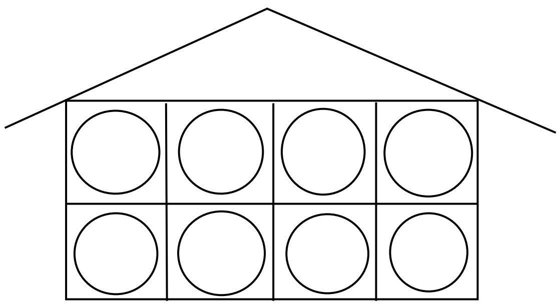
Buổi 05 – Ngày 18-03-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.P27

CHƯƠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

*** *Nguyên lý chuồng bồ câu (nguyên lý Dirichlet)*:**

Giả sử ta cần phân bổ n chim bồ câu vào một chuồng có k cửa (pigeon hole), với $k < n$, thì ở một cửa nào đó luôn có ít nhất từ 2 chim bồ câu trở lên.



Hay ở dạng tổng quát, ta có:

Giả sử cần xếp n phần tử vào k hộp, với $k < n$, thì ở một hộp nào đó luôn chứa ít nhất là $\left[\frac{n}{k}\right]$ phần tử.

Trong đó $\left[\frac{n}{k}\right]$ là phép toán lấy phần nguyên của số thực $\left(\frac{n}{k}\right)$, là số nguyên nhỏ nhất $\geq \frac{n}{k}$

Ví dụ: [1,25] = 2; [3,0001] = 4; [10] = 10; $\left[\frac{118}{3}\right] = [39,33] = 40$

Ví dụ 1: Trong một nhóm 13 người thì có ít nhất 2 người giống tháng sinh với nhau. Ở đây 12 tháng khác nhau trong 1 năm chính là số cửa của chuồng bồ câu, và 13 người với 13 tháng sinh tương ứng chính là 13 chim bồ câu.

Ví dụ 2: Trong một nhóm 367 người thì có ít nhất 2 người có cùng ngày sinh nhật (cùng ngày, cùng tháng sinh). Ở đây, 366 ngày khác nhau trong 1 năm (kể cả ngày 29 tháng 02) chính là số cửa của chuồng bồ câu. Còn 367 người với 367 ngày sinh tương ứng chính là số chim bồ câu.

Ví dụ 3: Một nhóm cần có ít nhất bao nhiêu người sao cho:

a/ Có ít nhất 18 người có cùng tháng sinh với nhau.

Giải:

Gọi n là số người cần tìm.

Theo nguyên lý chuồng bồ câu ta có:

$\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{n}{12}\right] = 18$, với $k = 12 =$ số tháng khác nhau trong 1 năm

$\Rightarrow 17 < \frac{n}{12} \leq 18 \Rightarrow 204 < n \leq 216$ mà n là số nguyên

$\Rightarrow n \geq 205$. Đáp số cần ít nhất là 205 người.

b/ Có ít nhất 23 người có cùng ngày sinh nhật (cùng ngày, cùng tháng).

Ví dụ 4: Trong giờ học môn Tiếng Anh, giáo viên sử dụng thang điểm là các số nguyên có giá trị từ 0 đến 100. Hỏi lớp học này cần có ít nhất bao nhiêu SV để có tối thiểu 12 sinh viên bằng điểm nhau.

Ví dụ 5: Trong giờ học Toán, GV quy ước điểm số là các số thực được làm tròn đến mức 0,5; có giá trị từ 0 đến 10; ví dụ: 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5….Như vậy lớp học Toán này cần có ít nhất bao nhiêu SV để có ít nhất là 22 bạn bằng điểm nhau.

Ví dụ 6: Một công ty ABC giám đốc quy ước các mức đánh giá, xếp loại nhân viên cuối năm là: "Hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ", "Có đóng góp tích cực cho công ty", "Hoàn thành nhiệm vụ", "Không hoàn thành nhiệm vụ", "Gây ảnh hưởng tiêu cực đến công ty". Hỏi công ty này cần có ít nhất bao nhiêu **người** để có ít nhất 35 nhân viên có cùng mức đánh giá xếp loại cuối năm?

Ví dụ 7: Một cửa hàng tạp hóa cần dùng các xe mô tô-gắn máy để vận chuyển hàng hóa đến khách hàng. Biết rằng mỗi xe mô tô-gắn máy chở tối đa 1 lần là 4 mặt hàng khác nhau để giao cho khách hàng. Như vậy để giao 351 mặt hàng khác nhau cho khách hàng thì cửa hàng này cần dùng ít nhất bao nhiêu xe mô tô-gắn máy một lần.

Ví dụ 8: Cần tung một cục xí ngầu (xúc xắc) ít nhất bao nhiêu lần để cho một mặt nào đó xuất hiện ít nhất 5 lần?

Ví dụ 9: Trong giờ học thực hành môn Vật lý, Giáo viên quy ước các thang điểm là: A+, A, A-, B+, B, B-, C+, C, C-, D+, D, D-. Như vậy lớp học này cần có ít nhất bao nhiêu sinh viên để có ít nhất 15 sinh viên bằng thang điểm nhau?

Ví dụ 10: Cho 52 SV làm 1 bài kiểm tra. Biết rằng có 4 sinh viên mắc từ 6 lỗi trở lên; có 1 sinh viên không mắc lỗi nào; có 2 sinh viên mắc một lỗi trong bài kiểm tra. Hỏi có ít nhất bao nhiêu sinh viên mắc cùng số lỗi, với số lỗi từ 2 đến 5 lỗi?

CHƯƠNG 3: QUAN HỆ (RELATIONSHIP)

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM:

Cho tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ và tập hợp $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$

Một quan hệ 2 ngôi R giữa tập hợp *X* với tập hợp *Y* là một tập hợp

R = $\{(a,b) \mid a \in X, b \in Y\}$

Ta gọi đây là dạng liệt kê của quan hệ R.

Nếu $(a,b) \in$ R thì ta nói *a* có quan hệ R với *b* và kí hiệu là *a*R*b*.

Nếu $(a,b) \notin$ R thì ta nói *a* không có quan hệ R với *b* và kí hiệu là $a\overline{\mathbf{R}}b$

Khi $X \equiv Y$ thì ta nói R là quan hệ 2 ngôi trên *X*.

Ví dụ 1:

Cho tập hợp $X = \{-2, 0, 1, 2, 3, 5\}$ và $Y = \{-1, 1, 4, 6\}$

và quan hệ 2 ngôi R như sau

$xRy \Leftrightarrow (x + y)$ là số nguyên tố, với $x \in X, y \in Y$.

Ta có dạng liệt kê của quan hệ R như sau:

R = {(-2,4), (1,1), (1,4), (1,6), (2,1), (3,-1), (3,4), (5,6)}

Ví dụ 2: Cho tập hợp $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ 2 ngôi trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow (x + 2y) \vdots 3$, với $x, y \in X$

Ta có dạng liệt kê của quan hệ R như sau:

R = {(-2,-2), (-2,1), (-2,4), (-1,-1), (-1,2), (0,0), (0,3), (1,-2), (1,1), (1,4), (2,-1), (2,2), (3,0), (3,3), (4,-2), (4,1), (4,4)}

Ngoài ra, ta có dạng ma trận biểu diễn cho quan hệ R như sau:

Xét tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ và tập hợp $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$

và một quan hệ 2 ngôi R giữa tập hợp *X* với tập hợp *Y*.

Khi đó ma trận biểu diễn cho quan hệ R giữa tập hợp *X* với tập hợp *Y* là ma trận

$$M_R = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, \text{ với } a_{ij} = \begin{cases} 1 & khi \quad x_i \mathbf{R} y_j \\ 0 & khi \quad x_i \overline{\mathbf{R}} y_j \end{cases}$$

Trong đó: $x_i \in X; y_j \in Y$

Ví dụ 3: Lập ma trận biểu diễn cho quan hệ R trong ví dụ 1.

Ví dụ 4: Lập ma trận biểu diễn cho quan hệ R trong ví dụ 2.

Giải:

Ví dụ 3: Ta có ma trận biểu diễn cho R như sau:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ví dụ 4:

Ta có ma trận biểu diễn cho R như sau:

$$M_R = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2/ CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ R

Cho R là một quan hệ 2 ngôi trên *X*.

Ta xét các tính chất của R như sau:

a/ Tính phản xạ (reflexive):

Ta nói R là quan hệ có tính phản xạ, nếu và chỉ nếu $x\mathbf{R}x, \quad \forall x \in X$

Ngược lại, nếu tồn tại $x_0 \in X$ mà $x_0\overline{\mathbf{R}}x_0$ thì ta nói R không có tính phản xạ.

Ví dụ 5:

Với tập hợp $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ 2 ngôi trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow (x + 2y) \vdots 3$, với $x, y \in X$

Ta có $x\mathbf{R}x \Leftrightarrow (x + 2x) \vdots 3 \Leftrightarrow 3x \vdots 3$ luôn đúng với mọi $x \in X$

Nên ta nói R có tính phản xạ.

Ví dụ 6:

Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ 2 ngôi trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow (x + y) \vdots 2$ với $x, y \in X$.

Ta có $x\mathbf{R}x \Leftrightarrow (x + x) \vdots 2 \Leftrightarrow 2x \vdots 2$ luôn đúng với mọi $x \in X$

Nên ta nói R có tính phản xạ.

Ví dụ 7:

Sử dụng *X* của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow |x - y| \le 4$ với $x, y \in X$.

Ta có $x\mathbf{R}x \Leftrightarrow |x - x| \le 4 \Leftrightarrow 0 \le 4$ luôn đúng với mọi $x \in X$

Nên ta nói R có tính phản xạ.

Ví dụ 8:

Sử dụng *X* của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow 2^x > 2^y$ với $x, y \in X$.

Ta chọn $x_0 = 1 \in X$ thì $x_0\mathbf{R}x_0 \Leftrightarrow 1R1 \Leftrightarrow 2^1 > 2^1 \Leftrightarrow 2 > 2$ vô lí.

Nên suy ra $x_0\overline{\mathbf{R}}x_0$ nên R không có tính phản xạ.

Ví dụ 9:

Sử dụng X của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \neq y$ với $x, y \in X$.

Ta chọn $x_0 = 0 \in X$ thì $x_0\mathbf{R}x_0 \Leftrightarrow 0R0 \Leftrightarrow 0 \neq 0$ vô lí.

Nên suy ra $x_0\bar{\mathbf{R}}x_0$ nên R không có tính phản xạ.

b/ <u>Tính đối xứng (symmetric)</u>:

Ta nói R có tính chất đối xứng, nếu và chỉ nếu

Giả sử $xRy \Rightarrow yRx$, với $x, y \in X$

Ngược lại, để chứng tỏ R không có tính đối xứng thì ta chọn

$x_0 \in X, y_0 \in X$ sao cho $\begin{cases} x_0\mathbf{R}y_0 \\ y_0\bar{\mathbf{R}}x_0 \end{cases}$

Ví dụ 10:

Sử dụng X của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 4$ với $x, y \in X$.

Giả sử $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 4 \Rightarrow |y - x| \leq 4 \Rightarrow yRx$, với $x, y \in X$

Nên ta nói R có tính đối xứng.

Ví dụ 11:

Sử dụng X của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y(\text{mod}\,3) \Leftrightarrow (x - y) \vdots 3$ với $x, y \in X$.

Ta giả sử $xRy \Leftrightarrow x \equiv y(\text{mod}\,3) \Leftrightarrow (x - y) \vdots 3 \Rightarrow (x - y) = 3m$, với $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (y - x) = -3m$. Đặt $n = -m$, với $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (y - x) = 3n \Rightarrow (y - x) \vdots 3 \Rightarrow y \equiv x(\text{mod}\,3) \Rightarrow y\,\text{R}\,x$

Nên ta nói R có tính đối xứng.

Ví dụ 12:

Sử dụng X của ví dụ 6, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \geq y$ với $x, y \in X$.

Ta chọn $x_0 = -3, y_0 = 1$ thì $\begin{cases} -3 \geq 1 (sai) \\ 1 \geq -3 (ld) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3)\bar{\mathbf{R}}1 \\ 1\mathbf{R}(-3) \end{cases}$

Nên ta nói R không có tính đối xứng.

c/ <u>Tính phản đối xứng (anti-symmetric)</u>:

Ta nói R có tính chất phản đối xứng, nếu và chỉ nếu

Giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow x = y$, với $x, y \in X$

Ngược lại, để chứng tỏ R không có tính phản đối xứng thì ta chọn

$x_0 \in X, y_0 \in X$ sao cho $\begin{cases} x_0 \mathbf{R} y_0 \\ y_0 \mathbf{R} x_0 \end{cases}$ mà $x_0 \neq y_0$

Ví dụ 13:

Cho tập hợp $X = \{2,3,5,8,10,12,15,18,20,28,30\}$ và quan hệ 2 ngôi trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow x$ là ước số của y, với $x, y \in X$

Ta giả sử:

$$\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \mid y \\ y \mid x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ x = ny \end{cases}, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Thay dòng 2 vào dòng 1 ta có:

$y = mx = m(ny) = (mn)y = ky$ với $k = mn, k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow y = ky \Rightarrow k = 1 \Rightarrow mn = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$ (nhận) hay $\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$ (loại)

$\Rightarrow m = n = 1 \Rightarrow y = mx = 1.x = x \Rightarrow y = x$

Nên ta nói R có tính phản đối xứng.

Ví dụ 14:

Sử dụng *X* của ví dụ 13, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \leq y$ với $x, y \in X$.

Ta giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x \leq y \leq x$

Theo nguyên lý kẹp, ta suy ra $x = y = x \Rightarrow x = y$

Nên ta nói R có tính phản đối xứng.

Ví dụ 15:

Cho tập hợp $X = \{-4, -3, -2, 1, 2, 3, 5, 8\}$ và quan hệ 2 ngôi *R* trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ với $x, y \in X$.

Ta chọn $x_0 = -3, y_0 = 3$ ta có $\begin{cases} x_0 \mathbf{R} y_0 \quad do \quad |-3| = |3| = 3 \\ y_0 \mathbf{R} x_0 \quad do \quad |3| = |-3| = 3 \end{cases}$

Mà $-3 \neq 3$ hay là $x_0 \neq y_0$

Nên ta nói R không có tính phản đối xứng.

***d/ <u>Tính truyền (tính bắc cầu) (transitive)</u>*:**

Ta nói R có tính truyền (tính bắc cầu), nếu và chỉ nếu

Giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow xRz$, với $x, y, z \in X$

Ngược lại, để chứng tỏ R không có tính truyền thì ta chọn

$x_0 \in X, y_0 \in X, z_0 \in X$ sao cho $\begin{cases} x_0\mathbf{R}y_0 \\ y_0\mathbf{R}z_0 \end{cases}$ mà $x_0\bar{\mathbf{R}}z_0$

Ví dụ 16:

Cho tập hợp $X = \{-4,-3,-2,1,2,3,5,8\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ với $x, y \in X$.

Ta giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \Rightarrow |x| = |y| = |z| \Rightarrow |x| = |z| \Rightarrow xRz$ với $x, y, z \in X$.

Nên ta nói R có tính truyền.

Ví dụ 17:

Cho tập hợp $X = \{2,3,5,8,10,12,15,18,20,28,30\}$ và quan hệ 2 ngôi trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow x | y \Leftrightarrow x$ là ước số của y, với $x, y \in X$.

Ta giả sử $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x | y \\ y | z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = ny \end{cases}, \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$ với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow z = n(mx) = (nm)x = kx$, với $k = mn, k \in \mathbb{Z}^+$

$\Rightarrow z = kx \Rightarrow x | z \Rightarrow x\mathbf{R}z$ với $x, y, z \in X$.

Nên ta nói R có tính truyền.

Ví dụ 18:

Sử dụng $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, với R là quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow |x - y| \le 4$ với $x, y \in X$.

Ta chọn $x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 3$ thì

$\begin{cases} |-2-1| = |-3| = 3 \le 4 \Rightarrow (-2)\mathrm{R}1 \\ |1-3| = |-2| = 2 \le 4 \Rightarrow 1\mathrm{R}3 \end{cases}$ mà $|-2-3| = |-5| = 5 > 4 \Rightarrow (-2)\bar{\mathrm{R}}3$

Nên ta nói R không có tính truyền.

* Nếu quan hệ R trên X có các tính chất:

$\begin{cases} \text{+ Tính phản xạ;} \\ \text{+ Tính đối xứng;} \\ \text{+ Tính truyền/bắc cầu.} \end{cases}$

thì ta nói R là quan hệ tương đương

* Nếu quan hệ R trên X có các tính chất:

$\begin{cases} \text{+ Tính phản xạ;} \\ \text{+ Tính phản đối xứng;} \\ \text{+ Tính truyền/bắc cầu.} \end{cases}$

thì ta nói R là quan hệ thứ tự

* Nếu R có cả 4 tính chất trên thì ta nói R vừa là quan hệ tương đương, R vừa là quan hệ thứ tự.

Bài tập:

Bài 1: Cho tập hợp $X = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5, 7\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow (x - y) \vdots 4$, với $x, y \in X$.

a/ Viết dạng liệt kê cho R.

b/ Lập ma trận biểu diễn cho R.

c/ Hỏi R có tính chất nào? (phản xạ/ đối xứng/ phản đối xứng/ truyền); từ đó gọi tên cho quan hệ R.

Bài 2: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-4, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow |x - y| \geq 3$, với $x, y \in X$.

Bài 3: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow (2x + 3y) \vdots 5$, với $x, y \in X$.

Bài 4: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow (x + y)$ là số nguyên tố, với $x, y \in X$.

Bài 5: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{2, 3, 7, 10, 12, 20, 25, 28, 30\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \vdots y \Leftrightarrow x$ là bội số của y, với $x, y \in X$.

Bài 6: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-2, -1, 0, 1, 4, 6, 9\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, với $x, y \in X$.

Bài 7: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-5, -2, 0, 1, 4, 7, 9\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x = y$, với $x, y \in X$.

Bài 8: yêu cầu như bài 1, với

$X = \{-6, -3, 0, 1, 7, 8, 10\}$ và quan hệ 2 ngôi

$xRy \Leftrightarrow x \neq y$, với $x, y \in X$.

Bài 9: yêu cầu như bài 1, với $X = \{a, b, c\}$ và E là tập hợp chứa các tập hợp con của X, nghĩa là

E = $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên E

$xRy \Leftrightarrow x \subseteq y$, với x, y là các tập hợp thuộc E (quan hệ "thuộc").

Bài 10: yêu cầu như bài 9, với $X = \{a, b, c\}$ và E là tập hợp chứa các tập hợp con của X, nghĩa là

E = $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên E

$xRy \Leftrightarrow x \supseteq y$, với x, y là các tập hợp thuộc E (quan hệ "chứa").

<u>Bài 11</u>: yêu cầu như bài 1 với

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên $X \times X$ như sau:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \le c$, với $(a,b),(c,d) \in X \times X$

<u>Bài 12</u>: yêu cầu như bài 11 với

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên $X \times X$ như sau:

$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a + c = b + d$, với $(a,b),(c,d) \in X \times X$