

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

Chú ý

- Ta quy ước rằng khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.

- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $[-1; 1]$.

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

Ta có:

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.

Do đó $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.

- $f(x) = \sqrt{1-x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1-x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$. Do đó $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

Với $x \in (-1; 1)$, ta có: $y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1;1]$:

x	-1		0		1
y'			+	0	-
y				1	
		0			0

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$; $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Chú ý. Trong thực hành, ta cũng dùng các kí hiệu $\min_D y, \max_D y$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $y = f(x)$ trên tập D . Do đó, trong Ví dụ 1 ta có thể viết:

$$\min_{[-1;1]} y = y(-1) = y(1) = 0; \max_{[-1;1]} y = y(0) = 1.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty. \quad 16$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0		1		$+\infty$
y'			-	0	+
y		$+\infty$		0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a;b]} f(x); m = \min_{[a;b]} f(x).$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0; 4]$);

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1.$$

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0; 2\pi]$);

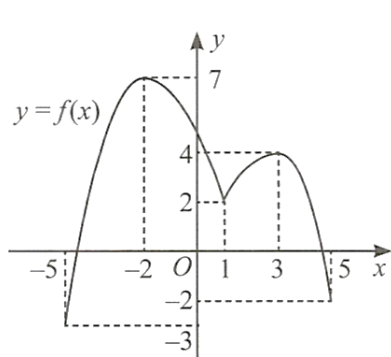
$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

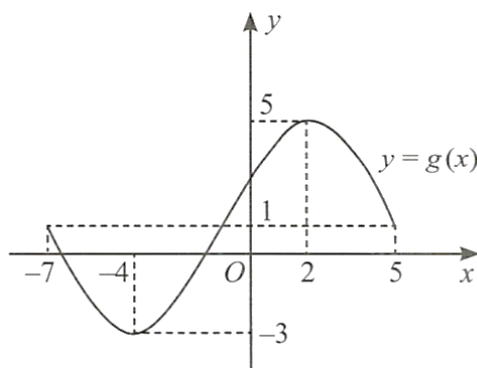
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng

Câu 1. (CTST12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình.



a)



b)

Câu 2. (CD12) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 3. (CD12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = e^x (x^2 - 5x + 7)$ trên đoạn $[0; 3]$.

Câu 4. (CD12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; 3)$;

b) $y = x^4 - 8x^2 + 10$ trên khoảng $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$;

c) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d) $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 5. (CD12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 5]$;

b) $y = (x - \sqrt{2})^2 \cdot (x + \sqrt{2})^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$;

c) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$;

d) $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[3; 4]$;

e) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$

g) $y = x\sqrt{16-x^2}$.

Câu 6. (CD12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 2x - x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $y = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Câu 7. (CD12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $y = 3^x + 3^{-x}$ trên đoạn $[-1; 2]$;

b) $y = x \cdot e^{-2x^2}$ trên đoạn $[0; 1]$;

c) $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$ trên đoạn $[-2; 3]$;

d) $y = -3x + 5 + x \ln x$ trên đoạn $[1; 3]$.

Câu 8. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 4x^3$

b) $y = \frac{x^2}{x-1}, x > 1$

Câu 9. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$;

b) $y = \frac{x}{x^2 + 2}$.

Câu 10. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2$;

b) $f(x) = x - \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Câu 11. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{neu } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 9 & \text{neu } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 12. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 4, x \geq 0$

b) $y = \frac{x^2 + 3}{1-x}, x > 1$

Câu 13. (KNTT12) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Câu 14. (CTST12) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 8x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2; 9]$;

b) $y = -2x^3 + 9x^2 - 17$ trên nửa khoảng $(-\infty; 4]$;

- c) $y = x^3 - 12x + 4$ trên đoạn $[-6; 3]$;
- d) $y = 2x^3 - x^2 - 28x - 3$ trên đoạn $[-2; 1]$;
- e) $y = -3x^3 + 4x^2 - 5x - 17$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Câu 15. (CTST12) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{2x+1}{x-3}$ trên nửa khoảng $(3; 4]$;
- b) $y = \frac{3x+7}{2x-5}$ trên nửa khoảng $\left[-5; \frac{5}{2}\right)$;
- c) $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$.

Câu 16. (CTST12) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{4x^2 - 2x + 9}{2x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$;
- b) $y = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$;
- c) $y = \frac{9x^2 + 3x + 7}{3x - 1}$ trên nửa khoảng $\left(\frac{1}{3}; 5\right]$;
- d) $y = \frac{2x^2 + 3x - 3}{2x + 5}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Câu 17. (CTST12) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = \sqrt{-x^2 + 9}$;
- b) $y = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 10}$.

Dạng 2. Ứng dụng

Câu 18. (CD12) Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức: $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$. (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

- a) Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- b) Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- c) Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Câu 19. (CD12) Nồng độ C của một loại hoá chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức: $C(t) = \frac{3t}{27+t^3}$ với $t \geq 0$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là cao nhất?

Câu 20. (KNTT12) Lợi nhuận thu được P của một công ty khi dùng số tiền s chi cho quảng cáo được cho bởi công thức

$$P = P(s) = -\frac{1}{10}s^3 + 6s^2 + 400, s \geq 0$$

Ở đây các số tiền được tính bằng đơn vị nghìn USD.

a) Tìm số tiền công ty phải chi cho quảng cáo để mang lại lợi nhuận tối đa.

b) Lợi nhuận thu được của công ty thay đổi thế nào khi số tiền chi cho quảng cáo thay đổi?

Câu 21. (KNTT12) Giả sử một chiếc xe tải khi di chuyển với tốc độ x dặm/giờ sẽ tiêu thụ nhiên liệu ở mức $\frac{1}{200} \left(\frac{2500}{x} + x \right)$ gallon/dặm. Nếu giá nhiên liệu là 3,6 USD/gallon thì chi phí nhiên liệu C (tính bằng USD) khi lái xe 200 dặm với tốc độ x dặm/giờ được cho bởi công thức

$$C = C(x) = 3,6 \cdot \left(\frac{2500}{x} + x \right)$$

Ở đây, dặm và gallon là những đơn vị đo lường phổ biến của Mỹ. Biết rằng tốc độ (dặm/giờ) của xe tải trên một tuyến đường cao tốc bị hạn chế trong khoảng $[10; 75]$. Hỏi:

a) Lái xe ở tốc độ nào thì chi phí nhiên liệu sẽ ít nhất?

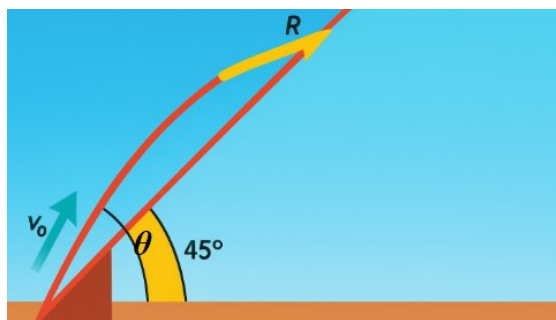
b) Nếu người lái xe tải được trả lương 28 USD/giờ và tiền lương được cộng vào chi phí nhiên liệu thì tốc độ di chuyển của xe tải là bao nhiêu để chi phí tiết kiệm nhất (tức là tổng chi phí mà công ty phải trả cho lái xe và chi phí nhiên liệu là nhỏ nhất)?

Câu 22. (KNTT12) Hai nguồn nhiệt đặt cách nhau s mét, một nguồn có cường độ a đặt ở điểm A và một nguồn có cường độ b đặt ở điểm B . Cường độ nhiệt tại điểm P nằm trên đoạn thẳng nối A và B được tính theo công thức

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(s-x)^2}$$

trong đó $x(m)$ là khoảng cách giữa P và A . Tại điểm nào nằm giữa A và B , nhiệt độ sẽ thấp nhất?

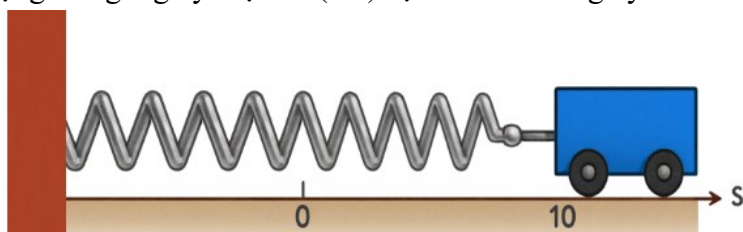
Câu 23. (KNTT12) Một vật được phóng lên trời theo một góc xiên $\theta (45^\circ < \theta < 90^\circ)$ so với phương ngang với vận tốc ban đầu là v_0 (feet/giây) tính từ chân mặt phẳng nghiêng tạo một góc 45° so với phương ngang (xem hình vẽ).



Nếu bỏ qua sức cản của không khí thì quỹ đạo R (tính bằng feet, $1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m}$) mà vật di chuyển lên mặt phẳng nghiêng được cho bởi hàm số $R(\theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{16} \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)$.

Góc ném θ nào làm cho quỹ đạo R lớn nhất? Giá trị lớn nhất của R là bao nhiêu?

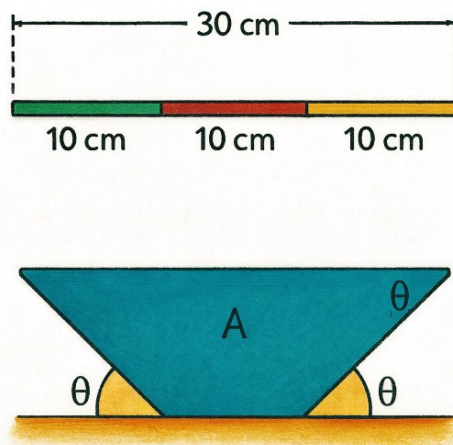
- Câu 24. (KNTT12)** Một chiếc xe nhỏ chuyển động không có ma sát, gắn vào tường bằng một lò xo (xem hình vẽ), được kéo ra khỏi vị trí đứng yên 10 cm rồi thả ra tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây để chuyển động trong 4 giây. Vị trí $s(\text{cm})$ tại thời điểm t giây là $s = 10 \cos \pi t$.



a) Tốc độ lớn nhất của xe là bao nhiêu? Khi nào xe chuyển động với tốc độ như vậy, khi đó xe đang ở vị trí nào và gia tốc lúc đó có độ lớn là bao nhiêu?

b) Xe ở đâu khi độ lớn gia tốc là lớn nhất? Khi đó vận tốc của xe là bao nhiêu?

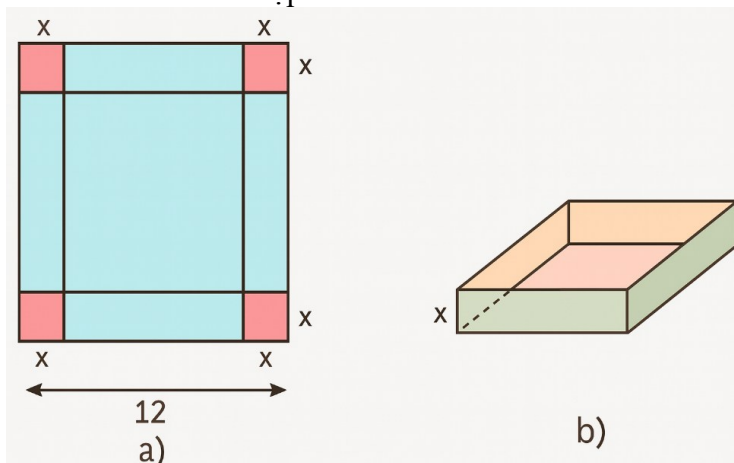
- Câu 25. (KNTT12)** Máng xối nước mưa được làm bằng một miếng nhôm rộng 30 cm. Sau khi đánh dấu chiều dài 10 cm từ mỗi cạnh, miếng nhôm được gấp lên một góc θ (xem hình vẽ).



Diện tích $S(\text{cm}^2)$ của mặt cắt ngang của máng được biểu thị dưới dạng một hàm số của θ như sau: $S = S(\theta) = 100\sin\theta(\cos\theta + 1), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Tìm góc θ để diện tích S là lớn nhất (góc θ này sẽ cho phép nước chảy nhiều nhất qua máng xối).

- Câu 26. (KNTT12)** Một công ty ước tính rằng tổng lợi nhuận P (nghìn đồng) cho một sản phẩm có thể được mô hình hoá bằng hàm số $P(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x$, trong đó x là số lượng đơn vị sản phẩm đó được sản xuất và bán ra. Mức sản xuất nào sẽ mang lại lợi nhuận lớn nhất? Khi đó lợi nhuận lớn nhất là bao nhiêu?
- Câu 27. (CTST12)** Một chất điểm chuyển động theo phương ngang có toạ độ xác định bởi phương trình $x(t) = -0,01t^4 + 0,12t^3 + 0,3t^2 + 0,5$ với x tính bằng mét, t tính bằng giây, $0 \leq t \leq 6$. Tìm thời điểm mà tốc độ của chất điểm lớn nhất.
- Câu 28. (CTST12)** Cho a và b là hai số không âm và có tổng bằng 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^4 + b^4$.
- Câu 29. (CTST12)** Từ một miếng bìa hình vuông có cạnh bằng 12 cm, người ta cắt bỏ đi bốn hình vuông nhỏ có cạnh bằng $x(\text{cm})$ ở bốn góc (Hình a) và gấp lại thành một hình hộp không nắp (Hình b). Tìm x để thể tích của hình hộp là lớn nhất.

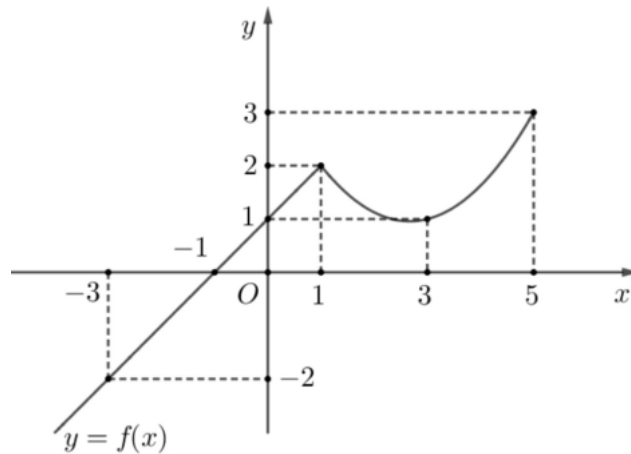


- Câu 30. (CTST12)** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O , bán kính 1 cm. Đặt $A = \alpha (0 < \alpha < \pi)$.
- a) Viết biểu thức tính diện tích S của tam giác ABC theo α .
- b) Tìm diện tích lớn nhất của tam giác ABC .
- Câu 31. (CTST12)** Cho hình thang cân có đáy nhỏ và hai cạnh bên bằng nhau và bằng 5. Tìm diện tích lớn nhất của hình thang cân đó.
- Câu 32. (CTST12)** Trong một ngày, tổng chi phí để một xưởng sản xuất $x(\text{kg})$ thành phẩm được cho bởi hàm số $C(x) = 2x^3 - 30x^2 + 177x + 2592$ (nghìn đồng). Biết giá bán mỗi kilôgam thành phẩm là 513 nghìn đồng và công suất tối đa của xưởng là 20 kg trong một ngày. Khối lượng thành phẩm xưởng nên sản xuất trong một ngày là bao nhiêu để lợi nhuận thu được của xưởng trong một ngày là cao nhất?

- Câu 33. (CTST12)** Giá bán P (đồng) của một sản phẩm thay đổi theo số lượng Q sản phẩm ($0 \leq Q \leq 1500$) được cung cấp ra thị trường theo công thức $P = \sqrt{1500 - Q}$. Tính số lượng sản phẩm nên được cung cấp ra thị trường để doanh thu $R = PQ$ lớn nhất.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 5]$ bằng



- A. 3. B. 5. C. -3. D. 2.

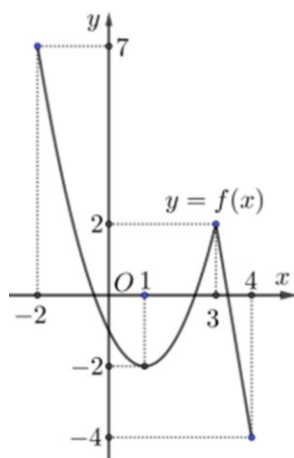
- Câu 2. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; 4]$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	-4	-1	3	4		
y'		+	0	-	0	+
y						

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-4; 4]$ bằng

- A. 3. B. -22. C. -71. D. -4.

- Câu 3. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[-2; 4]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là



- A. 3. B. 2. C. -2. D. 7.

Câu 4. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$. Giá trị của biểu thức $M + 3m$ bằng

- A. 1. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 5. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào đúng?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A. $\min_{[-1;3]} f(x) = -1$. B. $\min_{[-1;3]} f(x) = 1$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = 5$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = 4$.

Câu 6. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

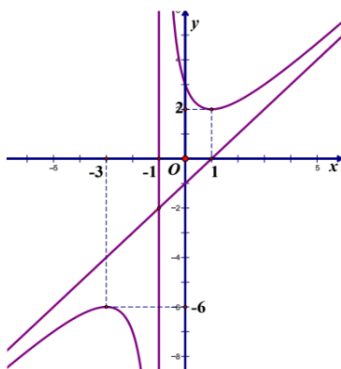
x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = 4$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = 5$. C. $\max_{[-1;3]} f(x) = 1$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = 0$.

Câu 7. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng:

- A. -12 . B. 10 .
C. 15 . D. -2 .

Câu 8. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên khoảng $(-\infty; -1)$ bằng

- A. 1 . B. 2 . C. -6 . D. -3 .

Câu 9. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau.

x	0	1	3
y	-3	-4	0

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. -4 . B. 1 . C. 4 . D. 0 .


Câu 10. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x - 6$ trên đoạn $[1; 3]$ là:

- A. -39 . B. -2 . C. -10 . D. -6 .

Câu 11. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 0]$

- A. 1 . B. 3 . C. -1 . D. 2 .

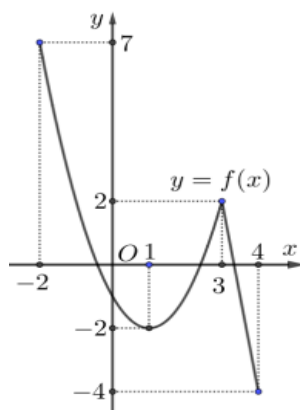
Câu 12. (THPT Hùng Vương - Bình Thuận 2025) Cho hàm số $y = f(x)$. có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập \mathbb{R} bằng -1 .
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập \mathbb{R} bằng 0 .
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận.

Câu 13. (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng



- A. -2 .
- B. 5 .
- C. 3 .
- D. 0 .

Câu 14. (THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. 0 .
- B. -16 .
- C. 4 .
- D. 20 .

Câu 15. (THPT Cụm trường Hải Dương 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$ là

- A. 1 .
- B. -17 .
- C. 17 .
- D. 3 .

Câu 16. (Sở Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y			10		8	
	$-\infty$			-4		$-\infty$

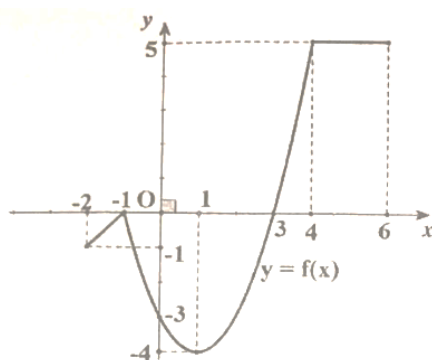
A. -1 .

B. 10 .

C. 1 .

D. 8 .

Câu 17. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ sau:



Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$.

A. 1 .

B. 5 .

C. 4 .

D. 2 .

Câu 18. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên.

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		4
	0						

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.

C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 19. (Chuyên Vinh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$. B. $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0)$.

C. $\max_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$. D. $\min_{(0;1)} f(x) = f(0)$.

Câu 20. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 6$ trên đoạn $[1;3]$ là

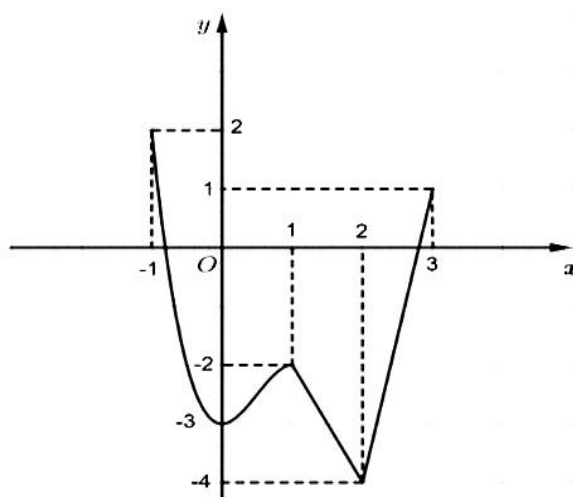
A. 30.

B. 39.

C. 36.

D. 10.

Câu 21. (THPT Trần Nguyên Hãn - Hải Phòng 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M + m$ là:

A. -5.

B. 2.

C. -6.

D. -2.

Câu 22. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - x + 2$ trên đoạn $[-2;0]$ bằng?

A. 2.

B. -2.

C. 0.

D. -8.

Câu 23. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 37.

B. 1.

C. 12.

D. 33.

Câu 24. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$.

- A. $\min_{[-4;-2]} y = 5$. B. $\min_{[-4;-2]} y = 4$. C. $\min_{[-4;-2]} y = 7$. D. $\min_{[-4;-2]} y = \frac{15}{2}$.

Câu 25. (THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

- A. 17. B. 10. C. 15. D. -12.

Câu 26. (Sở Bắc Giang 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- A. 0. B. $\sqrt{2}$. C. 3. D. -1.

Câu 27. (Sở Thái Nguyên 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 12. D. 6.

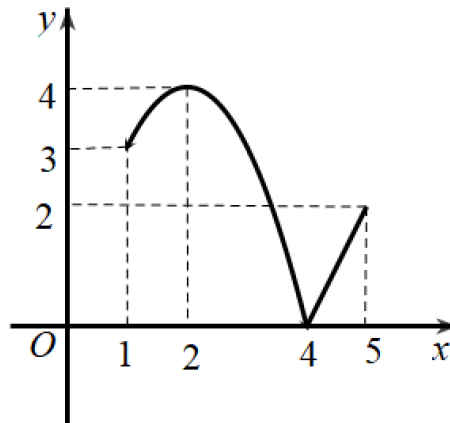
Câu 28. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$		
$f'(x)$	+		+	0	-	0	+

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{(-2;+\infty)} f(x) = f(1)$. B. $\min_{(-\infty;-3)} f(x) = f(-3)$ C. $\min_{(-2;1)} f(x) = f(1)$ D. $\min_{[-3;-2]} f(x) = f(-2)$.

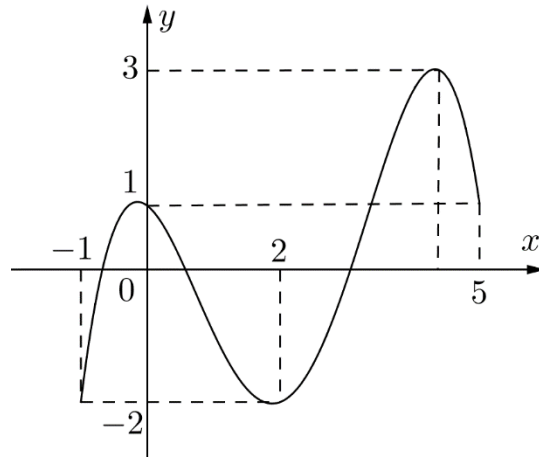
Câu 29. (Sở Lào Cai 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 5]$ và có đồ thị trên như hình vẽ sau



Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất tại điểm

- A. $x = 4$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 5$.

Câu 30. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

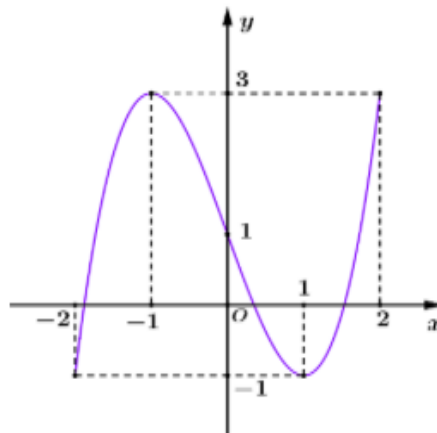


- A. 4. B. 1. C. 2. D. -1.

Câu 31. (Liên Trường Nghệ An 2025) Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A. $M = 21$. B. $M = 7$. C. $M = 5$. D. $M = -11$.

Câu 32. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Khi đó, tổng $M + m$ bằng

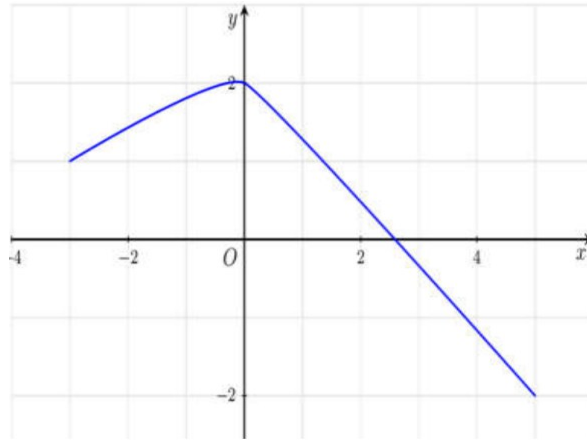


- A. -6. B. -2. C. -5. D. 2.

Câu 33. (Cụm Ninh Giang - Tứ Kỳ - Gia Lộc 2025) Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 6$ trên đoạn $[-1; 2]$ là?

- A. $M = 7$. B. $M = 5$. C. $M = -11$. D. $M = 21$.

Câu 34. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3;5]$ như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;5]$. Tính $2M - m$.



- A. 5. B. 8. C. 2. D. 6.

Câu 35. (THPT Mai Trúc Loan - Hà Tĩnh 2025) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x$ trên đoạn $[0;3]$ bằng

- A. 2. B. 18. C. -2. D. 0.

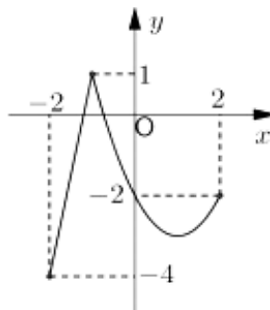
Câu 36. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;3]$, có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	-4	-2	0	3	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	4		2		-1

\swarrow \nearrow \searrow
-2 -1

- A. $\min_{[-4;3]} f(x) = -1$ tại $x = 3$. B. $\max_{[-4;3]} f(x) = 4$ tại $x = -4$.
 C. $\max_{[-4;3]} f(x) = 2$ tại $x = 0$. D. $\min_{[-4;3]} f(x) = -2$ tại $x = 2$.

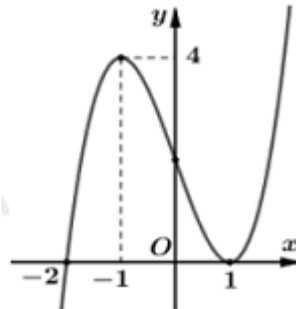
Câu 37. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị trên đoạn $[-2;2]$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2; 2]$ lần lượt là M và m . Khi đó $M - m$ bằng:

- A. 5 B. 3 C. -4 D. 0

Câu 38. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng:



- A. 1 B. 4 C. -2 D. -1

Câu 39. (Sở Hậu Giang 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

A. -5. B. -51. C. -1. D. -6.

Câu 40. (THPT Bắc Đông Quan - Thái Bình 2025) Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 - \sin x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M = 2$; $m = 1$. B. $M = 1$; $m = -1$. C. $M = 3$; $m = 0$. D. $M = 3$; $m = 1$.

Câu 41. (Sở Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[0; 3]$ như sau:

x	0	1	3
y	-3	-4	0

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

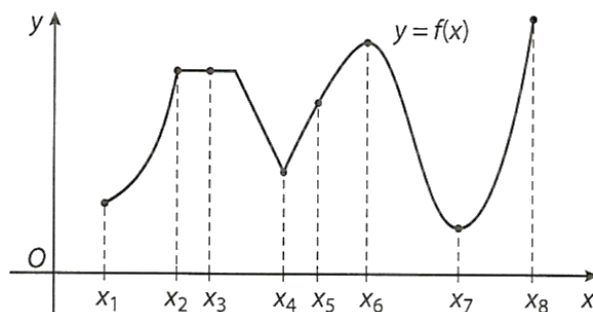
- A. -4. B. 1. C. 4. D. 0.

D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Sử dụng đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hình bên)

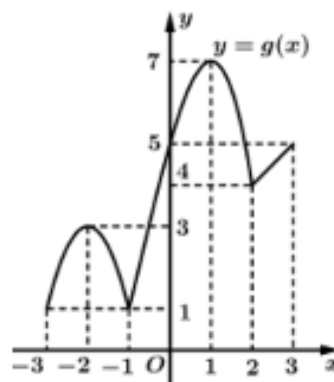
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm x_8 .
- b) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_7 .
- c) Hàm số đạt cực đại tại điểm x_6 .
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm x_4 và x_7 .



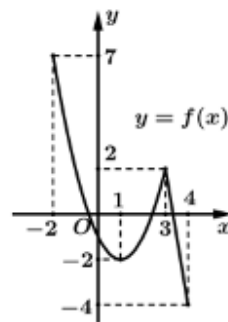
Câu 2. Cho hàm số $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 3]$ bằng 5.
- b) Trên đoạn $[-3; 3]$, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-3; 3]$, bằng 1.
- d) Trên đoạn $[-1; 3]$, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 2$.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 2.
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 4]$ bằng 2.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 4]$ bằng -4 .
- d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-2; 3]$ tại điểm $x_0 = 1$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- c) Hàm số có 3 cực trị.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{9}{20}$	$-\frac{3}{5}$	$+\infty$

d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-3}{5}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = -1$.

c) $\max_{(0; +\infty)} f(x) = 2$

d) $\max_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} f(x) = 2$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 1$.

b) Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

c) $\max_D f(x) = 2$.

d) $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		$+\infty$		$+\infty$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\max_{[-4; 4]} f(x) = 40$ đạt được khi $x = -1$.

b) $\min_{[-4; 4]} f(x) = 8$ đạt được khi $x = 3$.

c) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất trên \mathbb{R} .

d) Giá trị cực tiểu của $f(x)$ bằng 8.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 - 15$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $\min_{[-2; 3]} f(x) = -16$.

b) Hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

c) $\max_{[-2; 3]} f(x) = 8$.

d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị nhỏ nhất trên tập số thực.

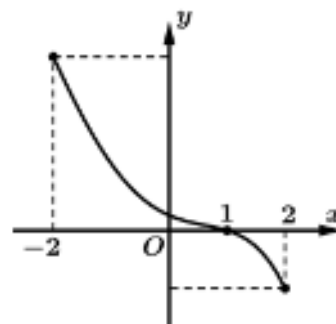
Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x + 2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.
- b) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng -7.
- d) Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là đường cong trong hình vẽ.

Biết rằng $f(-1) + f(2) = f(1) + f(-2)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

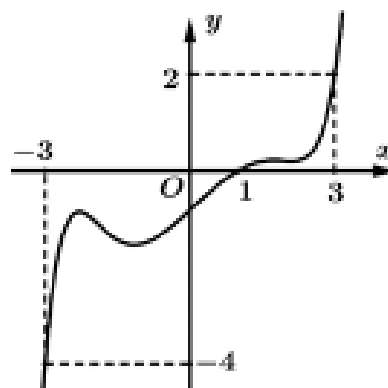
- a) $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(-2)$.
- b) $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(1)$.
- c) $f(1) < f(0) < f(-2)$.
- d) $\min_{[-2; 2]} f(x) = f(-2)$



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ là đường cong trong hình vẽ.

Biết rằng $f(-3) + 2f(1) = f(3) + 2f(0)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\min_{[-3; 3]} f(x) = f(-3) = -4$.
- b) $\min_{[-3; 3]} f(x) = f(1)$.
- c) $\max_{[-3; 3]} f(x) = f(-3)$.
- d) $\max_{[-3; 3]} f(x) = f(3)$



Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$.
- b) $x = 1$ là điểm cực tiểu của của hàm số.
- c) Hàm số có hai điểm cực trị.

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$.

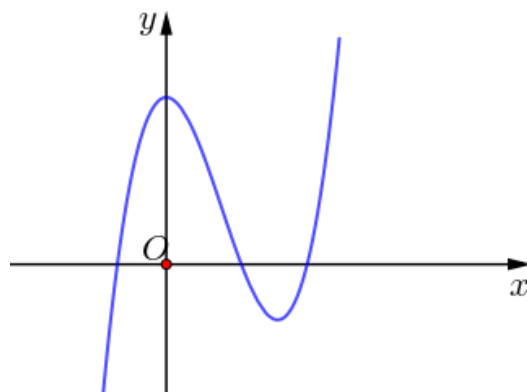
Câu 13. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hình vẽ dưới đây và có tập xác định trên \mathbb{R}

a) Đồ thị hàm số đã cho là của hàm số $y = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$.

b) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

c) Hàm số có đồ thị đã cho đồng biến trên \mathbb{R} .

d) Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị.



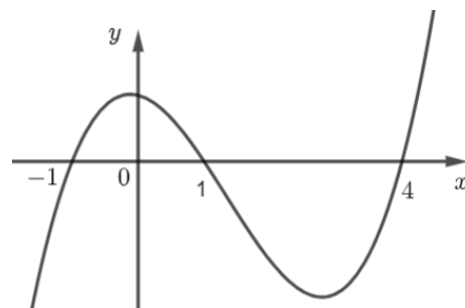
Câu 14. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

b) Trên đoạn $[-1; 4]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

c) $f(1) > f(2) > f(4)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị



Câu 15. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025) Cho hàm số $f(x) = 4 \sin x \cos x + 2x$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 4 \sin 2x + 2$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị thuộc $[-\pi; \pi]$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$.

Câu 16. (Đề Tham Khảo 2025) Cho hàm số $f(x) = 2 \cos x + x$.

a) $f(0) = 2$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2 \sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

Câu 17. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = \sin x - x$.

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = \cos x - 1$.

b) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ là π .

c) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ là $-1 - \frac{3\pi}{2}$.

d) $f(0) = 0$; $f(\pi) = -\pi$.

Câu 18. (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x - \sqrt{3}x$.

a) Một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $x = -\frac{\pi}{3}$.

b) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

c) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 2 \cos x - \sqrt{3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Tổng các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 2025 = f(x)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[-2; 0]$.

b) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$. Khi đó $M + m = 2024$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; +\infty)$ tại $x = 1$.

d) Có 20 giá trị nguyên của $k \in [-2025; 2025]$ để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2k - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trên $[-1; 3]$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = f(x)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[0; 2]$.
- b) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-1; 0]$. Khi đó $M + 2m = -4$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(1; +\infty)$ tại $x = 2$.
- d) Có 2026 giá trị nguyên của $k \in [-2025; 2025]$ để bất phương trình $2a - \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in (-\infty; 1)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$

- a) $y' = \frac{-5}{(x - 3)^2}, \forall x \neq 3$.
- b) $f(-2) = 3; f(1) = -2$.
- c) Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là $1; \frac{-1}{2}$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ tại $x_0 = -1$.

Câu 22. Cho hàm số $y = x - \ln x$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = 1 - \frac{1}{x}$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ bằng 1.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ bằng $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$

- a) Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 3}$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3; 5]$ bằng 1.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ bằng $\log_3 5$.

Câu 24. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = 2x - \log_5(x + 1)$

a) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}, \forall x \in (-1; +\infty)$.

b) Hàm số $f(x)$ có một điểm cực tiểu.

c) Giá trị của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = 4$ là $f(4) = 8$.

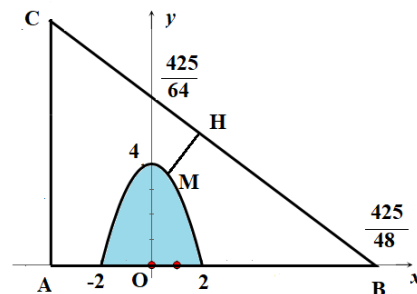
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 25. Một hồ nước nhân tạo có dạng tam giác ABC , bên bờ AB có một phần đất nhô ra dạng bán đảo (P) . Trong mô hình minh họa với hệ trục Oxy bờ của bán đảo (P) là một phần của đường parabol có đỉnh $I(0; 4)$ và cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1 = -2$ và $x_2 = 2$. Bờ BC là một phần của đường thẳng cắt trục Ox tại điểm $B\left(\frac{425}{48}; 0\right)$ và cắt trục Oy tại điểm $N\left(0; \frac{425}{64}\right)$ (hình vẽ). Người ta dự định xây một cây cầu MH từ bán đảo (P) đến bờ BC sao cho chiều dài cây cầu ngắn nhất với M là điểm có hoành độ $x = a$ nằm trên bờ của bán đảo (P) . (Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10m).

a) Đường thẳng BC có phương trình là $48x + 64y - 425 = 0$.

b) M có tọa độ là $M(a; -a^2 + 4)$ với $a \in [-2; 2]$.

c) Khoảng cách từ M đến bờ BC là $d(M; BC) = |64a^2 - 48a + 169|$.



d) Chiều dài của cây cầu MH bằng 20 mét.

Câu 26. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B . Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng).

a) Chi phí để nhà máy A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.

b) Số tiền nhà máy A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho nhà máy B là 600 triệu đồng.

c) Lợi nhuận mà nhà máy A thu được khi bán x tấn sản phẩm $(0 \leq x \leq 100)$ cho nhà máy B là $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$ (triệu đồng).

d) Để thu được lợi nhuận lớn nhất thì mỗi tháng nhà máy A bán cho nhà máy B khoảng 70,7 tấn sản phẩm (số tấn làm tròn đến hàng phần chục)

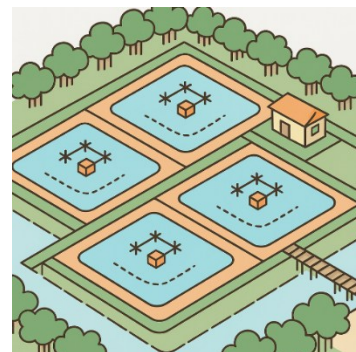
Câu 27. Một trang trại nuôi tôm dự định thả nuôi không quá 600.000 con tôm giống. Nếu trang trại thả nuôi x con tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được ước tính là

$F(x) = -0,000002x^3 + 0,003x^2 + 2x$ (kg). Trong khi chi phí thức ăn bình quân cho mỗi con tôm là $G(x) = 0,0000005x^2 + 0,001x + 0,5$ (đồng) và giá bán mỗi kg tôm là 150.000 đồng.

a) Chi phí thức ăn khi trang trại thả nuôi x con tôm giống là $0,0000005x^2 + 0,001x + 0,5$ (đồng).

b) Số tiền bán được khi trang trại thả nuôi 1000 con tôm giống là 450000000 (đồng).

c) Lợi nhuận thu được khi trang trại thả nuôi x con tôm giống là $T(x) = -0,3000005x^3 + 449,999x^2 + 299999,5x$ (đồng).



d) Khi trang trại thả nuôi 1263 con tôm giống thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 28. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng km . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.

a) Con tàu đạt khoảng cách 10 km so với bề mặt của Mặt Trăng tại thời điểm $t = 20$ (s).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 50$ (giây) là 4 km/s

c) Trong khoảng thời gian từ giây thứ 20 đến giây thứ 30, độ cao của con tàu tăng dần so với bề mặt của Mặt Trăng.



d) Với $0 \leq t \leq 50$ thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây, con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này bằng 6 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

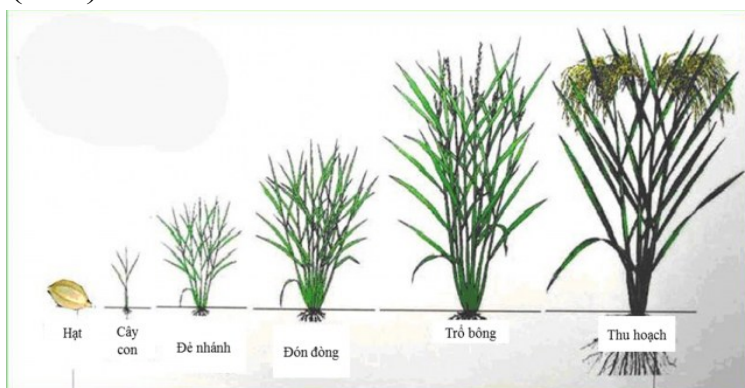
Câu 29. (Sở Hà Tĩnh 2025) Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/l).

a) Sau khi tiêm thuốc 2 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân bằng $0,4$ (mg/l).

b) Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân có thể vượt quá $0,5$ (mg/l)

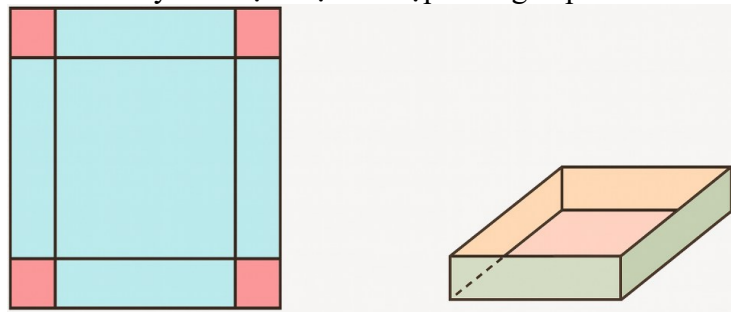
- c) Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.
- d) Sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất bằng $0,5 \text{ (mg/l)}$

Câu 30. (Chuyên Vinh 2025) Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Cây lúa sau khi được cấy trải qua quá trình tăng trưởng để nhanh và phát triển chiều cao trước khi làm đồng, trổ bông. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ t ($t \geq 0$).



- a) $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$.
- b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.
- c) Chiều cao tối đa của cây lúa là 150cm.
- d) Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80cm.

Câu 31. (Sở Hậu Giang 2025) Một tấm nhôm hình vuông cạnh 240 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp.



- a) Thể tích khối hộp nhận được khi tính theo x là $V = x(240 - 2x)^2$.
- b) Khi $x = 20 \text{ cm}$ thì thể tích của khối hộp nhận được là $8(m^3)$.

c) Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x = 60 \text{ cm}$.

d) Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là 1024 dm^3 .

Câu 32. (Sở Nghệ An 2025) Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí CO_2 cho thấy: nồng độ khí CO_2 trong phòng thay đổi theo thời gian t (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số $f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2 + 5}$ (ppm) với $t \geq 0$ (khi nói nồng độ khí CO_2 trong không khí là 400 ppm, điều đó có nghĩa là trong một triệu phần thể tích của không khí, có 400 phần thể tích là khí CO_2).

a) Nồng độ khí CO_2 trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là 400 (ppm).

b) $f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2}$ với $t \geq 0$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

d) Nồng độ khí CO_2 cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

Câu 34. (Sở Bến Tre 2025) Một công ty nước ngoài đang cần thuê nhân viên để bán các hợp đồng bảo hiểm cho khách hàng. Công ty nhận thấy nếu thuê x nhân viên với chi phí là 750 USD /tuần cho mỗi nhân viên thì công ty sẽ bán được $q(x) = x^3 - 12x^2 + 60x$ hợp đồng bảo hiểm. Do hạn chế về không gian, công ty không thể thuê quá 7 nhân viên. Biết công ty nhận được 50 USD cho mỗi hợp đồng bán ra, chi phí cố định mỗi tuần là 2500 USD.

a) Điều kiện của x là: $x \in [0; 7]$ và $x \in \mathbb{N}$.

b) Chi phí hàng tuần mà công ty phải thanh toán là $750x + 2500 \text{ (USD)}$.

c) Lợi nhuận hàng tuần của công ty là $T(x) = x^3 - 12x^2 - 690x - 2500 \text{ (USD)}$.

d) Công ty cần thuê 6 nhân viên để đạt lợi nhuận hàng tuần nhiều nhất.

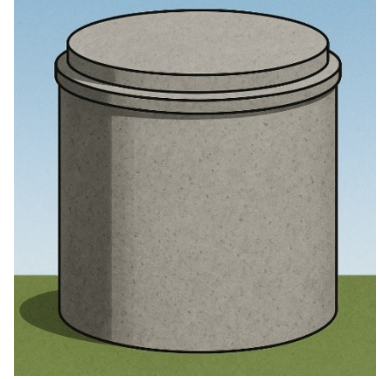
Câu 35. (Sở Nghệ An 2025) Một trang trại cần xây một bể chứa nước hình trụ bằng bê tông (có nắp đáy) để chứa $60 \text{ (m}^3\text{)}$ nước tưới tiêu. Chi phí xây dựng chủ yếu phụ thuộc vào diện tích bề mặt bê tông cần sử dụng (diện tích toàn phần của bể tính theo phần bên trong của bể). Theo hợp đồng với nhà thầu xây dựng, chi phí mỗi mét vuông xây dựng theo cách tính trên là 1,5 triệu đồng. Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao của bể (đơn vị tính của r, h là mét).

a) Thể tích của bể là: $V = \pi r^2 h = 60(m^3)$.

b) Diện tích toàn phần S_p của bể chứa nước được biểu diễn theo bán kính r là $S_p(r) = \pi r^2 + \frac{120}{r}(m^2)$.

c) Để tiết kiệm chi phí nhất, bể nên được xây với bán kính đáy là $r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}(m)$.

d) Chi phí thấp nhất để xây dựng bể chứa nước nói trên là 127 triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Câu 36. (Cụm trường Nam Định 2025) Người ta ước tính rằng số lượng cá thể của một loài có nguy cơ tuyệt chủng vẫn còn trong tự nhiên t năm sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = \frac{600}{1 + 3e^{-0,02t}}, t \geq 0$.

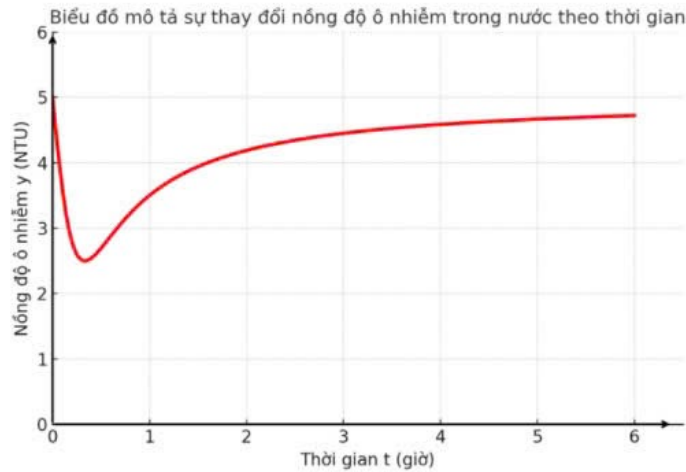
a) Số lượng cá thể của loài đó tại thời điểm khi bắt đầu thiết lập chính sách bảo vệ là 150 con.

b) Sau khi chính sách bảo vệ được thiết lập, số lượng cá thể của loài đó lúc đầu tăng nhưng sau đó sẽ giảm dần.

c) Cần ít nhất 50 năm kể từ khi chính sách bảo vệ được thiết lập để số lượng cá thể của loài đó sẽ vượt mức 300 con.

d) Số lượng cá thể của loài đó không bao giờ vượt quá 600 con.

Câu 37. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Trong một thí nghiệm xử lý nước thải tại phòng thí nghiệm, người ta quan sát sự thay đổi nồng độ một chất ô nhiễm (đơn vị: NTU – chỉ số biểu thị mức độ ô nhiễm, giá trị càng cao thì mức độ ô nhiễm càng lớn) trong bể nước theo thời gian t (tính bằng giờ) kể từ khi bắt đầu thử nghiệm. Khi bắt đầu, một lượng hóa chất được đưa vào bể. Nhờ quá trình phản ứng, hấp thụ và tự phân hủy sinh học, mức độ ô nhiễm thay đổi theo thời gian và được mô phỏng xấp xỉ bằng công thức: $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với $t \geq 0$ (Đồ thị dưới đây biểu diễn mức độ ô nhiễm của nước theo thời gian)



- a) Tại thời điểm độ ô nhiễm đạt mức thấp nhất, nước đã đạt trạng thái sạch ổn định.
- b) Trong toàn bộ quá trình theo dõi, nồng độ ô nhiễm không vượt quá 5NTU.
- c) Sau 1 giờ kể từ khi thử nghiệm bắt đầu, nồng độ ô nhiễm trong nước là 3,5NTU.
- d) Nồng độ ô nhiễm đạt mức thấp nhất tại thời điểm $t = \frac{1}{3}$.

Câu 38. (THPT Lê Quý Đôn - HCM 2025) Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/h) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng trên một giờ.

- a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/h) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên một kilomet đường sông là 48000 đồng.
- b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên một kilomet đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.



- c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/h) thì tổng chi phí nguyên liệu trên một km đường sông là 43000 đồng.
- d) Vận tốc nhỏ nhất của tàu là $v = 20$ (km/h) thì tổng chi phí nguyên liệu trên một km đường sông là nhỏ nhất

Câu 39. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Giá của một mã cổ phiếu X (đơn vị tính: nghìn đồng) trong ngày thứ n của quý I năm 2025 được cho bởi hàm số

$$C(n) = \begin{cases} \frac{50n - n^2}{n - 90} + 40, & 0 < n \leq 70 \\ -3n + 320, & 70 < n \leq 90 \end{cases}$$

- a) Giá của cổ phiếu X vào ngày thứ 10 trong quý I (ngày 10 tháng 01 năm 2025) là 35 nghìn đồng/cổ phiếu.

- b) Giá của mã cổ phiếu X liên tục giảm trong cả quý I .
- c) Giá của mã cổ phiếu X đạt mức cao nhất trong quý I là 110 nghìn đồng/cổ phiếu.
- d) Một nhà đầu tư mua 1000 cổ phiếu X vào ngày thứ 30 và bán hết vào ngày thứ 70. Nếu tất cả các loại thuế và phí nhà đầu tư này phải nộp cho mỗi lần giao dịch (*mua hoặc bán cổ phiếu*) là 1,2% tổng giá trị giao dịch thì lãi ròng (sau khi trừ các loại thuế và phí) mà nhà đầu tư đó thu được qua vụ đầu tư này là 78 triệu 320 nghìn đồng.

Câu 40. (Sở Nam Định 2025) Trong một trận bóng đá, một cầu thủ hậu vệ A đang có bóng ở phần sân nhà và quyết định chuyền bóng cho tiền đạo B của đội mình. Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quả bóng bắt đầu rời chân hậu vệ A, Do đường chuyền bị lỗi nên sau khi chuyền, quả bóng bay lên và chạm mặt sân lần đầu tiên ở giây thứ tư, rồi lại bay lên và chạm mặt sân lần thứ hai ở giây thứ sáu. Độ cao tính bằng mét của quả bóng so với mặt đất ở giây thứ t , ($0 \leq t \leq 6$) được cho bởi hàm số liên tục
$$h(t) = \begin{cases} -t^2 + at & \text{khi } 0 \leq t \leq 4 \\ -2t^2 + bt + c & \text{khi } 4 < t \leq 6 \end{cases}.$$

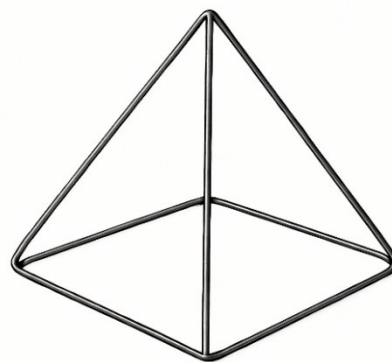
- a) $h(4) = h(6)$.
- b) $a = 3, b = -2, c = 2$.
- c) $h'(2) = h'(5)$.
- d) Độ cao lớn nhất mà quả bóng đạt được so với mặt sân trong 6 giây đầu là 3 mét.



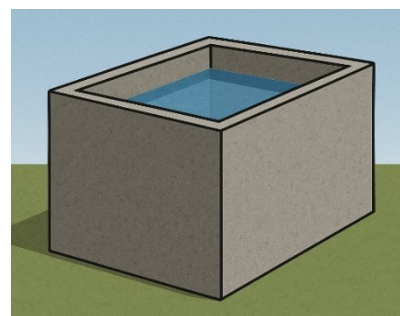
E. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Bạn An có một đoạn dây thép dài 16 dm muốn uốn thành một kim tự tháp có dạng chóp tứ giác đều (đoạn dây thép được uốn thành 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy của kim tự tháp). Hỏi thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là bao nhiêu? (đơn vị: dm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

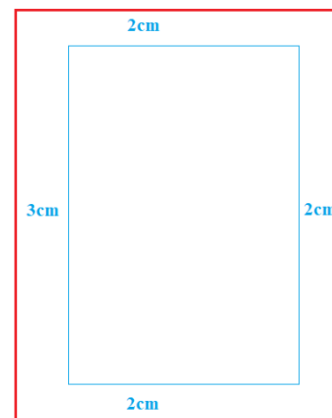
Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $v(t) = \frac{-1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ (m/s), với t được đo bằng đơn vị giây là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?



- Câu 3.** Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn hán ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/ m^2 . Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



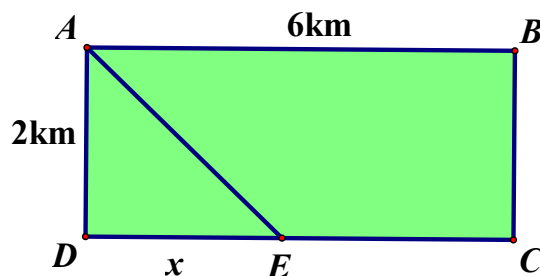
- Câu 4.** Diện tích một trang của một cuốn sách là 600 cm^2 . Do yêu cầu kỹ thuật, cần để lề trên và lề dưới là 2 cm , lề trái là 3 cm và lề phải là 2 cm . Tính diện tích lớn nhất của phần chữ in vào cuốn sách được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



- Câu 5.** Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa $55\,000$ khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là $27\,000$ người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng $3\,000$ khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

- Câu 6.** Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản xuất được x kg thịt, ($1 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?

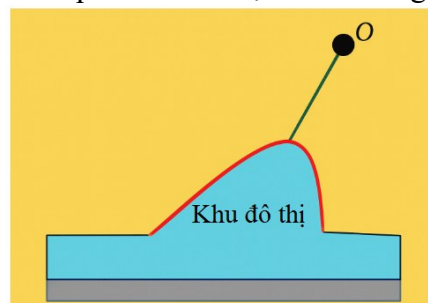
- Câu 7.** Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = 2$ km và chiều dài $AB = 6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C . Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD , sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C . Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất? (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)



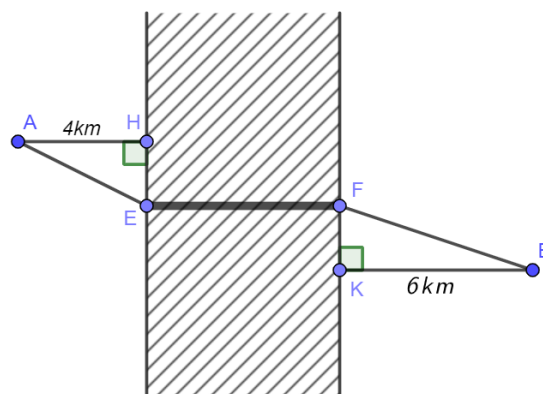
- Câu 8.** Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 1000(t^2 + me^{-t})$ với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó

đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

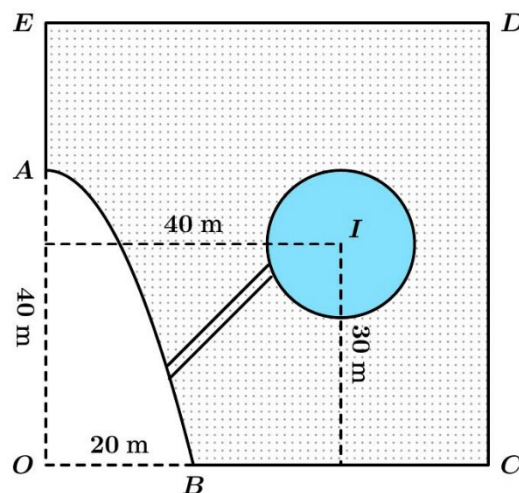
- Câu 9.** Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



- Câu 10.** Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông. Biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu tại vị trí E cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần trăm).

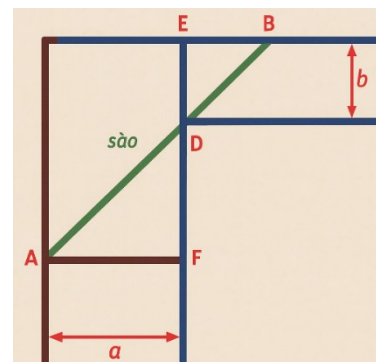


- Câu 11.** Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần chục), biết:
- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
 - Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
 - Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;



- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.

- Câu 12.** Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, Biết chiều dài tối thiểu của que sào thỏa mãn điều kiện trên là l . Tính giá trị của l^2 .



- Câu 13.** Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:
 $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$.

Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

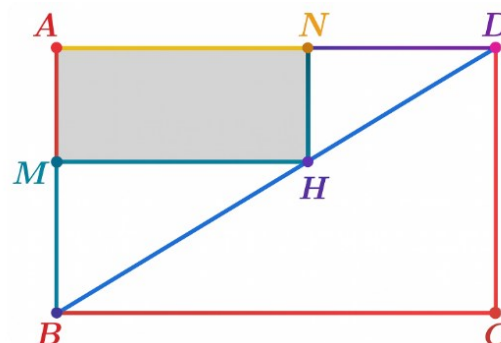
Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới.

Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

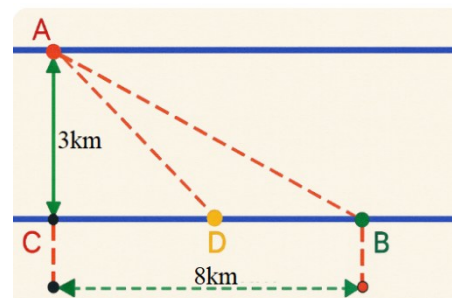
- Câu 14.** Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là 530 cm^3 . Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



- Câu 15.** Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25 m^2 , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/m^2 ?



- Câu 16.** Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6 km/h , chạy với vận tốc 8 km/h , $AC = 3 \text{ km}$, $BC = 8 \text{ km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

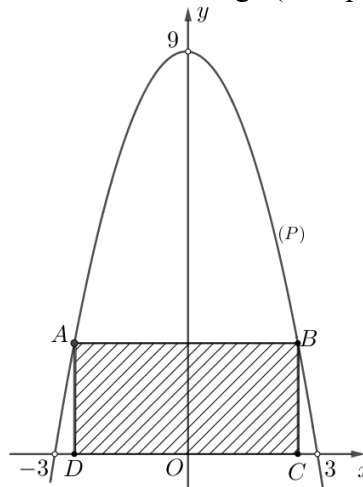


Câu 17. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

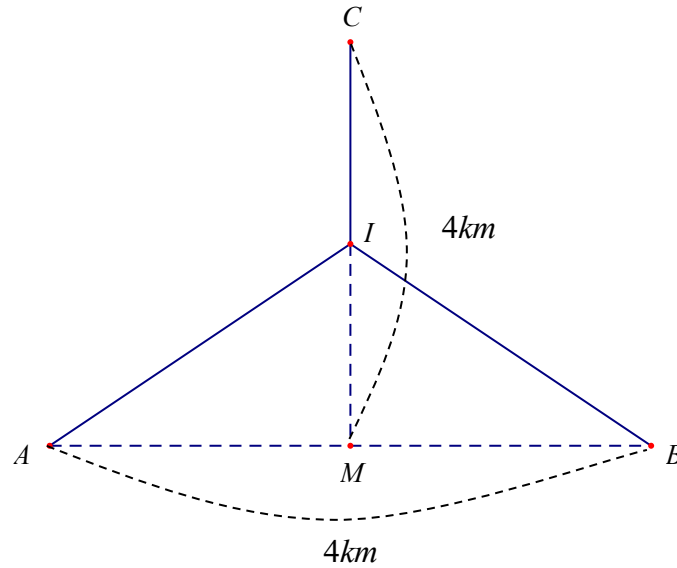
Câu 18. Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?



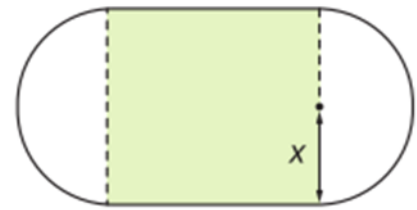
Câu 19. (Sở Bến Tre 2025) Một hình chữ nhật $ABCD$ được vẽ bên trong parabol (P) sao cho A, B thuộc (P) ; C, D thuộc trục Ox như hình vẽ (đơn vị trên trục Ox, Oy là mét). Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



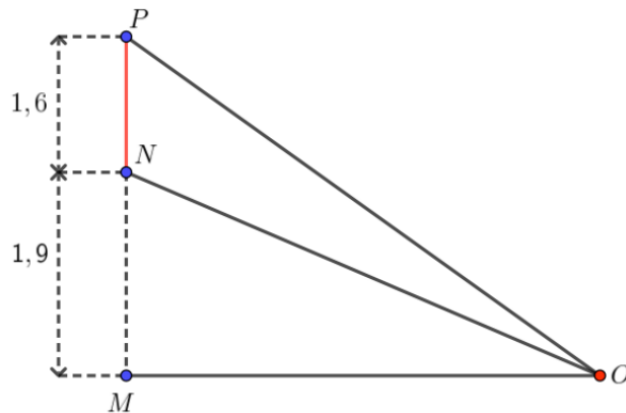
Câu 20. (Sở Hà Tĩnh 2025) Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau 4km . Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng 4km . Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



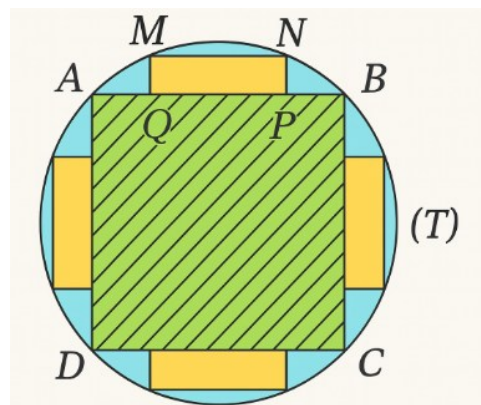
- Câu 21. (Cụm trường Nam Định 2025)** Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính x (m) ($x > 0$) và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m, tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- Câu 22. (Sở Vùng Tàu 2025)** Một màn hình NP có chiều cao 1,6 mét được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng NM bằng 1,9 mét. Một chiếc đèn chiếu sáng màn hình đặt ở vị trí O trên mặt đất (xem hình minh họa). Để góc chiếu sáng NOP lớn nhất thì độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 23. (Sở Nam Định 2025) Bác Bình sử dụng một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 32 cm để làm một chiếc xà nhà. Để đảm bảo tính thẩm mỹ thì bác Bình dự định sẽ cho thợ xẻ khúc gỗ thành một chiếc xà có tiết diện ngang (là miền gạch sọc như hình vẽ bên) bao gồm một hình vuông $ABCD$ và 4 miếng phụ là 4 hình chữ nhật bằng nhau. Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn (T) ; miếng phụ $MNPQ$ có hai đỉnh M, N nằm trên đường tròn (T) và hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh AB . Mặt khác, diện tích của tiết diện ngang càng lớn thì chiếc xà chịu lực càng tốt. Hỏi bác Bình có thể tạo ra một tiết diện ngang có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 24. (Sở Hải Phòng 2025) Trong vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ trong đó A là biên độ của dao động, $\omega (rad/s)$ là tần số góc, $\varphi (rad)$ là pha ban đầu. Động năng (Tiếng Anh: Kinetic energy) của một vật là năng lượng nó có được từ chuyển động của nó, được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2} m.v^2(t)$ (đơn vị J). Trong đó $m(kg)$ là khối lượng của vật, $v(t)(m/s)$ là vận tốc của vật tại thời điểm $t(s)$. Giả sử một vật có khối lượng $m = 100g$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động $x(t) = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(cm)$. Khi đó, động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

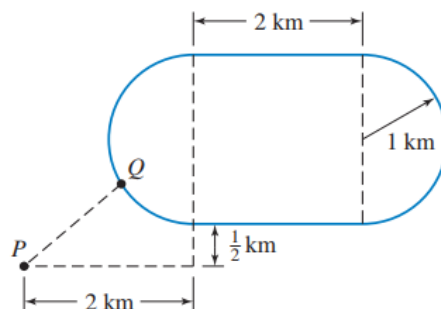
Câu 25. (Sở Ninh Bình 2025) Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công suất tiêu thụ trên điện trở R là $P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$, trong đó R, r được tính bằng ôm (Ω), E được tính bằng vôn (V) và P được tính bằng oát (W). Cho $E = 12(V)$ và $r = 2(\Omega)$, còn R biến thiên thì công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W?

Câu 26. (Sở Nghệ An 2025) Hiệu quả nhiên liệu E , tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l), của một mẫu xe ô tô được mô hình hóa theo tốc độ $v(km/h)$ bằng công thức sau: $E(v) = -0,000025v^3 + 0,003v^2 + 13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20 km/h$ đến $120 km/h$ ($20 \leq v \leq 120$). Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

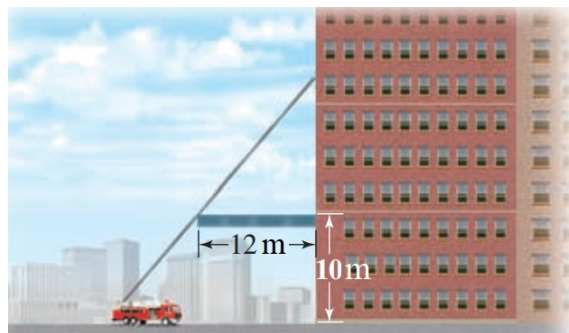
Câu 27. (Cụm Hưng Yên 2025) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong

khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- Câu 28.** Hình cho thấy một mặt bằng đường đua bao gồm hai cạnh của một hình chữ nhật và hai nửa đường tròn. Ngoài ra còn cho vị trí P của một khán giả đang xem đua từ trên nóc xe của mình. Tìm được điểm Q trên đường đua sao cho khoảng cách từ P đến đường đua là nhỏ nhất. Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.



- Câu 29.** Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao hơn 10m so với mặt đất và vùng mái này nhô ra 12m so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



- Câu 30.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con),

$0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

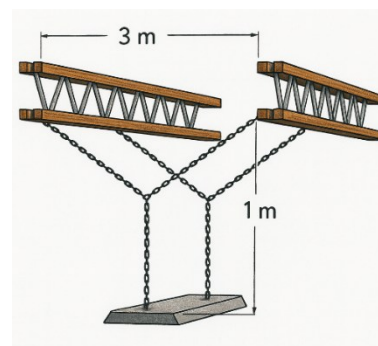
- Câu 31.** (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



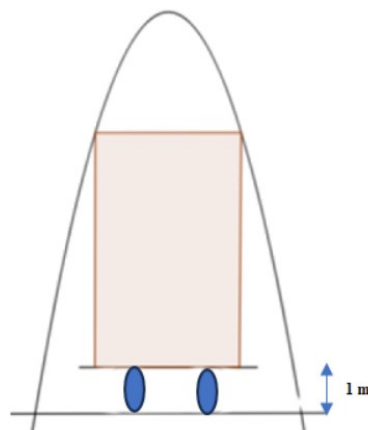
- Câu 32.** (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa 2025) Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



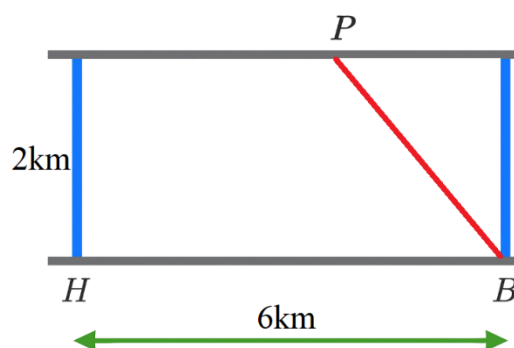
- Câu 33. (THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025)** Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.



- Câu 34. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025)** Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m , khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m . Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

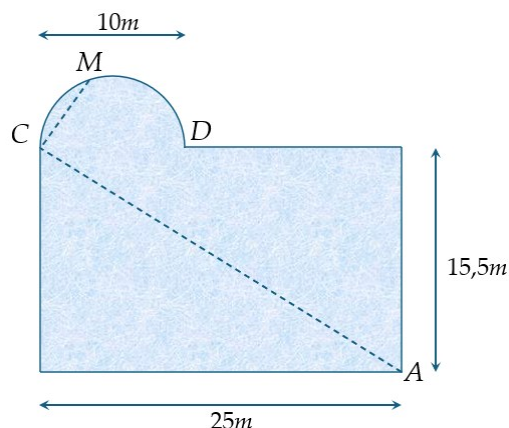


- Câu 35. (Sở Quảng Bình 2025)** Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2 km , dài 6 km . Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là $4\text{ tỷ VNĐ}/1\text{ km}$ và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là $8\text{ tỷ VNĐ}/1\text{ km}$ (như hình vẽ)



Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 36. (Liên Trường Nghệ An 2025) Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 37. (Sở Đắk Lắk 2025) Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A. Khi cửa hàng bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

Câu 38. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B , nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - 0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (đơn vị tính là tỉ đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 39. (Sở Sơn La 2025) Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?



Câu 40. (Sở Bắc Ninh 2025) Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A ($0 \leq x \leq 250$) trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x) = 0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x) = -0,01x^2 + 16x - 25$ (triệu đồng). Hỏi trong một

tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 41. (Mã 0101 - BGD 2025) Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$

(nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$

(nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Câu 42. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Doanh thu (Revenue) của một công ty bắt động sản khi bán căn hộ thứ n (n nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số

$R(n) = \frac{(n-4)(n-30)^2}{100} + 36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ

bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?

Câu 43. (Sở Kiên Giang 2025) Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}$; $x \in [0; 8]$, trong

đó x là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?