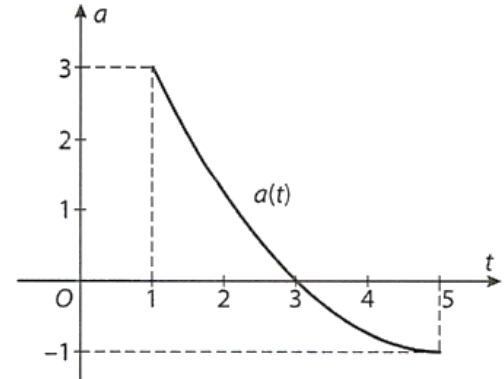
Dạng 2. Ứng dụng

Câu 11. (KNTT12) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định trên \mathbb{R} và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm các khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

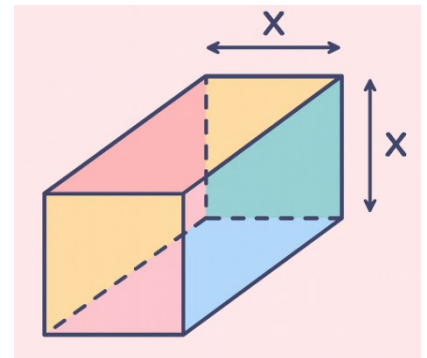
Câu 12. (KNTT12) Gia tốc $a(t)$ của một vật chuyển động, t tính theo giây, từ giây thứ nhất đến giây thứ 5 là một hàm liên tục có đồ thị như hình sau:



a) Lập bảng biến thiên của hàm vận tốc $y = v(t)$ của vật, với $t \in [1; 5]$.

b) Tại thời điểm nào vật chuyển động với vận tốc lớn nhất?

Câu 13. (KNTT12) Một khối бру kiện hình hộp chữ nhật được quy định về kích cỡ như sau: tổng chiều dài và chu vi thiết diện ngang (hình vuông) là 240 cm. Gọi x là độ dài cạnh của thiết diện ngang.



a) Tính thể tích của khối бру kiện theo x .

b) Kí hiệu $V(x)$ là thể tích của khối бру kiện.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = V(x)$.

Câu 14. (CD12) Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).



a) Tìm thời điểm $t(0 \leq t \leq 70)$ sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

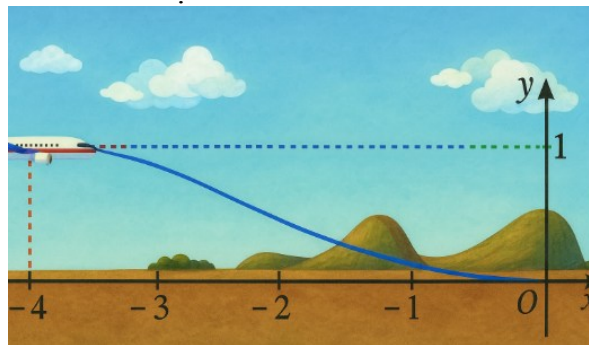
b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 50 km).

c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 70$. Xác định hàm số $v(t)$.

d) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu đốt cháy các tên lửa hãm là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

e) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?

Câu 15. (CD12) Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở Hình. Biết đường bay của nó có dạng đồ thị hàm số bậc ba; vị trí bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-4;1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.



a) Tìm công thức xác định hàm số mô phỏng đường bay của máy bay trên đoạn $[-4;0]$.

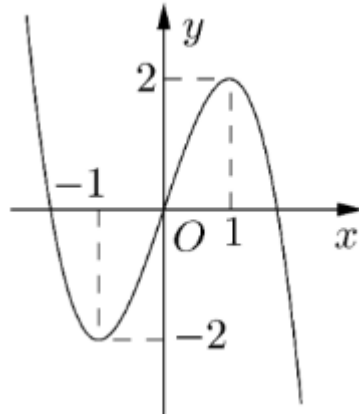
b) Khi máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang 3 dặm thì máy bay cách mặt đất bao nhiêu dặm? (Biết đơn vị trên hệ trục tọa độ là dặm).

c) Khi ở độ cao 0,5 dặm, máy bay cách vị trí hạ cánh theo phương ngang bao nhiêu dặm?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là
A. $y = -9x + 16$. **B.** $y = 9x - 16$. **C.** $y = 9x - 20$. **D.** $y = -9x + 20$.

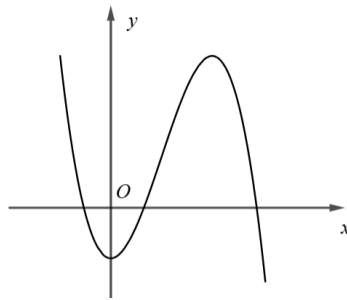
Câu 2. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây:



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 3$ là

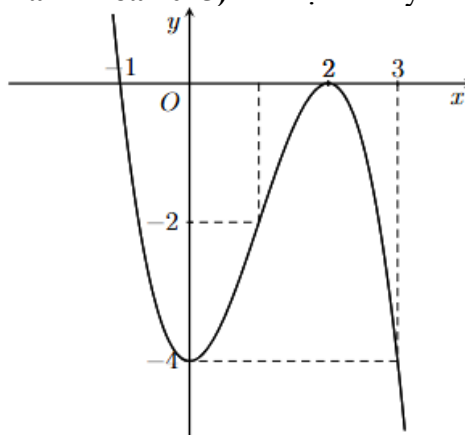
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 3. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên?



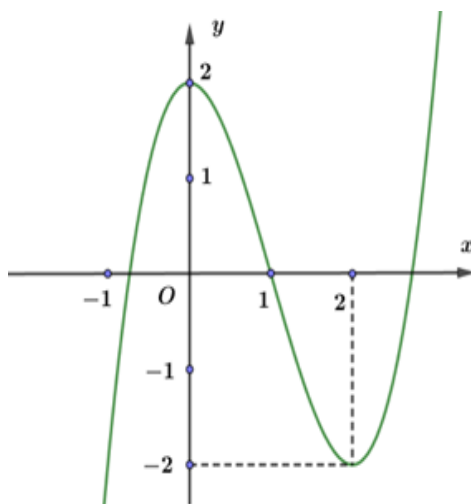
- A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. B. $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Câu 4. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



- A. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 4$. C. $y = x^3 - 3x - 4$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 5. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Đường cong ở hình sau là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. C. $y = x^3 - 6x + 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$

.

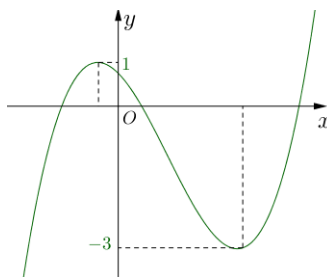
Câu 6. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ với trục Ox là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 7. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Tọa độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ là

- A. $\left(4; \frac{7}{3}\right)$ B. $(3; -1)$ C. $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ D. $(0; -1)$

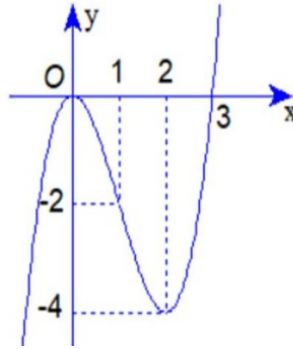
Câu 8. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -2$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

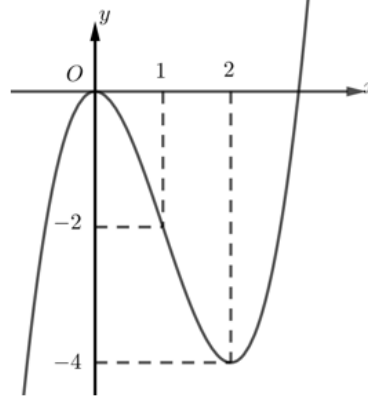
Câu 9. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $f(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

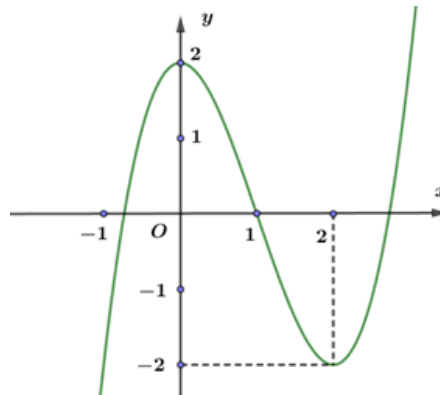
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 10. (Sở Hà Tĩnh 2025) Đồ thị hàm số nào sau đây có hình dạng như hình vẽ



- A. $y = x^3 + 3x$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = x^3 + 3x^2$.

Câu 11. (Chuyên Thái Bình 2025) Đường cong ở hình sau là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

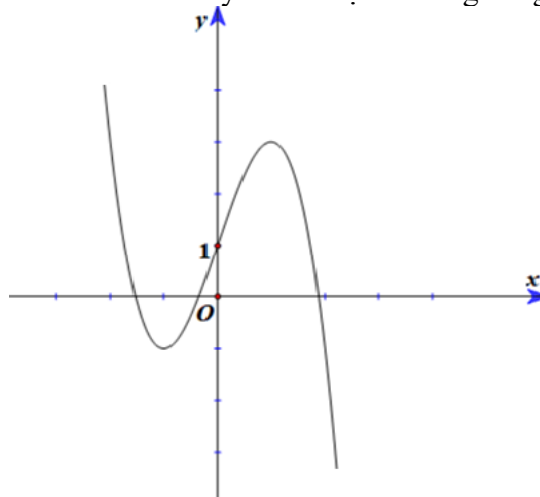


- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. C. $y = x^3 - 6x + 2$. D. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Câu 12. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

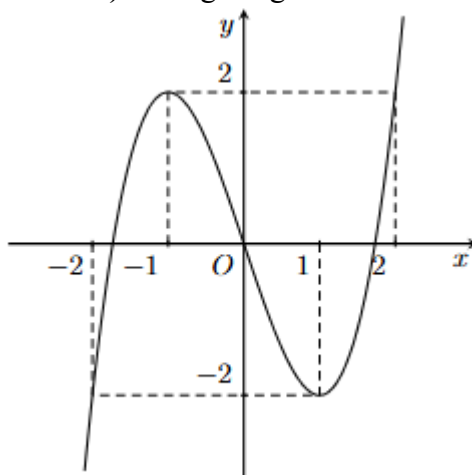
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 13. (Chuyên Vinh 2025) Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên?



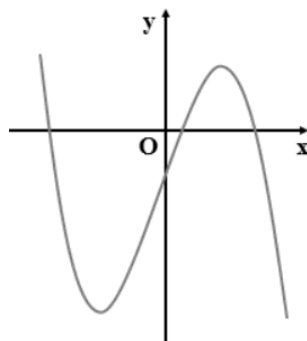
- A. $y = -x^3 + 3x + 1$. B. $y = -x^2 + x - 1$. C. $y = x^3 - 3x + 1$. D. $y = x^4 - x^2 + 1$.

Câu 14. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Đường cong hình bên dưới là đồ thị hàm số nào sau đây



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. B. $y = -x^3 + 2x$ C. $y = x^3 + 3x^2$ D. $y = x^3 - 3x$.

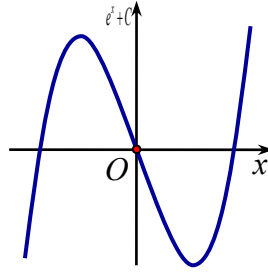
Câu 15. (Cụm trường Hưng Yên 2025) Cho hàm số $y = ax^3 + 3x - d$ ($a; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, d > 0$. B. $a < 0, d < 0$. C. $a > 0, d < 0$. D. $a > 0, d > 0$.

Câu 16. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Đường cong bên là đồ thị hàm số nào sau đây?

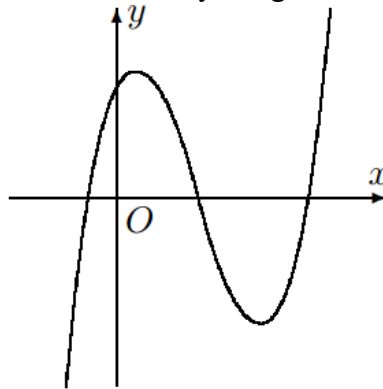


- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = x^3 - 3x - 1$. D. $y = x^3 + 3x$.

Câu 17. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $f(1) = -3$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính $T = 3a + b - c$.

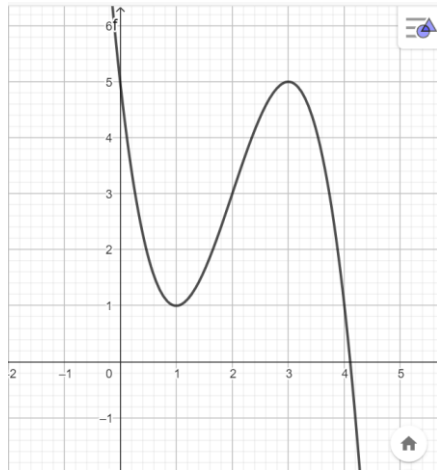
- A. $T = 1$. B. $T = 9$. C. $T = -4$. D. $T = -2$.

Câu 18. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến HCM 2025) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
 B. $a > 0, d < 0$.
 C. $a < 0, d > 0$.
 D. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 19. (Sở Bạc Liêu 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Công thức của hàm số bậc ba đã cho là:

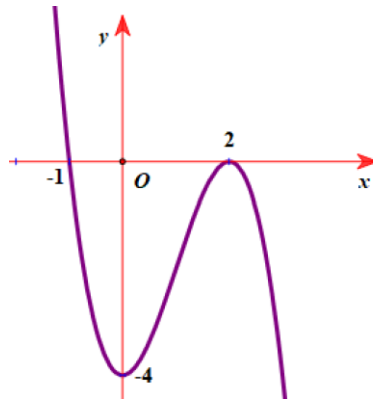
A. $y = x^3 - 5x + 5$.

B. $y = -x^3 + 6x^2 + 9x + 5$.

C. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 5$.

D. $y = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$.

Câu 20. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến 2025) Đường cong ở hình sau là đồ thị của hàm số nào?



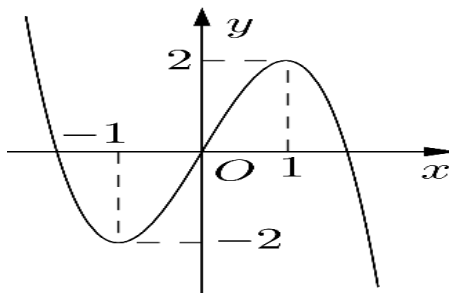
A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $y = x^3 - 4$.

C. $y = x^2 - 4$.

D. $y = -x^2 - 4$.

Câu 21. (THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây



Số giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

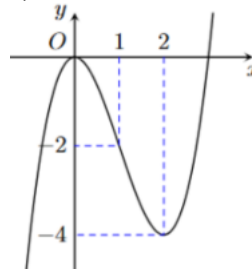
D. $O(0;0)$.

Câu 22. (Sở Bắc Ninh 2025) Hình vẽ sau là bảng biến thiên của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-5		3		$-\infty$

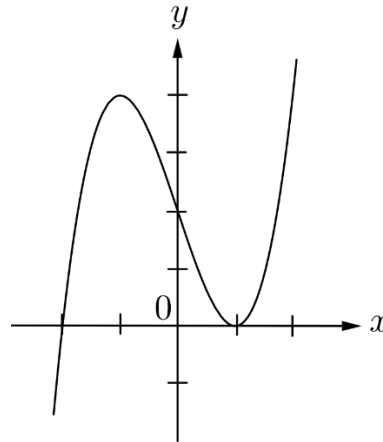
- A. $y = -2x^4 + x^2 - 1$. B. $y = \frac{-2x+7}{x+3}$. C. $y = -2x^2 + x - 1$. D. $y = -2x^3 + 6x - 1$

Câu 23. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025) Đồ thị hàm số nào sau đây có dạng như hình vẽ



- A. $y = x^3 - 3x^2$. B. $y = x^3 + 3x$. C. $y = -x^3 + 3x^2$. D. $y = -x^3 + 3x$.

Câu 24. (Cụm Ninh Giang - Tứ Kỳ - Gia Lộc 2025) Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x + 2$. B. $y = x^3 + x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^2 + 1$.

Câu 25. (Sở Vũng Tàu 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây đúng?

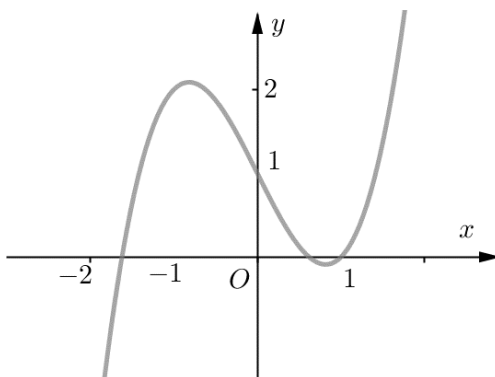
A. $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 2$.

B. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

C. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$.

D. $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

Câu 26. Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 2x + 1$.

D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

Câu 27. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Hình vẽ sau là bảng biến thiên của hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-5		3		$-\infty$

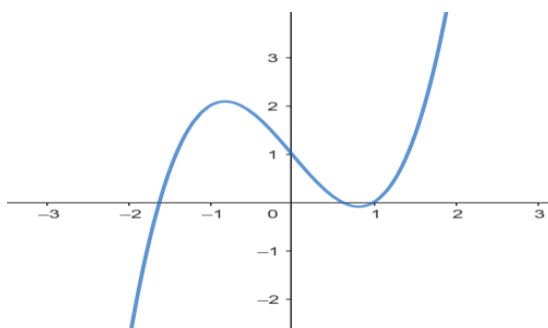
A. $y = \frac{-2x+7}{x+3}$.

B. $y = \frac{-x^2+1}{x+2}$.

C. $y = 2x^3 - 4$.

D. $y = -2x^3 + 6x - 1$.

Câu 28. (Cụm THPT Hoàn Kiếm - Hai Bà Trưng - Hà Nội 2025) Hình vẽ sau đây là đồ thị hàm số nào ?



A. $y = x^3 - 2x + 1$. B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$. C. $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. D. $y = x^3 + 2x^2 + 1$.

Câu 29. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong thời gian t . Tính vận tốc chất điểm đạt được tại thời điểm $t = 2$.

A. $\frac{21}{4}$. B. $\frac{45}{4}$. C. 9. D. 12.

Câu 30. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. $y = x + 3$. B. $y = x - 3$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = 3x$.

Câu 31. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y = 9x + 16$?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 32. Cho hàm số $y = 2x^2 + 3x - 1$ có đồ thị C . Tiếp tuyến của C vuông góc với đường thẳng $y = x$ có phương trình là

A. $y = -x$. B. $y = x - 3$. C. $y = -x - 3$. D. $y = -x + 2$.

Câu 33. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2025$ là

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 34. Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.

Câu 35. Cho hàm số $y = x^3 + 3x$ có đồ thị là (C) và điểm M thuộc (C) có tung độ bằng 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có dạng $y = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính $P = a + 2b$.

A. $P = 10$. B. $P = 4$. C. $P = 2$. D. $P = 8$.

Câu 36. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng $d: y = -x + 2$ là:

A. $y = x + 1, y = -x + \frac{31}{27}$. B. $y = -x + 1, y = -x + \frac{31}{27}$.

C. $y = -x + 1, y = x + \frac{31}{27}$. D. $y = x + 1, y = x + \frac{31}{27}$.

Câu 37. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 38. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Phương trình tiếp tuyến của (H) vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{4}x - 4$ là:

A. $y = -4x - 7, y = 4x + \frac{67}{3}$.

B. $y = 4x - 7, y = 4x + \frac{67}{3}$.

C. $y = 4x - 7, y = -4x + \frac{67}{3}$.

D. $y = -4x - 7, y = -4x + \frac{67}{3}$.

Câu 39. (HSG Vũng Tàu 2025) Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/04/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$ (v được tính bằng ft/s và $1\text{ foot} = 0,3048m$, t được tính bằng giây).



(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng từ giây thứ bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị) tính từ thời điểm $t = 0$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

A. 0.

B. 46.

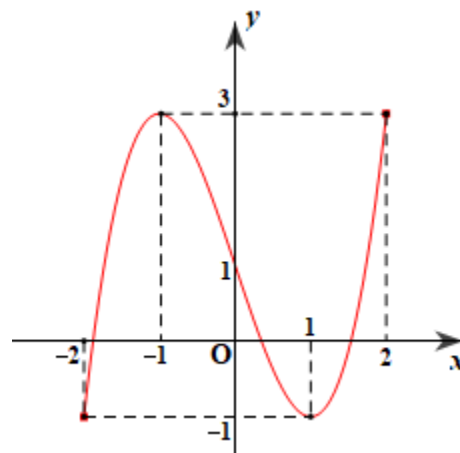
C. 23.

D. 126.

- Câu 40. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hàng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) có thể được tính bằng công thức $P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000$. Để có lợi nhuận lớn nhất công ty cần sản xuất đúng bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng
- A. 90. B. 100. C. 110. D. 120.

D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- Câu 1. (Sở Hậu Giang 2025)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- b) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) Trên đoạn $[-2; 2]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2.
- d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

- Câu 2. (Sở Đà Nẵng 2025)** Cho hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 1$ có đồ thị (C) .

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -8x^3 + 8x + 1$.
- c) Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $S = \{-1; 0; 1\}$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ là 1.

- Câu 3. (Sở Đắk Lắk 2025)** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- b) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên khoảng $(-\infty; 0)$ bằng -1 .
- c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- d) Hàm số đã cho có đồ thị như hình vẽ

- Câu 4.** Cho hàm số $y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$ đồ thị của hàm số là (C) và đường thẳng $d: y = 4x - 1$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đạo hàm của hàm số trên là $y' = 2x^2 + 2x + 4$

c) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường d là 4.

d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường d và có hoành độ giao điểm không âm là $y = 4x + 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = 9x + 18$. Biết đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = x^2 - 3$

b) Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $f'(x_0) = 9$.

c) Giá trị $y_0 - x_0 = -2$.

d) Số điểm chung của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là hai.

Câu 6. (Sở Sơn La 2025) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ có đồ thị (C) .

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm cực tiểu là $y = 2$.

d) Phương trình $x^3 - 2x^2 + x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt nếu $-\frac{1}{7} < m < 0$.

Câu 7. (THPT Sóc Sơn - Hà Nội 2025) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$.

a) Hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 4]$ bằng 2.

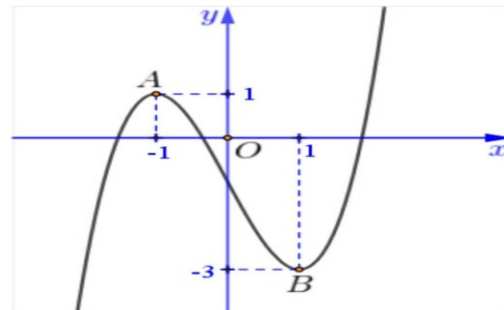
b) $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$.

c) $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 3$; $x = -\frac{1}{3}$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 8. (Sở Vùng Tàu 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là \mathbb{R} .
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng -3
- d) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho thì diện tích tam giác OAB bằng 1.



Câu 9. (Mã 0104 - BGD 2025) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 91$.

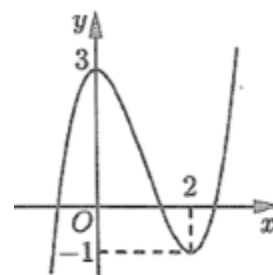
- a) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{1\}$.
- c) $f(1) = 89$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 89.

Câu 10. (Mã 0101 - BGD 2025) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 12x - 8$.

- a) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 12$.
- b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{2\}$.
- c) $f(2) = 24$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng 24.

Câu 11. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

- a) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 2.
- b) Trên khoảng $(0; +\infty)$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1 .
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$
- d) Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm.



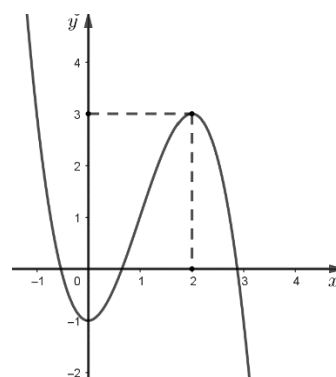
Câu 12. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$ có đồ thị là (C)

- a) Phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0; -\frac{7}{3}\right)$.
- b) Trên đoạn $[4; 8]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x = 4$
- c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(1; -2)$.

d) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị.

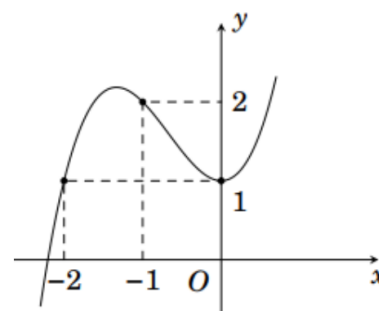
Câu 13. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình sau đây

- a) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng -1
- b) Phương trình $\log_3(f(x) + 6) = 2$ có 2 nghiệm
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$
- d) Tổng $2025a + b + c + d = -2023$



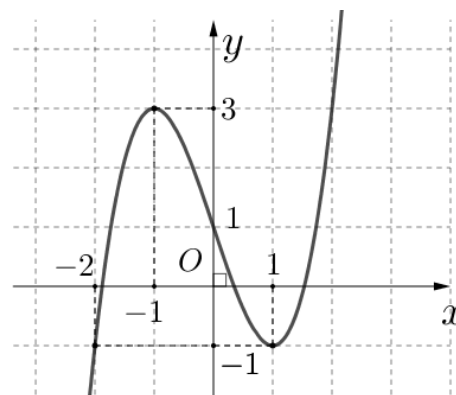
Câu 14. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây:

- a) Trong 4 số a, b, c, d có ba số dương.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- c) Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm có tọa độ $(0; 1)$.
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.



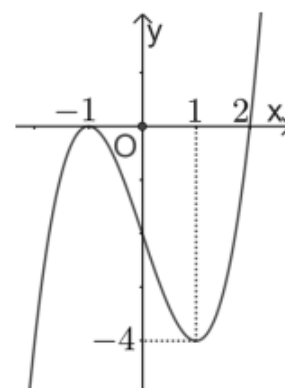
Câu 15. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

- a) Trong các số a, b, c, d có ba giá trị dương.
- b) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(-2; 1)$ bằng 3.
- c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có hoành độ bằng 1.
- d) Phương trình $f(f(x)) = \frac{5}{2}$ có sáu nghiệm phân biệt.



Câu 16. (Cụm trường Nghệ An 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng -4 .
- c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.



Câu 17. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$ và $y' = -3x^3 + 6x$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị và phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $2x + y - 4 = 0$.
- d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ và A, B là các điểm cực trị của (C) .

Câu 18. (Sở Quảng Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

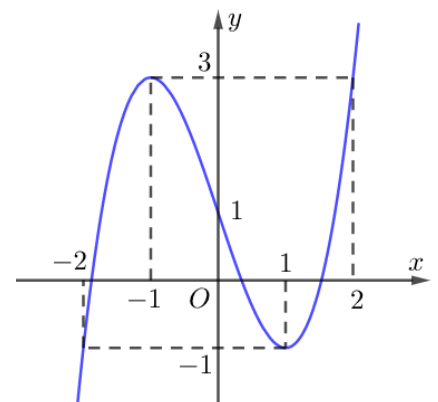
- a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $0; 2$.
- b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- c) Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Khi đó độ dài AB bằng $\sqrt{5}$.
- d) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{f(x)}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Câu 19. (Sở Thái Nguyên 2025) Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ đạt cực trị bằng 0 tại $x = 1$ (với b và c là hằng số)

- a) Giá trị của $b + c$ bằng -3 .
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = -1$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 0.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.

Câu 20. (Sở Hậu Giang 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- b) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) Trên đoạn $[-2; 2]$, hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 2
- d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

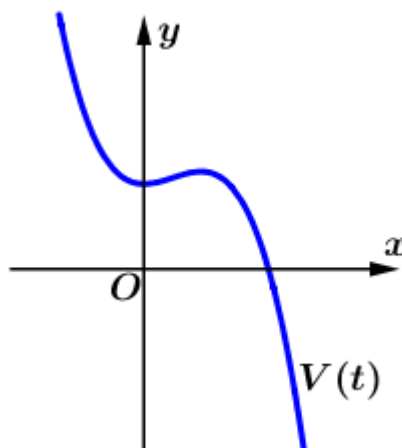


Câu 21. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

- a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng 8 m/s .

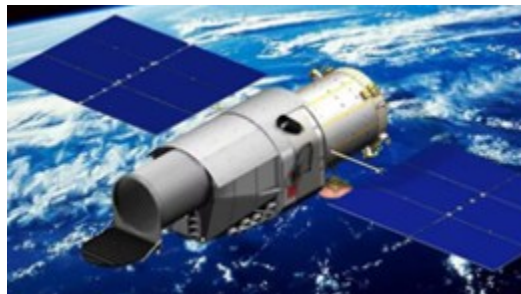
- b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m , vận tốc khi đó bằng 8 m/s .
- c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s .
- d) Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s^2 .

Câu 22. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (tính theo lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4,5$ với $0 \leq t \leq 0,5$. Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Biết 1 lít xăng có giá là 21.000 đồng.



- a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1,5 lít.
- b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Số tiền người mua phải trả là 787.500 đồng.
- c) Khi xăng chảy vào bình xăng thì tốc độ tăng thể tích là lớn nhất vào thời điểm ở giây thứ 21.
- d) Phương trình $V'(t) = 0$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 23. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:



$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \quad (v \text{ được tính bằng } feet/s, 1 \text{ feet} = 0,3048 \text{ m}).$$

- a) Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.
- b) Gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là $62,87 \text{ feet} / \text{s}^2$.
- c) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23(s)$.
- d) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21,5(s)$ đến $t = 126(s)$.

Câu 24. (HSG Vũng Tàu 2025) Chi phí nguyên liệu của một con tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10 \text{ km} / \text{h}$ thì chi phí nguyên liệu phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng /giờ. Gọi $x(\text{km} / \text{h})$ là vận tốc của tàu.

a) Chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất trong thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\frac{480}{x}$ (nghìn đồng).

b) Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trong 1 giờ là $C(x) = 480 + 0,03x^3$ (nghìn đồng).

c) Tổng chi phí nhiên liệu tàu chạy trên quãng đường 1 km giảm khi vận tốc của tàu thuộc $(0; 30)$.

d) Tổng chi phí nhiên liệu để tàu chạy trên quãng đường 1 km nhỏ nhất là 43 (nghìn đồng).



Câu 25. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm của A cho B được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

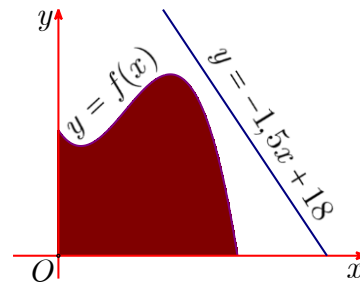
a) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

b) Số tiền mà A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.

c) Nhà máy A bán cho nhà máy B $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

d) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

Câu 26. (Sở Hà Tĩnh 2025) Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = -0,1x^3 + 0,9x^2 - 1,5x + 5,6$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là $100m$.



a) Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài $600m$.

b) Trên đường đi dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox , điểm cách gốc O một đoạn $500m$ có khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất.

c) Khoảng cách nhỏ nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ đến bờ hồ đối diện là $490m$.

d) Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Biết tọa độ của điểm để xây bến thuyền này là $M(a;b)$. Giá trị $a + 5b$ bằng 43 .

Câu 27. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ với t tính bằng giây (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S tính bằng mét (m) là quãng đường vật đi trong thời gian đó.

a) Vận tốc của chất điểm chuyển động tại thời điểm t (giây) là $v(t) = -3t^2 + 18t + 21$.

b) Vận tốc của chất điểm tại giây thứ 2 là $45m/s$.

c) Quãng đường chất điểm đi được từ lúc bắt đầu đến lúc dừng hẳn là $255(m)$.

d) Vận tốc chuyển động của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 3(s)$.

Câu 28. (THPT Trần Nguyên Hãn - Hải Phòng 2025) Quảng cáo là hình thức tuyên truyền được trả phí hoặc không để thực hiện việc giới thiệu thông tin về sản phẩm, dịch vụ, công ty hay ý tưởng, quảng cáo là hoạt động truyền thông phi trực tiếp giữa người với người mà trong đó người muốn truyền thông phải trả tiền cho các phương tiện truyền thông đại chúng để đưa thông tin đến thuyết phục hay tác động đến người nhận thông tin. Khảo sát tại một công ty A cho thấy nếu chi X triệu đồng để quảng cáo một loại sản phẩm thì số sản phẩm công ty A bán được là $S(x) = -2x^3 + 27x^2 + 216x + 150$ với $x \in [0;15]$.

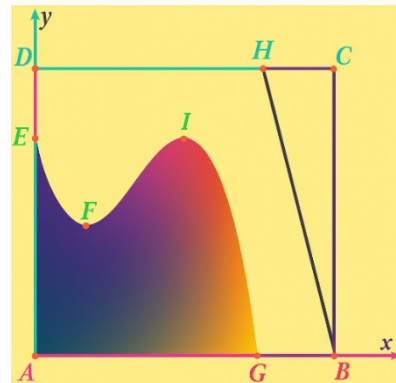
a) $S'(x) = -6x^2 + 54x + 216$.

b) Nếu công ty A chi 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm công ty A bán được đạt tối đa bằng 3131 triệu đồng.

c) Nếu không chi cho quảng cáo thì số lượng sản phẩm công ty A bán được là 391 sản phẩm.

d) Nếu công ty A chi từ 11 triệu đồng đến 12 triệu đồng cho quảng cáo loại sản phẩm này thì số lượng sản phẩm bán được sẽ tăng.

Câu 29. (Sở Thừa Thiên Huế 2025) Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12m$. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (*phần tô đậm*) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là $1m$, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3m$ và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là $2m$ và $6m$.



a) Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .

d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56m$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

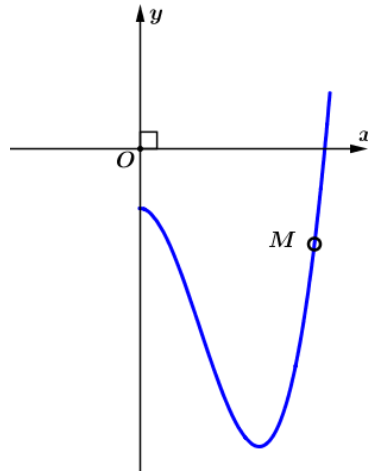
Câu 30. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Xét một chất điểm M chuyển động trên đường nằm ngang chọn O làm gốc, chiều dương từ trái sang phải. Chuyển động của M được cho bởi công thức $S(t) = t^3 - 3t^2 - 1$, với t (giây), $t \geq 0$ là khoảng thời gian tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động. Gọi OM là khoảng cách từ M đến O tính bằng (mét).

a) Tại thời điểm $t = 0$ thì $OM = 1m$.

b) Chất điểm chuyển động với vận tốc được xác định bởi biểu thức $v = 3t^2 - 6t + 1$ (m/s).

c) Trong khoảng thời gian 2 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động, chất điểm chuyển động sang trái.

d) Đến giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu chuyển động, khoảng cách lớn nhất của OM là $5m$.



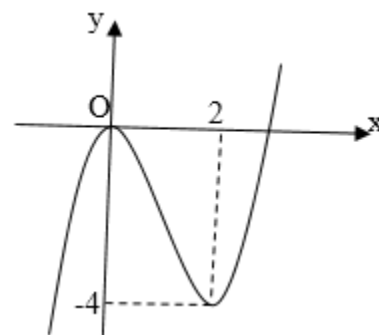
Câu 31. (Sở Bạc Liêu 2025) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như vẽ

a) Hàm số có hệ số $d > 0$.

b) Hàm số có hệ số $a > 0$.

c) Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $E(0; 2)$.

d) Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($0 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính



bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = f(x) - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 200 nghìn đồng/mét. Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày là 1100 nghìn đồng.

Câu 32. (Sở Thái Bình 2025) Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Biết rằng, nếu số lượng đặt hàng là x (tấn) sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng) và chi phí để nhà máy A sản xuất được x (tấn) sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng, gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

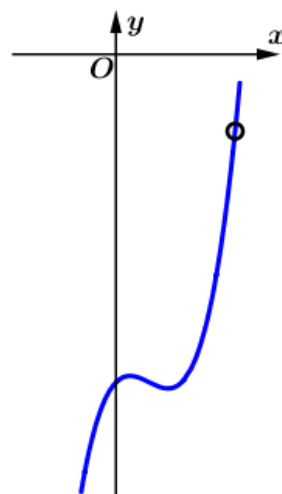
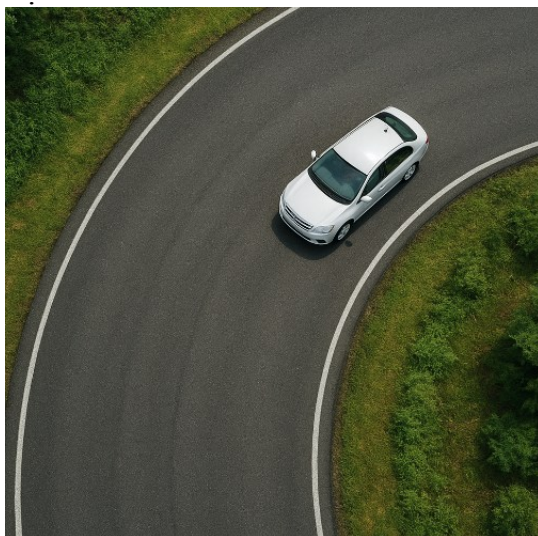
a) Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x (tấn) sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho nhà máy B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

b) Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

c) Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.

d) Nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 33. Một chiếc xe ô tô di chuyển trên một con đường cong. Để giúp cải thiện hệ thống an toàn, người ta cần tính toán góc nghiêng của đường tại một điểm để biết được lực tác động lên xe (góc nghiêng của đường tại một điểm là góc được tạo bởi tiếp tuyến với đường tại điểm đó và trục Ox). Đoạn đường có dạng đồ thị hàm số $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$, với x là khoảng cách theo chiều ngang và y là chiều cao của mặt đường tại mỗi điểm. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



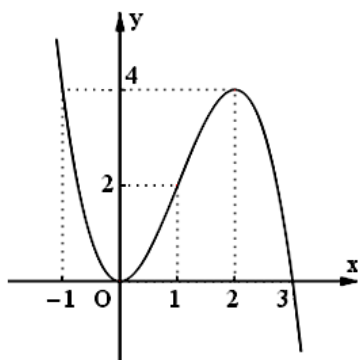
a) $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có tọa độ $(x_0; f(x_0))$.

b) Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(1; -5) \in (C)$ bằng -1 .

c) Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(1; -5)$ có phương trình là $y = -x + 6$.

d) Góc nghiêng của đường tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là 45° .

Câu 34. Trò chơi tàu lượn siêu tốc có 1 đoạn đường ray được mô tả bởi đồ thị hàm số bậc ba $y = -x^3 + 3x^2$ (Hình vẽ minh họa).



a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ là $y'(x_0) = -3x^2 + 6x$

b) Hệ số góc tại điểm $M(1; 2)$ là 3.

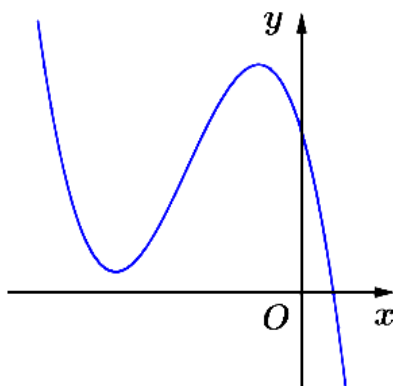
c) Tiếp tuyến tại $M(1; 2)$ vuông góc với đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$

d) Tiếp tuyến tại $M(1; 2)$ là $y = 3x - 2$

E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. (Chuyên Hạ Long 2025) Tính giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 2. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

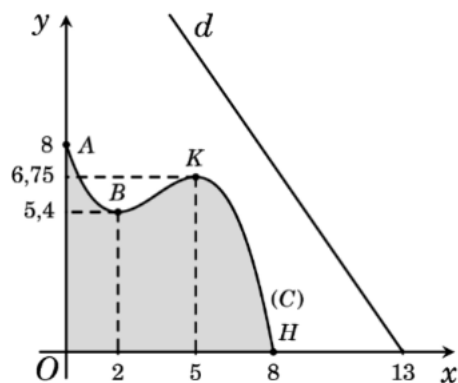


Câu 3. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ có hai cực trị A và B . Phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính tổng $a + b$.

Câu 4. (Sở Đà Nẵng 2025) Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

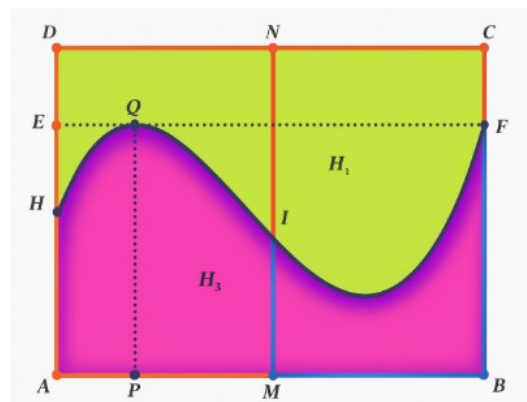
Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A , B song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$. Tính $S = 3x_A - 5x_B$.

Câu 6. (Sở Khánh Hòa 2025) Một khu vực trồng hoa được xây dựng trong khu du lịch sinh thái. Trong mô hình minh họa (như hình vẽ bên), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị C của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị C đi qua các điểm A $0; 8$, B $2; 5,4$, K $5; 6,75$ và H $8; 0$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y = -\frac{13}{9}x + \frac{169}{9}$. Tìm hoành độ của điểm M thuộc C sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



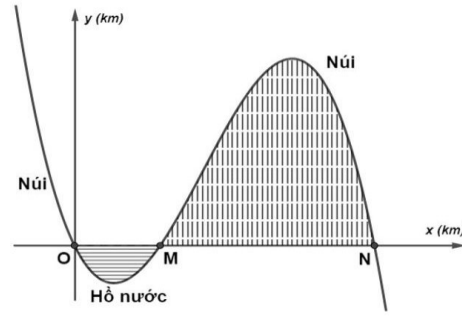
Câu 7. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = x^3 + 9x^2 - 12$ có đồ thị là đường cong (C) . Điểm $M(a; b)$ là điểm cực đại của đồ thị (C) . Giá trị của $a - b$ bằng bao nhiêu?

Câu 8. (Sở Ninh Bình 2025) Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100m$; $AD = 80m$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40m$; $AE = 60m$; $AP = 20m$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.



Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.

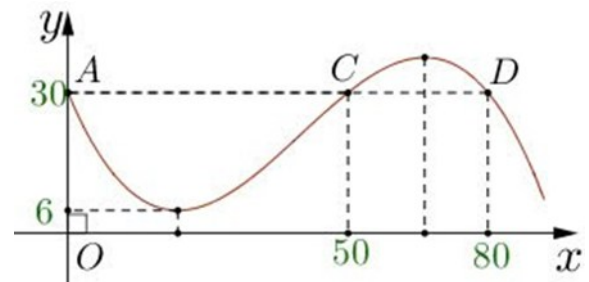
Câu 9. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



- Câu 10. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025)** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A, đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là 6m. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

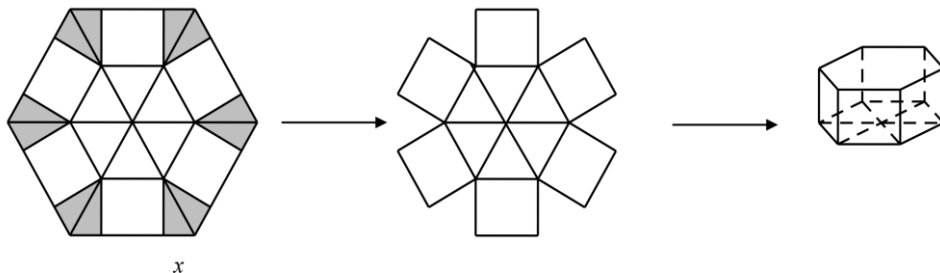


Hình 1



Hình 2

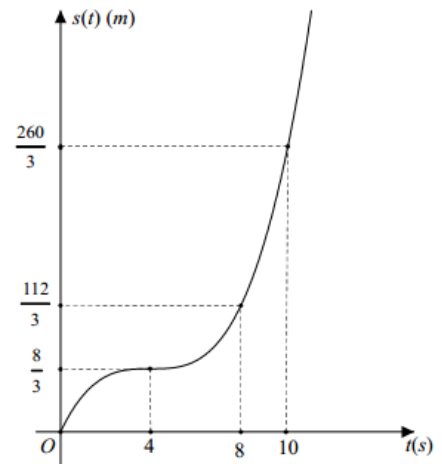
- Câu 11. (THPT Khoa Học Giáo Dục 2025)** Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



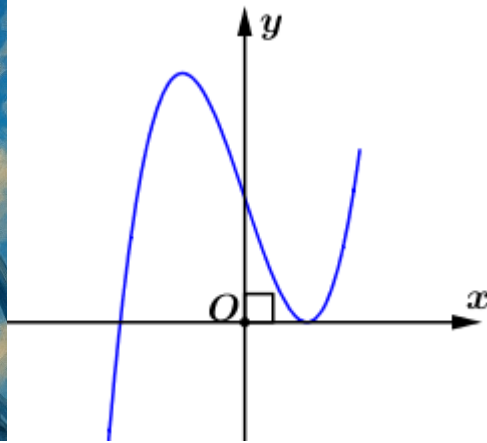
- Câu 12. (Sở Hải Dương 2025)** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

- Câu 13. (Sở Bắc Giang 2025)** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B; Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 90 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 90 - 0,01x^2$ (đơn vị triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = \frac{1}{2}(200 + 27x)$ (đơn vị triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu triệu đồng (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng)?
- Câu 14. (Sở Bình Dương 2025)** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Để mỗi tháng thu được lợi nhuận lớn nhất thì A cần bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Câu 15. (Sở Lâm Đồng 2025)** Một doanh nghiệp dự định sản xuất 200 máy tính bảng dành cho học sinh. Nếu doanh nghiệp đó bán x máy tính bảng ($1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N}$) thì giá bán cho mỗi máy tính bảng là $p(x) = 4000 - 10x$ (nghìn đồng), trong đó chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x) = x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi doanh nghiệp đó sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất?.
- Câu 16. (Sở Cà Mau 2025)** Một hộ kinh doanh sản xuất mỗi ngày được x sản phẩm, ($1 \leq x \leq 20$). Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi $C(x) = x^3 - 3x^2 + 80x + 500$ (nghìn đồng). Giả sử hộ kinh doanh này bán mỗi sản phẩm với giá 320 nghìn đồng. Lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Câu 17. (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025)** Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?
- Câu 18. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

- Câu 19. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025)** Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:
Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?



- Câu 20. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025)** Ngày khai giảng năm học 2024–2025. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT 2018”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2$, $(0 \leq t \leq 3)$. Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: $a(km)$. Tìm a ?
- Câu 21. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025)** Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald’s có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2296,47t^2 - 11493,5t + 35493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t = 4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald’s lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm).
- Câu 22. (Sở Ninh Bình 2025)** Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ tiêu thụ hết.
- Câu 23.** Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $d: y = mx - m - 3$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ tại ba điểm phân biệt A, B và $I(1; -3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của S .
- Câu 24.** Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, ký hiệu là (C) . Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a; b)$ và $B(c; d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm $b + d$



- Câu 25.** Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2.44m$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

