Chương IV. Đại số Bool

Đại Số Bool

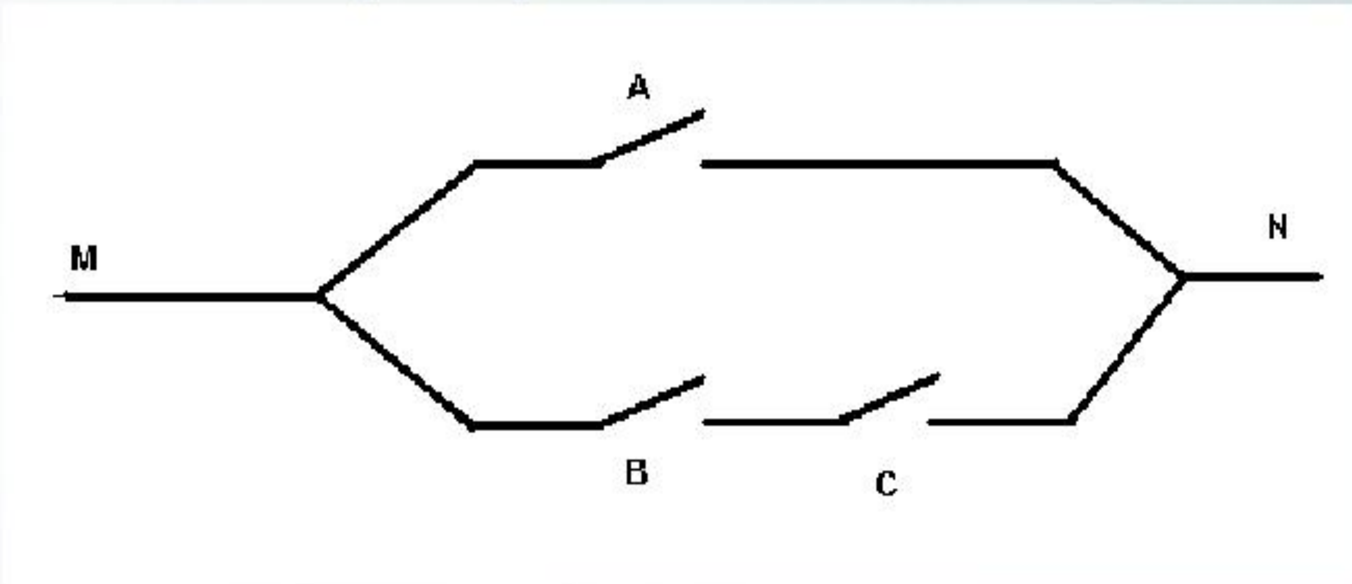
Hàm Bool

Biểu đồ karnaugh

Mạch logic

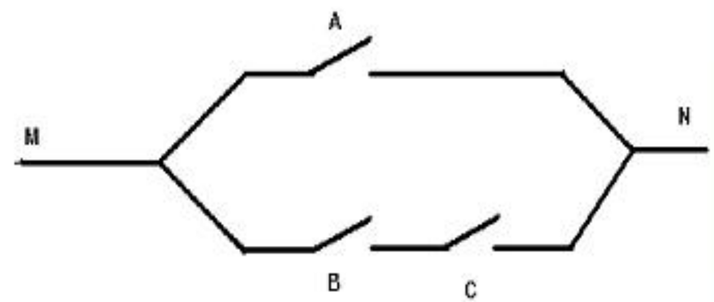
Mở đầu

Xét mạch điện như hình vẽ



Tùy theo cách trạng thái cầu dao A, B, C mà ta sẽ có dòng điện đi qua MN. Như vậy ta sẽ có bảng giá trị sau

Mở đầu



Câu hỏi: Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được.

Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi biến được xem như là một cầu dao

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

I. Đại Số Bool

Một đại số Bool $(A, \wedge, \vee, \bar{\ }, 0, 1)$

là một tập hợp $A \neq \varnothing$ với hai phép toán hai ngôi, kí hiệu là $\wedge$, $\vee$, tức là hai ánh xạ:

$$\wedge: \quad A \times A \to A \qquad\qquad \vee: A \times A \to A$$
$$\quad (x,y) \to x \wedge y \qquad\qquad (x,y) \to x \vee y$$

và một phép toán một ngôi, kí hiệu là $\bar{\ }$, tức là ánh xạ:

$$\bar{\ }: A \to A$$
$$x \to \bar{x}$$

thỏa 5 tính chất sau:

I. Đại Số Bool

- Tính giao hoán: $\forall$ x, y$\in$ A

$$x\wedge y = y\wedge x;$$

$$x\vee y = y\vee x;$$

- Tính kết hợp: $\forall$ x, y, z$\in$ A

$$(x\wedge y)\wedge z = x\wedge(y\wedge z);$$

$$(x\vee y)\vee z = x\vee(y\vee z).$$

- Tính phân phối : $\forall$ x, y, z$\in$ A

$$x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z);$$

$$x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z).$$

- Có các phần tử trung hòa 1 và 0: $\forall x\in A$

$$x\wedge 1 = 1\wedge x = x;$$

$$x\vee 0 = 0\vee x = x.$$

- Mọi phần tử đều có phần tử bù: $\forall x\in A$, $\exists\ \overline{x}\in A$,

$$x\wedge\overline{x} = \overline{x}\wedge x = 0; \qquad x\vee\overline{x} = \overline{x}\vee x = 1.$$

I. Đại Số Bool

Ví dụ: Cho U là tập bất kỳ, trên A = P(U) (*tập các tập con của U*) xét phép $\wedge$ là phép $\cap$, phép $\vee$ là phép $\cup$, phép $^{-}$ là phép lấy phần bù, phần tử 0 là tập rỗng $\varnothing$, còn phần tử 1 là tập U.

Khi đó (P(U), $\cap$, $\cup$, $^{-}$,$\varnothing$, U) là một đại số Bool .

Xét F là tập hợp tất cả các dạng mệnh đề theo n biến p_1, $p_2,\ldots,p_n$ với hai phép toán hội $\wedge$, tuyển $\vee$, phép $^{-}$,phần tử 0 là hằng sai 0 , phần tử 1 là hằng đúng 1.

Khi đó F là một đại số Bool

I. Đại Số Bool

Ví dụ.

Xét tập hợp B = {0, 1}. Trên B ta định nghĩa hai phép toán $\wedge, \vee$ như sau:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

và phép $\overline{}$ được định nghĩa: $\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0$

Khi đó, B trở thành một đại số Bool

II. Hàm Bool

Hàm Bool n biến là ánh xạ

$f : B^n \to B$, trong đó B = {0, 1}.

Như vậy hàm Bool n biến là một hàm số có dạng : $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, trong đó mỗi biến trong $x_1, x_2,\ldots, x_n$ chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong B = {0, 1}.

Ký hiệu **F_n** để chỉ tập các hàm Bool n biến

Ví dụ. Dạng mệnh đề $E = E(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ theo n biến $p_1, p_2,\ldots, p_n$ là một hàm Bool n biến.

Bảng chân trị

Xét hàm Bool n biến $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

Vì mỗi biến x_i chỉ nhận hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Do đó, để mô tả f, ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của f tùy theo 2^n trường hợp của biến. Ta gọi đây là **bảng chân trị của f**

Ví dụ

Xét kết qủa f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z

Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ).

Kết qủa f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ.

Khi đó f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z có bảng chân trị như sau:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Các phép toán trên hàm Bool

Các phép toán trên F_n được định nghĩa như sau:

Phép cộng Bool $\vee$:

Với $f, g \in F_n$ ta định nghĩa tổng Bool của f và g:

$$\boxed{f \vee g = f + g - fg}$$

Suy ra

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$,

$$(f \vee g)(x) = f(x) + g(x) - f(x)g(x)$$

Dễ thấy

$$f \vee g \in F_n \text{ và } (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

Các phép toán trên hàm Bool

Phép nhân Bool $\wedge$:

Với f, g $\in F_n$ ta định nghĩa tích Bool của f và g

$$\boxed{f \wedge g = fg}$$

$\forall x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in B^n$,

$$(f \wedge g)(x) = f(x)g(x)$$

Dễ thấy

$f \wedge g \in F_n$ và $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Ta thường viết fg thay cho $f \wedge g$

Phép lấy hàm bù:

Với $f \in F_n$ ta định nghĩa hàm bù của f như sau:

$$\boxed{\bar{f} = 1 - f}$$

Dạng nối rời chính tắc của Hàm Bool

Xét tập hợp các hàm Bool n biến F_n theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

- Mỗi biến Bool x_i hay $\bar{x}_i$ được gọi là một **từ đơn**.
- **Đơn thức** là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.
- **Từ tối tiểu (đơn thức tối tiểu)** là tích khác không của đúng n từ đơn.
- **Công thức đa thức** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các đơn thức.
- **Dạng nối rời chính tắc** là công thức biểu diễn hàm Bool thành tổng của các từ tối tiểu.

VD: Xét hàm boole, với 3 biến: x, y, z

x, y, z, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ là các từ đơn

xy, yz là đơn thức $\quad$ $xy\bar{z}$ là từ tối tiểu

E= xy ∨ yz là một công thức đa thức

F=xyz ∨ $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ là một dạng nối rời chính tắc

Dạng nối rời chính tắc của Hàm Bool

Cho $f \in \mathrm{F}_n$, f có thể viết dưới dạng sau:

$$\boxed{\boldsymbol{f = u_1 \vee u_2 \vee u_3 \vee \ldots \vee u_i}} \quad (*)$$

$\boldsymbol{u_i}$ là các đơn thức tối tiểu bậc n $(i = 1, \ldots, n)$.

(*) được gọi là dạng nối rời chính tắc của f.

Ví dụ: Trong F_4 có dạng biểu diễn sau đây:

$$f(x, y, z, t) = x\bar{y}\bar{z}t \;\vee \bar{x}yzt \;\vee xy\bar{z}\bar{t}$$

$\Rightarrow$ f có dạng nối rời chính tắc của hàm Bool.

Dạng nối rời chính tắc của Hàm Bool

Có 2 cách để xác định dạng nối rời chính tắc một hàm Bool:

❖ ***Cách 1*:** **Bổ sung từ đơn còn thiếu vào các đơn thức.**

Bước 1: Khai triển hàm Bool thành tổng của các đơn thức.

Bước 2: Với mỗi đơn thức thu được ở bước 1, ta nhân đơn thức đó với các tổng của những từ đơn bị thiếu và phần bù của nó trong đơn thức đó.

Bước 3: Tiếp tục khai triển hàm thu được ở bước 2 và loại bỏ những đơn thức bị trùng. Công thức đa thức thu được chính là dạng nối rời chính tắc của hàm Bool ban đầu.

Vídu: Trong F_3 tìm dạng nối rời chính tắc

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee xy\bar{z} &= \bar{x}(y \vee \bar{y}).(z \vee \bar{z}) \vee (\bar{x} \vee x)\bar{y}z \vee xy\bar{z} \\ &= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \\ &= \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \end{aligned}$$

Dạng nối rời chính tắc của Hàm Bool

Cách2: Dùng bảng chân trị.

Để ý đến các vector bool trong bảng chân trị mà tại đó $f = 1$

Ví dụ: Cho $f(x, y) = x \vee \bar{y}$.

Tìm biểu thức dạng nối rời chính tắc của f

Lập bảng chân trị của f

x	y	$x \vee \bar{y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Các thể hiện làm cho $\boldsymbol{f = 1}$ là $\mathbf{00, 10, 11}$.

Lập được các từ tối tiểu tương ứng là $\bar{x}\bar{y}, x\bar{y}, xy$.

Vậy dạng nối rời chính tắc của f là $f(x, y) = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} \vee xy$

III. Biểu đồ karnaugh

Công thức đa thức tối tiểu

Đơn giản hơn

Cho hai công thức đa thức của một hàm Bool :

$f = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ (F)

$f = M_1 \vee M_2 \vee \ldots \vee M_l$ (G)

Ta nói rằng công thức F *đơn giản hơn* công thức G nếu tồn tại đơn ánh h: $\{1,2,..,k\} \rightarrow \{1,2,\ldots,l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1,2,..,k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$

Công thức đa thức tối tiểu

Đơn giản như nhau

Nếu F đơn giản hơn G và G đơn giản hơn F thì ta nói F và G *đơn giản như nhau*

Ví dụ 1: Cho $f \in F_4$ có 3 dạng đa thức

$$f = x\overline{y}\overline{t} \vee \bar{x}yz \vee x\overline{z}\overline{t} \vee xyz \quad (1)$$

$$f = x\overline{y}\overline{t} \vee \bar{x}yz \vee xy\overline{z} \vee yzt \quad (2)$$

$$f = x\overline{y}\overline{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}yz\overline{t} \vee xy\overline{z} \vee yzt \quad (3)$$

(1) và (2) đơn giản như nhau vì $\begin{cases} p = q = 4 \\ \deg(u_j) = \deg(v_j) = 3, 1 \le j \le 4 \end{cases}$

(2) đơn giản hơn (3) hay (3) phức tạp hơn (2) vì $\begin{cases} p = 4 < q = 5 \\ \deg(u_j) \le \deg(v_j) \end{cases}$ $1 \le j \le 4$

Công thức đa thức tối tiểu

Ví dụ 2: Cho $g \in F_4$ có 2 dạng đa thức:

$$g = x\bar{y}z \vee z\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z}t \qquad (1)$$

$$g = z\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \qquad (2)$$

Ta thấy: $\begin{cases} p = q = 4 \\ d(u_1) > d(v_1);\ d(u_2) < d(v_2) \end{cases}$

Nên cần phải hoán vị

$(2) \Leftrightarrow \bar{x}y\bar{z}t \ \vee z\bar{t} \ \vee \bar{x}yzt \ \vee \bar{x}y\bar{z}t \quad (2') \ (q' = 4)$

Ta thấy:

(1) đơn giản hơn(2') vì $\begin{cases} p = q' = 4 \\ \deg(u_j) \leq \deg(w_j), 1 \leq j \leq 4 \end{cases}$

Công thức đa thức tối tiểu

Công thức đa thức tối tiểu:

Công thức F của hàm Bool f được gọi là *tối tiểu* nếu với bất kỳ công thức G của f mà đơn giản hơn F thì F và G đơn giản như nhau

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh là phương pháp xác định công thức đa thức tối tiểu của một hàm Bool.

Xét f là một hàm Bool theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với n = 3 hoặc 4.

Trường hợp n = 3:

f là hàm Bool theo 3 biến x, y, z. Khi đó bảng chân trị của f gồm 8 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 8 ô, tương ứng với 8 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Trường hợp n = 4:

f là hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 hàng. Thay cho bảng chân trị của f ta vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, tương ứng với 16 hàng của bảng chân trị, được đánh dấu như sau:

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\overline{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\overline{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\overline{z}$	1000	1100	0100	0000	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Với qui ước:

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó x =1, bởi $\overline{x}$ thì tại đó x =0, tương tự cho y, z, t.

Các ô tại đó f bằng 1 sẽ được đánh dấu (tô đậm hoặc gạch chéo). Tập các ô được đánh dấu được gọi là biểu đồ Karnaugh của f, ký hiệu là kar(f).

Trong cả hai trường hợp, hai ô được gọi là ***kề nhau*** (theo nghĩa rộng), nếu chúng là hai ô liền nhau hoặc chúng là ô đầu, ô cuối của cùng một hàng (cột) nào đó. Nhận xét rằng, do cách đánh dấu như trên, hai ô kề nhau chỉ lệch nhau ở một biến duy nhất.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Định lý

Cho f, g là các hàm Bool theo n biến $x_1,x_2,\ldots,x_n$.
Khi đó:

a) $kar(fg) = kar(f) \cap kar(g)$.

b) $kar(f \vee g) = kar(f) \cup kar(g)$.

c) kar(f) gồm đúng một ô khi và chỉ khi f là một từ tối tiểu

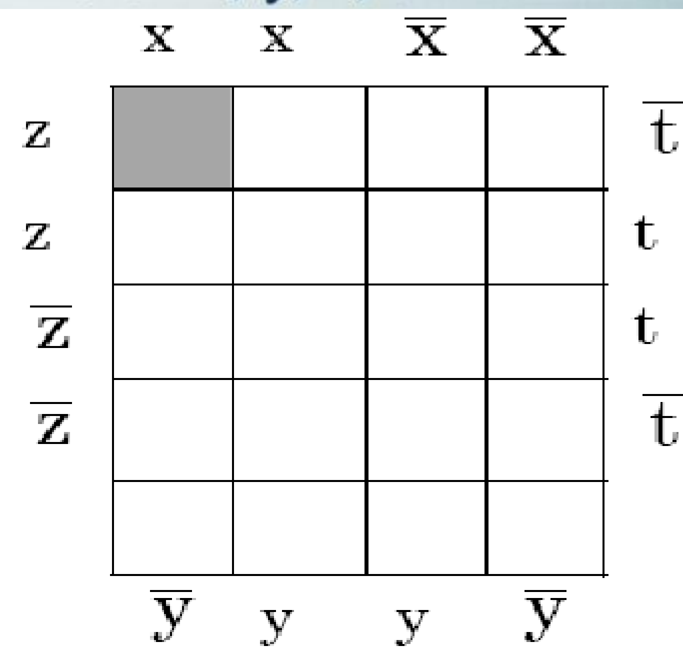
Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Tế bào là hình chữ nhật (theo nghĩa rộng) gồm 2^{n-k} ô $(0 \le k \le n)$

Nếu T là một tế bào thì T là biểu đồ karnaugh của một đơn thức duy nhất m, cách xác định m như sau: lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.

Ví dụ 1. Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $x\bar{y}z\bar{t}$ là

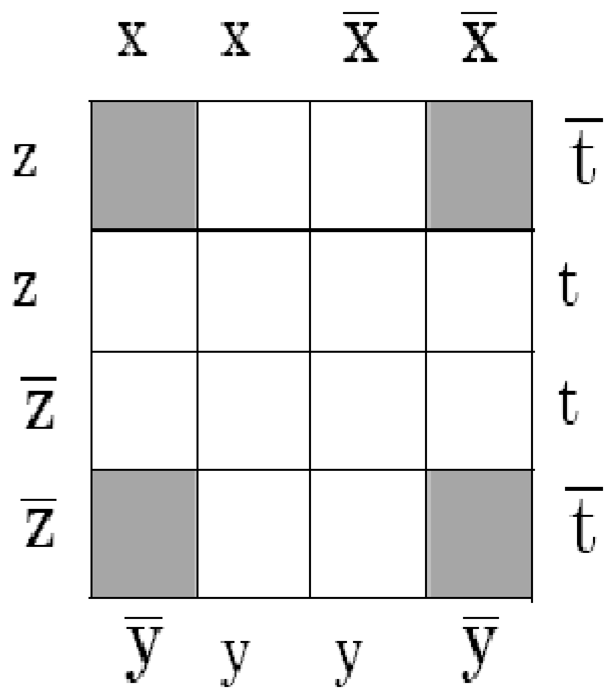


Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

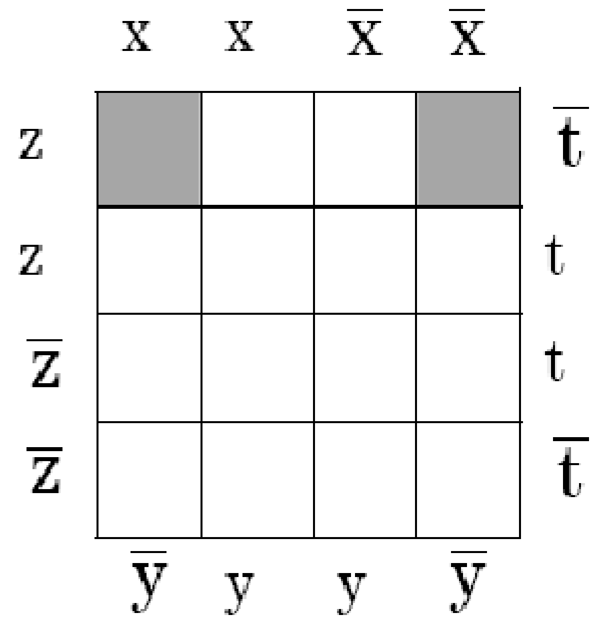
Ví dụ 2

Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}z\bar{t}$ là



Ví dụ 3.

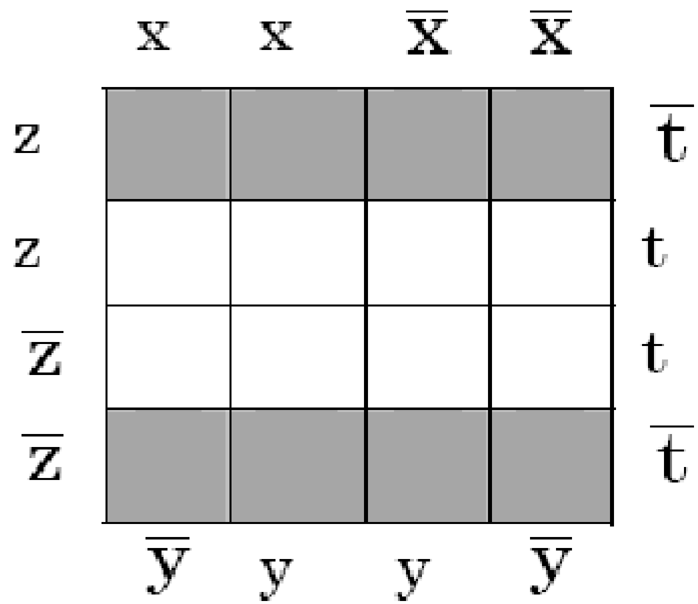
Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\bar{y}\bar{t}$ là



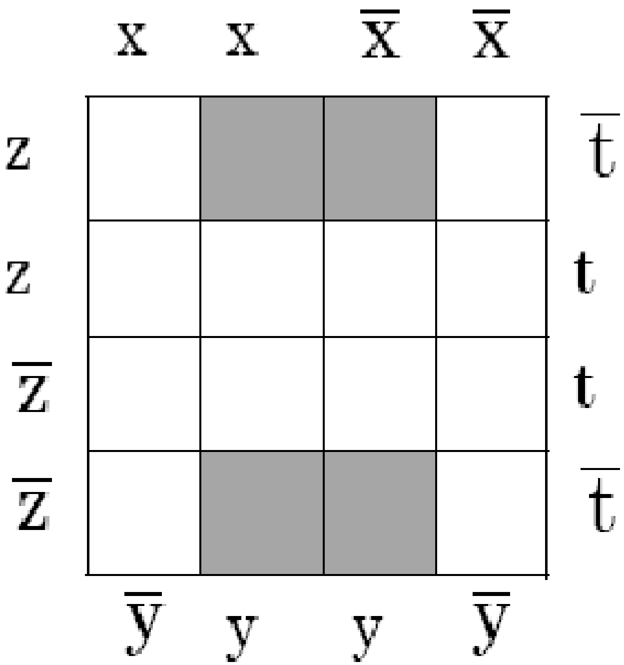
Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Xét các hàm Bool theo 4 biến x, y, z, t.

Ví dụ 4. Biểu đồ karnaugh của đơn thức $\overline{t}$ là



Ví dụ 5. Tế bào sau:



Là biểu đồ Karnaugh của đơn thức nào?

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Tế bào lớn

Cho hàm Bool f. Ta nói T là một tế bào lớn của kar(f) nếu T thoả hai tính chất sau:

a) T là một tế bào và $T \subseteq$ kar(f).

b) Không tồn tại tế bào T' nào thỏa $T' \neq T$ và

$$T \subseteq T' \subseteq \text{kar}(f).$$

Chú ý: Để tìm các tế bào lớn của kar(f), ta có thể sử dụng quy tắc gom nhóm sau:

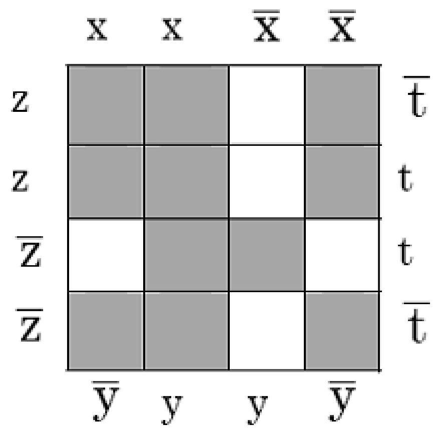
- Vòng gom phải là hình chữ nhật chứa 2^n ô kề nhau.

- Các vòng phải được gom sao cho số ô có thể vào trong vòng là lớn nhất. Và để đạt được điều đó, thường ta phải gom cả những ô đã gom vào trong các vòng khác.

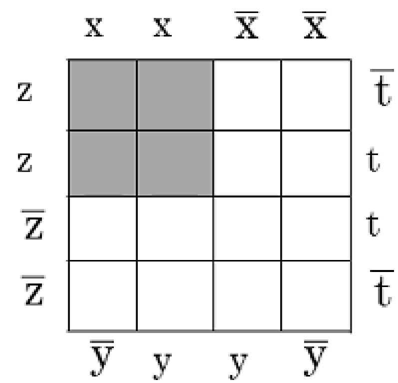
Khi gom 2^n sẽ loại được n biến. Những biến bị loại là những biến khi ta đi vòng qua các ô trong vòng gom mà giá trị của chúng thay đổi.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

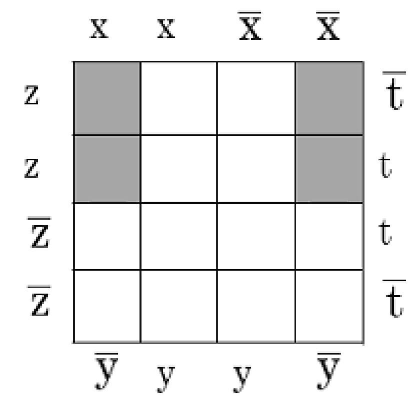
Ví dụ. Xét hàm Bool f theo 4 biến x, y, z, t có biểu đồ karnaugh như sau:



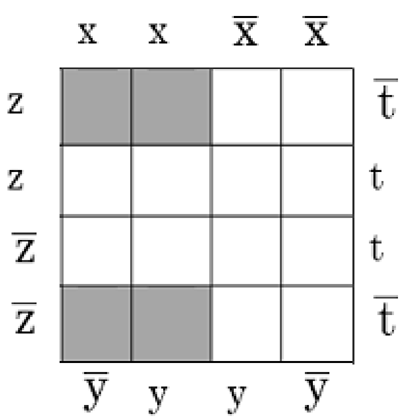
Kar(f) có 6 tế bào lớn như sau:



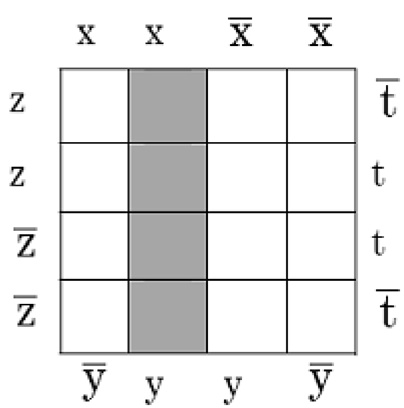
xz



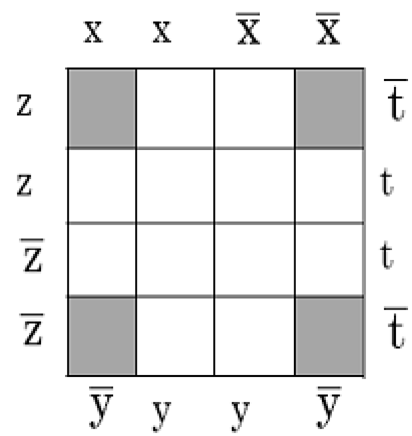
$\bar{y}z$



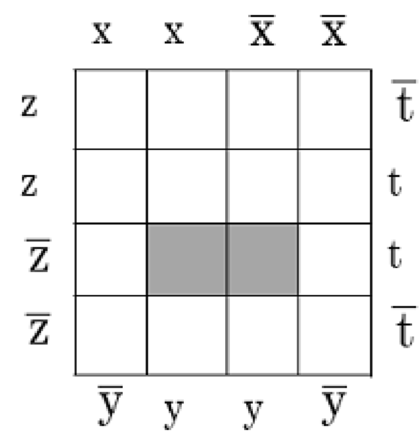
$x\bar{t}$



xy



$\bar{y}\bar{t}$



$y\bar{z}t$

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Phủ tối tiểu của một tập

Cho $S = \{X_1, \ldots, X_n\}$ là họ các tập con của X.

Phủ của tập X: S gọi là phủ của X nếu $X = \cup X_i$.

Phủ tối tiểu của X

Giả sử S là một phủ của X. Khi đó, S gọi là phủ tối tiểu của X nếu với mọi i sao cho $S \backslash X_i$ không là phủ của X.

Ngược lại, S gọi là phủ không tối tiểu của X nếu tồn tại i sao cho $S \backslash X_i$ vẫn là phủ của X.

Ví dụ: X={a, b, c, d}, A={a,b}, B={c,d}, C={a,d}, D={b,c}

{A, B, C, D} phủ không tối tiểu; {A, C, D} phủ không tối tiểu.

{A, B}, {C, D} là các phủ tối tiểu.

{B, D} không phủ.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Thuật toán tìm đa thức tối tiểu

Bước 1: Vẽ biểu đồ karnaugh của f.

Bước 2: Xác định tất cả các tế bào lớn của kar(f).

Bước 3: Xác định các tế bào lớn m nhất thiết phải chọn.

Ta nhất thiết phải chọn tế bào lớn T khi tồn tại một ô của kar(f) mà ô này chỉ nằm trong tế bào lớn T và không nằm trong bất kỳ tế bào lớn nào khác.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Thuật toán tìm đa thức tối tiểu

Bước 4: Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 đã phủ được kar(f) thì ta có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Nếu các tế bào lớn chọn được ở bước 3 chưa phủ được kar(f) thì:

Xét một ô chưa bị phủ, sẽ có ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này, ta chọn một trong các tế bào lớn này. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ tìm được tất cả các phủ gồm các tế bào lớn của kar(f).

Loại bỏ các phủ không tối tiểu, ta tìm được tất cả các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f).

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

Thuật toán tìm đa thức tối tiểu

Bước 5: Xác định các công thức đa thức tối tiểu của f.

Từ các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của kar(f) tìm được ở bước 4 ta xác định được các công thức đa thức tương ứng của f

Loại bỏ các công thức đa thức mà có một công thức đa thức nào đó thực sự đơn giản hơn chúng.

Các công thức đa thức còn lại chính là các công thức đa thức tối tiểu của f.

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

<u>Ví dụ 1</u>: Tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f:

$$f\,(x,y,z,t) = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$$

B1: Bảng Kar(f)

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B2: Xác định tất cả các tế bào lớn của f.

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

B3: Chọn tế bào lớn nhất thiết phải chọn: (Vì chúng chứa các các ô không nằm trong tế bào nào khác – *minh hoạ với ô vàng*)

+ chọn tế bào lớn thứ 1: x

+ chọn tế bào lớn thứ 2: yz

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B4: Xác định họ phủ của các tế bào lớn:

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$	1	1	1	
zt	1	1	1	
$\bar{z}t$	1	1		
$\bar{z}\bar{t}$	1	1		

Ta thấy các tế bào chọn ở bước 3 đã phủ hết bảng. Đây là phủ tối thiểu duy nhất của Kar(f): x ∨ yz

B5: Ứng với phủ tối thiểu duy nhất ở bước 4 ta được duy nhất 1 công thức đa thức tối tiểu của f: f = x ∨ yz

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

<u>Ví dụ 2</u>: Tìm các công thức đa thức tối thiểu của

$$f(x, y, z, t) = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$$

B1: Bảng Kar(f)

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B2: Xác định các tế bào lớn

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

+ Tế bào lớn thứ 1: $\bar{x}\bar{t}$
+ Tbào lớn thứ 2: $\bar{x}\bar{y}z$
+ Tế bào lớn thứ 3: $\bar{y}zt$
+ Tế bào lớn thú 4: xzt
+ Tế bào lớn thứ 5: $\bar{z}\bar{t}$

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B3: Xác định các tế bào lớn nhất thiết phải chọn

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

Từ các ô chỉ nằm trong 1 tế bào lớn *(minh họa các ô màu vàng)*, ta có các tế bào lớn nhất thiết phải chọn là

$$\bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t}$$

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B4: Xác định họ phủ tối thiểu của các tế bào lớn:

	$x\bar{y}$	xy	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$
$z\bar{t}$			1	1
zt	1	1		1
$\bar{z}t$				
$\bar{z}\bar{t}$	1	1	1	1

Các tế bào lớn: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee$ xzt chưa phủ hết Kar(f).
Ta thấy còn **một ô** chưa được phủ và ô đó nằm ở 1 trong 2 tế bào lớn.

Ta có 2 cách chọn:

- Cách chọn thứ 1: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee$ xzt $\vee$ $\bar{x}\bar{y}$z
- Cách chọn thứ 2: $\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee$ xzt $\vee$ $\bar{y}$zt

Phương pháp biểu đồ Karnaugh.

B5: Xác định các công thức đa thức cực tiểu:

Ta thấy 2 công thức *đơn giản như nhau* cho nên các công thức đa thức tối thiểu của hàm f là:

$$f = \bar{z}t \vee \bar{x}\bar{t} \vee \text{xzt} \vee \bar{x}\bar{y}\text{z}$$

$$f = \bar{z}t \vee \bar{x}\bar{t} \vee \text{xzt} \vee \bar{y}\text{zt}$$

Trình bày bài mẫu

Ví dụ: Cho hàm Bool theo 4 biến sau:

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}y\bar{z}t \vee yzt \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{y}zt \vee xyz\bar{t} \vee x\bar{z}\,\bar{t}\ .$$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm f .

b) Hãy tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f .

Giải:

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z		•			$\bar{t}$
z	•	•	•	•	t
$\bar{z}$			•		t
$\bar{z}$	•	•		•	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

a) Dạng nối rời chính tắc của f :

$$f(x,y,z,t) = xyz\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee xyzt \vee \bar{x}yzt$$
$$\vee\, \bar{x}\,\bar{y}zt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee xy\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$$

Trình bày bài mẫu

	x	x	$\overline{x}$	$\overline{x}$	
z		2 • 6			$\overline{t}$
z	• 1	2 • 1	4 • 1	• 1	t
$\overline{z}$			4 •		t
$\overline{z}$	3 • 5	3 • 6		• 5	$\overline{t}$
	$\overline{y}$	y	y	$\overline{y}$	

b) – Các tế bào lớn: $T_1 = zt$, $T_2 = xyz$, $T_3 = x\overline{z}\overline{t}$, $T_4 = \overline{x}yt$, $T_5 = \overline{y}\overline{z}\overline{t}$, $T_6 = xy\overline{t}$

– Sơ đồ phủ cho Kar(f):

$$\begin{tikzcd} & & & & T_2 \\ T_1 \arrow[r] & T_4 \arrow[r] & T_5 \arrow[r, "(3,6)"] \arrow[dr] & T_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & T_6 & T_6 \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Kar}(f) = T_1 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_3 \cup T_2 \ (1)$$
$$= T_1 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_3 \cup T_6 \ (2)$$
$$= T_1 \cup T_4 \cup T_5 \cup T_6 \ (3)$$

(2) phủ không tối tiểu (loại)

(1), (3) phủ tối tiểu (nhận)

$\Rightarrow$ Các công thức đa thức rút gọn của f :

$(1) \Rightarrow f = zt \vee \overline{x}yt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee x\overline{z}\overline{t} \vee xyz \ (1')$

$(3) \Rightarrow f = zt \vee \overline{x}yt \vee \overline{y}\overline{z}\overline{t} \vee xy\overline{t} \ (3')$

$(3')$ đơn giản hơn $(1') \Rightarrow (3')$ là CTĐTTT của f .

IV. MẠCH LOGIC (MẠNG CÁC CỔNG) BIỂU DIỄN HÀM BOOL

a) Các phép toán ở đại số Bool:

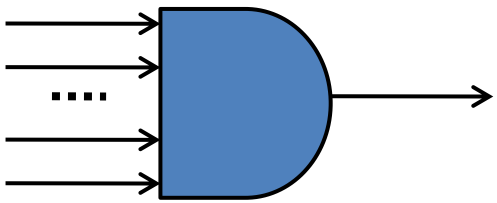
- Phép cộng : thể hiện qua hàm **OR**
- Phép nhân : thể hiện qua hàm **AND**
- Phép phủ định : thể hiện qua hàm **NOT**

➢ Các phép tính trên khi áp dụng cho logic 0 và 1

Hoặc (OR)	Và (AND)	Không (NOT)
$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$	$0 . 0 = 0$ $0 . 1 = 0$ $1 . 0 = 0$ $1 . 1 = 1$	$\overline{\mathbf{0}} = 1$ $\overline{\mathbf{1}} = 0$

b) Các cổng cơ bản

❖ Cổng AND

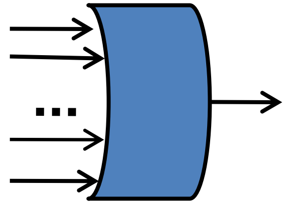
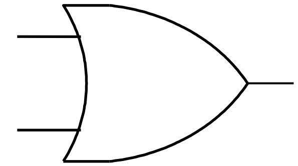


✓ Bảng chân trị :

X	Y	X.Y
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

✓ **Ví dụ**: Cho đầu vào X = 1, Y = 0, khi đó đầu ra của cổng AND là

$$F = X.Y = 0$$

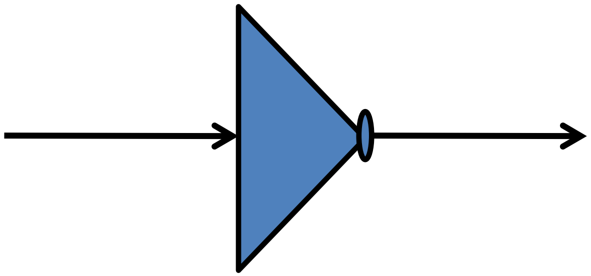
❖ Cổng OR  hoặc 

✓ Bảng chân trị

X	Y	X + Y
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

✓ **Ví dụ**: Cho đầu vào X = 0, Y = 1, khi đó đầu ra của cổng OR là $F = X+Y = 1$

❖ Cổng NOT



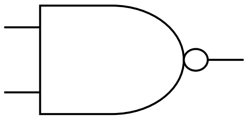
✓ Bảng chân trị

X	¬X
1	0
0	1

✓ **Ví dụ**: Cho đầu vào A = 0, khi đó đầu ra của cổng NOT là B = $\overline{A}$ =1

➢ Bù của giá trị đầu vào

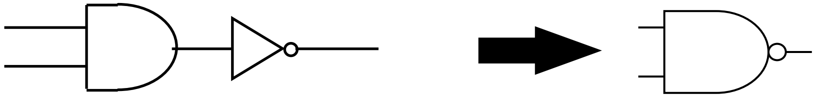
❖ NAND



Là cổng bù của AND.

Có đầu ra là ngược lại với cổng AND.

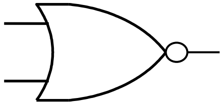
$$X \ nand \ Y = not\,(X \ and \ Y) = \overline{XY}$$



x	y	x nand y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

➢ Bù của giá trị đầu vào

❖ NOR



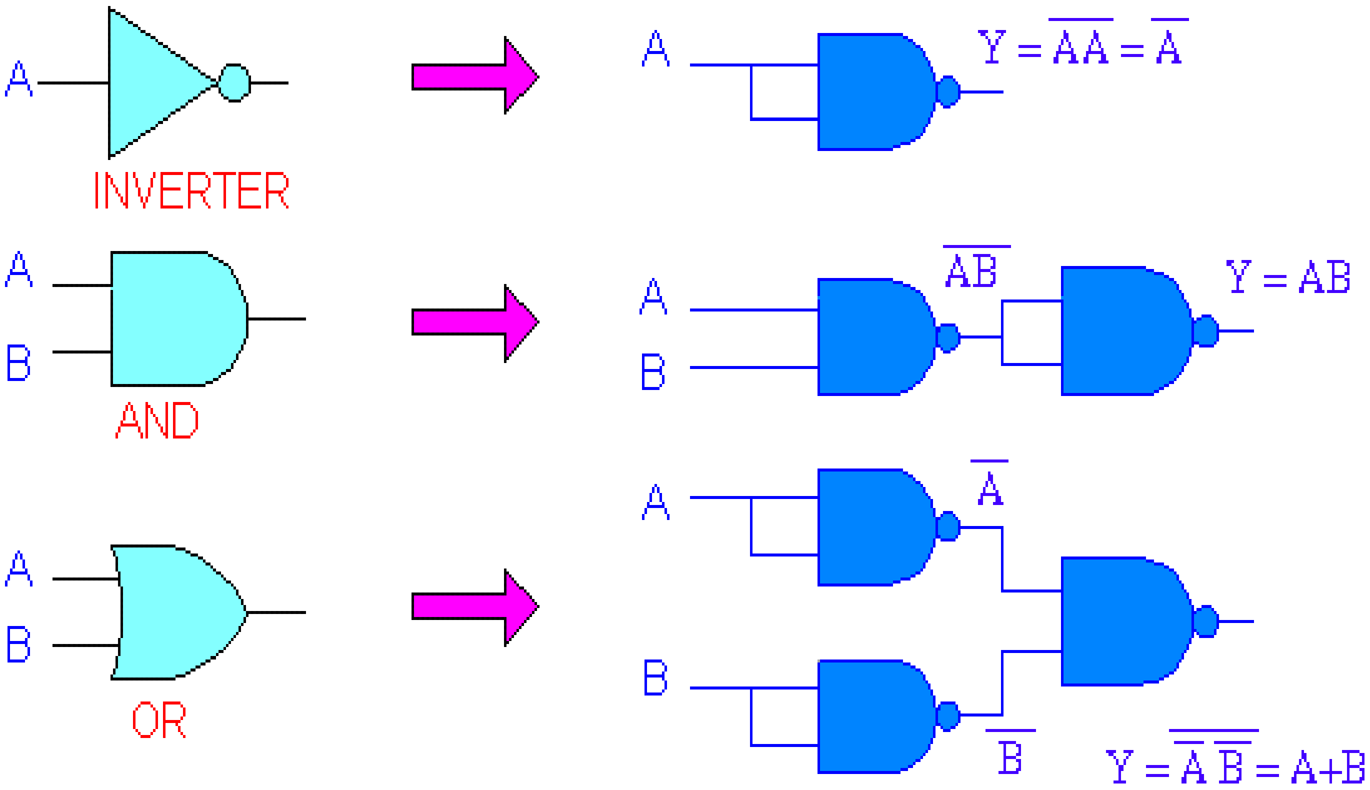
Là cổng bù của OR.

Có đầu ra ngược với cổng OR.

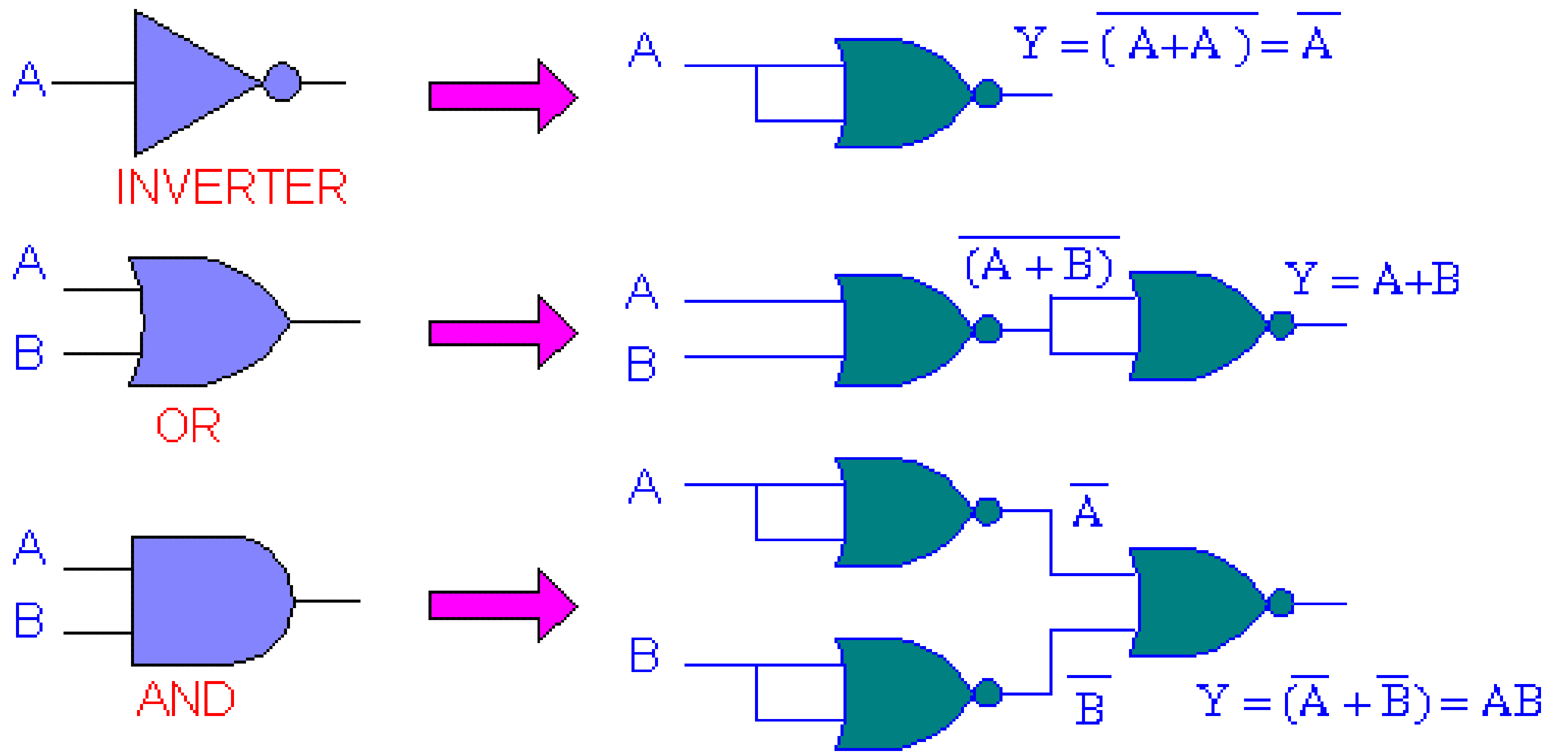
X nor Y = not (X or Y) = $\overline{X+Y}$

x	y	x nor y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

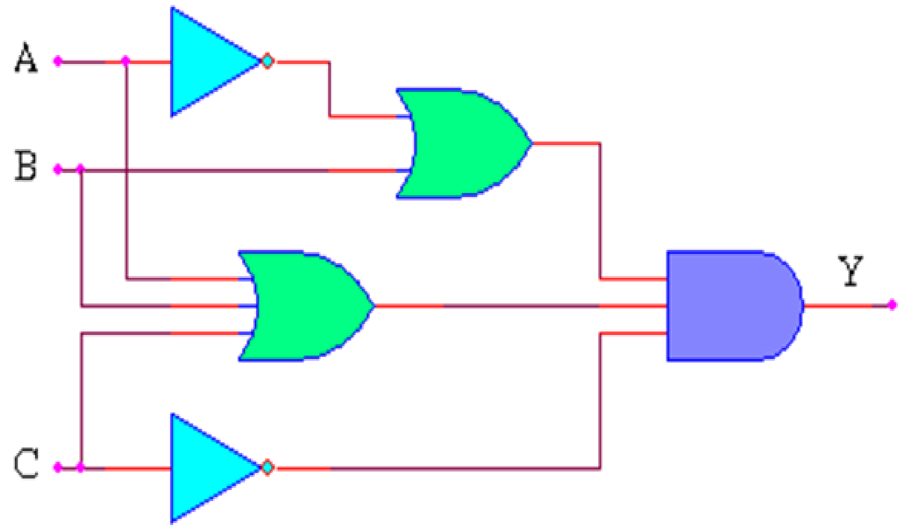
❑ Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NAND



❑ Sự chuyển đổi giữa các cổng cơ bản sang cổng NOR

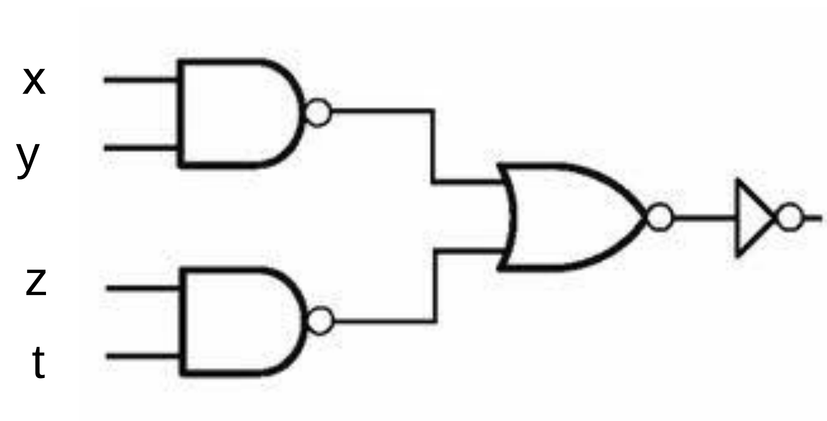


➢ **VD : Viết lại biểu thức logic sau từ mạch logic:**



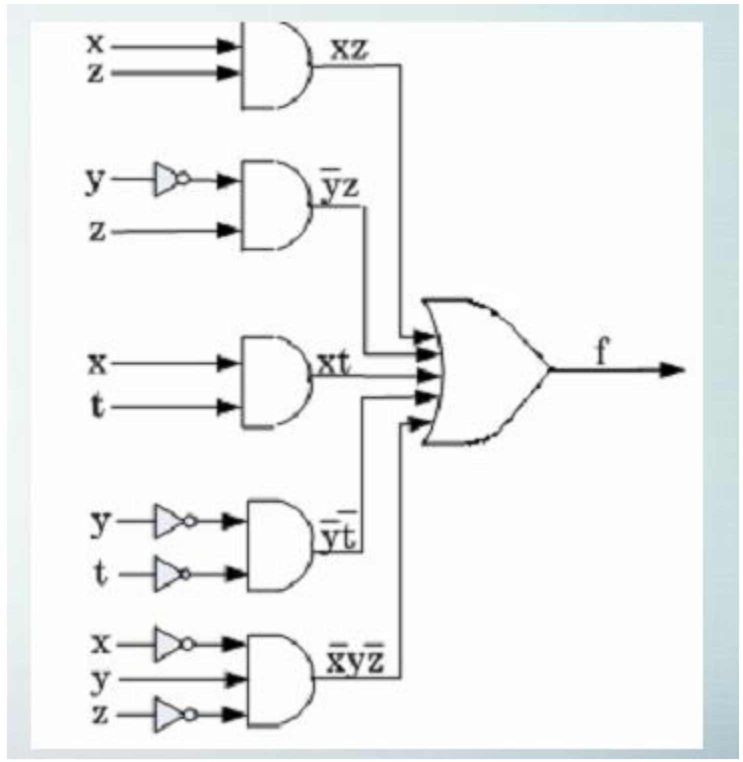
✓ **Kết quả:** $\mathbf{Y = (\overline{A} + B)(A + B + C)\overline{C}}$

➢ VD : Viết lại biểu thức logic sau từ mạch logic:



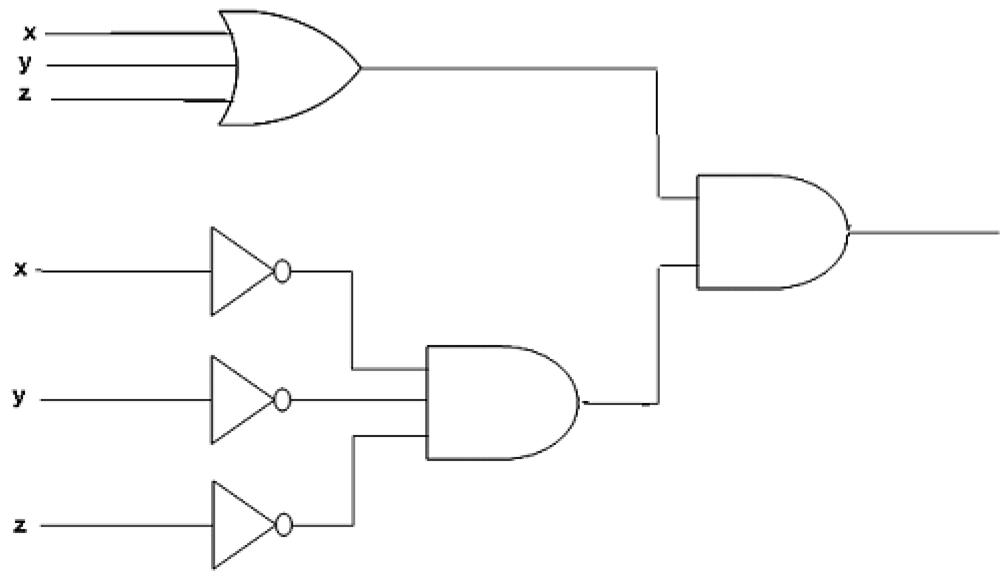
$$F = \overline{\overline{\overline{xy} + \overline{zt}}}$$

➢ VD : Viết lại biểu thức logic sau từ mạch logic:



$$f = xz \vee \bar{y}z \vee xt \vee \overline{y}\overline{t} \vee \bar{x}y\bar{z}$$

➢ **VD : Viết lại biểu thức logic sau từ mạch logic:**



$$f(x,y,z) = (x \vee y \vee z)\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

c) Thiết kế mạch logic tổng hợp :

- Gồm 5 bước :

- Bước 1 : Đặt các biến cho đầu vào và các hàm của đầu ra tương ứng.
- Bước 2 : Thiết lập bảng chân trị cho đầu ra và đầu vào .
- Bước 3 : Viết biểu thức logic liên hệ giữa đầu ra và các đầu vào.
- Bước 4 : Tìm công thức đa thức tối tiểu của biểu thức logic vừa tìm được.
- Bước 5 : Từ biểu thức logic tối tiể thuyết kế mạch logic tương ứng.

Ví dụ: Một ngôi nhà có 3 công tắc, người chủ nhà muốn bóng đèn sáng khi cả 3 công tắc đều hở, hoặc khi công tắc 1 và 2 đóng còn công tắc thứ 3 hở. Hãy thiết kế mạch logic thực hiện sao cho **số cổng cơ bản sử dụng là ít nhất.**

Giải

❖ Bước 1 :

- Gọi 3 công tắc lần lượt là A, B, C.
- Bóng đèn là Y.
- Trạng thái công tắc đóng là (logic) 1, hở là 0.
- Trạng thái đèn sáng là logic 1 và tắt là 0.

❖ Bước 2 :

- Từ yêu cầu bài toán ta có bảng chân trị :

Ngõ vào			Ngõ ra
A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

(Sáng) ⇒ $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(Sáng) ⇒ $AB\bar{C}$

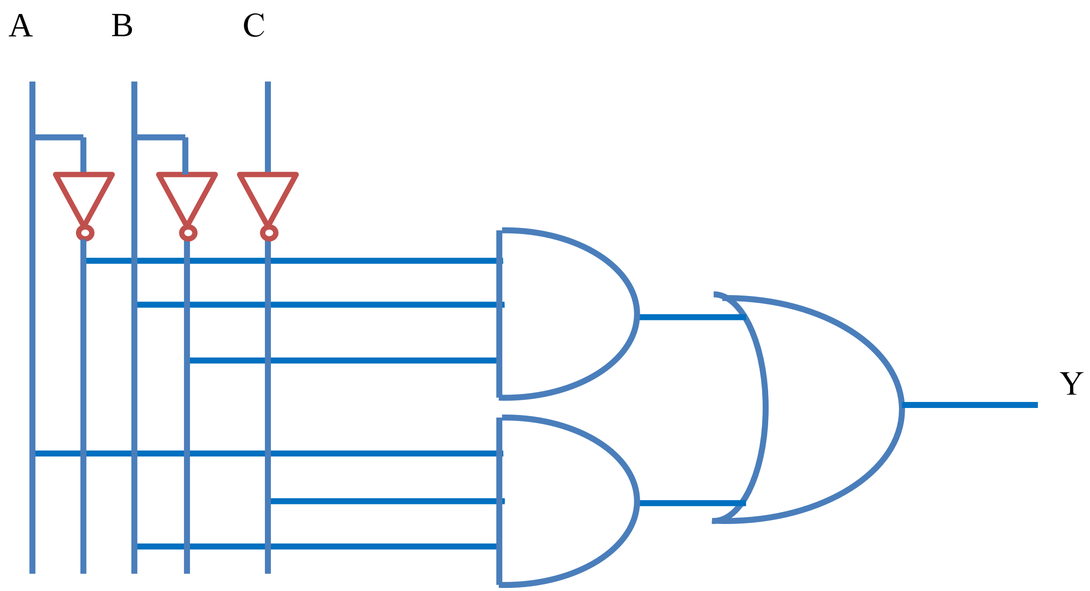
❖ Bước 3 : Từ bảng chân trị ta có biểu thức ngõ ra :

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

- ❖ Bước 4 : CTĐTTT của biểu thức logic:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$

- ❖ Bước 5 : Mạch logic tương ứng của CTĐTTT :



BÀI TẬP

Câu 1. Cho hàm Bool theo 4 biến sau:

$$f(x,y,z,t) = xz\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee yt \vee \bar{x}\,\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t}\,.$$

a) Hãy tìm dạng nối rời chính tắc của hàm f.

b) Hãy tìm các công thức đa thức tối tiểu của hàm f.

c) Hãy vẽ sơ đồ mạch cho một công thức đa thức tối tiểu của hàm f vừa tìm được.

Làm các bài tập sau với các yêu cầu như câu 1

Câu 2. Cho hàm Bool $f: B^4 \to B$, với

$$f(x,y,z,t) = x\bar{y}z \vee xz\bar{t} \vee yzt \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \vee y\bar{z}t \vee \bar{y}\bar{t}$$

Câu 3. Cho hàm Boole: $f(x,y,z,t) = yzt \vee xy\bar{t} \vee x\bar{z}t \vee \bar{y}\bar{z}(\bar{x}t \vee x\bar{t}) \vee \bar{x}\,\bar{y}zt$.

Câu 4: Cho hàm Boole $f(x,y,z,t)$, biết

$$f^{-1}(0) = \{0011, 0110, 1100, 1110, 1001\}.$$