

PHẦN A. LÝ THUYẾT

Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$:

1. Tìm tập xác định của hàm số.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

- Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

- Xét dấu y' để chỉ ra các khoảng đơn điệu của hàm số.

- Tìm cực trị của hàm số.

- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Lập bảng biến thiên của hàm số.

3. Vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

Chú ý. Khi vẽ đồ thị, nên xác định thêm một số điểm đặc biệt của đồ thị, chẳng hạn tìm giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (khi có và việc tìm không quá phức tạp). Ngoài ra, cần lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị (đối xứng tâm, đối xứng trực).

a) Hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Ta có: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

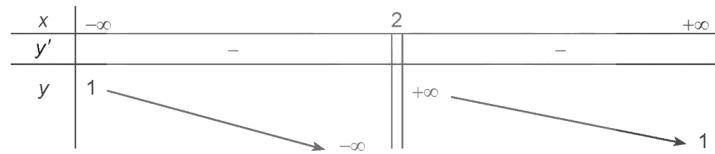
- Hàm số không có cực trị.

- Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.

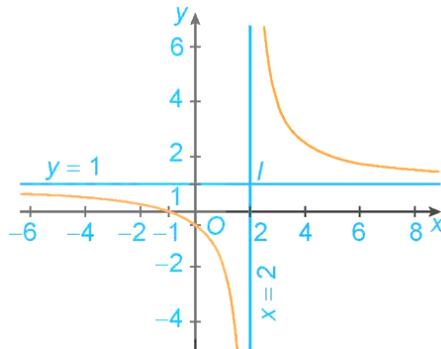
Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.

- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị:

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.
- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Chú ý. Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) :

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. Sự biến thiên: Viết $y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

- Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$. Vậy $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

- Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này. Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

- Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ với $y_{CT} = 5$.

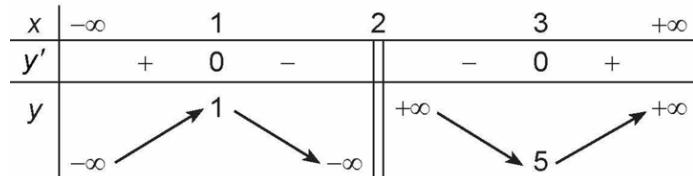
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty$.

- Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x+1$.

- Bảng biến thiên:



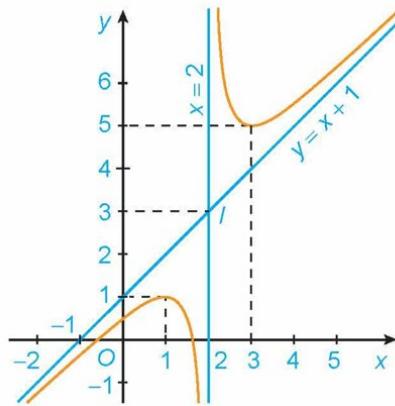
3. Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2} \right)$.

- Ta có $y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0 \right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0 \right)$.

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.

Giải

1. Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Viết $y = x - \frac{2}{x+1}$, ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

- Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

- Hàm số không có cực trị.

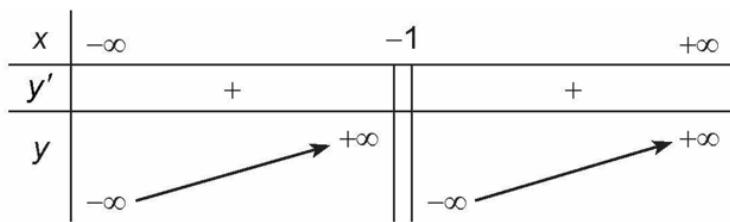
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$.

- Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x - \frac{2}{x+1} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{x+1} \right) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x+1} \right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1} \right) = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

- Bảng biến thiên:

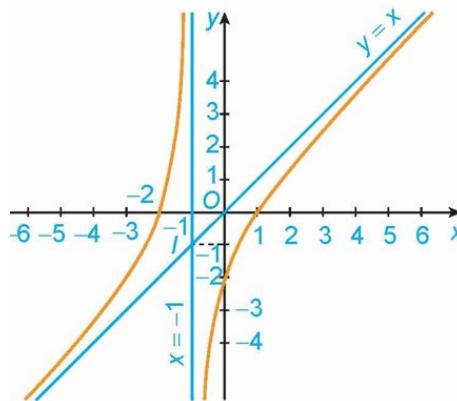


3. Đồ thị

- Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -2)$.

- Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$. Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Chú ý. Đồ thị của hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($a \neq 0, p \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Câu 1. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{3x+2}{2-x}$.

Câu 2. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-2x+5}{x+3}$.

Câu 3. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

Câu 4. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 7}{x + 1}$.

Câu 5. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{3x + 5}{x + 2}$;

b) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$.

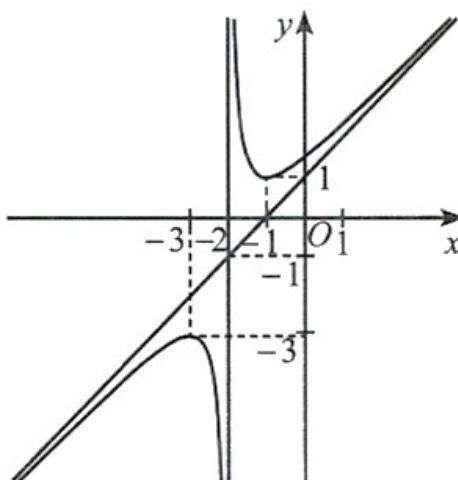
Câu 6. (KNTT12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}$;

b) $y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1}$

Câu 7. (CD12) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số sau: $y = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$

Câu 8. (CD12) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với $a, m \neq 0$) có đồ thị là đường cong như Hình



Căn cứ vào đồ thị hàm số:

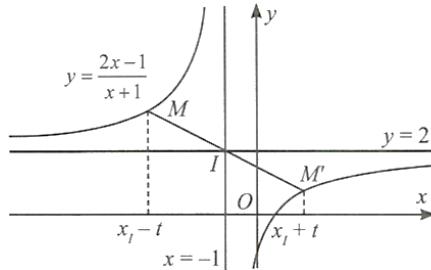
- a) Tìm khoảng đơn điệu, điểm cực đại, cực tiểu của hàm số.
- b) Viết phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.
- c) Phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?
- d) Tìm công thức xác định hàm số $y = f(x)$, biết $m = 1$.

Câu 9. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3 + \frac{1}{x}$

b) $y = 2 - \frac{1}{1+x}$.

Câu 10. (CTST12) Ta đã biết đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.



a) Tìm tọa độ giao điểm I của đường tiệm cận.

b) Với t tuỳ ý ($t \neq 0$), gọi M và M' lần lượt là hai điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $x_M = x_I - t$ và $x_{M'} = x_I + t$. Tìm các tung độ $y(x_M)$ và $y(x_{M'})$. Từ đó, chứng minh rằng hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua I .

Câu 11. (CTST12) Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{-x+3}$. Chứng tỏ rằng đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

Câu 12. (CTST12) Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

b) $y = -2x + \frac{1}{2x+1}$.

Câu 13. (CTST12) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

a) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

b) Với t tuỳ ý ($t \neq 0$), gọi M và M' lần lượt là hai điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $x_M = x_I - t$ và $x_{M'} = x_I + t$. So sánh các tung độ y_M và $y_{M'}$. Từ đó, suy ra rằng hai điểm M và M' đối xứng với nhau qua I .

Câu 14. (CTST12) Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x-2}{m-2-x}$ (m là tham số). Tìm điều kiện của m để đồ thị hàm số đã cho có một nhánh nằm hoàn toàn trong góc phán tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Câu 15. (CTST12) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - m}{x - 1}$ (m là tham số).

a) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

b) Chứng tỏ rằng khi $m=2$, hàm số có hai điểm cực trị. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này.

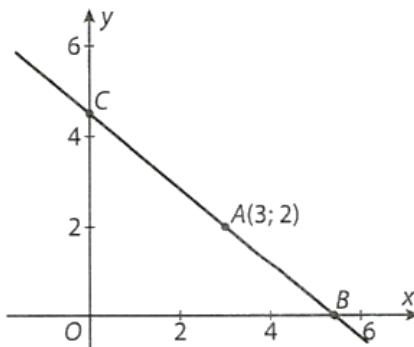
Dạng 2. Ứng dụng

- Câu 16. (KNTT12)** Giả sử chi phí để sản xuất x sản phẩm của một nhà máy được cho bởi $C(x) = 0,2x^2 + 10x + 5$ (triệu đồng). Khi đó chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x}$.

a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

b) Số lượng sản phẩm cần sản xuất là bao nhiêu để chi phí trung bình là thấp nhất?

- Câu 17. (KNTT12)** Cho điểm $A(3; 2)$ trên mặt phẳng tọa độ. Một đường thẳng đi qua A cắt trực hoành tại B , cắt trực tung tại C tạo thành một tam giác OBC nằm trong góc phần tư thứ nhất, với O là gốc tọa độ.



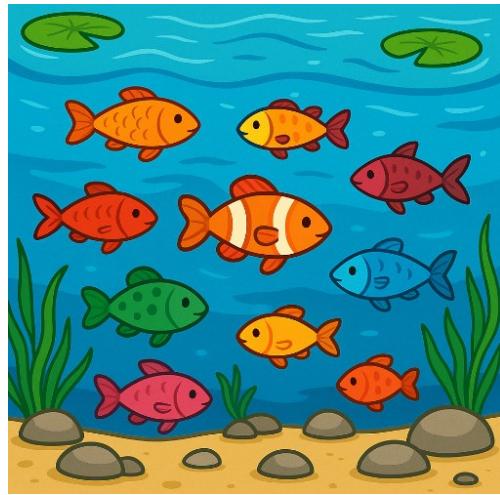
a) Biết hoành độ điểm B là $x=t$ với $t > 3$. Tính diện tích tam giác OBC theo t . Kí hiệu diện tích này là $S(t)$.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = S(t)$.

c) Tìm vị trí điểm B để diện tích tam giác OBC là nhỏ nhất.

- Câu 18. (KNTT12)** Một quần thể cá được nuôi trong một hồ nhân tạo lúc ban đầu có 80000 con. Sau t năm, số lượng quần thể cá nói trên được xác định bởi

$$N(t) = \frac{20(4+3t)}{1+0,05t} \text{ (nghìn con).}$$



a) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = N(t)$.

b) Số lượng tối đa có thể có của quần thể cá là bao nhiêu?

Câu 19. (KNTT12) Uớc tính chi phí hằng năm (tính bằng tỉ đồng) để một nhà máy loại bỏ $p\%$ chất gây ô nhiễm được cho bởi công thức $C = C(p) = \frac{528p}{100-p}$, $0 \leq p < 100$

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi thế nào khi p tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không? Vì sao?

c) Xét tính đơn điệu của hàm số $C(p)$. Giải thích ý nghĩa thực tiễn của kết quả này.

Câu 20. (KNTT12) Một xưởng mộc dùng gỗ gụ để sản xuất 5 chiếc bàn mỗi ngày. Chi phí cho mỗi lần vận chuyển nguyên liệu là 5000 USD, chi phí để lưu trữ một đơn vị nguyên liệu là 10 USD mỗi ngày, trong đó một đơn vị là lượng nguyên liệu cần thiết để sản xuất 1 chiếc bàn. Hỏi mỗi lần xưởng mộc nên đặt mua bao nhiêu đơn vị nguyên liệu và bao lâu đặt giao nguyên liệu một lần để chi phí trung bình hằng ngày (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí lưu trữ) trong chu kỳ sản xuất giữa các lần giao hàng là ít nhất?

Câu 21. (KNTT12) Doanh số bán hệ thống âm thanh nổi mới trong một khoảng thời gian dự kiến sẽ tuân theo đường cong logistic $R = R(x) = \frac{5000}{1+5e^{-x}}$, $x \geq 0$, trong đó thời gian x được tính bằng năm. Hỏi tốc độ bán hàng đạt tối đa vào năm nào?

Câu 22. (KNTT12) Một công ty ước tính rằng chi phí C (USD) để sản xuất x đơn vị sản phẩm có thể được mô hình hóa bằng công thức $C = 800 + 0,04x + 0,0002x^2$.

Tìm mức sản xuất sao cho chi phí trung bình $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ cho mỗi đơn vị hàng hoá là nhỏ nhất.

Câu 23. (KNTT12) a) Nếu $C(x)$ (USD) là chi phí sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị là $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chứng minh rằng nếu chi phí trung bình là nhỏ nhất thì chi phí biên bằng chi phí trung bình.

b) Nếu $C(x) = 16000 + 200x + 4x^{3/2}$, hãy tìm:

- (i) Chi phí, chi phí trung bình và chi phí biên khi sản xuất 100 đơn vị hàng hoá;
- (ii) Mức sản xuất mà khi đó sẽ giảm thiểu chi phí trung bình;
- (iii) Chi phí trung bình nhỏ nhất.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

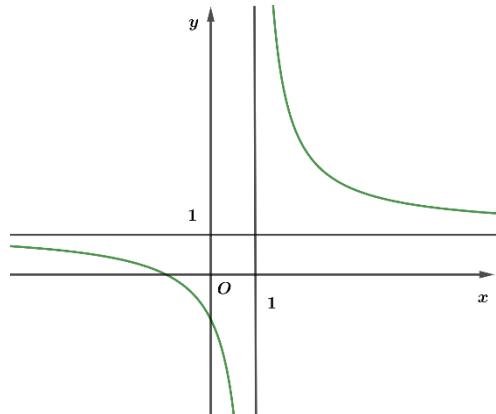
Câu 1. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Đường cong trong hình vẽ bên là của đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây?

A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-2}{2x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.



Câu 2. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

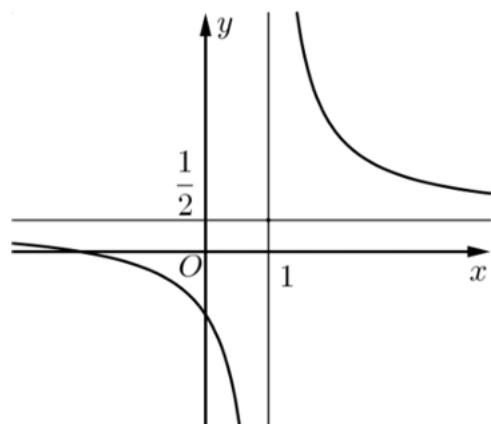
Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(1; 0)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

D. $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 3. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

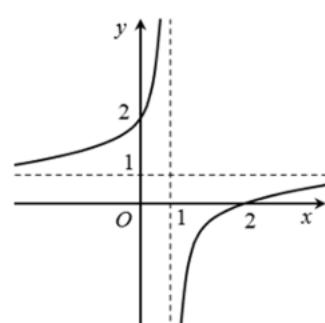
Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

A. $(0; 2)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(1; 0)$.

D. $(2; 0)$.



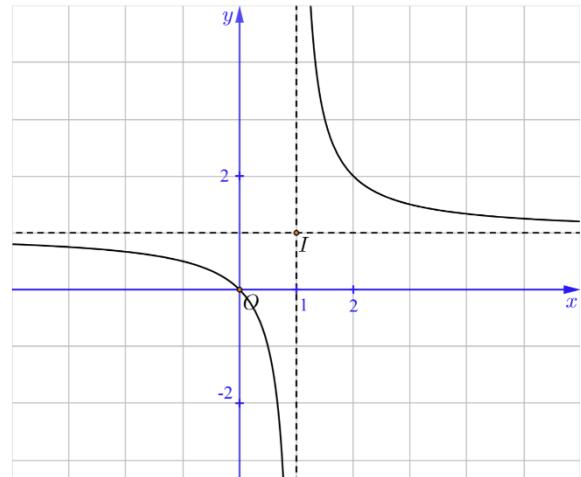
Câu 4. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ sau?

A. $y = \frac{x}{x+1}$.

B. $y = -\frac{x}{x-1}$.

C. $y = -\frac{x}{x+1}$.

D. $y = \frac{x}{x-1}$.



- Câu 5.** (THPT Thuận Thành 1&2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a,b,c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau;

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Số giá trị nguyên của $b \in [-2; 3]$ bằng

A. 6.

B. 10.

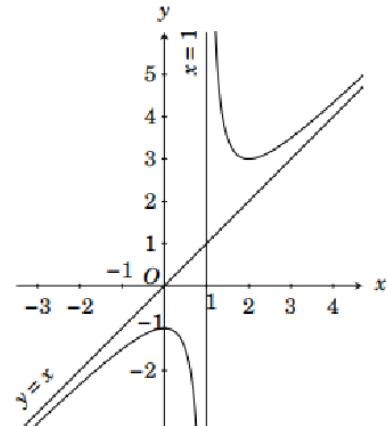
C. 4.

D. 5.

- Câu 6.** (THPT Điện Châu 5 - Nghệ An 2025) Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số

A. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x-2}$.

B. $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{x+1}$.

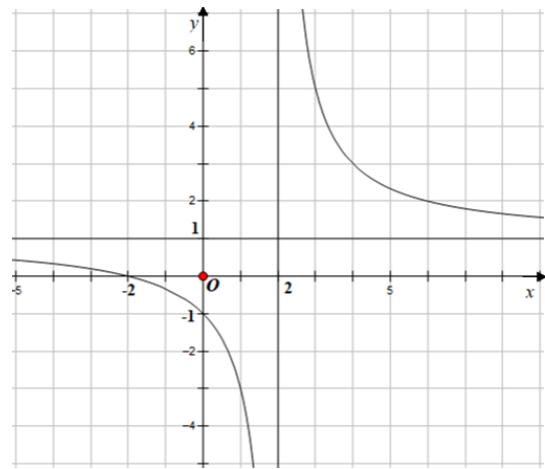


C. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. D. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Câu 7. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x + c}$ có đồ thị như hình sau đây

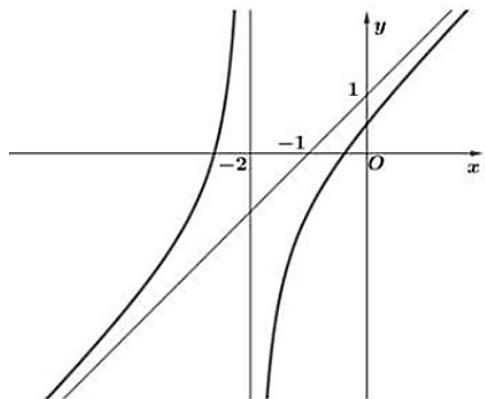
Tính giá trị của biểu thức $P = 2a - b + 3c$

- A. 6.
- B. -6.
- C. 10.
- D. -2.

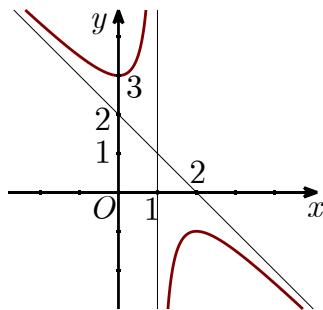


Câu 8. (HSG Hải Phòng 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + 2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}, a.c \neq 0$) có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Giá trị biểu thức $T = 2a + 3b - c$ là

- A. $T = 11$.
- B. $T = 8$.
- C. $T = 9$.
- D. $T = 10$.



Câu 9. (HSG Vũng Tàu 2025) Cho hàm số $y = ax + 2 + \frac{b}{x + c}$ có đồ thị như hình dưới đây. Giá trị của $P = a + b + c$ bằng



- A. 1.
- B. -1.
- C. 2.
- D. -3.

Câu 10. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax - 6}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

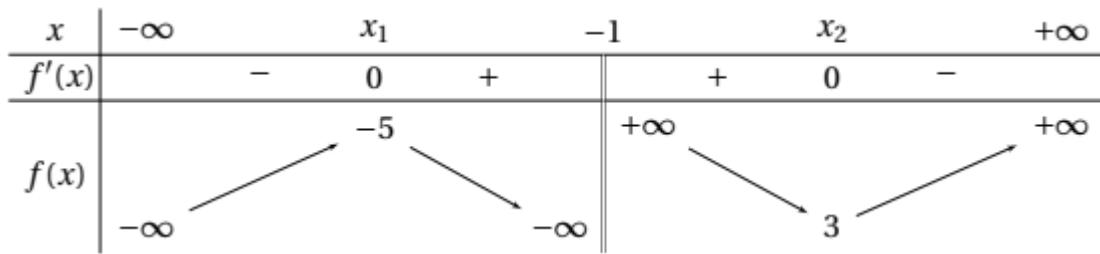
x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+	+	
y		$+\infty$	2

2 \nearrow $+\infty$ \searrow $-\infty$ \nearrow 2

Giá trị nhỏ nhất của $P = ab + a + c$ bằng:

- A. $\frac{-1}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{-25}{8}$. D. $\frac{-1}{8}$.

Câu 11. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^2 + nx + p}{qx + r}$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

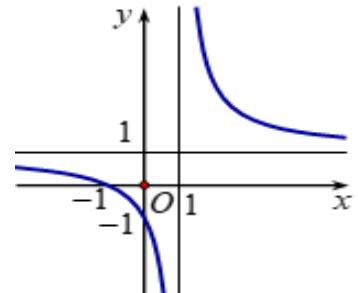


I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Tìm tọa độ I .

- A. $I(-2; 1)$. B. $I(-1; 1)$. C. $I(-1; 0)$. D. $I(-1; -1)$

Câu 12. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025) Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. B. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$.
 C. $y = \frac{x + 1}{x - 1}$. D. $y = x^3 - 3x - 1$.



Câu 13. (THPT Lê Thánh Tông - Nguyễn Khuyến HCM 2025) Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 3}{x + 3}$

- A. $D = R \setminus \{3\}$. B. $D = R \setminus \{0\}$. C. $D = R$. D. $D = R \setminus \{-3\}$.

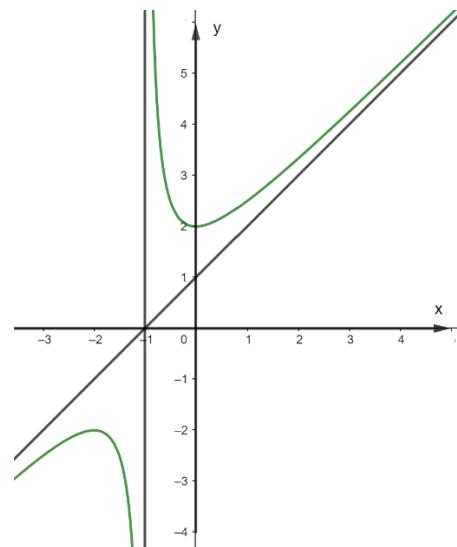
Câu 14. (Sở Thái Nguyên 2025) Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$.

C. $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

D. $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$.



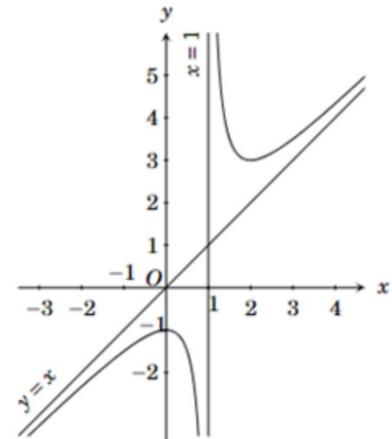
Câu 15. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Đường cong ở dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

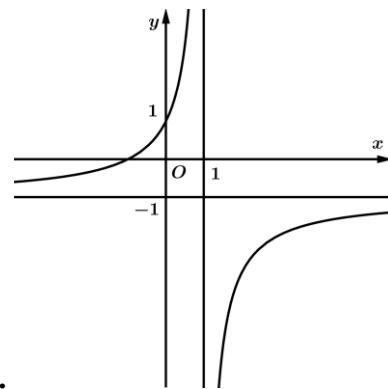
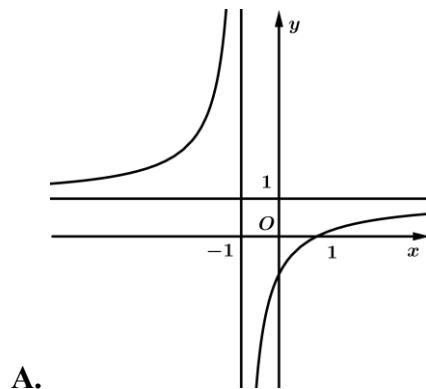
B. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

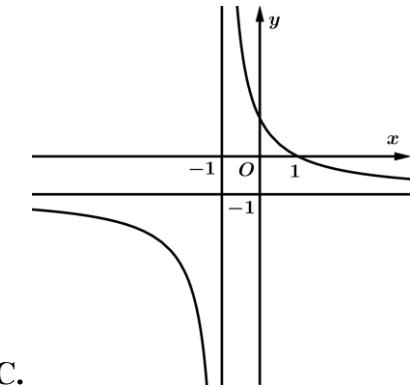
C. $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{x + 1}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

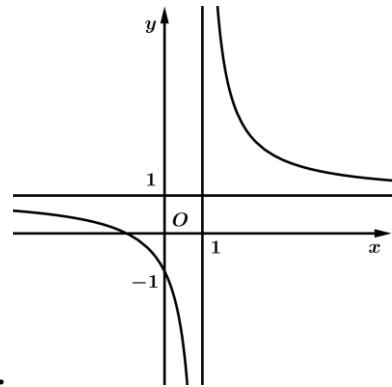


Câu 16. (Sở Yên Bái 2025) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{-x+1}$ là đường cong nào trong các hình vẽ sau?





C.



D.

- Câu 17. (Sở Phú Thọ 2025)** Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên:

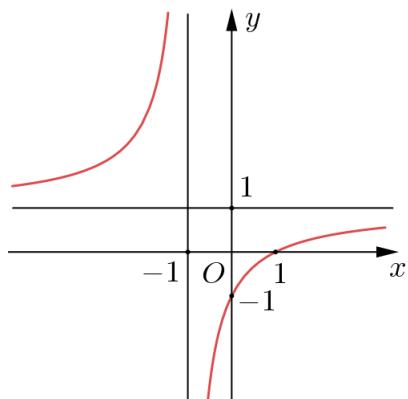
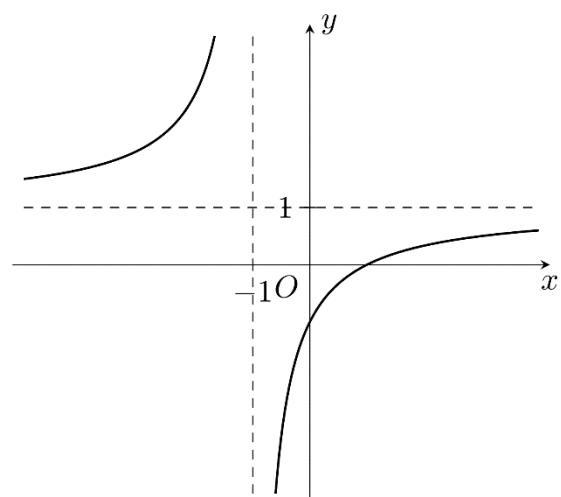
Toạ độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. $(-1; 1)$.
- B. $(1; 1)$.
- C. $(1; -1)$.
- D. $(0; 1)$.

- Câu 18. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.

Biểu thức $f(x)$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $x + \frac{1}{x}$.
- B. $-x^3 + 3x - 1$.
- C. $x^3 - 1$.
- D. $\frac{x-1}{x+1}$.



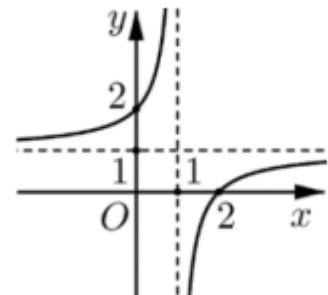
Câu 19. (Sở Quảng Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

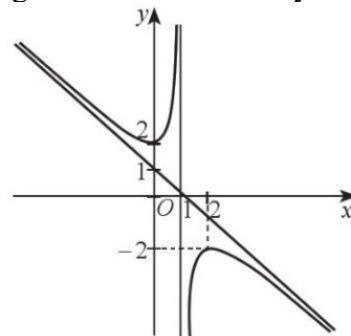
B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.



Câu 20. (Sở Vũng Tàu 2025) Đường cong như hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$.

C. $y = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x-1}$.

D. $y = \frac{-x^2 + x - 2}{x-1}$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
y'	+	0	+	-	0
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{27}{4}$	$+\infty$

Tìm điều kiện của m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$.

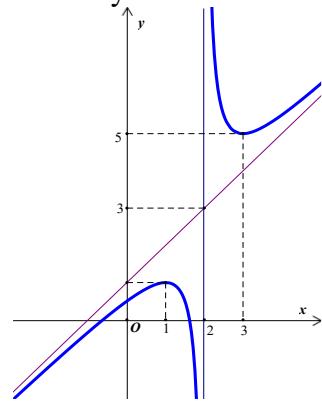
B. $m > 0$.

C. $0 < m < \frac{27}{4}$.

D. $m > \frac{27}{4}$.

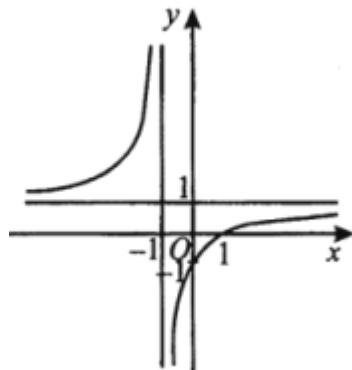
Câu 22. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.
- B. $y = \frac{x - 2}{1 - 3x}$.
- C. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



Câu 23. (Cụm Chuyên Môn Đăk Lak 2025) Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- B. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$.
- C. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$.
- D. $y = \frac{x - 1}{x + 1}$.



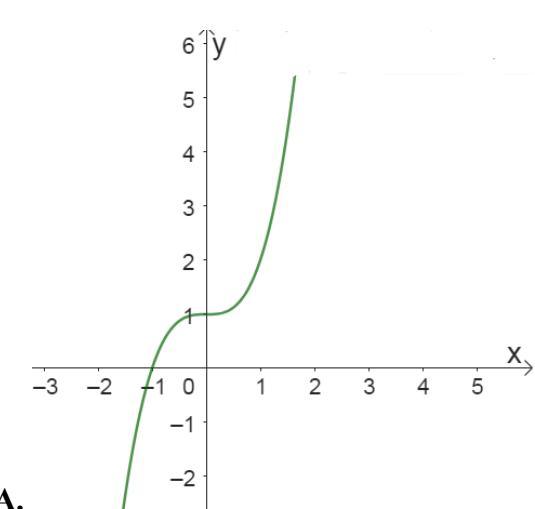
Câu 24. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên hình vẽ sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

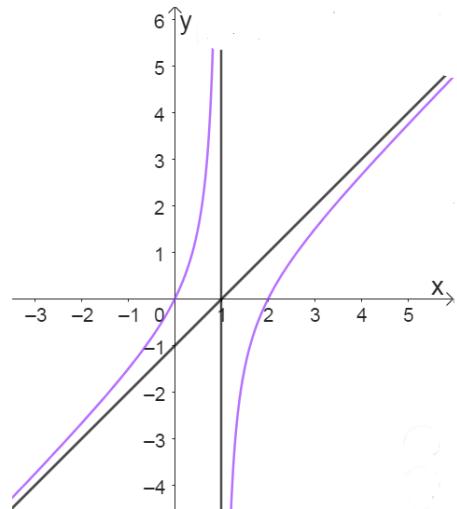
Bảng biến thiên trên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $y = \frac{-x + 2}{x - 1}$.
- B. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$.
- C. $y = \frac{x - 3}{x - 1}$.
- D. $y = \frac{x + 2}{x + 1}$.

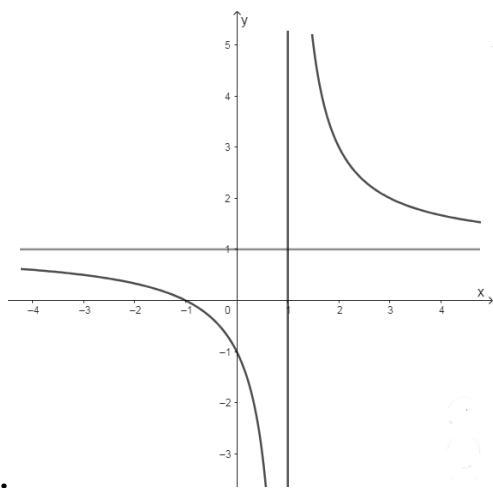
Câu 25. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025) Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$?



A.

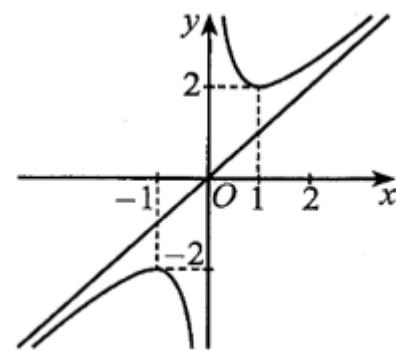
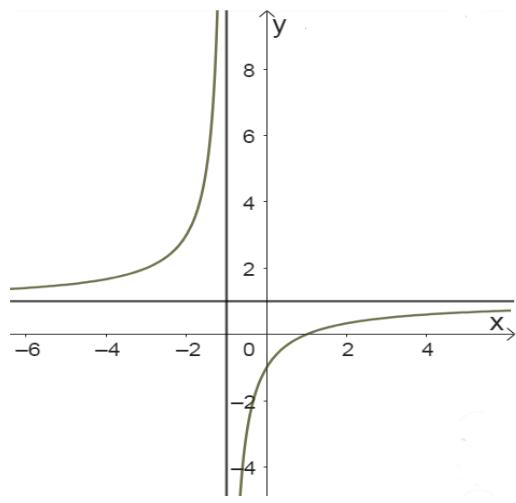


B.



C.

D.

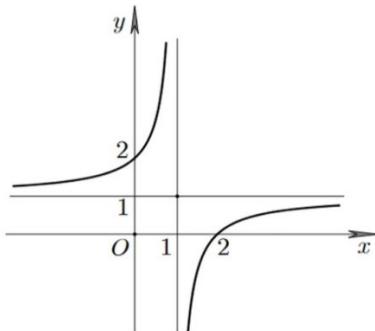


Câu 26. (Sở Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị hàm số như hình vẽ:

- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là
A. $I(1; 2)$. **B.** $J(-1; -2)$.

- C. $K(1;1)$. D. $O(0;0)$.

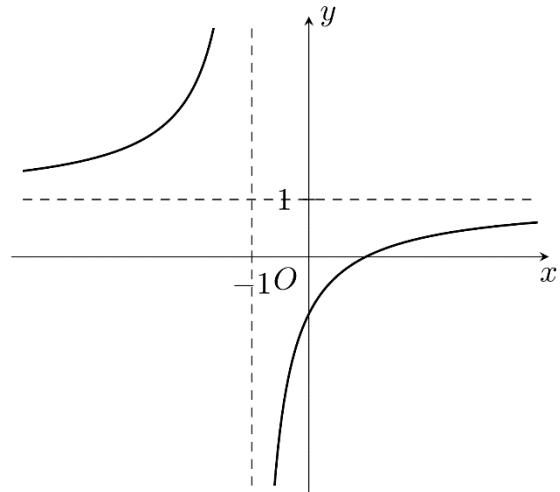
Câu 27. (Sở Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Phương trình đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



- A. $x=2, y=1$. B. $x=1, y=2$. C. $x=1, y=1$. D. $x=-1, y=1$.

Câu 28. (Sở Phú Thọ 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a,b,c,d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên:
Toạ độ tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. $(-1;1)$.
B. $(1;1)$.
C. $(1;-1)$.
D. $(0;1)$.



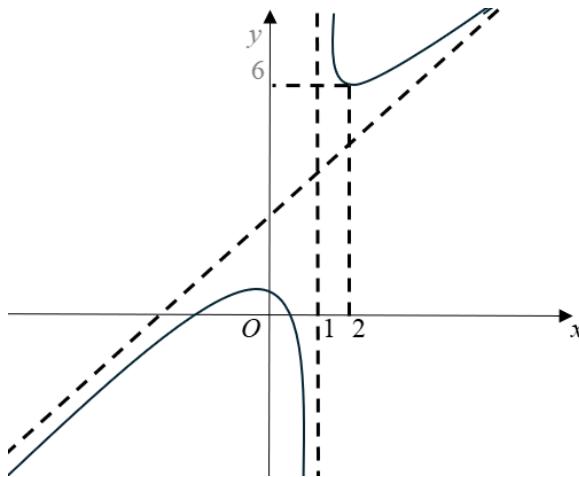
Câu 29. (Sở Bình Thuận 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	2	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm

- A. $x=5$. B. $x=2$. C. $x=0$. D. $x=-1$.

Câu 30. (Sở Hưng Yên 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

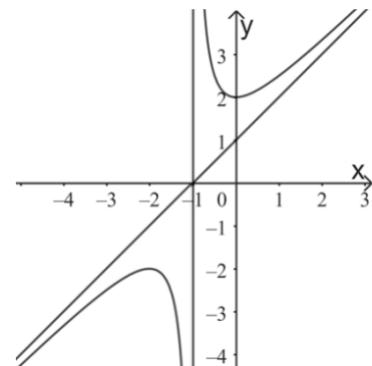


Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $-\infty; 1$. B. $2; +\infty$. C. $0; 1$. D. $1; 2$.

Câu 31. (Sở Nghệ An 2025) Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ?

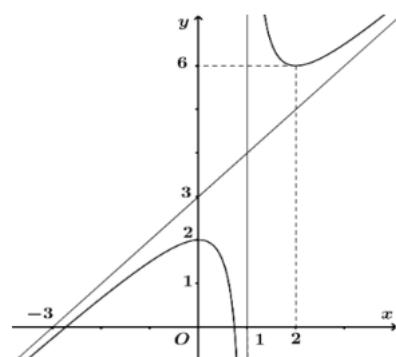
- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.
 B. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$.
 C. $y = x^2 - 2x + 3$.
 D. $y = x^3 - 3x + 2$.



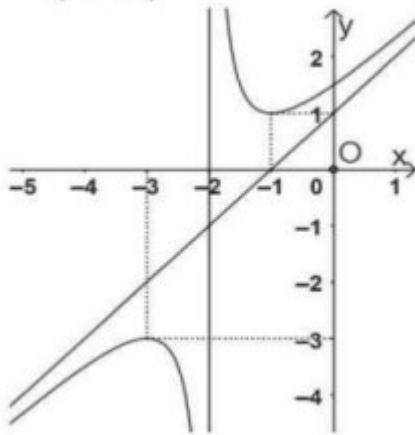
Câu 32. (Sở Cà Mau 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong bên dưới

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 6$.



Câu 33. (Liên trường Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:

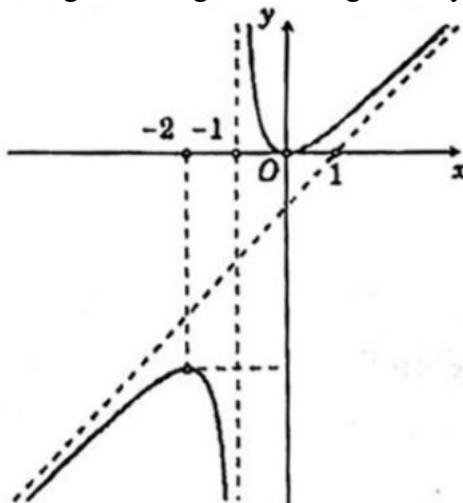


Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là:

- A. $N(-1; 1)$ B. $x = -3$. C. $x = -1$. D. $M(-3; -3)$

Câu 34. (Sở An Giang 2025) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 3 + \frac{9}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng
A. 0. B. 5. C. 1. D. $\frac{9}{5}$.

Câu 35. (Sở An Giang 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} (a, a' \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?



- A. $(-2; 0)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-2; -1)$.

Câu 36. Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 2}$ có phương trình là
A. $y = 2x - 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = -2x - 1$.

Câu 37. Biết rằng đồ thị (H) : $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B . Hãy tính khoảng cách từ gốc toạ độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 - mx + 2m}{x - 1}$. Tìm hoành độ của điểm cực đại, biết tiệm cận xiên qua điểm $(-3; 3)$. Chọn câu trả lời đúng.

- A. $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $x = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m+1)x - 5}{x - 1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu

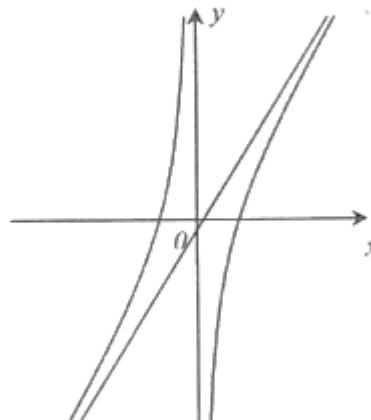
- A. $m < 4$ B. $m > 4$ C. $m = 4$ D. $m \in \mathbb{R}$

Câu 40. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + 2m}{x + m} (C_m)$. Có bao nhiêu đồ thị (C_m) đi qua điểm $(0, 1)$. Chọn câu trả lời đúng.

- A. Đúng 1 đường. B. Đúng 2 đường.

- C. Không có đường nào. D. Có vô số đường.

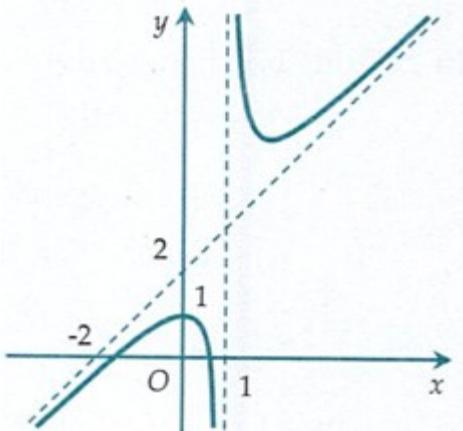
Câu 41. Cho hàm số $y = ax + b - \frac{r}{x} (abr \neq 0)$ và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ sau.



Các hệ số a, b, r phải thoả mãn điều kiện nào dưới đây.

- | | | | |
|---|---|---|---|
| <p>A. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$</p> | <p>B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r < 0 \end{cases}$</p> | <p>C. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$</p> | <p>D. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$</p> |
|---|---|---|---|

Câu 42. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 43. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị với trục tung cắt đường tiệm cận xiên của đồ thị tại điểm có tọa độ là
 A. $(1; 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 3)$.

Câu 44. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ tại điểm có tung độ $y_0 = -2$ là
 A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = 3x + 2$. D. $y = -3x - 2$.

Câu 45. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y = 2x + 7$?
 A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 46. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ là
 A. $x = 0$. B. $x = -2$. C. $\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Câu 47. Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 vuông góc với đường thẳng $d : y = -x + 2025$.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x-1}$ (C) tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

A. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

B. 3.

C. $3\sqrt{5}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x+1}$ có hai điểm cực trị A, B . Tìm điểm M trên AB sao cho MO đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $M(2;3)$.

B. $M(1;2)$.

C. $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 50. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - m^2 x - 1}{x-1}$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max_{[2;4]} y = \frac{14}{3}$. Hỏi số phần tử của S là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 51. Cho hàm số $(Cm): y = \frac{x^2 - mx}{x+1}$. Biết rằng (Cm) có hai điểm cực trị A, B thỏa $AB = 10$, tham số m nằm trong khoảng nào dưới đây:

A. $m > 5$.

B. $3 < m < 5$.

C. $0 < m < 3$.

D. $m < 0$.

KHẢO SÁT HÀM BẬC PHÂN THÚC

Câu 1. (THPT Đào Duy Tù - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C).

a) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

c) Có đúng 3 điểm thuộc đồ thị (C) mà tọa độ của chúng là những số nguyên.

d) Gọi M là điểm nằm trên đồ thị (C) và H, K tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox và Oy . Có 2 điểm M có hoành độ dương thỏa mãn tứ giác $MHOK$ có diện tích bằng 2.

Câu 2. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$	-			-	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$		$+\infty$		$\frac{1}{2}$

a) Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

d) $c \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Câu 3. (THPT Nguyễn Đăng Đạo - Bắc Ninh 2025) Cho

hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$ đạt cực đại tại $x = 0$

và có đồ thị như hình vẽ sau:

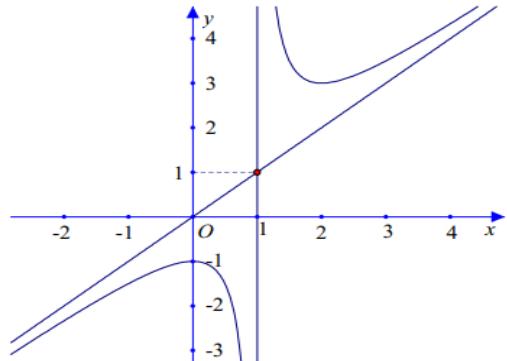
a) Giá trị của biểu thức $a + b + c + d = 0$.

b) Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

c) Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số; M

là điểm di động trên trục Ox sao cho góc AMB không tù. Giá trị nhỏ nhất của hoành độ điểm M là 3.

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của hàm số có phương trình: $y = x - 1$.



Câu 4. (THPT Gia Bình - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số

$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (với $a, m \neq 0$) có đồ thị là đường cong

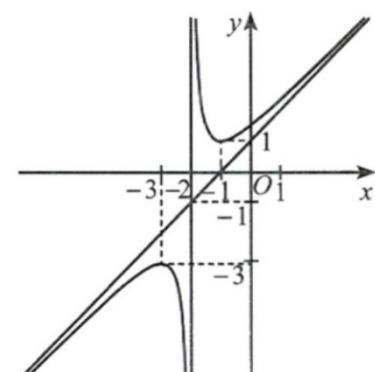
như Hình

a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-1; +\infty)$.

b) $f(2024) < f(2025)$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -3$ và đường tiệm cận xiên: $y = x + 1$.

d) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A\left(2; \frac{13}{4}\right)$.



Câu 5. (THPT Yên Lạc - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{3x-2}{x-1}} + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 12 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2 - 3x - 1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

- a) Ba đường tiệm cận của đồ thị hàm số cắt nhau tạo thành tam giác có diện tích bằng 50.
- b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 12$.
- c) Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

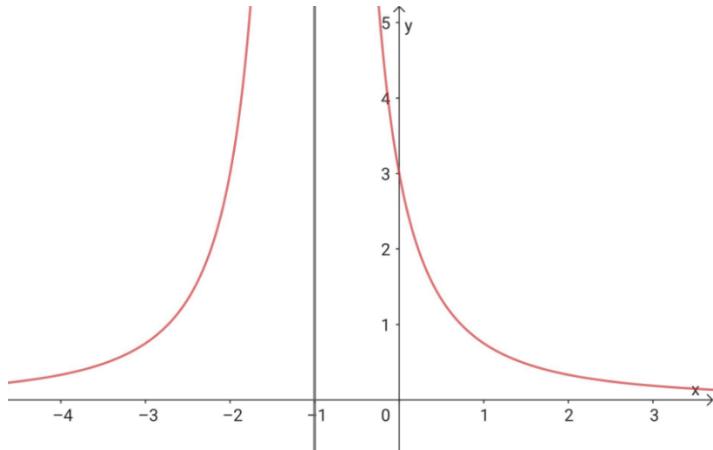
Câu 6. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ dưới. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng 4.

b) $f(-3) = 8$.

- c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- d) Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang.



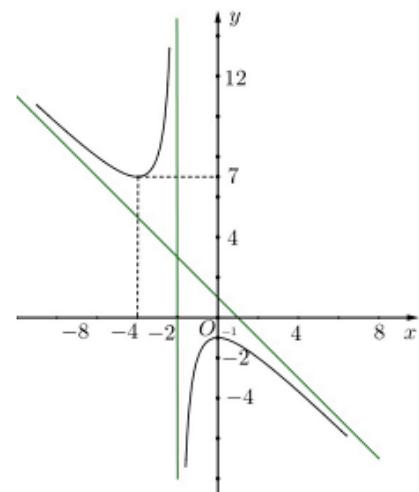
Câu 7. (Sở Ninh Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$.

b) Ta có $a + b + c + d = -2$.

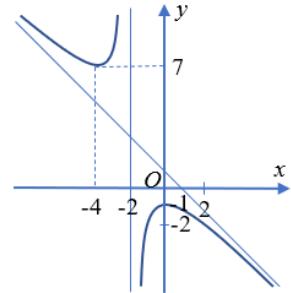
- c) Khoảng cách từ $M(1; -8)$ đến đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $\sqrt{5}$.

- d) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.



Câu 8. (THPT Diên Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây, biết đường tiệm cận của đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $(1; 0)$.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$.

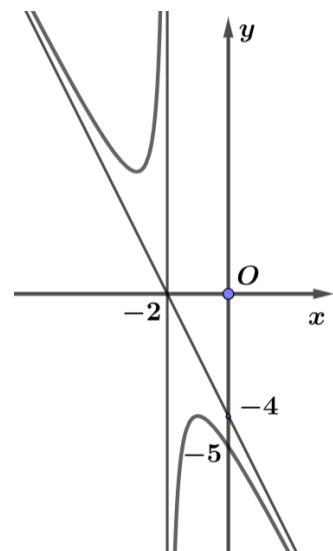


- c) Ta có $a + b + c + d = -2$.
- d) Khoảng cách từ $M(1; -8)$ đến đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng $\sqrt{5}$.

Câu 9. (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C) . Giả sử A, B là hai điểm thuộc hai nhánh và AB đi qua tâm đối xứng của (C) .

- a) Tâm đối xứng của (C) là điểm $I(1; -1)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- c) Có 1 tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d : y = -2x - 1$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 10. (Sở Bình Phước 2025) Cho hàm số $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau:



- a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.
- b) Giá trị $f(0) = -5$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 4$.
- d) Hàm số đã cho là $y = -2x - 4 - \frac{2}{x+2}$.

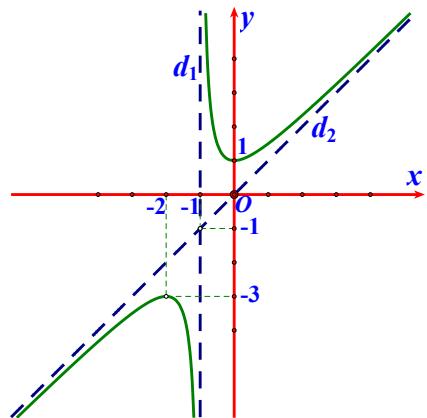
Câu 11. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị và hai đường tiệm cận d_1, d_2 như hình vẽ dưới đây.

a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

c) Điểm $M(50; 98)$ và hai điểm cực trị của đồ thị hàm số thăng hàng.

d) Đồ thị hàm số có một trục đối xứng là đường thẳng $y = (p + \sqrt{q})(x + 1) - r$ (trong đó p, q, r là các số nguyên). Khi đó $p + 10q + 15r = 90$.



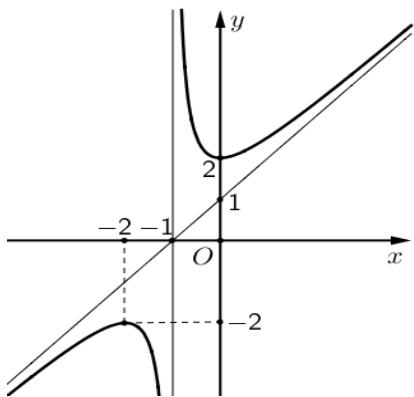
Câu 12. (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình vẽ sau

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

b) Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x + 1$.

c) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, diện tích của tam giác OAB bằng 8 (với O là gốc tọa độ).

d) Một trục đối xứng của đồ thị đã cho là $d : y = (x + 1) \tan \frac{3\pi}{8}$.



Câu 13. (HSG Vũng Tàu 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 8}{x - 2}$ (1) và đường tròn $(C) : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Gọi I là tâm đường tròn (C).

a) Hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) trên đoạn $[3; 5]$ bằng $7 + 2\sqrt{2}$.

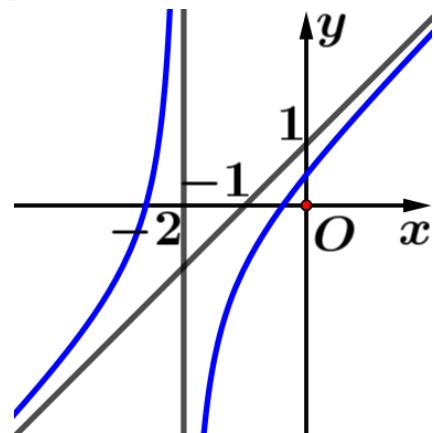
c) Tổng khoảng cách từ điểm I đến hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng $\frac{10 + 3\sqrt{2}}{2}$

d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt M, N . Diện tích tứ giác $IMON$ bằng $\frac{14}{5}$. (với O là gốc tọa độ).

Câu 14. (THPT Triệu Sơn 1-Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + nx + 1}{px + 2}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng $x = -2$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$.
- d) Ta có $2m + 3n - p = 10$.

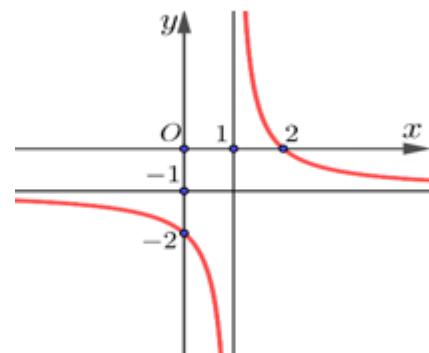


Câu 15. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}(C)$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

- a) Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ nghịch biến trên $R \setminus \{1\}$
- b) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị
- c) Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in N$ và $(a, b) = 1$). Khi đó $a - 20b = 1$.
- d) Lấy hai điểm A, B thuộc một nhánh của đồ thị (C) sao cho $x_A > 1; x_B > 1$ và hai điểm C, D thuộc đường thẳng $\Delta: y = -x + 1$. Khi $ABCD$ là hình vuông thì diện tích hình vuông đó (làm tròn đến hàng phần chục) là 23,7 đơn vị diện tích.

Câu 16. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+1}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới:

- a) Đạo hàm của hàm số $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = -1$.
- d) Tổng $a + b + c = 5$.



Câu 17. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+2}$ có đồ thị (C).

- a) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) với trục Oy là đường thẳng $y = 2x + 1$
- b) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt
- c) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số
- d) Điểm $I(-2; 3)$ là giao điểm của các đường tiệm cận của đồ thị (C)

Câu 18. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$

- a) Đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$ là 1.
- d) Có 6 giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ vô nghiệm.

Câu 19. (Cụm trường Nguyễn Hiền - Lê Hồng Phong - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định $D = R \setminus \{1\}$ và đạo hàm $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$ với $x \neq 1$.
- b) Tâm đối xứng của đồ thị (C) là điểm $I(1; 3)$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng 5.
- d) Gọi A và B là hai điểm cực trị của (C). Khi đó $AB = 4\sqrt{2}$.

Câu 20. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

- a) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(a; b)$ với $a^2 + b = 12$.
- b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x - 2$.
- c) Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B . Diện tích tam giác IAB bằng 12.

d) Có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{x^2 - 3x + 6}{x-1} = m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 < 15$.

Câu 21. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025) Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x-3}$ có đồ thị là (C).

a) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .

b) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên là $y = -x - 6$.

c) Đồ thị (C) nhận giao điểm $I(3; -9)$ làm tâm đối xứng.

d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Câu 22. (Sở Thái Nguyên 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là điểm $I(2; 1)$.

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm cùng phía đối với trục hoành.

d) Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục tung. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M là $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

Câu 23. (KHTN Hà Nội 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ và điểm $A(-1; -3)$.

a) Hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực trị.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

c) Đường thẳng $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

d) Xét điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$, đoạn thẳng AM có độ dài luôn lớn hơn 2,2.

Câu 24. (Cụm trường THPT Hải Dương 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.

a) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(a; b)$ với $a^2 + b = 12$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x - 2$.

c) Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B . Diện tích tam giác LAB bằng 12.

d) Có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 < 15$.

Câu 25. (Sở Bạc Liêu 2025) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2; 4]$ bằng 5.

c) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C) .

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 26. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

a) Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = x + 1$ làm tiệm cận xiên.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Gọi A, B, C là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy . Diện tích tam giác ABC bằng 6.

d) Có đúng 2 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} - m^2x$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 27. (THPT Triệu Sơn 1 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - m}{x - 2}$, có đồ thị (C_m)

(với m là tham số thực). Khi đó:

a) Đồ thị (C_m) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi $m = 5$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

d) Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị khi $m > 6$.

Câu 28. (Chuyên Phan Bội Châu - Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số $y = ax + b + \frac{c}{x+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau:

a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

b) Giá trị $b = -4$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 4$.

d) Hàm số đã cho là $y = -2x - 4 - \frac{2}{x+2}$.

Câu 29. (THPT Anh Sơn 3 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $f(x) = -x + 4 - \frac{9}{x+2}$.

a) $f(-7) = \frac{64}{5}$; $f(-4) = \frac{25}{2}$.

b) Đồ thị của hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng $x = -2$.

c) Đạo hàm của hàm số đã cho $f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 5}{(x+2)^2}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-7; -4]$ là $\frac{25}{2}$.

Câu 30. (THPT Đô Lương 1 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$.

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

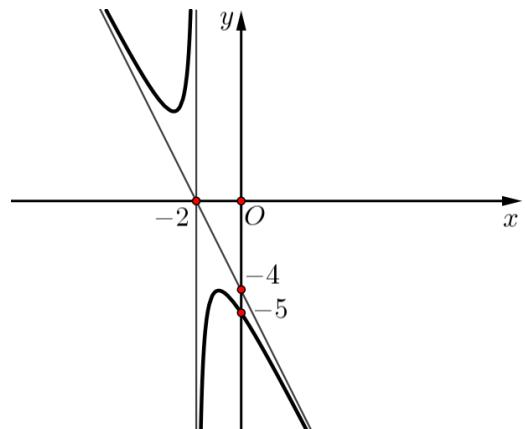
b) Đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(1; 3)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ là 1.

Câu 31. (Sở Sơn La 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

a) Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.



b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

c) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $y = x + 2$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $5\sqrt{2}$.

Câu 32. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Cho hàm số

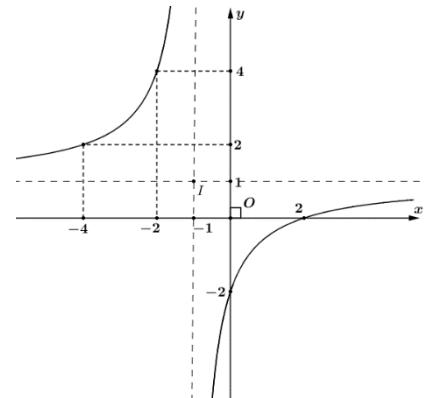
$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}.$$

a) Đạo hàm của hàm số đã cho là hàm số $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên nửa khoảng $(-1; 3]$ bằng 1.

c) Hàm số có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới

d) $f(0) = 2, f(-2) = 0$.



Câu 33. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số có 2 điểm cực trị.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

c) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

d) M là điểm bất kì thuộc đồ thị (C) . Tích khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C) bằng $\sqrt{2}$.

Câu 34. (Sở Quảng Ninh 2025) Cho hàm số $y = x - 1 + \frac{9}{x + 2}$

a) Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) Hàm số có đạo hàm là $y' = 1 - \frac{9}{(x+2)^2}; \forall x \neq -2$

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$

d) Hàm số có giá trị cực đại lớn hơn giá trị cực tiểu.

Câu 35. (Liên Trường Nghệ An 2025) Cho hàm số

$$f(x) = \frac{ax^2 + x + b}{x + c} \quad (a > 0),$$

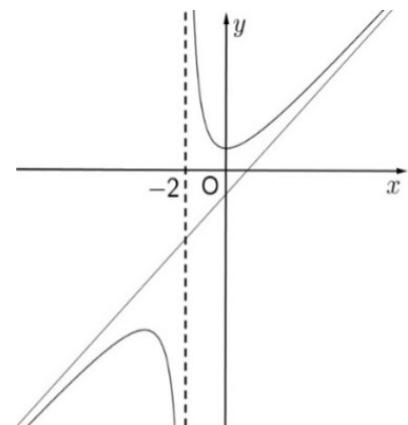
có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Biết đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác cân.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

b) $a = 1$.

c) Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục Ox .

d) $24a + 4b + 1000c > 2025$.



Câu 36. (THPT DTNT - Nghệ An 2025) Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x + b_2}$$

dưới đây:

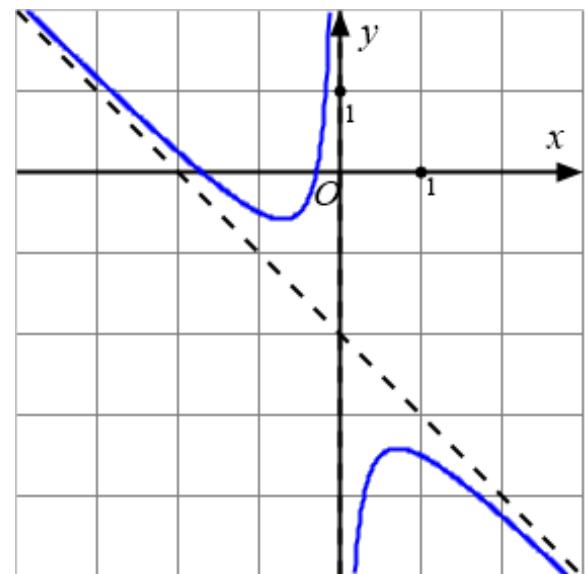
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số có điểm cực trị.

b) Đồ thị hàm số cắt trục tung.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Tiệm cận xiên của đồ thị là $y = -x - \frac{15}{4}$.



Câu 37. (Cụm Ninh Giang - Tứ Kỳ - Gia Lộc 2025) Cho

$$\text{hàm số } y = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1} \text{ có đồ thị } (C).$$

a) Gọi (C') là đường tròn tâm $I(-1; 3)$, bán kính bằng 1. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M, N với $M \in (C)$ và $N \in (C')$ bằng $1 + 2\sqrt{2}$.

b) Đường thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B .

Khi đó diện tích tam giác OAB là $S = \frac{1}{2}$.

c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

d) Tiệm cận đứng của đồ thị (C) là đường thẳng có phương trình $x = -1$.

Câu 38. (THPT Quê Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- b) Đường tiệm cận xiên của (C) có phương trình là $y = x + 3$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng $\frac{13}{2}$.
- d) Có 3 số nguyên dương m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - m}{x-1}$ có hai điểm cực trị.

Câu 39. (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x - 2}{x+1}$ có đồ thị (C) .

Khi đó

- a) $y' = f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$
- b) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu
- c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng 4
- d) Trên đồ thị (C) có đúng 8 điểm có tọa độ nguyên.

Câu 40. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C) . Hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị (C) .

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ trên đoạn $[2; 5]$ là 2.
- b) Khi độ dài đoạn AB ngắn nhất thì $OA \cdot OB = \sqrt{29}$.
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- d) Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C) .

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$.

- a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = f(x) = x - 2$.
- c) Hàm số nghịch biến trên tập xác định.

- d) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là A, B . Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng AB là $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 42. (Sở Bình Phước 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$

a) Hàm số có đạo hàm $f'(x) = \frac{2x^2 + 12x - 14}{(x + 3)^2}$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $\Delta: y = 2x - 3$.

c) Đồ thị hàm số nhận điểm $I(3; 3)$ làm tâm đối xứng.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x + 3}$ cắt trực hoành, trực tung lần lượt tại A, B . Khi đó diện tích của tam giác OAB lớn hơn 2.

Câu 43. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số

$$y = ax + b + \frac{c}{x+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

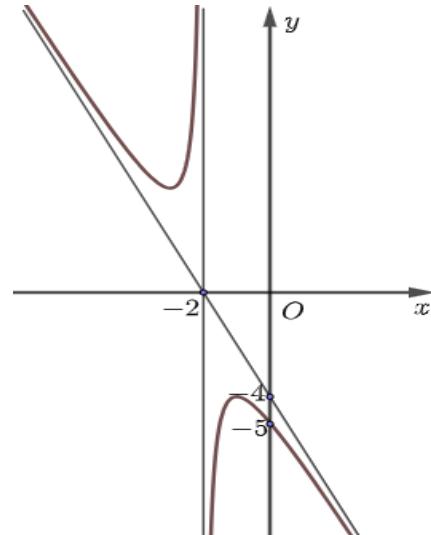
sau:

a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

b) Giá trị $b = -4$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x - 4$.

d) Hàm số đã cho là $y = -2x - 4 - \frac{2}{x+2}$.



Câu 44. (Sở Hải Phòng 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) và 2 điểm A, B là hai điểm cực trị của (C) .

a) $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.

b) 2 điểm A và B nằm ở hai phía của trực tung.

c) Đường thẳng AB có phương trình là $y = 2x + 1$.

d) A và B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ có phương trình là $x + 2y + 4 = 0$.

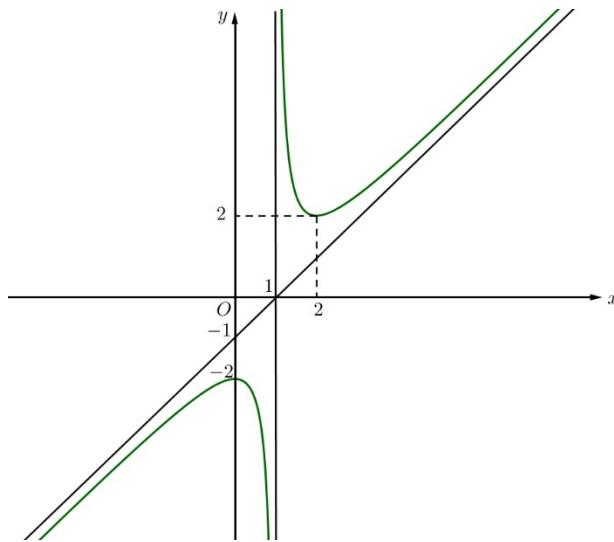
Câu 45. (Sở Gia Lai 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a) Hàm số đã cho được viết lại $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 0$.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

d) Đồ thị của hàm số là hình vẽ dưới đây



Câu 46. (Sở Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

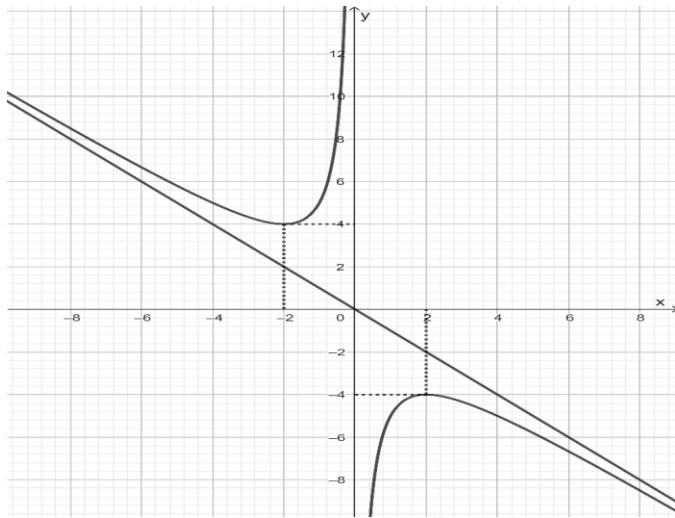
a) Đạo hàm của hàm số đã cho nhận giá trị âm trên các khoảng $(-2; 0) \cup (0; 2)$ và nhận giá trị dương trên các khoảng $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$.

c) Bảng biến thiên của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+	+	0 -
y	$+\infty$	4	$+\infty$	$-\infty$	-4 $-\infty$

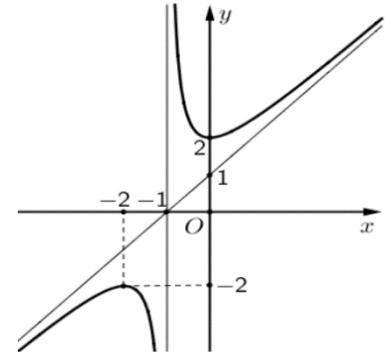
d) Đồ thị của hàm số đã cho là



Câu 47. (THPT Khoa Học Giáo Dục - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình

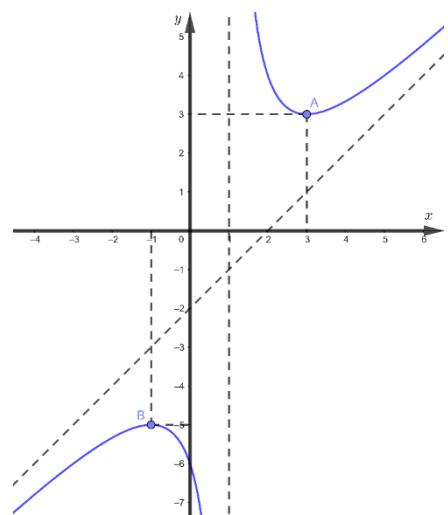
vẽ sau:

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- b) Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên $y = x + 1$.
- c) Gọi A, B là hai điểm cực trị của hàm số đã cho, diện tích của tam giác OAB bằng 8 (với O là gốc tọa độ).
- d) Một trục đối xứng của đồ thị đã cho là $y = (x + 1) \tan \frac{3\pi}{8}$.



Câu 48. (Sở Hà Tĩnh 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.

- a) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $M(0; -5)$.
- b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình $y = x - 2$.
- c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- d) Đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ là hình vẽ bên.



Câu 49. (Sở Hải Phòng 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị là (C) và hai điểm A, B là hai

điểm cực trị của (C) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng AB có phương trình là $y = 2x + 1$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$.

c) Hai điểm A, B đối xứng nhau qua đường thẳng Δ có phương trình $x + 2y + 4 = 0$.

d) Hai điểm A và B nằm ở hai phía trục tung.

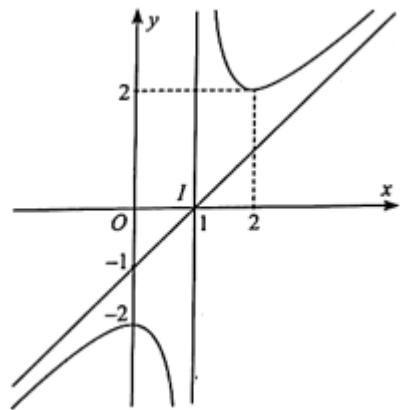
Câu 50. (Sở Gia Lai 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

a) Hàm số đã cho được viết lại $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = 0$.

c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

d) Đồ thị của hàm số là hình vẽ dưới đây.



Câu 51. (Sở Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$ có đồ thị là C . Khi đó

a) Đường thẳng $y = x - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị C .

b) Điểm $I(-1; -1)$ là giao điểm các đường tiệm cận của đồ thị C .

c) Đồ thị C cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại hai điểm phân biệt.

d) Tiếp tuyến của đồ thị C tại giao điểm của C với trục Oy là đường thẳng $y = 2x + 1$.

Câu 52. (Sở Bắc Giang 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) , khi đó.

a) $y' = f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1$.

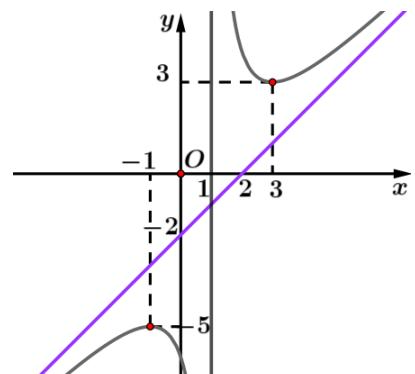
b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = x - 2$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng 4.

d) Trên đồ thị (C) có đúng 4 điểm M có tung độ và hoành độ là các số nguyên sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 8.

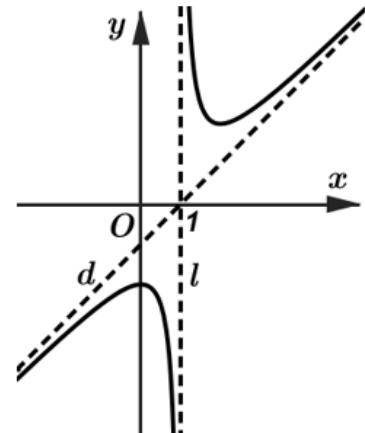
Câu 53. (Sở Lâm Đồng 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và đồ thị như hình vẽ bên dưới.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = 3$.
- c) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là $x = 0$.
- d) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm trên đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{2}$.



Câu 54. (Sở Hậu Giang 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$.



- c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

- d) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số đã cho có dạng như hình bên (đường nét đứt d và l theo thứ tự là tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số trong hình)

Câu 55. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Theo báo cáo của một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x(m^3)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0003x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200 m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó, mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Chi phí sản xuất $100 m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

b) $\bar{c}(x) = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}$.

- c) Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là $100 m^3$.

d) $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 5$.



Câu 56. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025) Nồng độ thuốc $C(t)$ tính theo mg/cm^3 trong máu bệnh nhân được tính bởi $C(t) = \frac{0,05t}{t^2 + t + 1}$ trong đó t là thời gian tính theo giờ kể từ khi tiêm cho bệnh nhân.

a) Có thời điểm nồng độ trong máu của bệnh nhân đạt $0,02 \text{ mg/cm}^3$.

b) Nồng độ thuốc trong máu lớn nhất ở thời điểm 1 giờ sau khi tiêm.

c) Hàm số $C(t)$ có đạo hàm $C'(t) = \frac{1-t^2}{20(t^2+t+1)^2}, (t \geq 0)$.

d) Sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm dần theo thời gian.

Câu 57. (THPT Lý Thường Kiệt - Hà Nội 2025) Anh B chế tạo một bể cá có dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích $0,096 \text{ m}^3$, chiều cao $h = 0,6 \text{ m}$, chiều rộng x , chiều dài y (với $x > 0, y > 0$). Anh B dùng loại kính để làm các mặt bên có giá 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm đáy có giá 100.000 đồng/m^2 . Mọi chi phí khác xem như không đáng kể. Khi đó

a) Biểu thức tín chi phí làm các mặt xung quanh là

$$C_{xq} = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right).$$

b) Hàm số biểu thị y theo x là $y = \frac{0,16}{x}$.

c) Chi phí mua kính để làm đáy bể là 11200 đồng.

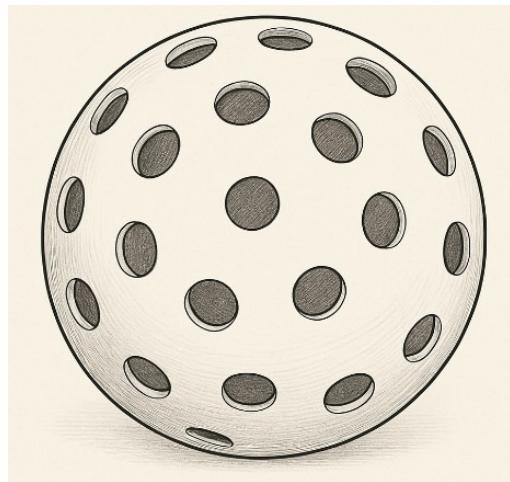
d) Chi phí làm bể cá thấp nhất là 100000 đồng.



Câu 58. (THPT Kinh Môn - Hải Dương 2025) Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát (người giám sát sẽ giám sát tất cả các máy). Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ.

a) Trong 1 giờ, cần 266 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.

b) Trong $\frac{8}{3}$ giờ, cần 100 máy để sản xuất được 8000 quả bóng pickleball.



c) Chi phí hoạt động thấp nhất là 6,5 triệu đồng.

d) Để chi phí hoạt động thấp nhất, công ty cần sử dụng 16 máy.

Câu 59. (Sở Lào Cai 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. (Nguồn:

James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

a) Thời điểm 1 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là 10 (mg/l).

b) Đạo hàm của hàm số $C(x)$ là $C'(x) = \frac{60 - 30x^2}{(x^2 + 2)^2}$.

c) Trong khoảng thời gian từ 1 phút sau khi tiêm trở đi, nồng độ thuốc trong máu giảm dần.

d) Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm 2 phút sau khi tiêm.

Câu 60. (Sở Nghệ An 2025) Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí CO₂ cho thấy: nồng độ khí CO₂ trong phòng thay đổi theo thời gian t (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số $f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2 + 5}$ (ppm), với $t \geq 0$ (Khi nói nồng độ khí CO₂ trong không khí là 400 ppm, điều đó có nghĩa là: Trong **một triệu phần thể tích** của không khí, có **400 phần thể tích** là khí CO₂).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nồng độ khí CO₂ trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là 400 (ppm).

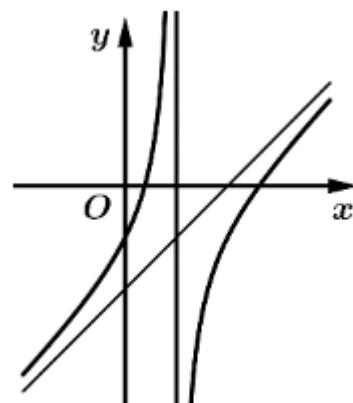
b) $f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2}$ với $t \geq 0$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

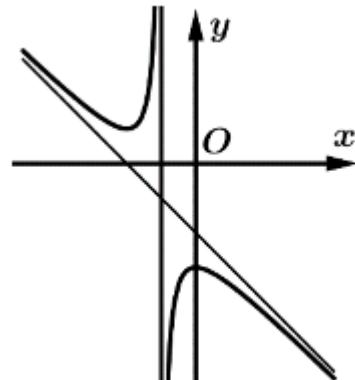
d) Nồng độ khí CO₂ cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

E. TRẢ LỜI NGẮN

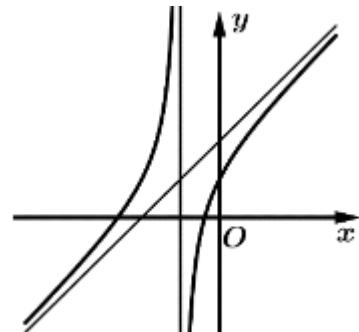
Câu 1. Đồ thị trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$. Hỏi có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- Câu 3.** Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + 1}{cx + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- Câu 4.** (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_1 là khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d^2 + d_1^2$ bằng bao nhiêu?

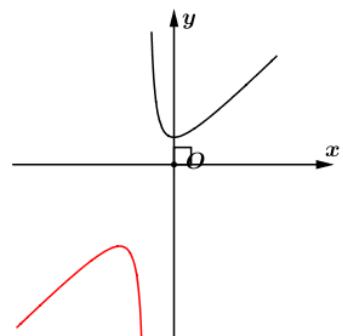
- Câu 5.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là a và b . Tính $3a + 2b$.

- Câu 6.** (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 26x + 18}{x + 13}$ có điểm cực tiểu $x = x_1$ và điểm cực đại $x = x_2$. Tính $P = -2x_1 + x_2$.

- Câu 7.** (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Trong hệ trục tọa độ (Oxy)

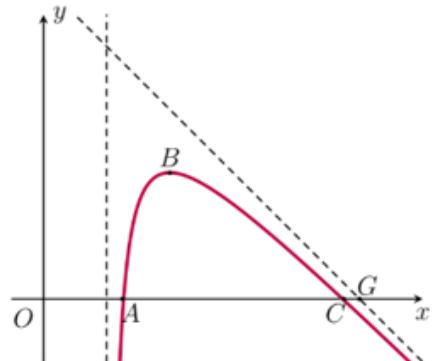
cho đồ thị hàm số (C) : $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai

tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C) . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

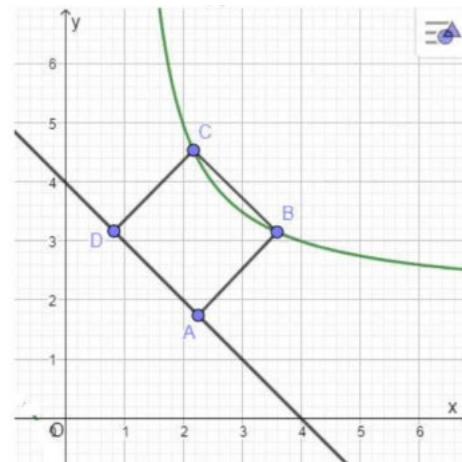


- Câu 8.** (Sở Hà Tĩnh 2025) Một máy bay trình diễn có đường bay gắn với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gắn với mặt đất.

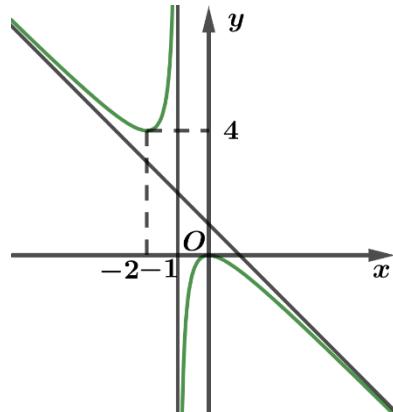
Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng 2,5 đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát 1,5 đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?



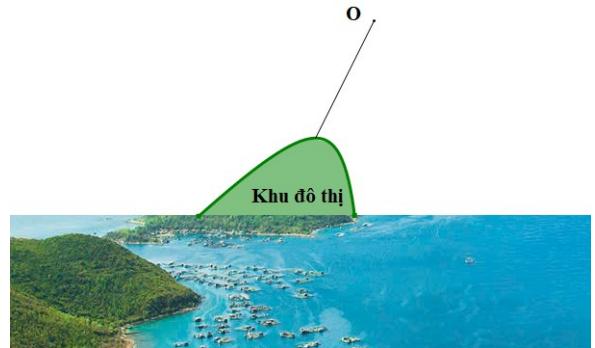
- Câu 9.** (Chuyên Hạ Long 2025) Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng (d): $y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



- Câu 10.** (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính $a+b+c+d$.



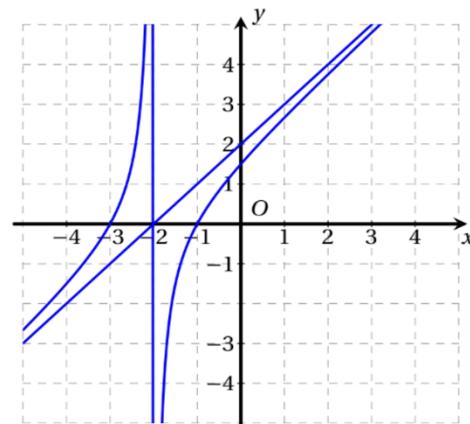
- Câu 11. (Chuyên Vinh 2025)** Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi)?



- Câu 12. (Cụm trường Hải Dương 2025)** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có một điểm $M(a; b)$ với $a > 1$ sao cho khoảng cách IM là nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- Câu 13. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025)** Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + c}$ với $a \neq 0$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới

Giá trị $S = a + b + c$ là bao nhiêu?



- Câu 14. (Sở Hà Nội 2025)** Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ có hai điểm cực trị A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

- Câu 15. (Sở Yên Bái 2025)** Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ và có khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 6a^2 + 7b^2$.

- Câu 16. (Sở Quảng Nam 2025)** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ có điểm cực tiểu là $M(x_0; y_0)$, tính $T = x_0 + y_0$.

- Câu 17. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. (Quy tròn đến hàng phần trăm)

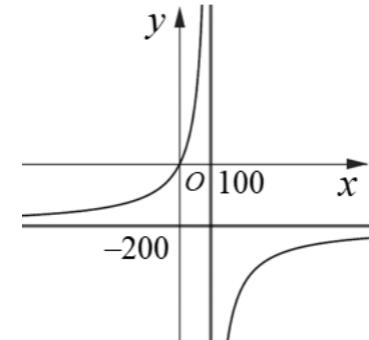
Câu 18. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_2 là khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d_1^2 + 2d_2^2$ bằng bao nhiêu?

Câu 19. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 20. (Sở Hà Tĩnh 2025) Giả sử tỷ lệ sinh của Tỉnh A tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-t}}$; $t \geq 0, t \in N$, trong đó thời gian t được tính bằng tháng. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng dân số của tỉnh A . Hỏi sau bao nhiêu tháng tốc độ tăng trưởng của dân số tỉnh A là lớn nhất?

Câu 21. (THPT Cẩm Xuyên - Hà Tĩnh 2025) Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành thì tốc độ bán hàng đạt lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 22. (Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi 2025) Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm môi trường từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax + b}{-x + d}$ (như hình vẽ), ($0 \leq x < 100$). Tính chi phí chênh lệch (tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 90% và loại bỏ 99% chất gây ô nhiễm từ khí thải của nhà máy.



Câu 23. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025) Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = a$. Giá trị của a là bao nhiêu?

Câu 24. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Nồng độ C của một loại hóa chất trong máu sau t giờ tiêm vào cơ thể được cho bởi công thức $C(t) = \frac{4t}{64 + t^3}$ với $t \geq 0$. Sau khoảng bao nhiêu giờ tiêm thì nồng độ của hóa chất trong máu là cao nhất? (kết quả làm tròn tới hàng phần trăm)

- Câu 25.** (THPT Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông 2025) Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cát trực hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1; 0)$ và $(8; 0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km) . Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6; 5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km)



- Câu 26.** (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2002 được tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là $0,075$ nghìn người/năm?

- Câu 27.** (THPT Thạch Thành 1 - Thanh Hóa 2025) Một bể chứa 3000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam/lít nước với tốc độ 20 lít/phút . Giả sử nồng độ muối trong nước bể sau t phút được xác định bởi một hàm số $f(t)$ trên $t \in [0; +\infty)$ (gam/lít). Khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể tiến gần đến bao nhiêu gam/lít.

- Câu 28.** (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) vượt khoảng cách 300 km để tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h . Giả sử vận tốc bơi của cá khi mước đứng yên là $v \text{ km/h}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3 t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính hằng Jun. Tình vận tốc bơi của cá khi mướt đứng yên, để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?



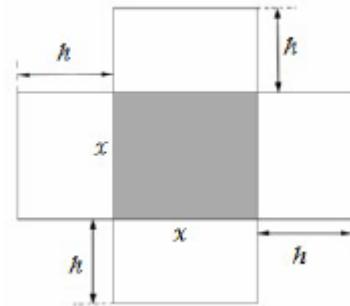
- Câu 29.** (Cụm Chương Mỹ - Thanh Oai 2025) Một bể chứa ban đầu có 250 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 25 lít nước, đồng thời cho vào bể 8 gam chất khử khuẩn (ClO_2) được hòa tan. Giả sử $C(t)$ là nồng độ chất khử khuẩn trong bể sau t phút (với $C(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$, đơn vị gam/lít, trong đó $m(t)$ là khối lượng chất khử khuẩn trong bể và $V(t)$ là thể tích nước trong bể). Gọi c là số dương nhỏ nhất mà nồng độ chất khử khuẩn là $C(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt quá c gam/lít. Tìm c .

- Câu 30.** (Sở Gia Lai 2025) Biết rằng tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của một học viên lớn tuổi sau t tuần (kể từ khi chưa biết đánh máy) được cho bởi một trong hai công thức sau $S(t) = \frac{at^2 + b}{ct^2 + d}$ và $S(t) = \frac{at^2 + b}{ct + d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; ac \neq 0$).

Ông A (một người lớn tuổi chưa biết đánh máy) sau 4 tuần đi học thì tốc độ đánh máy trung bình đạt 20 từ trên phút, sau 6 tuần đạt 30 từ trên phút. Em hãy dự đoán xem, sau khóa học 15 tuần thì tốc độ đánh máy trung bình của ông A là bao nhiêu từ trên phút.

Câu 31. (THPT Hương Hóa - Quảng Trị 2025) Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Gọi $f(t)$ (gam/lít) là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo thời gian t nhưng không vượt ngưỡng p gam/lít. Tìm số p (kết quả viết dưới dạng số thập phân).

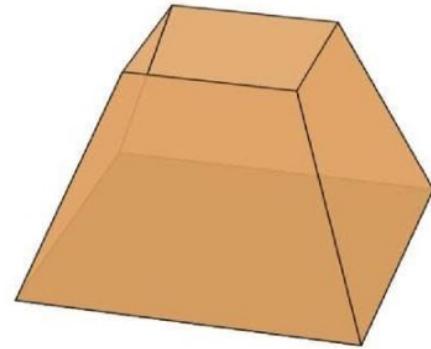
Câu 32. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và thể tích là 4000 cm^3 . Tìm x (cm) sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất.



Câu 33. (Chuyên Vinh 2025) Để tạo một kiện hàng dạng hình lăng trụ đứng với đáy là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, người ta dùng các thanh gỗ ghép khít đóng lại với nhau. Biết rằng, dung tích kiện hàng bằng 9 m^3 và giá thành 1 m^2 gỗ sử dụng là 200 000 đồng. Hỏi sau khi hoàn thành kiện hàng đó, người ta cần bóc ra ít nhất bao nhiêu triệu đồng? (diện tích các mép giữa hai mặt kề nhau không đáng kể).



Câu 34. (Sở Nghệ An 2025) Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt từ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Câu 35. (Đề Tham Khảo 2025) Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Câu 36. (THPT Tiên Du - Bắc Ninh 2025) Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân

cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- Câu 37. (THPT Lê Thánh Tông - HCM 2025)** Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 400$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu

là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

- Câu 38. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

- Câu 39. (THPT Nguyễn Viết Xuân - Vĩnh Phúc 2025)** Một công ty chuyên sản xuất dụng cụ thể thao nhận được đơn đặt hàng sản xuất 9000 quả bóng rổ. Công ty có một số máy móc, mỗi máy có khả năng sản xuất 36 quả bóng rổ trong một giờ. Chi phí thiết lập mỗi máy là 250 nghìn đồng. Sau khi thiết lập, quá trình sản xuất sẽ diễn ra hoàn toàn tự động và chỉ cần có người giám sát. Chi phí trả cho người giám sát là 225 nghìn đồng mỗi giờ. Số máy móc công ty cần sử dụng để chi phí hoạt động đạt mức thấp nhất là bao nhiêu?

- Câu 40.** Một nhà xuất bản nhận in 4000 ấn phẩm. Nhà xuất bản có tất cả 14 máy in được cài đặt, hoạt động tự động và giám sát bởi 1 kĩ sư. Mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong một giờ. Chi phí cài đặt máy in là 12 USD cho một máy, chi phí giám sát là 9USD một giờ. Tính số máy in nhà xuất bản nên sử dụng để chi phí in là nhỏ nhất?

- Câu 41. (Chuyên KHTN Hà Nội 2025)** Giả sử chi phí đặt hàng và vận chuyển C (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng trong sản xuất một sản phẩm được xác định theo công thức $C = \frac{19200000}{x^2} + \frac{27x}{x+3000}$, $x \geq 1$. Trong đó x là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm x để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

- Câu 42. (Cụm Hưng Yên 2025)** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) (m là tham số thực).
Tổng bình phuong các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B sao cho $OA \perp OB$ bằng bao nhiêu?

- Câu 43. (Sở Phú Yên 2025)** Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300.000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số

tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

