

PHẦN A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ SÁCH GIÁO KHOA

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

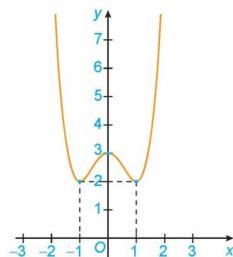
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Chú ý

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$. Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

Ví dụ 1. Hình là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm các cực trị của hàm số.



Giải

Từ đồ thị hàm số, ta có:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = y(-1) = 2$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD} = y(0) = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

b) Cách tìm cực trị của hàm số

ĐỊNH LÍ

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Định lí trên được viết gọn lại trong hai bảng biến thiên sau:

x	a	x_0	b
$f'(x)$	-		+
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực tiểu)	

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+		-
$f(x)$		$f(x_0)$ (Cực đại)	

Chú ý. Từ định lí trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$ như sau:

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
3. Lập bảng biến thiên của hàm số.
4. Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $y=x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

Giải

Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

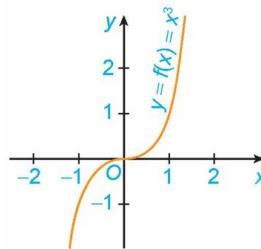
x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	34	30	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $y_{CD} = y(1) = 34$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ và $y_{CT} = y(3) = 30$.

Chú ý. Nếu $f'(x_0) = 0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua x_0 thì x_0 không phải là điểm cực trị của hàm số. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^3$ có $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, nhưng $x = 0$ không phải là điểm cực trị của hàm số.



Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $y' = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2 - 2x + 9)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	8	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$ và $y_{CT} = y(5) = 8$.

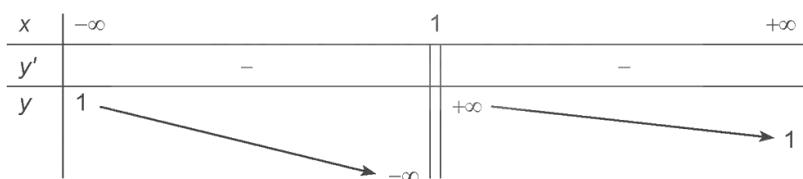
Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số:



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số không có cực trị.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Sử dụng bảng biến thiên, đồ thị hàm số để tìm cực trị của hàm số

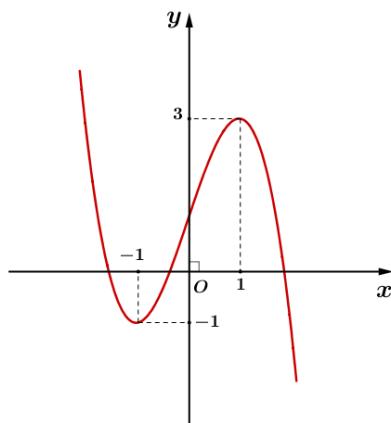
Phương pháp: Xem lý thuyết

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$		

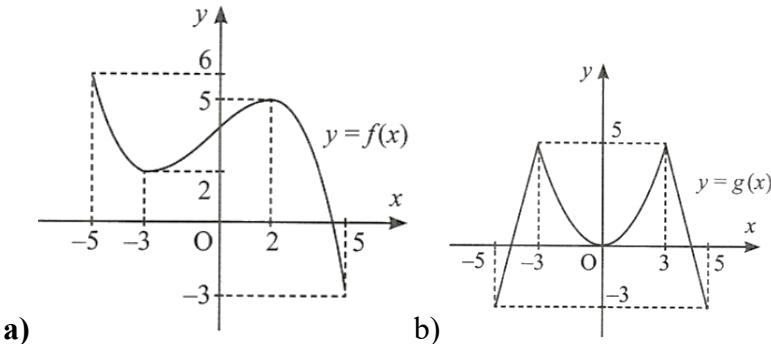
Tìm điểm cực trị của hàm số đó.

Câu 2. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình dưới đây.

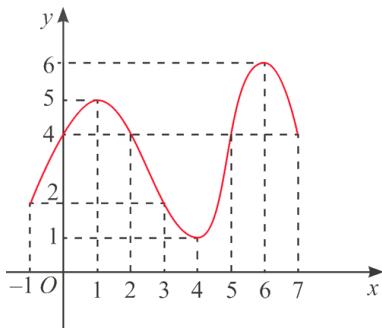


Ký hiệu y_{CD} , y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$. Giá trị $y_{CD} - y_{CT}$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Tìm cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở Hình.



Câu 4. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình.



Câu 5. Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 4)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1	1	2	3	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$					

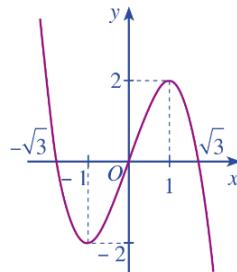
$x_0 = 2$ là điểm cực tiểu hay điểm cực đại của hàm số đã cho? Tìm giá trị cực trị tương ứng.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	0
$f(x)$	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

Xác định các cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 7. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x$ ở Hình, hãy chỉ ra các điểm cực trị của hàm số đó.



Dạng 2. Sử dụng dấu của đạo hàm để tìm cực trị của hàm số

Phương pháp: Xem lý thuyết

Câu 8. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Câu 9. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Câu 10. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$.

Câu 11. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

Câu 12. Tìm điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

Câu 13. Tìm điểm cực trị của mỗi hàm số sau:

a) $y = x \cdot e^x$

b) $y = (x + 1)^2 \cdot e^{-x}$

c) $y = x^2 \cdot \ln x$

d) $y = \frac{x}{\ln x}$.

Câu 14. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

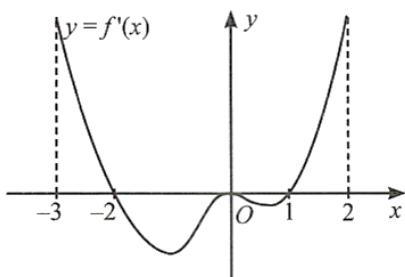
Câu 15. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x + 2025 - 2\sqrt{x - 2024}$ là:

Dạng 3. Sử dụng đồ thị của hàm số $f'(x)$ để tìm điểm cực trị của hàm số $f(x)$

Phương pháp:

- Xác định hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với trục hoành để tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.
- Xác định vị trí của đồ thị hàm số $f'(x)$ so với trục hoành để tìm dấu của $f'(x)$: nếu đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên trục hoành thì $f'(x)$ nhận giá trị dương, nếu đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành thì $f'(x)$ nhận giá trị âm.
- Lập bảng xét dấu của $f'(x)$, rồi kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến, điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 19. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình.



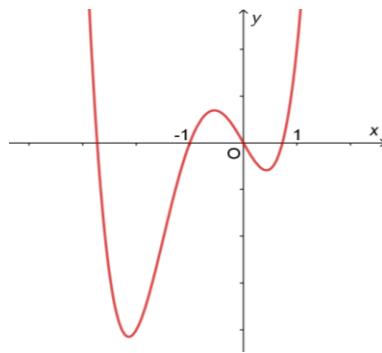
Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Câu 20. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	

Tìm số điểm cực tiểu của hàm số

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

Dạng 5. Ứng dụng

Câu 30. Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức

$$P(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000 \text{ (đồng) với } 0 \leq t \leq 36.$$

Hãy cho biết trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm tăng, trong khoảng thời gian nào giá thành sản phẩm giảm. Giá thành đạt cực đại và cực tiểu vào thời điểm nào?

Câu 31. Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử toạ độ $x(t)$ (mét) của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm $t \geq 0$ (giây) được cho bởi công thức: $x(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 3$.

- a) Trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang phải, trong khoảng thời gian nào thì chất điểm chuyển động sang trái?
- b) Khi nào chất điểm chuyển hướng?
- c) Khi nào vận tốc của chất điểm tăng và khi nào vận tốc của chất điểm giảm?

Câu 32. Doanh thu hằng tháng R của một sản phẩm mới trong một khoảng thời gian dự kiến tuân theo hàm logistic:

$$R = R(t) = \frac{20000}{1 + 50e^{-t}} - \frac{20000}{51}, t \geq 0, \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng tháng.}$$

- a) Tìm tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng $R'(t)$. Có nhận xét gì về doanh thu bán hàng hằng tháng?
- b) Tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng tăng khi nào và giảm khi nào?
- c) Khi nào tốc độ thay đổi doanh thu bán hàng đạt mức tối đa?

Câu 33. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng có khối lượng 1 kg được gắn vào một lò xo được cố định một đầu, dao động điều hoà với biên độ $A = 0,24\text{ m}$ và chu kỳ $T = 4$ giây. Vị trí x (mét) của vật tại thời điểm t được cho bởi $x(t) = A \cos(\omega t)$, trong đó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ là tần số góc và thời gian t tính bằng giây.

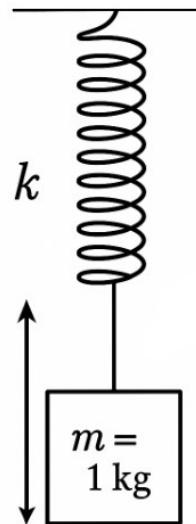
a) Tìm vị trí của vật tại thời điểm t và tại thời điểm $t = 0,5$ giây.

b) Tìm vận tốc v của vật tại thời điểm t giây và tìm vận tốc của vật khi $t = 0,5$ giây.

c) Tìm gia tốc a của vật.

d) Sử dụng Định luật thứ hai của Newton $F = ma$, tìm độ lớn và hướng của lực tác dụng lên vật khi $t = 0,5$ giây.

e) Tìm thời gian tối thiểu để vật chuyển động từ vị trí ban đầu đến vị trí $x = -0,12m$. Tìm vận tốc của vật khi $x = -0,12m$.



Câu 34. Một vật chuyển động dọc theo một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí của vật x (mét) từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây được cho bởi công thức $x(t) = t^3 - 7t^2 + 11t + 5$.

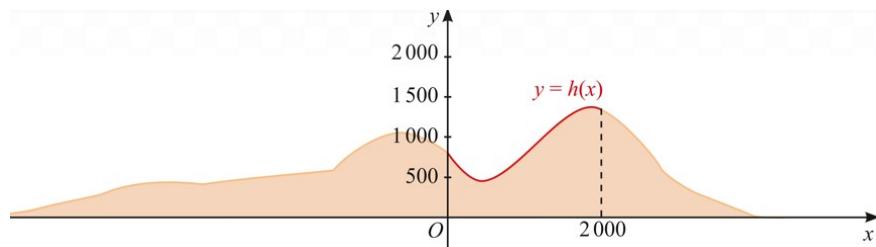
a) Xác định vận tốc v của vật. Xác định khoảng thời gian vật chuyển động sang phải và khoảng thời gian vật chuyển động sang trái.

b) Tìm tốc độ của vật và thời điểm vật dừng lại. Tính tốc độ cực đại của vật trong khoảng thời gian từ $t = 1$ giây đến $t = 4$ giây.

c) Xác định gia tốc a của vật. Tìm khoảng thời gian vật tăng tốc và khoảng thời gian vật giảm tốc.

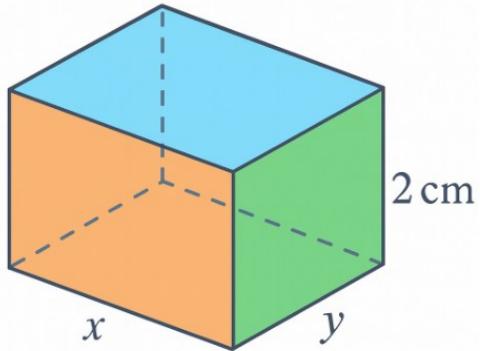
Câu 35. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840, \quad 0 \leq x \leq 2000.$$



Tìm toạ độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

Câu 36. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất.



Chiều cao hộp phải là 2cm , các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

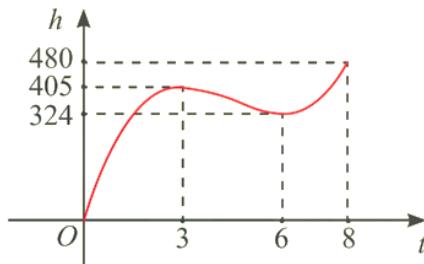
a) Hãy biểu thị y theo x .

b) Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$.

c) Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

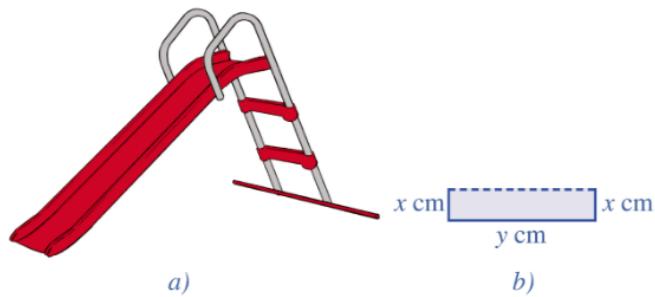
d) Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 37. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên. Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?



Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

Câu 38. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80cm , mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.

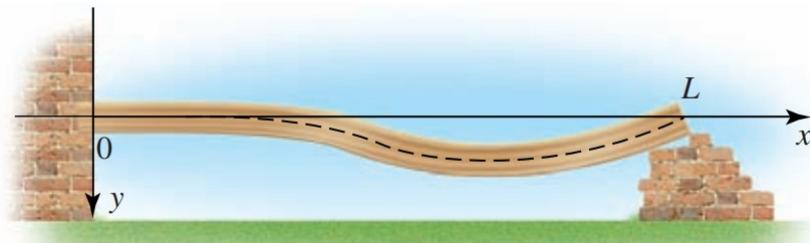


a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .

b) Với x đạt giá trị bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Câu 39. Hình mô tả một đầm dài L , có trọng lượng đều w trên mỗi đơn vị độ dài, được cố định cứng ở một đầu và gối lên ở đầu kia. Phương trình đường cong võng (đường nét đứt trong hình) là

$$y = \frac{w}{48EI} (2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2)$$



trong đó tích EI là một hằng số gọi là độ cứng uốn của đầm. Chứng minh rằng độ võng cực đại (khoảng cách từ đường thẳng ban đầu đến đường cong võng) xảy ra tại

$$x = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} L \approx 0.578L \text{ và có độ lớn xấp xỉ } 0,0054 \frac{wL^4}{EI}$$

Câu 40. Một thùng nặng W lb chứa thiết bị văn phòng, được kéo bằng sợi dây tạo góc θ so với phương ngang. Lực bội để kéo thùng chuyển động có độ lớn $F(\theta) = \frac{\mu W}{\mu \sin \theta + \cos \theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, với μ là hệ số ma sát tĩnh.



a. Tìm góc θ để $F(\theta)$ đạt cực tiểu.

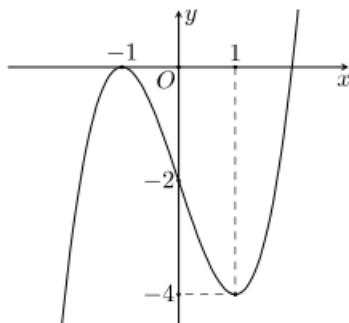
b. Giá trị F tại góc đó là bao nhiêu?

Câu 41. Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba:

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Trục Ox mô tả quãng đường đi của tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng mét). Trục Oy mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng mét) tại mỗi vị trí của x . Chiều cao xuất phát của tàu là $50 m$. Tàu xuống dưới mặt đất lần thứ nhất từ vị trí $x = 20 m$, tàu lên khỏi mặt đất ở vị trí $x = 50 m$ và sau đó xuống dưới mặt đất lần thứ hai ở vị trí $x = 100 m$. Xét $x \in [20; 100]$, khi đó tàu cách mặt đất một khoảng lớn nhất bằng bao nhiêu?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (THPT Đào Duy Từ - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là



A. -1 .

B. 1 .

C. $(2; 0)$.

D. $(1; -4)$.

Câu 2. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^3(x-1)(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1 .

B. 3

C. 2 .

D. 0 .

Câu 3. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

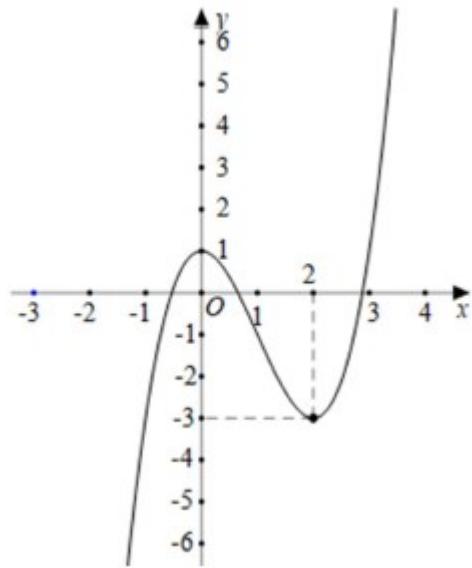
A. 2 .

B. 0 .

C. 3 .

D. 1 .

Câu 4. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. -3 . B. 2 . C. 1 . D. 0 .

Câu 5. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 4 ↘	0	↗ $+\infty$	

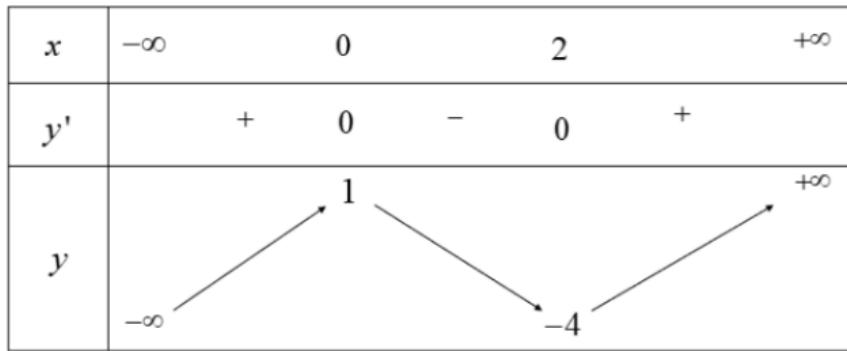
Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là:

- A. $(-1; 0)$. B. $(1; 0)$. C. $(-1; 4)$. D. $(1; 4)$.

Câu 6. (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có toạ độ điểm cực đại là

- A. $(3; 0)$. B. $(3; 1)$. C. $(1; 4)$. D. $(1; 3)$.

Câu 7. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



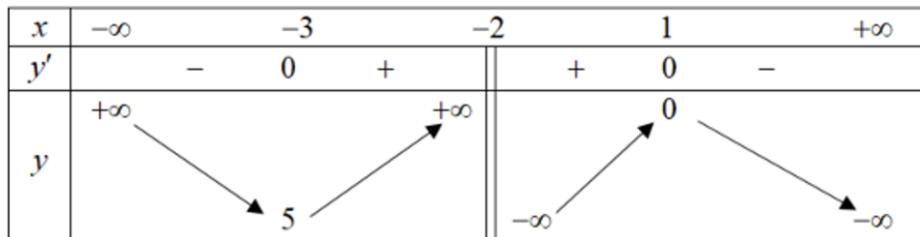
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -4$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.

Câu 8. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm trên $f'(x) = x^{2024}(3-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

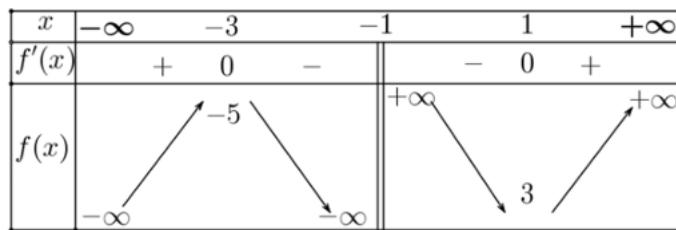
Câu 9. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 0. B. 1. C. -3. D. 5.

Câu 10. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{qx + r}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -3. C. -5. D. 1.

Câu 11. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $M(0;2)$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$.
 D. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 12. (Chuyên Vinh 2025) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
 B. Hàm số có 3 điểm cực trị.
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng -1 .
 D. Hàm số có 2 điểm cực đại.

Câu 13. (THPT Trần Phú - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có đạo hàm $f'(x)=x^{2024}(3-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có mấy điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

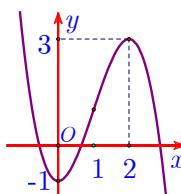
Câu 14. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
y'	-	0	+	+	0
y	$+\infty$	5	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$ là:

- A. 0. B. 1. C. -3. D. 5.

Câu 15. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Cho hàm đa thức $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



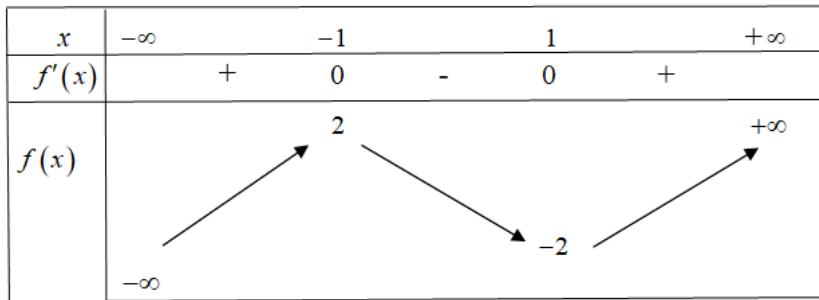
A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Câu 16. (Sở Thái Nguyên 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng:

A. 2.

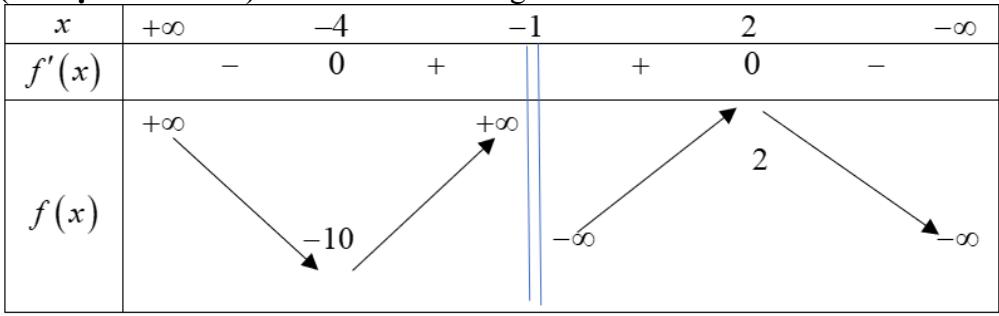
B. -2.

C. -1.

D. 1.

Câu 17. (KHTN Hà Nội 2025) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x^2+x-2)(x-1)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 18. (Sở Bạc Liêu 2025) Cho hàm số có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số là

A. 2.

B. -2.

C. -4.

D. -10.

Câu 19. (Sở Tuyên Quang 2025) Hàm số nào dưới đây không có cực trị

A. $y = \frac{2x+1}{x-3}$.

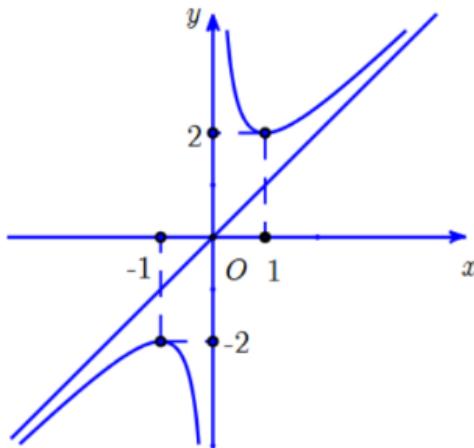
B. $y = x^3 - x^2 - 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 20. (THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa 2025) Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ là
A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

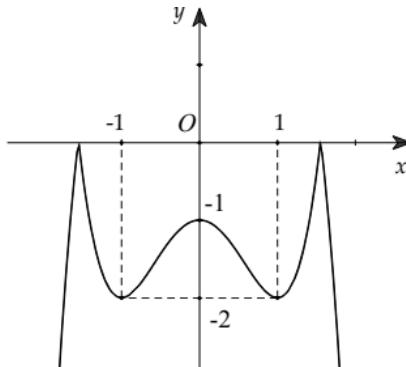
Câu 21. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 1. B. -1. C. -2. D. 2.

Câu 22. (THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.

Câu 23. (Sở Bình Thuận 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	2

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 5$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Câu 24. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

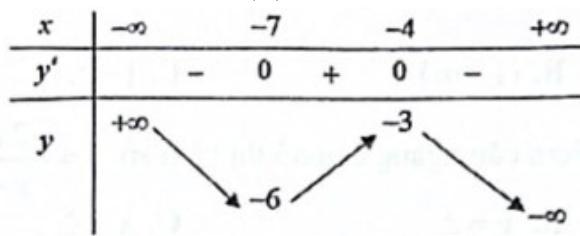
A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

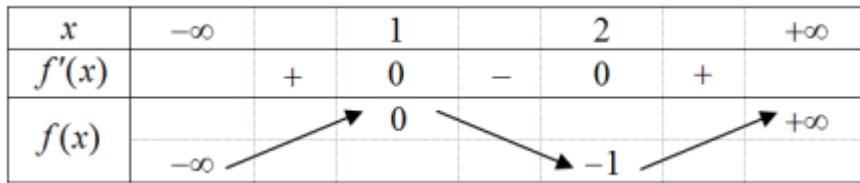
Câu 25. (Sở Lào Cai 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau



Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

A. $x = -7$.B. $x = -6$.C. $x = -3$.D. $x = -4$.

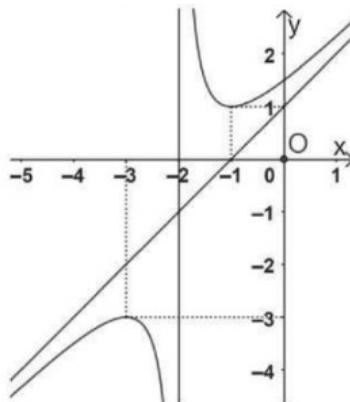
Câu 26. (Sở Hậu Giang 2025) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Hàm số đã cho đạt giá trị cực đại tại điểm:

A. $x = -1$.B. $x = 0$.C. $x = 2$.D. $x = 1$.

Câu 27. (Sở Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là:

A. $M(-3; -3)$.B. $x = -1$.C. $N(-1; 1)$.D. $x = -3$.

Câu 28. (Sở Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	2	-5	$+\infty$

Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

- A. -3. B. 2. C. 3. D. -5.

Câu 29. (Sở Trà Vinh 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên \mathbb{R} và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$

Điểm nào dưới đây là điểm cực tiểu của hàm số đã cho?

- A. $x = -2$. B. $y = -2$. C. $x = 2$. D. $2; -2$.

Câu 30. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ có tất cả bao nhiêu cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

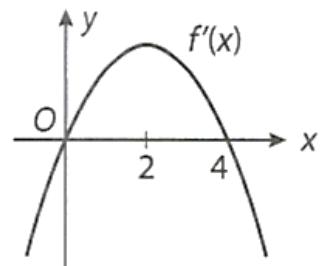
D. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Biết rằng hàm số $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 6x + b$ (a và b là hằng số thực) đạt cực trị bằng 4 tại $x = 1$.

- a) Giá trị của $a + b$ bằng 8.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- c) $x = -1$ là một điểm cực trị của hàm số $f(x)$.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 12.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathbb{R} và đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Sử dụng đồ thị của hàm số $y = f'(x)$.

- a) hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.
- b) hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.
- c) hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- d) hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 4$.



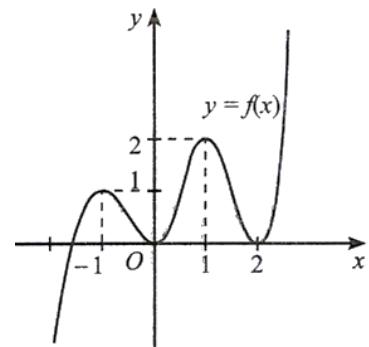
Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	↑ 2	↓ 1	↑ 2	↓	$-\infty$	

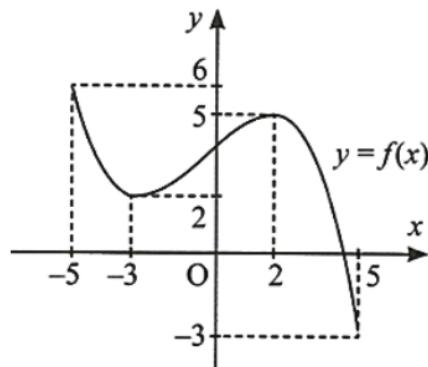
- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$;
- b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$;
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $x = 1$; đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như Hình.

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$ và $(2; +\infty)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; 2)$.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 2$.
- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 1$;



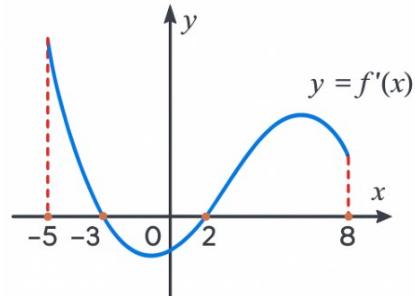
Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau:



- a)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$,
- b)** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(2; 5)$.
- c)** Hàm số $y = f(x)$ có $x = -3$ là điểm cực tiểu
- d)** Hàm số $y = f(x)$ có $x = 2$ là điểm cực đại

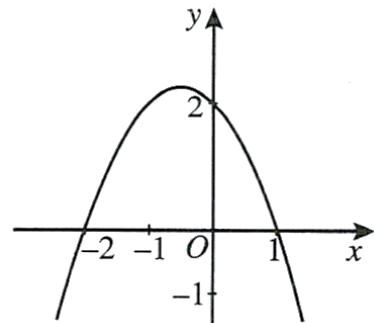
Câu 6. Đạo hàm $y = f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình.

- a)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0; 2)$.
- b)** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
- c)** Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.
- d)** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.



Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như Hình.

- a)** Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CT} = -2$.
- b)** Điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là $x_{CD} = 1$.
- c)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.
- d)** Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(2025; 2026)$.



Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

- a)** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(8; +\infty)$.
- b)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 8)$.
- c)** Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và $y_{CD} = 104$.
- d)** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 8$ và $y_{CT} = 96$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 - 48x + 52$.

- a)** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$.
- b)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.
- c)** Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$ và $y_{CD} = y(4) = 41$.

d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT} = y(0) = 9$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$

- a)** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.
- b)** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- c)** Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(-1) = -2$.
- d)** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(1) = 2$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

- a)** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b)** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c)** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = y(-1) = -\frac{1}{2}$.
- d)** Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và $y_{CD} = y(1) = \frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$

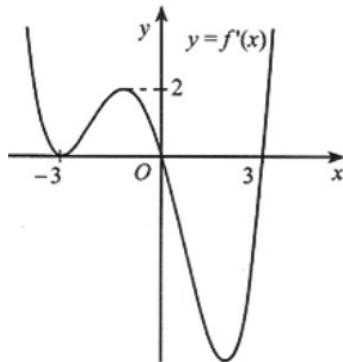
- a)** Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1 - \sqrt{3})$ và $(-1 + \sqrt{3}; +\infty)$;
- b)** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1 - \sqrt{3}; -1)$ và $(-1; -1 + \sqrt{3})$.
- c)** Hàm số đạt cực đại tại $x = -1 - \sqrt{3}$
- d)** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 + \sqrt{3}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^2 \ln x$

- a)** Tập xác định của hàm số là $(0; +\infty)$.
- b)** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right)$.
- c)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$.

- d) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = e^{-\frac{1}{2}}$ và $y_{CT} = y\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như Hình.



- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$;
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.
- d) Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$. Hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai

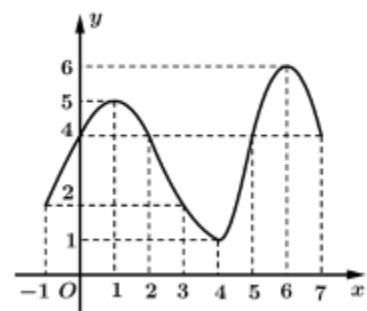
- a) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -3$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số bằng 1.
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(-3; 1)$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	1	$-$	$-\infty$

Câu 16. Xét hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-1; 7)$ và có đồ thị như hình vẽ.

Các mệnh đề sau đúng hay sai

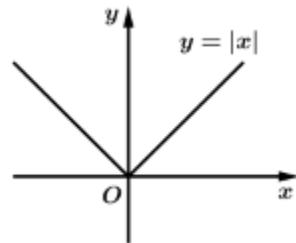
- a) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -1, x = 4, x = 7$.
- b) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 4.
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; 7)$.
- d) Hàm số có hai cực đại là 5 và 6.



Câu 17. Cho hàm số $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

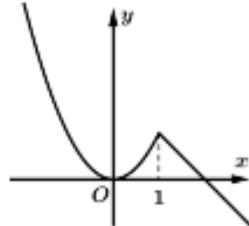
- a) Hàm số $f(x)$ có $f'(0) = 0$.
- b) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
- c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
- d) Giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 0.



Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2-x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x = 1$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.
- c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.
- d) Giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 1.



Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- a) Hàm số đã cho có một điểm cực trị.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên \mathbb{R} .
- c) Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -9.
- d) Hàm số $y = f^2(x)$ có hai điểm cực trị.

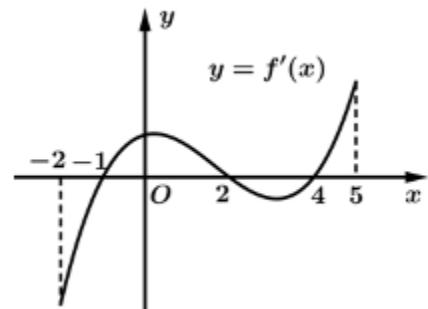
Câu 20. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
- b) Giá trị cực đại của hàm số là 43.
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -3$.
- d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = -25x + 7$.

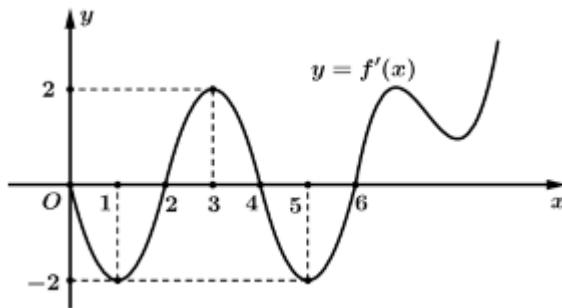
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Các mệnh đề sau đúng hay

- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị trên khoảng $(-2; 5)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.
- d) $f(-1) < f(0) < f(2)$.



Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai.

- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ và $x = 5$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 6$.
- c) Điểm $M(3; 2)$ là một điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- d) Trên khoảng $(0; 6)$ hàm số có hai điểm cực trị.

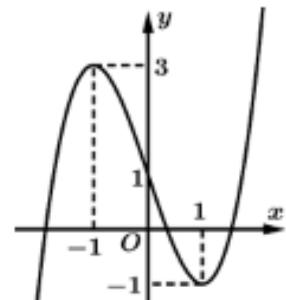
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^3(4-x)$ với mọi x thuộc \mathbb{R} . Các mệnh đề sau đúng hay sai

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 4$.
- c) $f(4) > f(5) > f(6)$.
- d) $f(0) < f(1) < f(3)$.

Câu 24. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Các mệnh đề sau đúng hay sai

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số $y = f(x) + x$ có hai điểm cực trị.
- c) Hàm số $y = f(x) - 3x$ có một điểm cực trị.
- d) Hàm số $y = f(x) - 2x$ có ba điểm cực trị.



Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
- b) Cực đại của hàm số $f(x)$ bằng -1 .
- c) Cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng 3 .
- d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

Câu 26. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Gọi (C) là đồ thị hàm số.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
- b) Hàm số có một giá trị cực trị bằng 6 .
- c) Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.
- d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $\Delta: 8x + y - 2 = 0$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Gọi (H) là đồ thị hàm số.

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số có một giá trị cực trị bằng -1 .
- c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (H) bằng $3\sqrt{5}$.
- d) Hai điểm cực trị của (H) cách đều đường thẳng $\Delta: x + y - 2 = 0$.

Câu 28. Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Tập xác định của hàm số là $D = [1; +\infty)$.

b) $y(2) = 0$

c) Đạo hàm của hàm số là $y' = 1 - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

d) Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(2, 0)$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \log_2(4x - x^2)$. Gọi (C) là đồ thị hàm số.

a) Tập xác định của hàm số là $D = [0; 4]$

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{4-2x}{(4x-x^2)\ln 2}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(2; 2)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = x - \sin x + 2025$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = 1 - \cos x$.

c) Hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Trên đoạn $[-\pi; \pi]$, hàm số có một điểm cực đại.

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ có đồ thị (C) . Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

c) Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $(1; 2)$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

Câu 37. Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp với chiều cao h (mét) có thể tích bằng $200 m^3$. Đây bể là hình chữ nhật có chiều rộng bằng x (mét) và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 350 nghìn đồng/ m^2 .

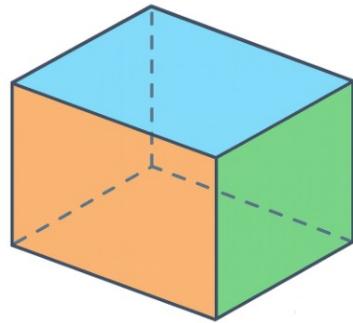
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a. Chiều cao h của bê được xác định bởi $h = \frac{100}{x}$;

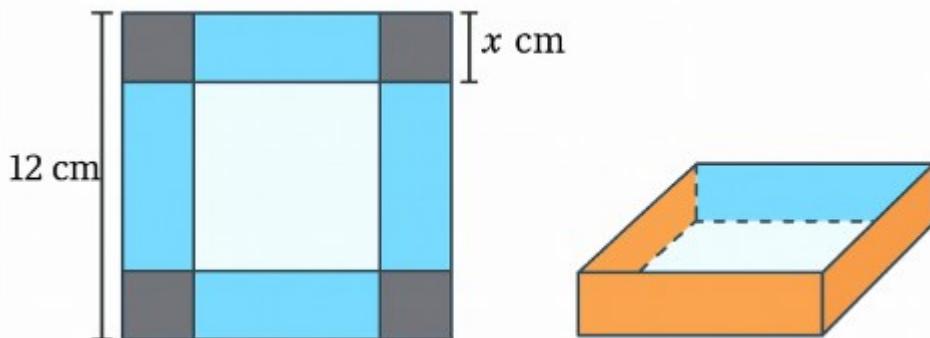
b. Diện tích S của bê mặt để làm bê là $2x^2 + \frac{600}{x}$;

c. Giả sử chiều rộng của hình chữ nhật đáy bằng 6 mét thì chi phí để xây bê là 60 triệu đồng;

d. Chi phí thấp nhất để xây bê là 59 triệu đồng (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Câu 38. Một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình có cạnh bằng $x(\text{cm})$ với $0 < x < 6$, rồi gấp tấm nhôm như dạng hình hộp không có nắp (hình vẽ). Khi đó:



a) Chiều cao của hình hộp là $x(\text{cm})$.

b) Diện tích đáy của hình hộp là $(12-x)^2 (\text{cm}^2)$.

c) Diện tích xung quanh của hình hộp là $4(12x - 2x^2)(\text{cm}^2)$

d) Thể tích lớn nhất của hình hộp đó là 128cm^3 .

Câu 39. Một chất điểm chuyển động trên trục Ox với phương trình $x(t) = -t^3 + 6t^2$.

(x tính bằng mét, t tính bằng giây, với $t \geq 0$).

Xét các phát biểu sau:

a) Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 3$ giây, chất điểm chuyển động ngược với chiều dương của trục Ox .

b) Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 4$ giây bằng 6 m/s.

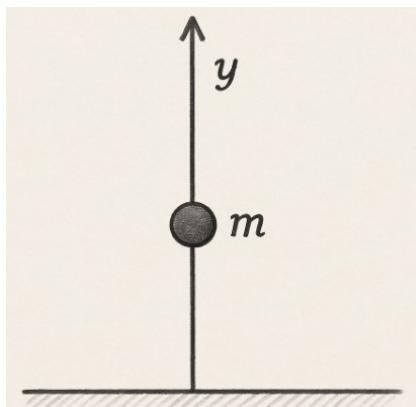
- c) Vận tốc đạt cực đại tại thời điểm $t = 2$ giây.
d) Trong khoảng thời gian từ $t = 2$ đến $t = 4$ giây chất diễm chuyển động chậm dần.

Câu 40. Một chất diễm chuyển động trên một trục nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử tại thời điểm t giây ($t \geq 0$), vị trí của chất diễm được xác định bởi công thức: $S(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 1$ đơn vị mét.

- a) Vị trí chất diễm tại thời điểm 4 giây là 164m.
b) Vận tốc đạt được của chất diễm tại thời điểm 2 giây là 45 m/s .
c) Gia tốc của chất diễm tại thời điểm chất diễm dừng lại là 36 m/s^2 .
d) Vị trí chất diễm tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là 118 m.

Câu 41. Giả sử một vật chuyển động trên một đường thẳng vuông góc với mặt đất. Độ cao của vật so với mặt đất (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, $0 \leq t \leq 10$.

Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau:



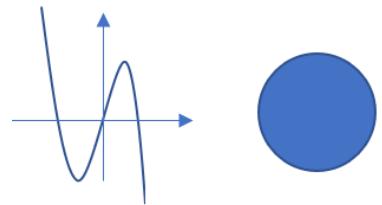
- a) Hàm vận tốc của chuyển động nói trên là $v(t) = -t^2 + 8t + 9$ (đơn vị: mét/giây).
b) Vận tốc triệt tiêu tại thời điểm $t = 4$ (giây).
c) Trong 10 giây đầu tiên, vật chuyển động lên trên.
d) Vật có vận tốc tức thời lớn nhất bằng 25 mét/giây trong 10 giây đầu tiên.

Câu 42. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỷ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

- a) Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu $f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

- b) Tốc độ thay đổi của kim ngạch xuất khẩu thấp nhất trong các năm từ 2010 đến 2017 bằng 0,2 (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)
- c) Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.
- b) Tỷ lệ tốc độ thay đổi so với giá trị kim ngạch xuất khẩu lớn nhất đầu năm 2015

Câu 43. Trong một công viên toán học, ở một mặt của bờ hồ người ta xây dựng một đường đi có dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$, (C). (C) nằm trên mặt phẳng Oxy mà mỗi đơn vị trên mỗi trục Ox, Oy tương ứng với độ dài 10 mét. Biết (C) có một điểm cực trị có tọa độ $(1; 2)$ và có tâm đối xứng là gốc tọa độ O . Ở giữa hồ người ta xây dựng một khu vui chơi có dạng là hình tròn (H) có bán kính bằng 20 mét và có tọa độ tâm là $A(11; -1)$. Người ta thiết kế một cây cầu từ một điểm trên (C) đến (H) sao cho độ dài cây cầu là ngắn nhất. Biết chi phí làm mỗi mét theo chiều dài cây cầu là 100 triệu đồng.



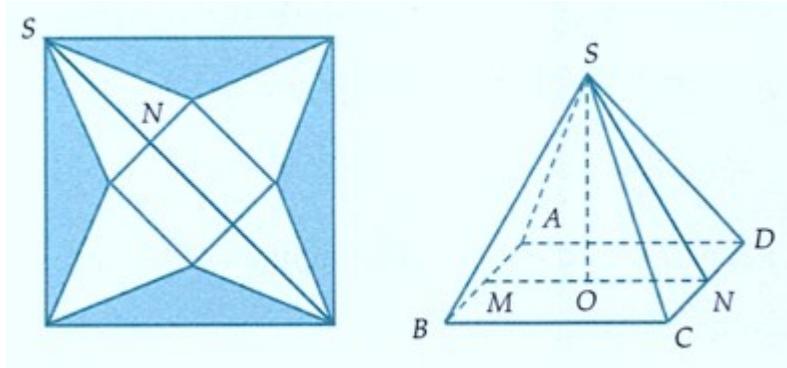
- a) Hàm số $f(x) = -2x^3 + 4x$.
- b) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có phương trình $y = 2x$.
- c) Đường biên của khu vui chơi hình tròn (H) có phương trình $(x-11)^2 + (y+1)^2 = 400$.
- d) Chi phí làm cây cầu trên là 7055 triệu đồng. (kết quả đã được làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

Câu 44. Xưởng M sản xuất một loại sản phẩm. Biết rằng theo tính toán trong một tháng, nếu xưởng sản xuất không quá 150 sản phẩm thì tổng chi phí sản xuất là $C(x) = \frac{x^3}{3000} - \frac{7}{40}x^2 + 30x + 1000$ (triệu đồng) và hàm doanh thu khi đó là $R(x) = -2x^2 + 300x$ (triệu đồng), với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xưởng M khi đó được xác định bằng hàm số $P(x) = R(x) - C(x)$ (triệu đồng).

- a) Số tiền ban đầu xưởng phải bỏ ra để vận hành, kể cả khi không sản xuất sản phẩm nào là 1 tỉ đồng.
- b) Chi phí sản xuất luôn tăng khi số sản phẩm tăng.
- c) Doanh thu của xưởng đạt cực đại khi số sản phẩm là 150 (sản phẩm).
- d) Lợi nhuận lớn nhất khi doanh thu là lớn nhất.



- Câu 45.** Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ bên. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gấp và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp có dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Gọi độ dài cạnh đáy hình vuông của tháp là $x(m)$. Kí hiệu hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD .

- a) Độ dài bốn cạnh bên của phần bạt phủ tháp đèn bằng nhau.
- b) Chiều cao SO của hình chóp $S.ABCD$ nếu viết dưới dạng $\frac{1}{2}\sqrt{a - b\sqrt{2}x}$ thì $\frac{a}{b} = 20$.
- c) Thể tích lớn nhất của khối chóp đạt được khi cạnh đáy của hình chóp bằng $10\sqrt{2}m$.
- d) Khi thể tích của khối chóp lớn nhất, diện tích phần bạt cần sử dụng là $80m^2$.

E. TRẢ LỜI NGẮN

- Câu 1.** Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Tính tổng $x_1 + x_2$.

- Câu 3.** Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x + 1 + 2\sqrt{x^2 - 4x + 7}$.

- Câu 4.** Tìm cực trị của hàm số $y = \log_4(x^2 - 4x + 3)$ là?

- Câu 5.** Cho hàm số $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-2)^2(x-4)$. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ bằng

- Câu 7.** Cường độ âm thanh (dB) tại một địa điểm được đo liên tục trong 12 giờ là một hàm số $y = f(t)$ có bảng biến thiên như sau:

t	0	3	8	12	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	40	↗ 70	↘ 25	↗ 60	

Tại thời điểm t bằng bao nhiêu trong thời gian khảo sát thì cường độ âm thanh là nhỏ nhất ?

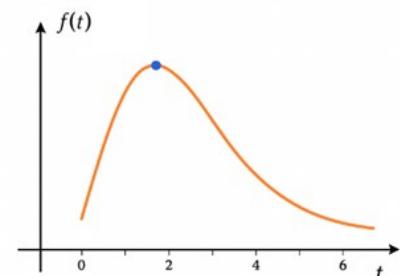
- Câu 8.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- Câu 9.** Một cửa hàng cà phê bán cà phê espresso, nhận thấy rằng lợi nhuận của cửa hàng y (tính theo đơn vị triệu đồng/ngày) phụ thuộc vào giá bán x (chục nghìn đồng) mỗi ly espresso. Qua khảo sát, cửa hàng mô tả lợi nhuận theo hàm số sau: $y = -2x^4 + 36x^2 - 90$. Hỏi cửa hàng nên chọn mức giá mỗi ly là bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận tối ưu nhất?

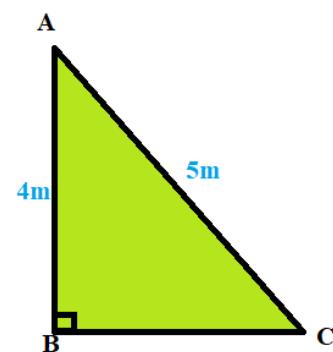
- Câu 10.** Một vật chuyển động với vận tốc (m/s) được xác định bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 3t^2$ với $t \geq 0$. Khi đó $f'(t)$ là gia tốc của vật tại thời điểm t (giây). Vận tốc của vật đạt được cao nhất trong khoảng thời gian 3 giây đầu là bao nhiêu m/s?

- Câu 11.** Doanh số bán hàng của một loại sản phẩm (chục triệu đồng) trong một phiên livestream bán hàng kéo dài sáu giờ theo quy luật hàm số $f(t) = \frac{3t}{e^{\frac{t}{2}}}, 0 \leq t \leq 6$ trong đó thời gian t được tính bằng giờ kể từ khi bắt đầu livestream.

Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ khi bắt đầu phiên livestream thì doanh số bán hàng là lớn nhất?



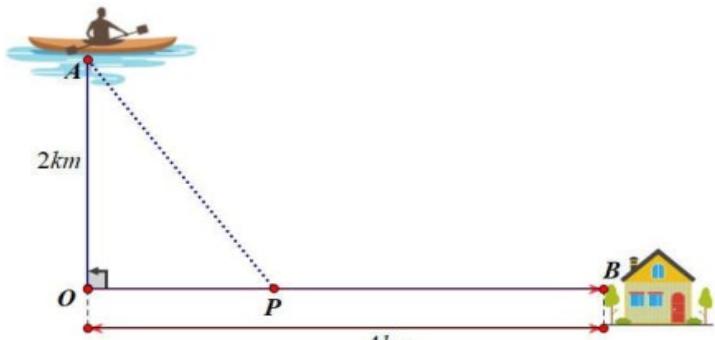
- Câu 12.** Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4m$, $AC = 5m$ sao cho tam giác ABC vuông tại B . Để tăng hiệu ứng, các kỹ sư đã thiết kế một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ A lên C với vận tốc 10 m/phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây từ thời điểm đóng nguồn thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất ?



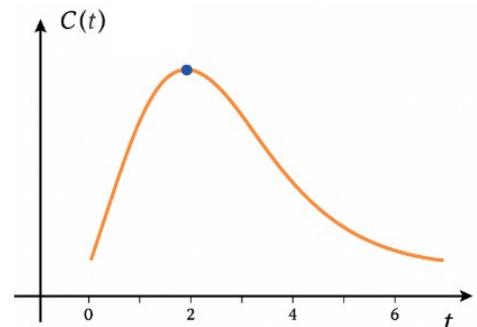
Câu 13. Vận tốc của một tàu con thoi từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến thời điểm $t = 126$ (s) được cho bởi công thức $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 83$ (vận tốc được tính bằng đơn vị ft/s). Hỏi tại thời điểm tàu con thoi đạt vận tốc nhỏ nhất thì vận tốc tàu con thoi giàn bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mươi).

Câu 14. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1+5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi)

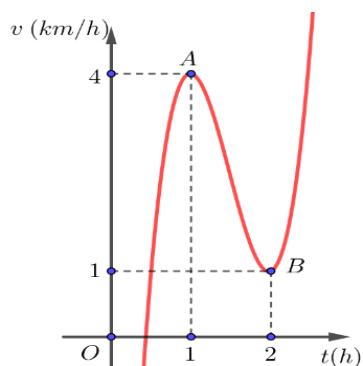
Câu 15. Anh Ba đang trên chiếc thuyền tại vị trí A cách bờ sông $2km$, anh dự định chèo thuyền vào bờ và tiếp tục chạy bộ theo một đường thẳng để đến một địa điểm B tọa lạc ven bờ sông, B cách vị trí O trên bờ gần với thuyền nhất là $4km$ (hình vẽ). Biết rằng anh Ba chèo thuyền với vận tốc $6m/h$ và chạy bộ trên bờ với vận tốc $10km/h$. Khoảng thời gian ngắn nhất để anh Ba từ vị trí xuất phát đến được điểm B là bao nhiêu phút?



Câu 16. Nồng độ C của một hoá chất sau t giờ tiêm vào cơ thể được xác định bởi công thức $C(t) = \frac{3t}{27+t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hoá chất trong máu là lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Câu 17. Một vật chuyển động với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị của hàm số dạng hàm bậc ba như hình bên. Biết rằng tại thời điểm $t_1 = 1h$ vật có vận tốc $v_1 = 4\text{ km/h}$ và tại thời điểm $t_2 = 2h$ vật có vận tốc $v_2 = 1\text{ km/h}$. Hỏi vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3h$ bằng bao nhiêu km/h?

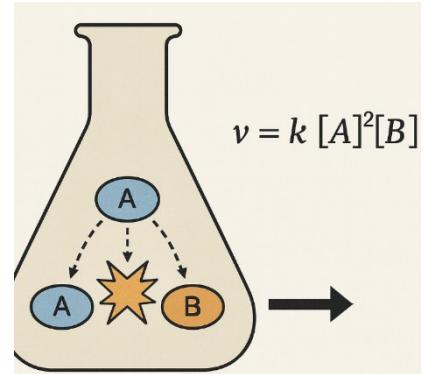


Câu 18. Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm có hàm chi phí sản xuất cho x chiếc nón là $C(x) = 0,01x^2 + 20x + 1000$ (nghìn đồng). Giá bán mỗi chiếc nón là 50 nghìn đồng. Hãy xác định số lượng nón cần sản xuất để xưởng đạt lợi nhuận tối đa.

Câu 19. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k \cdot [A]^2 \cdot [B]$, trong đó:

- v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),
- $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,
- $[A]$ và $[B]$ lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).

Giả sử tổng nồng độ ban đầu của $[A]$ và $[B]$ là $C = 2\text{mol/l}$, tức là $[A] + [B] = 2$. Hãy tìm nồng độ của $[A]$ tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.



Câu 20. Giả sử tổng chi phí sản xuất x ($0 \leq x \leq 50$) đơn vị sản phẩm A mỗi ngày tại một nhà máy được cho bởi công thức $C(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 400$ (nghìn đồng) và toàn bộ chúng được bán hết với giá $(900 - 6x)$ nghìn đồng một sản phẩm. Tìm mức sản lượng (đó là số lượng sản phẩm được sản xuất) để chi phí trung bình tính trên mỗi đơn vị sản phẩm là đạt cực tiểu.

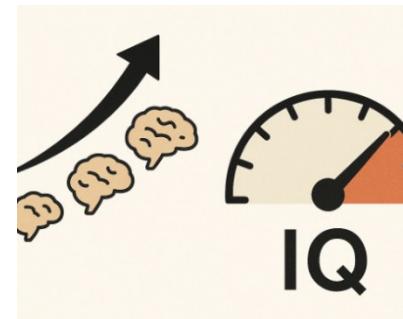
Câu 21. Lợi nhuận tổng hàng ngày (tính theo đô la) mà TKK Corporation thu được từ việc sản xuất và bán x đĩa DVD có thể ghi lại được cho bởi hàm lợi nhuận

$$P(x) = -0,000001x^3 + 0,001x^2 + 5x - 500; \quad 0 \leq x \leq 2000$$

Tìm mức sản xuất x để lợi nhuận hàng ngày đạt cực đại. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 22. Vận tốc trung bình của dòng xe trên đoạn đường 124 từ 6 A.M. đến 10 A.M. được xấp xỉ bởi $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50$, $0 \leq t \leq 4$ trong đó t tính bằng giờ kể từ 6 A.M. và $f(t)$ tính bằng km/giờ. Hỏi vào thời điểm mấy giờ trong buổi sáng (giữa 6 A.M. và 10 A.M.) thì vận tốc trung bình thấp nhất?

Câu 23. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121-149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình $S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46$, $5 \leq t \leq 19$



Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

- Câu 24.** Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \frac{50}{0.01x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

- Câu 25.** Một bể ban đầu chứa 10 gal dung dịch muối với 2 lb muối. Dung dịch vào có nồng độ 1.5 lb/gal chảy vào với tốc độ 3 gal/phút , và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gal/phút . Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là x (pound), với

$$x = f(t) = 1,5(10 - t) - 0,0013(10 - t)^4, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



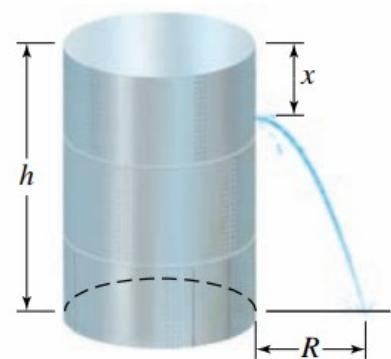
- Câu 26.** Sau khi kinh tế suy giảm, giá thuê văn phòng cao ngất ngưởng cuối thập niên 1990 bắt đầu hạ nhiệt. Hàm $R(t)$ cho giá thuê (USD/ft^2) của văn phòng hạng A ở khu Back Bay và Financial District (Boston) từ đầu 1997 ($t = 0$) đến đầu 2002 ($t = 5$) là

$$R(t) = -0,711t^3 + 3,76t^2 + 0,2t + 36,5; \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Hỏi giá thuê cao nhất trong giai đoạn này là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

- Câu 27.** Một bồn hình trụ cao h chứa nước. Theo định luật Torricelli, vận tốc tia nước chảy qua lỗ ở độ sâu x so với mặt nước là $V = \sqrt{2gx}$. Người ta cho rằng tầm xa R (feet) của tia nước được cho bởi $R = 2\sqrt{x(h-x)}$

Biết lỗ phun nên đặt ở độ cao $x = K.h$, ($K \in \mathbb{R}$) so với mặt bồn thì tầm xa R đạt cực đại. Tìm K ?

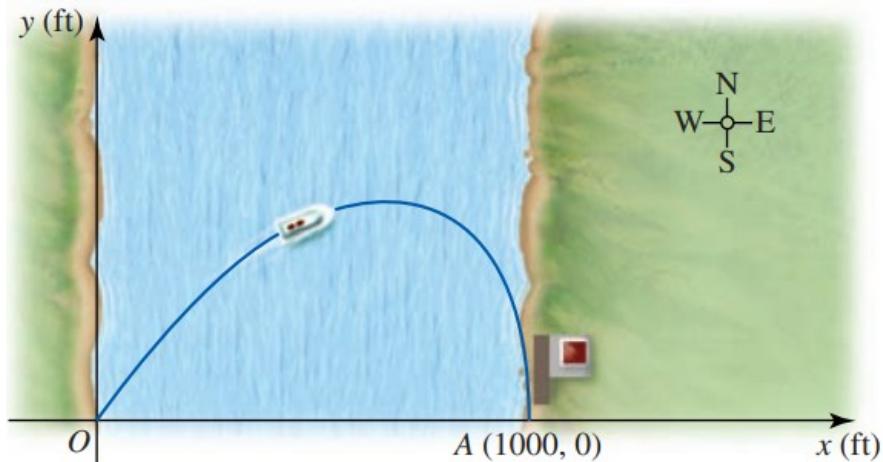


- Câu 28.** Một con thuyền rời bến $O(0,0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bên $A(1000,0)$ (phía đông của O); đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc

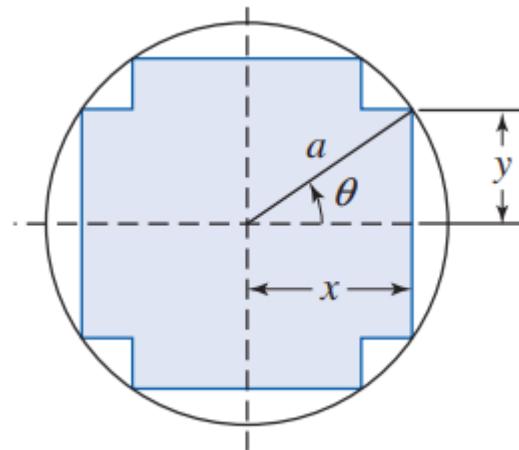
với tốc độ 5 dặm/giờ. Người ta cho rằng đường đi của thuyền là

$$y = 500 \left[\left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{3/4} - \left(\frac{1000-x}{1000} \right)^{5/4} \right], \quad 0 \leq x \leq 1000$$

Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.



- Câu 29.** Khi chế tạo một biển áp AC , một lõi sắt dạng hình chữ thập được đặt vào cuộn dây (xem hình). Giả sử bán kính cuộn là a . Hỏi góc θ bằng bao nhiêu độ để tổng diện tích bề mặt lõi sắt là lớn nhất.

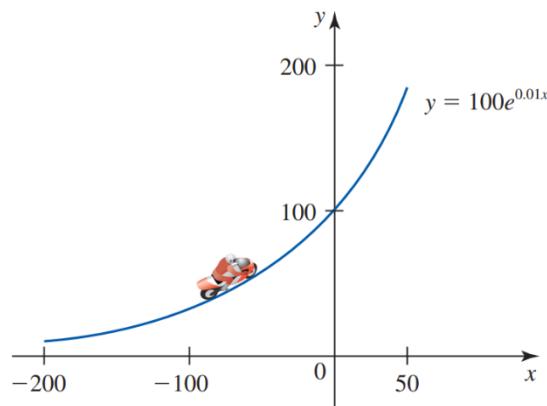


- Câu 30.** Một tay lái mô tô nặng 180 (lb), di chuyển với vận tốc không đổi 30 dặm/giờ, thực hiện một khúc cua trên đường cho bởi đồ thị
 $y = 100e^{0.01x}$, $-200 \leq x \leq 50$

Có thể chứng minh rằng độ lớn của lực pháp tuyến tác dụng lên tay lái mô tô xấp xỉ

$$F(x) = \frac{10890e^{0.1x}}{(1+100e^{0.2x})^{3/2}} \text{ (đơn vị lb)}$$

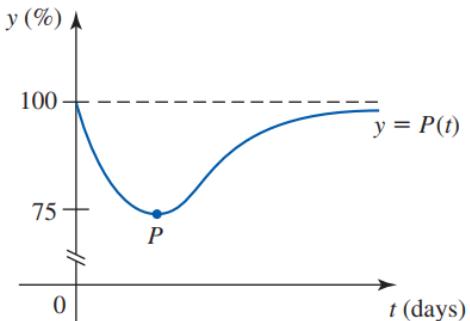
Hãy tìm lực pháp tuyến lớn nhất tác dụng lên tay lái trong suốt khúc cua (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



- Câu 31.** Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

Giả sử hàm số cho hàm lượng ôxy là $P(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$ (% mức bình thường), $t \geq 0$.

Khi đó tọa độ của điểm $P(a; b)$ trên đồ thị là điểm cực trị của đồ thị hàm số $P(t)$. Tính $a+b$?



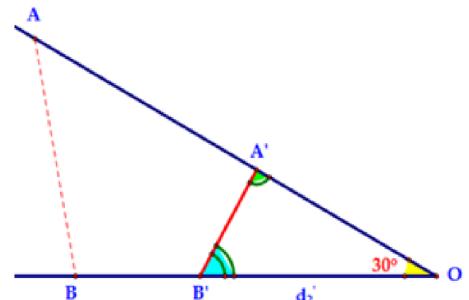
- Câu 32.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $N(t) = 45t^2 - t^3$, $0 \leq t \leq 30$ (người). Nếu xem $N'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ bao nhiêu?

- Câu 33.** Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dây ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dây ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dây ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a\pi(cm^3)$, $a \in \mathbb{N}^*$.

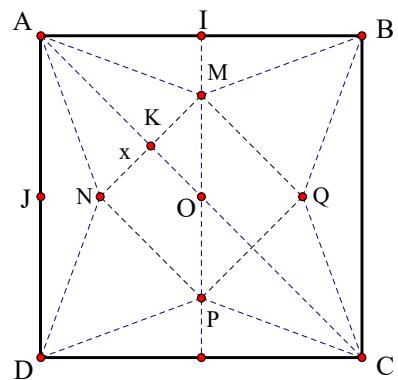
Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?



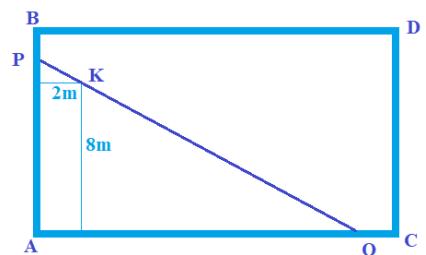
- Câu 34.** Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O (như hình vẽ), biết rằng vận tốc $V_B = \frac{V_A}{\sqrt{3}}$ và góc $\angle AOB = 30^\circ$. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì số đo góc $BAO = \gamma$. Tìm γ .



- Câu 35.** Cho một tấm bìa hình vuông có cạnh $2m$. Từ tấm bìa này làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là các cạnh của hình vuông rồi gấp lên và ghép lại thành một hình chóp tứ giác đều. Thể tích của mô hình lớn nhất khi cạnh đáy của mô hình bằng $\frac{a\sqrt{2}}{b}(m)$ ($a, b \in \mathbb{Z}; a, b$ nguyên tố cùng nhau). Tính tổng $a^2 + b^2$?



- Câu 36.** Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là $2m$ và cách bờ AC là $8m$, rồi dùng một cây sào thẳng PQ ngăn một góc của hồ để thả bèo (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB , AC và cây cọc (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



- Câu 37.** Khi một vật lâm mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng

nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn.

Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$

trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường

(Theo James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning).

Khi đó $x = x_0$ thì vận tốc luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).