Chương 3. Quan hệ

3.1. Quan hệ hai ngôi trên một tập hợp và các tính chất. Biểu diễn quan hệ hai ngôi.

3.2. Quan hệ tương đương. Lớp tương đương. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương.

3.3. Quan hệ thứ tự. Thứ tự toàn phần và bán phần. Biểu đồ Hasse. Phần tử min và max. Các phần tử tối tiểu và tối đại.

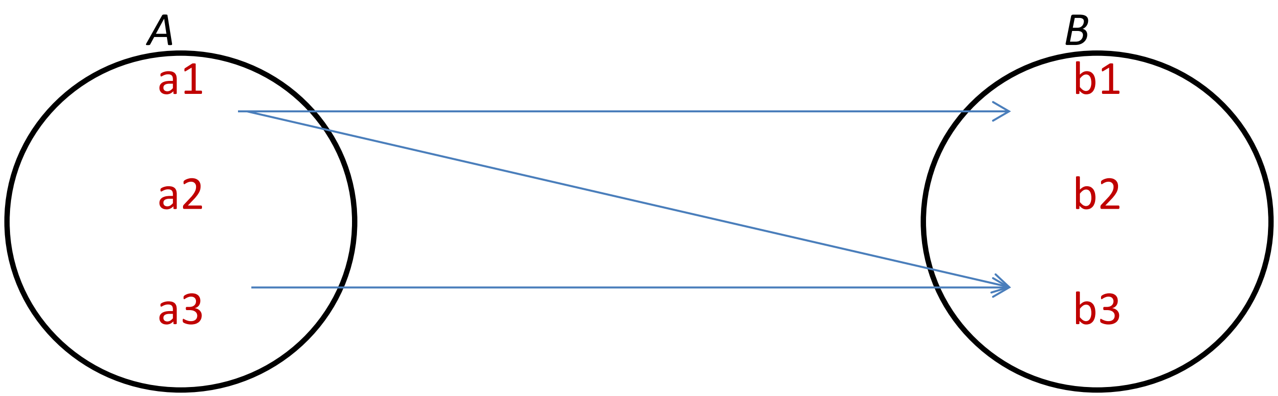
Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa: Cho hai tập A, B. Ta gọi tập R là một quan hệ hai ngôi từ *A* đến *B* nếu $R \subseteq A \times B$.

Nếu $(a, b) \in R$ thì ta nói a có quan hệ R với b và ký hiệu a R b; ngược lại nếu $(a, b) \notin R$ thì ta kí hiệu $a\,\overline{R}\,b$.

Khi A = B, ta gọi R là một quan hệ hai ngôi trên A.

Ví dụ:



$$R = \{\, (a1, b1), (a1, b3), (a3, b3) \,\}$$

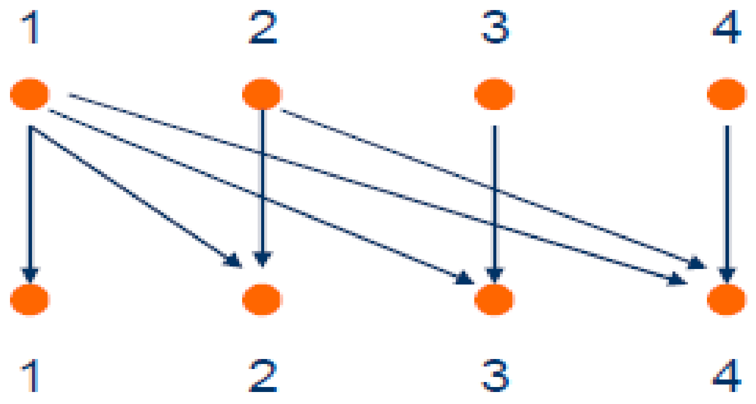
Quan hệ hai ngôi

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, R là một quan hệ (hai ngôi) trên A và $R = \{(a, b) \in A^2 \mid a$ là ước của $b\}$.

Khi đó

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4,4)\}$



Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ.

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(a) Ta nói quan hệ R có ***tính phản xạ*** nếu và chỉ nếu

$$a \, R \, a \, , \quad \forall a \in A.$$

Ví dụ: Trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$ không phản xạ vì $(3, 3) \notin R1$

$R2 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ phản xạ vì $(1,1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R2$

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ

Ví dụ:

- Quan hệ $\leq$ trên Z phản xạ vì $a \leq a, \forall a \in Z$.
- Quan hệ > trên Z không phản xạ vì 1 không lớn hơn 1.
- Quan hệ " | " ("ước số") trên Z^+ là phản xạ vì mọi số nguyên dương *a* là ước của chính nó.

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ.

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(b) Ta nói quan hệ *R* có ***tính đối xứng*** nếu và chỉ nếu

$$\forall a, b \in A,\ a\,R\,b \Rightarrow\ b\,R\,a$$

(c) Ta nói quan hệ *R* có ***tính phản xứng*** nếu và chỉ nếu

$$\forall\ a, b \in A,\ (a\,R\,b \wedge\ b\,R\,a) \Rightarrow a = b$$

Ví dụ:

- Quan hệ $R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ là đối xứng.

- Quan hệ $\leq$ trên **Z** không đối xứng, tuy nhiên nó phản xứng vì $\mathbf{(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow (a = b)}$.

- Quan hệ“ | ” (“ước số”) trên Z^+ không đối xứng, tuy nhiên nó có tính phản xứng vì $\mathbf{(a \mid b) \wedge (b \mid a) \Rightarrow (a = b)}$.

Quan hệ hai ngôi

2. Các tính chất của quan hệ

Định nghĩa: Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên tập A.

(d) Ta nói quan hệ *R* có ***tính bắc cầu (truyền)*** nếu và chỉ nếu

$$\forall a,b,c \in A,\ (a\,R\,b \ \wedge\ b\,R\,c) \Rightarrow a\,R\,c$$

Ví dụ:

- Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ trên tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$ có tính bắc cầu.

- Quan hệ ≤ và "|" trên Z có tính bắc cầu vì

$$(a \le b) \wedge (b \le c) \Rightarrow (a \le c)$$
$$(a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$$

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

Định nghĩa.

Cho R là quan hệ từ A = {1,2,3,4} đến B = {u,v,w}, R = {(1,u),(1,v),(2,w),(3,w),(4,u)}.

Khi đó R có thể biểu diễn như sau

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dòng và cột tiêu đề có thể bỏ qua nếu không gây hiểu nhầm.

Đây là ma trận cấp 4×3 biễu diên cho quan hệ R

3. Biểu diễn Quan hệ

Định nghĩa. Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ đến $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Ma trận biểu diễn của R là ma trận $M_R = [m_{ij}]_{mxn}$ xác định bởi:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \\ 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \end{cases}$$

Ví dụ: Cho R là quan hệ từ $A = \{1, 2, 3\}$ đến $B = \{1, 2\}$: $a\ R\ b \Leftrightarrow a > b$. Khi đó ma trận biểu diễn của R là:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = M_R$$

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Ví dụ: Cho R là quan hệ từ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ đến $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ được biểu diễn bởi ma trận

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} & \\ \mathbf{M}_R = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \end{array}$$

Khi đó

$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$.

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

Cho R là quan hệ trên tập A, khi đó M_R là *ma trận vuông.*

+) R là *phản xạ* nếu tất cả các phần tử trên *đường chéo* của M_R đều bằng1: $m_{ii} = 1, \forall i.$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

+) *R* là đối xứng nếu M_R là *đối xứng*

$$m_{ij} = m_{ji}\ ,\quad \forall\, i, j.$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\
\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Quan hệ hai ngôi

3. Biểu diễn quan hệ

+) *R* là *phản xứng* nếu M_R thỏa:

$$m_{ij} = 0 \text{ hoặc } m_{ji} = 0 \text{ nếu } i \neq j$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho *S* = {sinh viên của lớp}, gọi R là một quan hệ trên S với *R* = {(*a*,*b*): a có cùng họ với b}.

Hỏi

R phản xạ? Yes

R đối xứng? Yes

R bắc cầu? Yes

Mọi sinh viên có cùng họ thuộc cùng một nhóm.

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa: Quan hệ *R* trên tập *A* được gọi là ***tương đương*** nếu và chỉ nếu nó có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ: Quan hệ *R* trên tập các chuỗi ký tự xác định bởi *aRb* nếu *a* và *b* có cùng độ dài. Khi đó *R* là quan hệ tương đương.

Ví dụ: Cho *R* là quan hệ trên tập **R** sao cho

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\ aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}$$

CM: *R* là quan hệ tương đương trên **R**.

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa:

Ví dụ: Cho *R* là quan hệ trên tập **R** sao cho

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\ aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{Z}$$

CM: *R* là quan hệ tương đương trên **R**.

+) $\forall a \in \mathbb{R}$, ta có $a - a = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow aRa \Rightarrow R$ có tính phản xạ (1)

+) $\forall a,b \in \mathbb{R} : aRb \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b - a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow bRa \Rightarrow R$ có tính đối xứng (2)

+) $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : \begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b \in \mathbb{Z} \\ b - c \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a - c \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow aRc \Rightarrow R$ có tính bắc cầu (3)

$\overset{(1),(2),(3)}{\Longrightarrow}$ R là quan hệ tương đương trên $\mathbb{R}$ (đpcm).

Quan hệ tương đương

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương và *R* là quan hệ trên **Z** :

$$\forall a,b \in \mathbf{Z},\ aRb \Leftrightarrow (a - b) \text{ chia hết } m$$

Khi đó *R* là quan hệ tương đương trên **Z**.

- Rõ ràng quan hệ này có tính phản xạ và đối xứng.
- Cho *a*, *b*, *c* sao cho *a – b và b – c* chia hết cho *m*, khi đó $a - c = a - b + b - c$ cũng chia hết cho *m*. Suy ra *R* có tính chất bắc cầu.
- Quan hệ này được gọi là ***quan hệ đồng dư modulo m*** và chúng ta viết $a \equiv b$ (mod *m*) thay vì *aRb.*

Ví dụ: Cho | là quan hệ trên **Z** được xác định như sau:

$$\forall a,b \in \mathbf{Z},\ a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}: b = ka$$

Quan hệ | có là quan hệ tương đương?

Quan hệ tương đương

2. Lớp tương đương

Định nghĩa. Cho R là quan hệ tương đương trên A và $a \in A$. ***Lớp tương đương chứa a*** theo quan hệ R được ký hiệu bởi $[a]_R$ hoặc $[a]$ là tập hợp tất cả những phần tử có quan hệ R với a.

$$[a]_R = \{b \in A \mid bRa\}$$

- Mỗi phần tử $x \in [a]_R$ được gọi là một phần tử đại diện của lớp tương đương $[a]_R$.
- Tập thương của A theo quan hệ R, ký hiệu là A/R, được định nghĩa là tập tất cả các lớp tương đương của các phần tử thuộc A, nghĩa là

$$A/R = \{ [a]_R \mid \forall a \in A\}$$

Quan hệ tương đương

2. Lớp tương đương

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương và *R* là quan hệ trên **Z** :

$$\forall a,b\in \mathbf{Z},\ aRb \Leftrightarrow (a-b) \text{ chia hết } m$$

Khi đó *R* là quan hệ tương đương trên **Z**.

- Quan hệ này được gọi là ***quan hệ đồng dư modulo m*** và chúng ta viết $a \equiv b \pmod{m}$ thay vì *aRb.*

$[a]_R = \{b\in A \mid bRa\}$

Ví dụ: Tìm các lớp tương đương theo quan hệ đồng dư modulo 8 chứa 0 và 1?

$[0]_8 = \{b\in \mathbf{Z} \mid bR0\} = \{b\in \mathbf{Z} \mid (b-0) = b \text{ chia hết cho } 8\}$

$= \{ \ldots, -16, -8, 0, 8, 16, \ldots \}$

Tương tự

$[1]_8 = \{b\in \mathbf{Z} \mid (b-1) \text{ chia hết cho } 8\}$

$= \{ \ldots, -15, -7, 1, 9, 17, \ldots\}$

Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Nhận xét: Trong ví dụ cuối, các lớp tương đương $[0]_8$ và $[1]_8$ là rời nhau.

Mệnh đề. Cho *R* là quan hệ tương đương trên tập *A.* Với mọi $a,b \in A$ các điều kiện sau đây tương đương với nhau

(i)aRb

(ii)$[a]_R = [b]_R$

(iii) $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

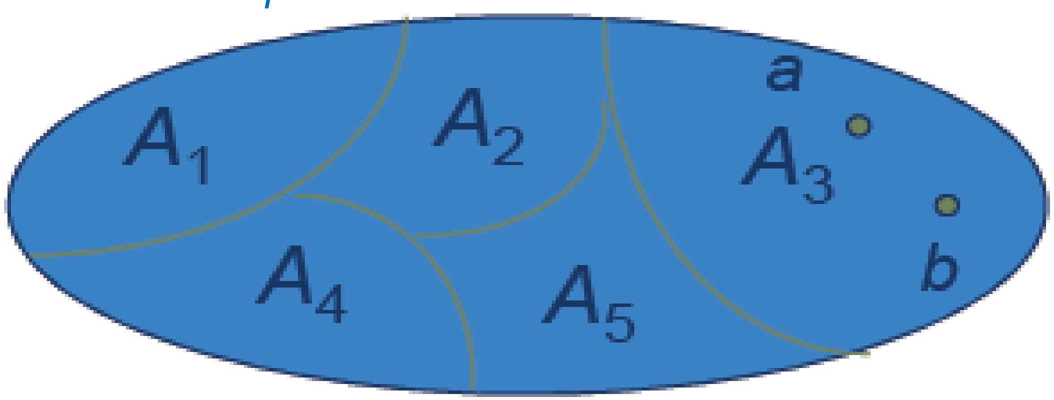
Chú ý: Từ mệnh đề trên ta thấy rằng các lớp tương đương của các phần tử của tập A hoặc trùng nhau, hoặc rời nhau. Hơn nữa, hợp của tất cả các lớp tương đương này trùng với A, cho nên tập A là hợp rời rạc của các lớp tương đương.Ta cũng nói rằng tập A được phân hoạch thành các lớp tương đương theo quan hệ R.

Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Chú ý: Cho $\{A_1, A_2, \ldots\}$ là phân hoạch A thành các tập con không rỗng, rời nhau. Khi đó có duy nhất quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Thật vậy với mỗi $a, b \in A$, ta đặt aRb nếu có tập con A_i sao cho $a, b \in A_i$.
Dễ dàng chứng minh rằng R là quan hệ tương đương trên A và $[a]_R = A_i$ nếu $a \in A_i$.



Quan hệ tương đương

3. Sự phân hoạch thành các lớp tương đương

Ví dụ: Cho m là số nguyên dương, khi đó có m lớp tương đương theo quan hệ đồng dư modulo m là $[0]_m$, $[1]_m$, …, $[m - 1]_m$.

Chúng phân hoạch **Z** thành các tập con rời nhau.

Chú ý rằng:

$[0]_m = [m]_m = [2m]_m = \ldots$

$[1]_m = [m + 1]_m = [2m + 1]_m = \ldots$

……………………………………

$[m - 1]_m = [2m - 1]_m = [3m - 1]_m = \ldots$

Mỗi lớp tương đương này được gọi là ***số nguyên modulo m.***

Tập hợp các số nguyên modulo m được ký hiệu bởi $\mathbf{Z}_m$, đó chính là tập thương của **Z** theo quan hệ đồng dư modulo m.

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/R = \{[0]_m , [1]_m , \ldots, [m - 1]_m\},$$

$$\mathbf{Z} = [0]_m \cup [1]_m \cup \ldots \cup [m - 1]_m .$$

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa

Ví dụ: Cho R là quan hệ trên tập số thực $\mathbf{R}$:

$$\forall a,b \in \mathbf{R},\ a\ R\ b \Leftrightarrow a \le b$$

Hỏi:

- R phản xạ không? Có
- R đối xứng không? Không
- R phản xứng không? Có
- R bắc cầu không? Có

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa: Quan hệ *R* trên tập *A* được gọi là ***quan hệ thứ tự*** nếu và chỉ nếu nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Ta thường kí hiệu quan hệ thứ tự bởi $\prec$.

Cặp (A, $\prec$) được gọi là tập sắp thứ tự (tập được sắp) hay poset.

Quan hệ thứ tự

1. Định nghĩa.

Ví dụ: Quan hệ ước số “ | ”trên tập số nguyên dương là quan hệ thứ tự, nghĩa là (**Z**$^+$, |) là poset

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}^+,\ \ a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^+ : b = ka$$

Phản xạ? Có, $x \mid x$ vì $x = 1 \cdot x$

Bắc cầu? Có?

$k, j \in \mathbb{Z}^+$

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid c$ nghĩa là $c = jb$.

Khi đó $c = j(ka) = jka$: $a \mid c$

Phản xứng?

có?

$a \mid b$ nghĩa là $b = ka$, $b \mid a$ nghĩa là $a = jb$.

Khi đó $a = jka$

Suy ra $j = k = 1$, nghĩa là $a = b$

$k, j \in \mathbb{Z}^+$

Ví dụ. (Z, |) là poset?

Không phải

Phản xứng?

Không

3|-3, và -3|3,

nhưng $3 \neq -3$.

Quan hệ thứ tự

Ví dụ: $(P(S), \subseteq)$, ở đây P(S) là tập hợp các con của S, là một poset?

Phản xạ? Có, $A \subseteq A, \forall A \in P(S)$

Bắc cầu? $A \subseteq B, B \subseteq C$. Suy ra $A \subseteq C$? Có

Phản xứng? $A \subseteq B, B \subseteq A$. Suy ra $A = B$? Có

Có, là poset.

Quan hệ thứ tự

2. Thứ tự toàn phần và bán phần

Định nghĩa. Các phần tử a và b của poset (S, $\prec$) gọi là so sánh được nếu a $\prec$ b hoặc b $\prec$ a .

Trái lại thì ta nói a và b không so sánh được.

Cho (S, $\prec$). Nếu hai phần tử tùy ý của S đều so sánh được với nhau thì ta gọi (S, $\prec$) là tập sắp thự tự toàn phần.

Ta cũng nói rằng $\prec$ là thứ tự toàn phần hay thứ tự tuyến tính trên S.

Trái lại thì ta nói $\prec$ là thứ tự bán phần.

Quan hệ thứ tự

2. Thứ tự toàn phần và bán phần

Ví dụ:

- Quan hệ "≤ " trên tập số $\mathbf{Z}^+$ là thứ tự toàn phần.
- Quan hệ ước số " | "trên tập hợp số $\mathbf{Z}^+$ là thứ tự bán phần, vì các số 5 và 7 là không so sánh được, tức là

$$\begin{cases} 5 \nmid 7 \\ 7 \nmid 5 \end{cases}$$

-Với tập A cho trước, tập P(A) tất cả các tập con của A với quan hệ $\subseteq$ là một tập được sắp, nhưng không toàn phần khi A có nhiều hơn một phần tử.

Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Mỗi poset có thể biễu diễn bởi đồ thị đặc biệt ta gọi là biểu đồ *Hasse*

Để định nghĩa biểu đồ Hasse chúng ta cần các khái niệm phần tử trội và trội trực tiếp.

Định nghĩa. Phần tử *b* trong poset $(S,\prec)$ được gọi là *phần tử trội* của phần tử *a* trong *S* nếu $a \prec b$.

Chúng ta cũng nói rằng *a* là ***được trội bởi*** *b* .

Phần tử *b* được gọi là ***trội trực tiếp của*** *a* nếu *b* là trội của *a* và không tồn tại trội *c* sao cho

$$a \prec c \prec b,\ a \neq c \neq b$$

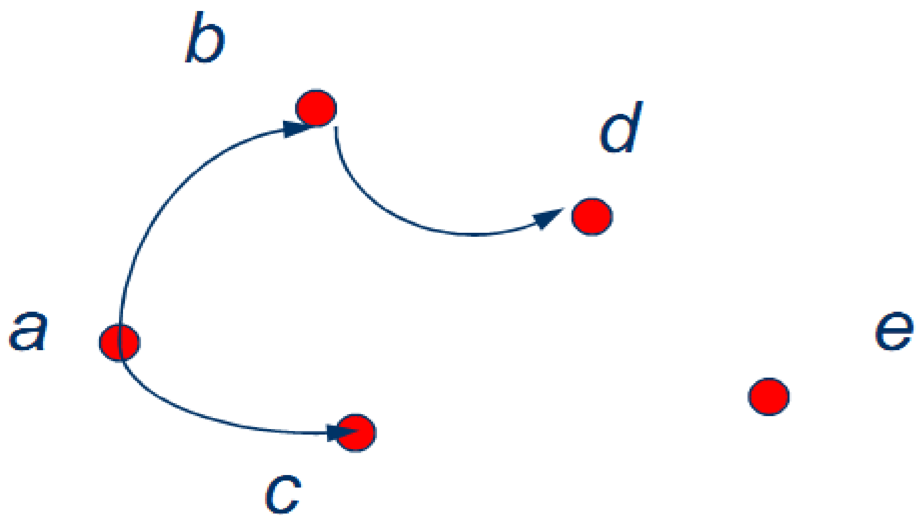
Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

Ta định nghĩa *Biểu đồ Hasse* của poset (S,≺) là đồ thị:

Mỗi phần tử của S được biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng .

Nếu *b* là trội trực tiếp của *a* thì vẽ một cung đi từ *a* đến *b* .

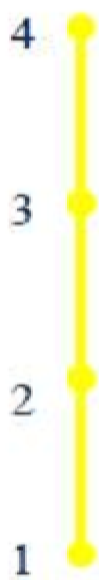


a ≺ b ≺ d, a ≺ c

Quan hệ thứ tự

3. Biểu đồ Hasse

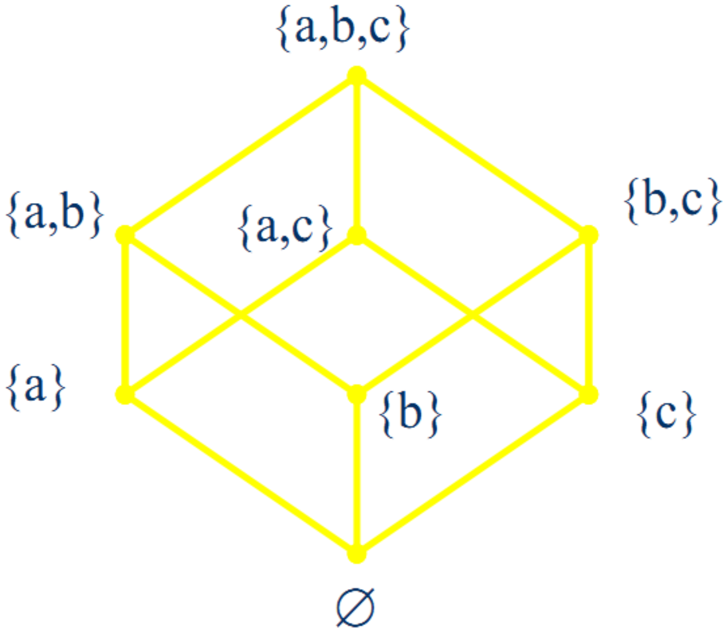
Ví dụ. Biểu đồ Hasse của poset ({1,2,3,4}, ≤) có thể vẽ như sau



Chú ý . Chúng ta không vẽ mũi tên với qui ước mỗi cung đều đi từ dưới lên trên

3. Biểu đồ Hasse

Ví dụ: Biểu đồ Hasse của $(P(S), \subseteq)$, $S = \{a,b,c\}$.



Quan hệ thứ tự

4. Phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

***Định nghĩa*:** Một phần tử a trong tập sắp thứ tự $(S, \prec)$ được gọi là:

Phần tử nhỏ nhất nếu $\forall x \in S$ ta có $a \prec x$.

Phần tử lớn nhất nếu $\forall x \in S$ ta có $x \prec a$.

***Nhận xét*:** Phần tử nhỏ nhất (lớn nhất) của một tập hợp (nếu có) là duy nhất. Ta kí hiệu phần tử của tập hợp S là min(S), và kí hiệu phần tử lớn nhất của S là max(S).

***Ví dụ*:** Trong tập có thứ tự $(S, \leq)$, $S=\{m \in \mathbf{Z} | m^2 < 100\}$ có min(S) = -9, max(S) = 9.

Trong tập có thứ tự $(A, \leq)$, $A=\{x \in \mathbf{R} | x^2 < 100\}$ không có phần tử nhỏ nhất và cũng không có phần tử lớn nhất.

Cho tập B, ta biết $(P(B), \subseteq)$ là tập có thứ tự. Với thứ tự này thì $\min(P(B)) = \emptyset$, $\max(P(B)) = B$.

Quan hệ thứ tự

4. Phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất.

***Định nghĩa*: (Thứ tự tốt)**

Một tập hợp có thứ tự được gọi là có thứ tự tốt (hay được sắp tốt) nếu mọi tập con khác rỗng đều có phần tử nhỏ nhất.

***Ví dụ*:**

- Tập hợp có thứ tự (**N**, $\leq$) là một tập hợp được sắp tốt.
- Tập hợp có thứ tự (**Z**, $\leq$) không phải là một tập hợp được sắp tốt vì **Z** không có phần tử nhỏ nhất.

Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Định nghĩa: Một phần tử a trong tập sắp thứ tự (S, $\prec$) được gọi là:

Phần tử tối tiểu nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $x \prec a$.

Phần tử tối đại nếu không tồn tại $x \in S$ sao cho $x \neq a$ và $a \prec x$.

Nhận xét:

- Phần tử tối tiểu (tối đại) của một tập có thứ tự không nhất thiết là duy nhất.

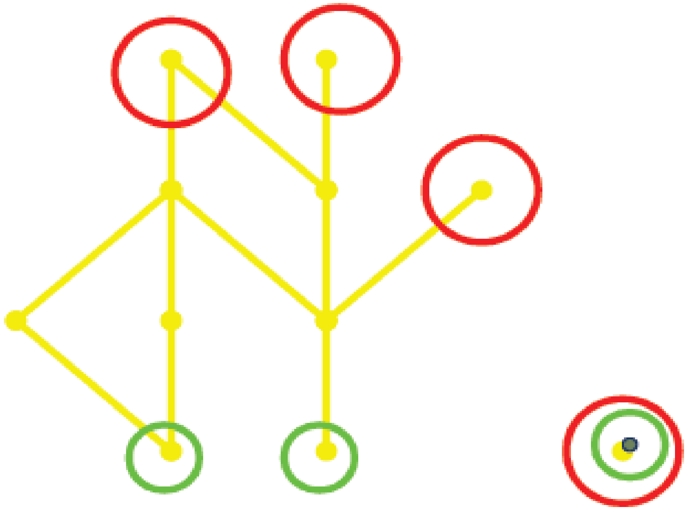
Ví dụ: Xét tập S = {1, 2, 3} với quan hệ R cho bởi R = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2)}. Dễ dàng kiểm chứng rằng (S,R) là tập có thứ tự. Với thứ tự R này, S có hai phần tử tối tiểu là 1 và 3; có một phần tử tối đại là 2.

- Phần tử lớn nhất (nhỏ nhất) của một tập có thứ tự, nếu có, là phần tử tối đại (tối tiểu) duy nhất của tập hợp đó.

Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Ví dụ: Xét poset có biểu đồ Hasse dưới đây:



Mỗi đỉnh màu đỏ là ***tối đại.***
Mỗi đỉnh màu xanh là ***tối tiểu.***
Không có cung nào xuất phát từ điểm tối đại.
Không có cung nào kết thúc ở điểm tối tiểu.

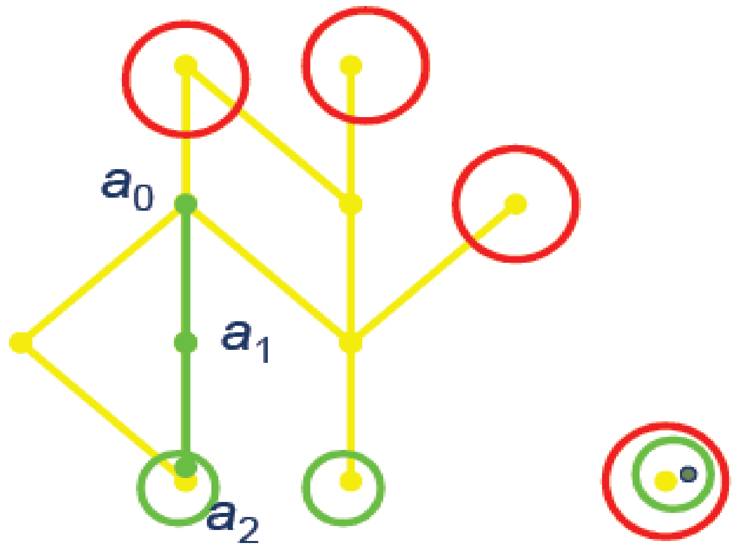
Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Chú ý: Trong một poset S hữu hạn, phần tử tối tiểu và phần tử tối đại luôn luôn tồn tại.

Thật vậy, chúng ta xuất phát từ điểm bất kỳ $a_0 \in S$. Nếu a_0 không là phần tử tối tiểu thì $\exists a_1 \in S$: $a_1 \prec a_0$. Tiếp tục như vậy cho đến khi tìm được phần tử tối tiểu.

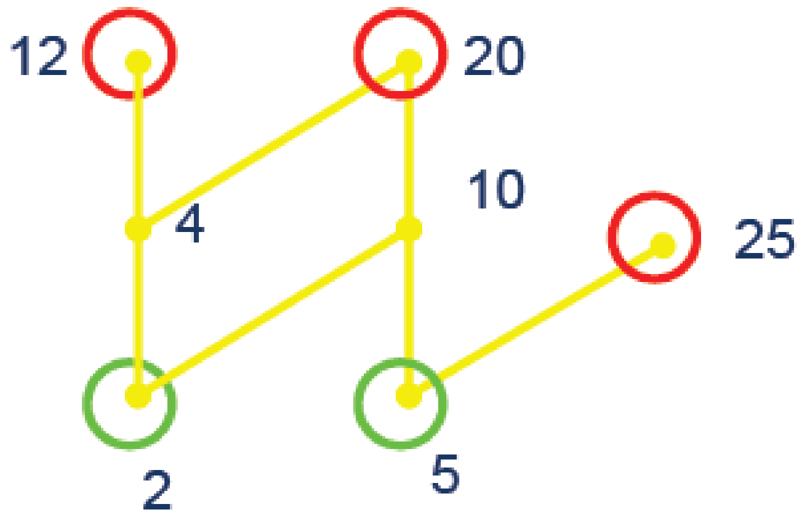
Phần tử tối đại cũng tìm được bằng phương pháp tương tự.



Quan hệ thứ tự

5. Phần tử tối tiểu và phần tử tối đại.

Ví dụ. Tìm phần tử tối đại, tối tiểu của poset ({2, 4, 5, 10, 12, 20, 25}, |) ?



Từ biểu đồ Hasse, chúng ta thấy rằng 12, 20, 25 là các phần tử tối đại, còn 2, 5 là các phần tử tối tiểu. Như vậy phần tử tối đại, tối tiểu của poset có thể không duy nhất.