

Các cột điểm:

- + Cột điểm quá trình: 20%
- + Cột điểm giữa kỳ: 20%, thi tập trung, không sử dụng tài liệu, thời gian: 60 phút, tự luận.
- + Cột điểm cuối kỳ: 60%, thi tập trung, không sử dụng tài liệu, thời gian: 90 phút, tự luận.

Tài liệu tham khảo:

1/ Giáo trình Toán Rời Rạc

Tác giả: Đỗ Văn Nhơn

NXB: ĐHQG-HCM

2/ Giáo trình Toán Rời Rạc

Tác giả: Nguyễn Hữu Anh

NXB: ĐHQG-HCM

3/ Giáo trình Lý thuyết đồ thị

(dành cho sinh viên các trường Đại học và Cao đẳng)

Tác giả: Nguyễn Cam – Chu Đức Khánh

NXB: ĐHQG-HCM

Email: tuanlh@uit.edu.vn

GVC. ThS. Lê Hoàng Tuấn

CHƯƠNG 1: CƠ SỞ LOGIC

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Trong Toán học ta chỉ quan tâm đến những **khẳng định** có giá trị chân lý xác định, nghĩa là khẳng định đúng hoặc sai, nhưng không thể vừa đúng, vừa sai. Ta gọi các khẳng định này là những **mệnh đề (clause)**.

Ta gọi các mệnh đề đúng là mệnh đề có chân trị đúng, và kí hiệu là T hay 1.

Ta gọi các mệnh đề sai là mệnh đề có chân trị sai, và kí hiệu là F hay 0.

Ta thường kí hiệu mệnh đề là A, B, C, D, E, ..., p, q, r, s, t, u, ...

Ví dụ 1: Ta có các khẳng định sau là mệnh đề:

a/ $1 + 1 = 5 \rightarrow 0$

b/ $(2 < 3)$ hay (4 là số chính phương) $\rightarrow 1$

c/ (1 là số nguyên tố) hay (0 là số chẵn) $\rightarrow 1$

d/ (0 là số chính phương) và (1 là lũy thừa của 2) $\rightarrow 1$

e/ (117 là số nguyên tố) hoặc (3 là bội số của 2) $\rightarrow 0$

f/ $(10:2)$ hoặc (3 là ước số của 12) $\rightarrow 0$

- g/ Nếu $(1 = 2)$ thì $(10 < 9) \rightarrow 1$
- h/ Nếu (2 là số lẻ) thì $(5 \neq 3) \rightarrow 1$
- i/ Nếu $(0 \text{ là bội số của } 3)$ thì $(8 < 2) \rightarrow 0$
- j/ (9 là số chẵn) tương đương $(5 \text{ là số chính phương}) \rightarrow 1$
- k/ $(4:3)$ tương đương $(2 \text{ là số nguyên tố}) \rightarrow 0$
- l/ $(2+3 \geq 7)$ tương đương $(1 = -5) \rightarrow 1$

Ngoài ra, ta có các phát biểu sau không phải là mệnh đề, do đây là các câu phát biểu dưới dạng câu hỏi, lời đề nghị, yêu cầu, mệnh lệnh, lời nhận xét, phán đoán, hay là câu cảm thán, câu tán thán,... truyền đạt cảm xúc chủ quan của người nói, vì chúng không có chân trị xác định.

Ví dụ 2:

- a/ Hãy chép bài đi nhé!
- b/ Hãy mở giúp tôi cánh cửa với!
- c/ Bài toán ấy khó quá!
- d/ Anh ta thông minh thật!
- e/ Cô bé ấy xinh thế!
- f/ Chúng ta đi café ở đâu?
- g/ Chúng ta đi picnic ở đâu?

Bên cạnh đó, các câu phát biểu dưới dạng khẳng định chứa biến số, thì cũng không phải là mệnh đề. Tuy nhiên, khi thay biến số bằng những giá trị cụ thể (nào đó) thì ta nhận được các mệnh đề đúng hoặc sai. Ta gọi dạng phát biểu này là **vị từ** (ta sẽ khảo sát ở phần cuối chương).

Ví dụ 3:

- a/ Ta có $p(n) = "n \text{ là số nguyên tố}"$ là vị từ theo 1 biến $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $p(1) = 0$ là mệnh đề

$p(5) = 1$ là mệnh đề

$p(19) = 1$ là mệnh đề

- b/ Ta có $p(x, y) = "x: y"$ hoặc $"x \leq 2y"$ là vị từ theo 2 biến $x, y \in \mathbb{R}$

Ta thấy: $p(2, 5) = 1$; $p(3; 1) = 1$; $p(0; 1) = 0$

- c/ Ta có $p(x, y, z) = "x \neq 2y + z"$ tương đương $["x < y"$ và $"x: z"]$ là vị từ theo 3 biến $x, y, z \in \mathbb{R}$

Ta thấy: $p(2, 3, -1) = 1$; $p(5, -4, -2) = 0$; $p(7, 3, 1) = 1$.

* Phân loại mệnh đề:

Mệnh đề được chia thành 2 loại chính:

+ **Mệnh đề phức hợp**: là mệnh đề được hình thành từ các mệnh đề khác, thông qua các liên từ liên kết: “và”, “hay”, “hoặc”, “nếu...thì...”, “tương đương”, hay là trạng từ “không”, và ta thường ký hiệu là A, B, C, D, E,...

Ví dụ: “Nếu trời nắng thì tôi đi uống café” là một mệnh đề phức hợp, được hình thành từ 2 mệnh đề “trời nắng”, “tôi đi uống café” thông qua cặp liên từ “nếu...thì...”.

Ví dụ khác: “2 không là số lẻ” là một mệnh đề phức hợp, được hình thành từ mệnh đề “2 là số lẻ”, kết hợp với trạng từ “không”.

+ **Mệnh đề sơ cấp (mệnh đề nguyên thủy) (original clause/ elementary clause)**: là mệnh đề không được hình thành từ các mệnh đề khác thông qua liên từ liên kết, và cũng không có trạng từ “không”. Nói cách khác, đây là những mệnh đề đơn giản nhất, nhỏ nhất, mà ta không thể phân tích thành các mệnh đề nhỏ hơn được nữa. Ta thường kí hiệu là $p, q, r, s, t, u, v, \dots$

Ví dụ: “ $10 < 8$ ”; “3 là bội số của 1”,...là các mệnh đề sơ cấp.

2/ **CÁC PHÉP TÍNH MỆNH ĐỀ:**

Là các phép toán hợp nối mệnh đề, nhằm giúp cho ta nghiên cứu chân trị của các mệnh đề phức hợp, dựa trên chân trị của các mệnh đề đơn giản hơn, thông qua các liên từ liên kết cùng với trạng từ “không”.

a/ **Phép phủ định:**

Mệnh đề phủ định của mệnh đề p được kí hiệu là $\neg p$ hay \bar{p} (đọc là “not p ” hay “không p ”).

Là mệnh đề có chân trị ngược với chân trị của p .

Ta có bảng chân trị:

p	$\neg p$
0	1
1	0

b/ **Phép nối liền (phép giao)(phép hội):**

Mệnh đề nối liền của 2 mệnh đề p, q được kí hiệu là $p \wedge q$ (đọc là “ p và q ”).

Là mệnh đề có chân trị đúng khi cả p lẫn q đều đúng.

Ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(Ta cần nhớ $0 \wedge 0 \Leftrightarrow 0$)

c/ **Phép nối rời (phép tuyển):**

Mệnh đề nối rời của 2 mệnh đề p, q được kí hiệu là $p \vee q$ (đọc là “ p hay q ”).

Là mệnh đề có chân trị sai khi cả p lẫn q đều sai.

Ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(Ta cần nhớ $1 \vee 0 \Leftrightarrow 1$)

Tuy nhiên, theo ngôn ngữ hàng ngày, ta có thể hiểu “ p hay q ” theo nghĩa loại trừ nhau, nghĩa là chỉ chấp nhận p đúng hay q đúng, nhưng không thể cả 2 cùng đúng, thì khi đó ta dùng phép tuyển chặt.

d/ Phép nối rời chặt (phép tuyển chặt):

Mệnh đề nối rời chặt của 2 mệnh đề p, q được kí hiệu là $p \vee\!\!\!\wedge q$ (đọc là “ p hoặc q ”).

Là mệnh đề chỉ đúng khi chân trị của p và q là khác nhau.

Ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \vee\!\!\!\wedge q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

e/ Phép kéo theo:

Mệnh đề “Nếu p thì q ” được kí hiệu là $p \rightarrow q$ (đọc là “ p kéo theo q ”).

Để khảo sát chân trị của mệnh đề này, ta xét ví dụ sau:

“Nếu trời không mưa thì tôi đi xem phim”

Sau khi tác giả của phát biểu này nêu ra thì có các trường hợp sau xảy ra:

TH1: Trời mưa và tác giả (của phát biểu) ở nhà (không đi xem phim). $\rightarrow 1$

TH2: Trời mưa và tác giả đi xem phim. $\rightarrow 1$

TH3: Trời không mưa và tác giả ở nhà. $\rightarrow 0$

TH4: Trời không mưa và tác giả đi xem phim. $\rightarrow 1$

Ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

(Ta cần nhớ $1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$; $0 \rightarrow \square \Leftrightarrow 1$)

f/ Phép kéo theo hai chiều:

Mệnh đề “Nếu p thì q ” và “Nếu q thì p ” được kí hiệu là $p \leftrightarrow q$ (đọc là “ p tương đương q ”).

Là mệnh đề có chân trị đúng khi chân trị của p , q là giống nhau.

Ta có bảng chân trị sau:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Lưu ý: ta có độ ưu tiên của các phép toán:

Ưu tiên 1: \neg

Ưu tiên 2: $\wedge, \vee, \underline{\vee}$

Ưu tiên 3: $\rightarrow, \leftrightarrow$

Ngoài ra, ta còn kết hợp với các dấu ngoặc $()$, $[]$, để xác định thứ tự ưu tiên của các phép toán logic.

3/ **BIỂU THỨC LOGIC**

Biểu thức logic là một tên gọi khác của mệnh đề phức hợp. Là biểu thức được hình thành từ:

- + Các hằng mệnh đề: 1, 0
- + Các biến mệnh đề: $p, q, r, s, t, u, v, \dots$
- + Các phép tính mệnh đề: $\neg, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \rightarrow, \leftrightarrow$, cùng với các dấu ngoặc $()$, $[]$, để xác định

thứ tự ưu tiên của các phép toán logic.

Ta thường ký hiệu biểu thức logic là A, B, C, D, E, \dots

Ta có thể lập bảng chân trị để kiểm soát chân trị cho biểu thức logic.

Ví dụ mẫu: Lập bảng chân trị cho biểu thức sau:

$$A = \underbrace{[(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg r \leftrightarrow p)]}_{B \text{ và } C} \vee \underbrace{[(\neg p \rightarrow 0) \leftrightarrow r]}_{E \text{ và } F}$$

Giải: Ta có bảng chân trị:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	B	C	D	E	F	$A = D \vee F$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Bài tập tương tự:

Lập bảng chân trị cho các biểu thức sau

a/ $B = [(p \leftrightarrow \neg q) \vee (r \rightarrow \neg p)] \wedge (1 \leftrightarrow \neg r) \rightarrow [(r \wedge \neg p) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg r)]$

b/

$$C = [(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow r)] \rightarrow [(\neg q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)] \wedge [(\neg p \leftrightarrow 0) \rightarrow (1 \rightarrow \neg r)] \vee [(p \wedge q) \rightarrow \neg r]$$

c/ $D = [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p)] \wedge [(\neg r \leftrightarrow 1) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow q]$

d/ $E = [(p \leftrightarrow \neg r) \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow 0)] \leftrightarrow [(\neg r \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow p)] \rightarrow (r \leftrightarrow \neg p)$

e/ $F = [(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \vee q)] \vee [(\neg p \wedge r) \leftrightarrow (r \leftrightarrow q)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r)] \rightarrow [(r \wedge \neg q) \leftrightarrow p]$

f/ $G = [(\neg r \rightarrow p) \rightarrow (\neg q \leftrightarrow 0)] \wedge [(\neg p \leftrightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow p)] \vee [(p \wedge \neg r) \leftrightarrow (\neg q \vee \neg p)] \wedge (p \rightarrow q)$

g/

$$H = [(\neg q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow 1)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg r) \vee (p \rightarrow q)] \vee [(\neg r \rightarrow \neg p) \leftrightarrow q]$$

* Sự tương đương logic

Hai biểu thức logic E và F được gọi là tương đương nhau, và kí hiệu là $E \Leftrightarrow F$, nếu chúng có bảng chân trị giống nhau.

Ví dụ mẫu: Cho $\begin{cases} E = p \rightarrow q \\ F = \neg p \vee q \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$

Gợi ý: Ta có bảng chân trị của E là:

p	q	$E = p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Ta có bảng chân trị của F là:

p	q	$\neg p$	$F = \neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Ta có bảng chân trị của E và bảng chân trị của F là như nhau nên ta kết luận $E \Leftrightarrow F$ (đpcm)

Ví dụ 1: Cho $\begin{cases} E = p \rightarrow q \\ F = \neg q \rightarrow \neg p \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ 2: Cho $\begin{cases} E = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ F = p \wedge (q \vee r) \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ 3: Cho $\begin{cases} E = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ F = p \vee (q \wedge r) \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ 4: Cho $\begin{cases} E = p \wedge (p \vee q) \\ F = p \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$.

Ví dụ 5: Cho $\begin{cases} E = \neg(p \vee q) \\ F = \neg p \wedge \neg q \end{cases}$. Chứng minh rằng $E \Leftrightarrow F$.

* Các luật logic

Gọi p, q, r là các biến mệnh đề;

1 là hằng đúng;

0 là hằng sai.

Ta có các luật logic sau:

i/ Luật phủ định của phủ định:

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p \text{ hay } \neg(\neg \square) \Leftrightarrow \square$$

ii/ Luật DeMorgan: *

$$\begin{cases} \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{cases}$$

iii/ Luật giao hoán:

$$\begin{cases} p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \end{cases}$$

iv/ Luật kết hợp:

$$\begin{cases} p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r \end{cases}$$

v/ Luật phân bố: *

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

vi/ Luật lũy đẳng:

$$\begin{cases} p \wedge p \Leftrightarrow p \\ p \vee p \Leftrightarrow p \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \square \wedge \square \Leftrightarrow \square \\ \square \vee \square \Leftrightarrow \square \end{cases}$$

vii/ Luật trung hòa:

$$\begin{cases} p \wedge 1 \Leftrightarrow p \\ p \vee 0 \Leftrightarrow p \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \square \wedge 1 \Leftrightarrow \square \\ \square \vee 0 \Leftrightarrow \square \end{cases}$$

viii/ Luật thống trị:

$$\begin{cases} p \vee 1 \Leftrightarrow 1 \\ p \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \square \vee 1 \Leftrightarrow 1 \\ \square \wedge 0 \Leftrightarrow 0 \end{cases}$$

ix/ Luật về phần tử bù:

$$\begin{cases} p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0 \\ p \vee \neg p \Leftrightarrow 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} \square \wedge \neg \square \Leftrightarrow 0 \\ \square \vee \neg \square \Leftrightarrow 1 \end{cases}$$

x/ Luật hấp thụ:

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \\ p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \end{cases}$$

xi/ Luật kéo theo: *

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

xii/ Luật tương đương:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \end{aligned}$$

xiii/ Luật phản đảo:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$
