

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

TS. NGUYỄN PHỤ HOÀNG LÂN

Giảng viên Trường ĐHGD, ĐHQG Hà Nội VNU

MỤC TIÊU

<i>Xác suất</i>		
Khái niệm về xác suất có điều kiện	<i>Xác suất có điều kiện</i>	<ul style="list-style-type: none">– Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện.– Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.
Các quy tắc tính xác suất	<i>Các quy tắc tính xác suất</i>	<ul style="list-style-type: none">– Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2x2 và sơ đồ hình cây.– Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn.– Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

- Làm rõ các khái niệm, mối liên hệ giữa các khái niệm;
- Cung cấp một số ví dụ điển hình, một số mô hình bài tập mang tính thực tiễn.

Một số câu hỏi trong Đề tham khảo TN THPT từ 2025

Câu 3. Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời “sẽ mua”; có 95 người trả lời “không mua”. Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời “sẽ mua” và “không mua” lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm”.

Gọi B là biến cố “Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm”.

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\overline{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời “sẽ mua” khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Một số câu hỏi trong Đề tham khảo TN THPT từ 2025

Câu 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Một số câu hỏi trong Đề thi mẫu HSA 8-2024

Câu hỏi 44

Cho các biến cố A và B thỏa mãn $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,75$ và $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$.

Khi đó $P(A | B)$ bằng:

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Một số câu hỏi trong Đề thi mẫu HSA 8-2024

Câu hỏi 45

Trong một báo cáo, xét nghiệm Mammography người mắc bệnh ung thư vú cho kết quả dương tính với xác suất là 90%, người không mắc bệnh ung thư vú cho kết quả âm tính với xác suất 97%. Nghiên cứu dịch tễ học chỉ ra tỉ lệ mắc ung thư vú của phụ nữ trong độ tuổi 55 là 1%. Một phụ nữ 55 tuổi, không có tiền sử ung thư vú thực hiện xét nghiệm Mammography hai lần độc lập nhau đều nhận được kết quả là dương tính. Xác suất người phụ nữ đó mắc bệnh ung thư vú **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 90%
- (B) 91%
- (C) 98%
- (D) 99%

Về chủ đề XS có điều kiện trong Đề thi tham khảo TN THPT

1. 5/34 lệnh hỏi
2. 1,5/10 điểm
3. Điểm mang tính “phân loại”.

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

Yêu cầu cần đạt của Chương trình GDPT 2018 (Lớp 11)

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT		
<i>Thống kê</i>		
Phân tích và xử lý dữ liệu	<i>Các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm</i>	<ul style="list-style-type: none"> Tính được các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm: số trung bình cộng (hay số trung bình), trung vị (<i>median</i>), tứ phân vị (<i>quartiles</i>), môđ (<i>mode</i>). Hiểu được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn. Rút ra được kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản. Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 11 và trong thực tiễn.
<i>Xác suất</i>		
Khái niệm về xác suất	<i>Một số khái niệm về xác suất cổ điển</i>	Nhận biết được một số khái niệm về xác suất cổ điển: hợp và giao các biến cố; biến cố độc lập.
Các quy tắc tính xác suất	<i>Các quy tắc tính xác suất</i>	<ul style="list-style-type: none"> Tính được xác suất của biến cố hợp bằng cách sử dụng công thức cộng. Tính được xác suất của biến cố giao bằng cách sử dụng công thức nhân (cho trường hợp biến cố độc lập). Tính được xác suất của biến cố trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp. Tính được xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.

Yêu cầu cần đạt của Chương trình GDPT 2018 (Lớp 12)

Nội dung		Yêu cầu cần đạt
THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT		
Thống kê		
Phân tích và xử lý dữ liệu	<i>Các số đặc trưng của mẫu số liệu ghép nhóm</i>	<ul style="list-style-type: none"> – Tính được các số đặc trưng đo mức độ phân tán cho mẫu số liệu ghép nhóm: khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai, độ lệch chuẩn. – Giải thích được ý nghĩa và vai trò của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong thực tiễn. – Chỉ ra được những kết luận nhờ ý nghĩa của các số đặc trưng nói trên của mẫu số liệu trong trường hợp đơn giản. – Nhận biết được mối liên hệ giữa thống kê với những kiến thức của các môn học khác trong Chương trình lớp 12 và trong thực tiễn.
Xác suất		
Khái niệm về xác suất có điều kiện	<i>Xác suất có điều kiện</i>	<ul style="list-style-type: none"> – Nhận biết được khái niệm về xác suất có điều kiện. – Giải thích được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong những tình huống thực tiễn quen thuộc.
Các quy tắc tính xác suất	<i>Các quy tắc tính xác suất</i>	<ul style="list-style-type: none"> – Mô tả được công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes thông qua bảng dữ liệu thống kê 2x2 và sơ đồ hình cây. – Sử dụng được công thức Bayes để tính xác suất có điều kiện và vận dụng vào một số bài toán thực tiễn. – Sử dụng được sơ đồ hình cây để tính xác suất có điều kiện trong một số bài toán thực tiễn liên quan tới thống kê.

CÂU HỎI ĐỊNH HƯỚNG

Xác suất có điều kiện là gì?

Ứng dụng của xác suất có điều kiện?

Cần gì để học tốt xác suất có điều kiện?

PHÉP THỬ, BIẾN CỐ XÁC SUẤT

Thuật ngữ

Phép thử

Không gian mẫu

Biến cố

Xác suất

Xét ngữ cảnh: Tung hai con súc sắc cân đối đồng chất. Gọi X là tổng của hai mặt...

Không gian mẫu là gì?

Công thức cộng xác suất

Bài tập

Tung hai con súc sắc cân đối, đồng chất.

Gọi X là tổng hai mặt xuất hiện. Tính xác suất $X = 9$.

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

**CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP
XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN**

Thuật ngữ

Xác suất có điều kiện

Thuật ngữ

Hai biến cố độc lập

Thuật ngữ

Các định nghĩa tương đương của hai biến cố độc lập

Bài tập

Nêu định nghĩa của hai biến cố xung khắc.
Hai biến cố xung khắc có độc lập không? Tại sao?

Bài tập

Tung hai con súc sắc cân đối, đồng chất.

Gọi X là tổng hai mặt xuất hiện. Tính xác suất $X = 9$ biết rằng một trong hai con súc sắc xuất hiện số 5.

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

Lỗi hay gặp: Lấy 2 trường hợp (5, 4); (4, 5), rồi chia cho 36.

Sai ở đâu?

Tính xác suất để $X = 9$ và một trong hai con súc sắc xuất hiện số 5.

Bài tập

Câu hỏi 44

Cho các biến cố A và B thỏa mãn $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,75$ và $P(A \cap \bar{B}) = 0,3$.

Khi đó $P(A|B)$ bằng:

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

Câu hỏi chùm:

Mỗi người trong số 180 sinh viên tại một trường đại học chơi đúng một loại nhạc cụ sau: đàn piano, ghi-ta và trống. Số lượng sinh viên nam và nữ chơi piano, guitar và trống được đưa ra trong bảng dưới đây.

Một sinh viên được chọn ngẫu nhiên

	Piano	Ghi-ta	Trống
Nam	25	44	11
Nữ	42	38	20

Tìm xác suất sinh viên là nam biết rằng học sinh chơi trống.

Câu hỏi chùm:

Mỗi người trong số 180 sinh viên tại một trường đại học chơi đúng một loại nhạc cụ sau: đàn piano, ghi-ta và trống. Số lượng sinh viên nam và nữ chơi piano, guitar và trống được đưa ra trong bảng dưới đây.

Một sinh viên được chọn ngẫu nhiên

	Piano	Ghi-ta	Trống
Nam	25	44	11
Nữ	42	38	20

Xác định xem các biến cố 'sinh viên chơi ghi-ta' và 'sinh viên là nữ' có độc lập hay không. Hãy giải thích cho câu trả lời của bạn.

Câu hỏi chùm:

Trong một khoảng thời gian, Phong nhận thấy rằng trên các chuyến bay đường dài, anh bay hạng phổ thông trên 82% các chuyến bay. Trên các chuyến bay còn lại, anh bay khoang hạng nhất. Khi anh ta bay hạng phổ thông, xác suất anh ta có được một giấc ngủ ngon là x . Khi anh ta bay khoang hạng nhất, xác suất anh ta có được một giấc ngủ ngon là 0,9.

Biết xác suất Phong có được một giấc ngủ ngon trên một chuyến bay được chọn ngẫu nhiên là 0,285. Tìm x .

Câu hỏi chùm:

Trong một khoảng thời gian, Phong nhận thấy rằng trên các chuyến bay đường dài, anh bay hạng phổ thông trên 82% các chuyến bay. Trên các chuyến bay còn lại, anh bay khoang hạng nhất. Khi anh ta bay hạng phổ thông, xác suất anh ta có được một giấc ngủ ngon là x . Khi anh ta bay khoang hạng nhất, xác suất anh ta có được một giấc ngủ ngon là 0,9.

Biết rằng trên một chuyến bay cụ thể, Phong không có được một giấc ngủ ngon, hãy tìm xác suất anh ta đang bay hạng phổ thông.

Xác suất có điều kiện:

- Sơ đồ hình cây;
- Dữ liệu dạng bảng hai chiều.

CÂU HỎI ĐỊNH HƯỚNG

Công thức Bayes và Công thức xác suất toàn phần là gì?

Có kết nối gì với xác suất có điều kiện?

Công thức Bayes

Công thức Bayes là một công thức toán học giúp xác định xác suất có điều kiện của một sự kiện dựa trên kiến thức trước đó và bằng chứng mới.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Ý nghĩa: Công thức Bayes giúp điều chỉnh xác suất khi có thông tin mới và giúp đưa ra quyết định tốt hơn trong những tình huống không chắc chắn.

Chứng minh:

Công thức Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

Guessing the Pet

Is it a cat or a dog in the box?

$P(\text{Dog}) = 0.5$

$P(\text{Cat}) = 0.5$



Initial Belief: 50/50 chances

We have a CLUE



→ $P(\text{Quiet} | \text{Cat}) = 80\% \text{ or } 0.8$

→ $P(\text{Quiet} | \text{Dog}) = 30\% \text{ or } 0.3$

Applying Bayes Theorem to Find Probability



$$P(\text{Cat} | \text{Quiet}) = \frac{P(\text{Quiet Cat}) \times P(\text{Cat})}{P(\text{Quiet})} = 72.7\%$$



$$P(\text{Dog} | \text{Quiet}) = \frac{P(\text{Quiet Dog}) \times P(\text{Dog})}{P(\text{Quiet})} = 27.3\%$$

Công thức Bayes

Suy luận Bayes rất quan trọng và được ứng dụng trong nhiều hoạt động khác nhau, bao gồm y học, khoa học, triết học, kỹ thuật, thể thao, luật pháp, v.v.

Một số ứng dụng chính là:

- Xét nghiệm y tế → Tìm xác suất thực sự mắc bệnh sau khi xét nghiệm dương tính.
- Bộ lọc thư rác → Kiểm tra xem email có phải là thư rác hay không dựa trên từ khóa.
- Dự báo thời tiết → Cập nhật khả năng mưa dựa trên dữ liệu mới.
- AI & Học máy → Được sử dụng trong bộ phân loại Bayes để dự đoán kết quả.

Bài tập

Giả sử xác suất thời tiết nhiều mây là 40%. Cũng giả sử xác suất mưa vào một ngày nhất định là 20% và xác suất có mây vào một ngày mưa là 85%.

Nếu vào một ngày nhất định mà trời nhiều mây, xác suất trời sẽ mưa vào ngày hôm đó là bao nhiêu?

Bài tập

Người ta quan sát thấy rằng 50% thư là thư rác. Có một phần mềm lọc thư rác trước khi đến hộp thư đến. Độ chính xác để phát hiện thư rác là 99% và xác suất gắn thẻ nhầm là 5%.

Nếu một thư nào đó được gắn thẻ là thư rác, hãy tìm xác suất đó không phải là thư rác.

Bài tập

Ba người A, B và C đã nộp đơn xin việc trong một công ty tư nhân. Cơ hội lựa chọn của họ là theo tỷ lệ $1 : 2 : 4$. Xác suất mà A, B và C có thể đưa ra các thay đổi để cải thiện lợi nhuận của công ty lần lượt là 0,8; 0,5 và 0,3.

Nếu sự thay đổi không diễn ra, hãy tìm xác suất đó là do việc bổ nhiệm C.

Công thức xác suất toàn phần

Cho E_1, E_2, \dots, E_n là một hệ đầy đủ gồm các biến cố đôi một xung khắc.

$$\begin{aligned} P(B) \\ = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|E_2)P(E_2) + \dots + P(B|E_n)P(E_n) \end{aligned}$$

Chứng minh:

Liên hệ với Công thức Bayes, sơ đồ cây?

Bài tập

Một lá bài trong bộ bài 52 lá bị mất. Từ các lá bài còn lại của bộ bài, rút ra hai lá bài và thấy cả hai đều là cơ. Tìm xác suất lá bài bị mất là cơ.

Bài tập

Câu hỏi 45

Trong một báo cáo, xét nghiệm Mammography người mắc bệnh ung thư vú cho kết quả dương tính với xác suất là 90%, người không mắc bệnh ung thư vú cho kết quả âm tính với xác suất 97%. Nghiên cứu dịch tễ học chỉ ra tỉ lệ mắc ung thư vú của phụ nữ trong độ tuổi 55 là 1%. Một phụ nữ 55 tuổi, không có tiền sử ung thư vú thực hiện xét nghiệm Mammography hai lần độc lập nhau đều nhận được kết quả là dương tính. Xác suất người phụ nữ đó mắc bệnh ung thư vú **gần nhất** với giá trị nào sau đây?

- (A) 90%
- (B) 91%
- (C) 98%
- (D) 99%

Một số câu hỏi trong Đề tham khảo TN THPT từ 2025

Câu 6. Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Công thức Bayes, công thức xác suất toàn phần:

- Sơ đồ hình cây