Luật phân phối của BNN liên tục

1. ĐLNN liên tục và các tham số đặc trưng
2. Luật phân phối
   - Phân phối đều(Uniform distribution)
   - Phân phối mũ (Exponential distribution)
   - Phân phối chuẩn (Normal distribution)

ĐLNN liên tục

- ĐLNN liên tục: *miền giá trị* của X có chứa một khoảng số thực (a,b) (do đó là vô hạn và không đếm được).
- *Ví dụ:* Chọn ngẫu nhiên một số thực trong khoảng [0,1], gọi X là giá trị được chọn. Khi đó X là ĐLNN liên tục.

  VD: thời gian cài đặt phần mềm, thời gian download file, ...
  VD: cân nặng, chiều cao, nhiệt độ,...

Hàm mật độ xác suất (PDF) của ĐLNN liên tục

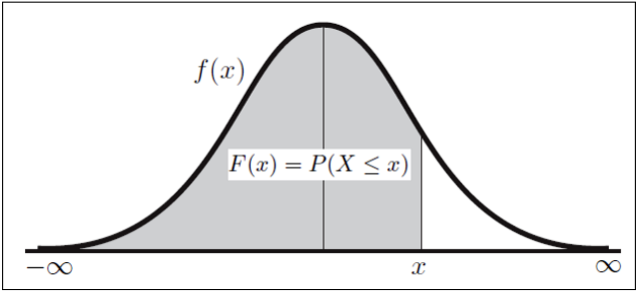
Cho X là ĐLNN liên tục và $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của ĐLNN X. Khi đó X có hàm mật độ xác suất là

$$\boxed{f(x) = \frac{dF(x)}{dx}}$$

Tính chất:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
2. $\displaystyle P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
3. $\displaystyle F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Hàm mật độ $f(x)$ của ĐLNN liên tục



- Hàm mật độ $f(x) \geq 0$ luôn nằm trên trục hoành.
- Diện tích bên dưới *đường cong mật độ* luôn bằng 1.
- $F(x) = P(X \leq x) =$ diện tích bên trái điểm x.
- $F(x)$ là một hàm *không giảm*.

Kỳ vọng - Phương sai

Xét ĐLNN X có $X(\Omega)$

- Kỳ vọng: là giá trị trung bình của ĐLNN

$$E(X) = \mu = \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) & \text{nếu } X \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{nếu } X \text{ liên tục} \end{cases}$$

- Phương sai:

$$Var(X) = \begin{cases} \sum (x_i - \mu)^2 P(x_i) & \text{nếu } X \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx & \text{nếu } X \text{ liên tục} \end{cases}$$

Tính chất kỳ vọng

Theorem 1

1. $E(a) = a \quad \textit{với a là hằng số bất kỳ}$
2. $E(aX) = aE(X) \quad \textit{với a là hằng số bất kỳ}$
3. $E\left(f(X) + g(X)\right) = E\left(f(X)\right) + E\left(g(X)\right)$ *với* f, g *là hàm số bất kỳ.*
4. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$

Tính chất phương sai

1. $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
2. $Var(a) = 0$ với a là hằng số bất kỳ
3. $Var(aX) = a^2 Var(X)$ với a là hằng số bất kỳ
4. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ với a, b là hằng số bất kỳ
5. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$ nếu X, Y độc lập

Phân phối đều

A random variable with any thinkable distribution can be generated from a Uniform random variable.

Many *computer languages and software* are equipped with a random number generator that *produces Uniform random variables*.

Users can convert them into variables with *desired distributions* and use for computer simulation of various events and processes.

Phân phối đều

- Miền giá trị: $X(\Omega) = (a, b)$
- Hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x \notin (a, b). \end{cases}$$

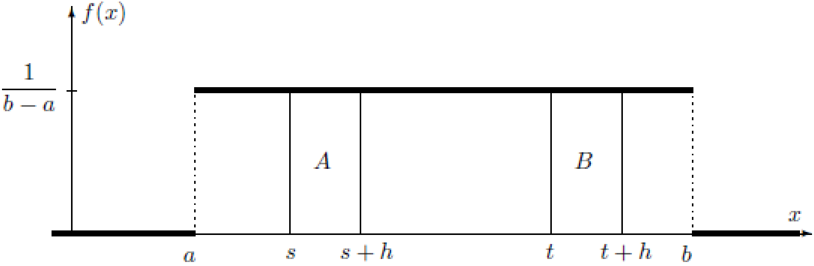


FIGURE 4.4: *The Uniform density and the Uniform property.*

Phân Phối đều

- Hàm phân phối xác suất:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{nếu } a < x < b, \\ 0 & \text{nếu } x \notin (a, b). \end{cases}$$

- Kì vọng: $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- Phương sai: $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Phân phối mũ (Exponential distribution)

Phân phối mũ thường được dùng để mô tả BNN thời gian: thời gian chờ, thời gian hoạt động của ổ cứng, thời gian giữa các cuộc điện thoại, ...

Xét một chuỗi sự kiện, nếu số sự kiện xảy ra trong một khoảng thời gian xác định có phân phối Poisson thì thời gian giữa các sự kiện có phân phối mũ.

- Miền giá trị: $X(\Omega) = (0, \infty)$
- Hàm mật độ xác suất:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } \ 0 < x, \\ 0 & \text{nếu } \ x \leq 0. \end{cases}$$

- Hàm phân phối xác suất:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{nếu } 0 < x, \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases}$$

- Kì vọng: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- Phương sai: $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Tính chất

1. $P(X > x) = e^{-\lambda x} \quad \forall\ x > 0$
2. $P(X > t + x | X > t) = P(X > x) \quad \forall\ x > 0$

   Tính chất (2) chỉ có đối với phân phối mũ, không có biến liên tục nào có tính chất này.

   Ý nghĩa:
   Giả sử X là thời gian chờ 1 sự kiện xảy ra. Nếu ta đã chờ được t đơn vị thời gian thì xác suất phải chờ thêm x đơn vị thời gian nữa cũng bằng với xác suất phải chờ x đơn vị thời gian từ thời điểm bắt đầu.

Ý nghĩa của tham số λ và kì vọng

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$$

Ví dụ: Gọi X là khoảng cách thời gian (tính bằng phút) giữa 2 cuộc gọi đến 1 tổng đài. Giả sử $E(X) = 0.5$, nghĩa là trung bình 1/2 phút có 1 cuộc gọi đến, và $\lambda = 2$ chính là số cuộc gọi trung bình trong một phút.

Tổng quát: Nếu X là BNN chỉ khoảng thời gian giữa 2 sự kiện và X có phân phối mũ với tham sốλ thì λ chính là số sự kiện xảy ra trong đơn vị thời gian.

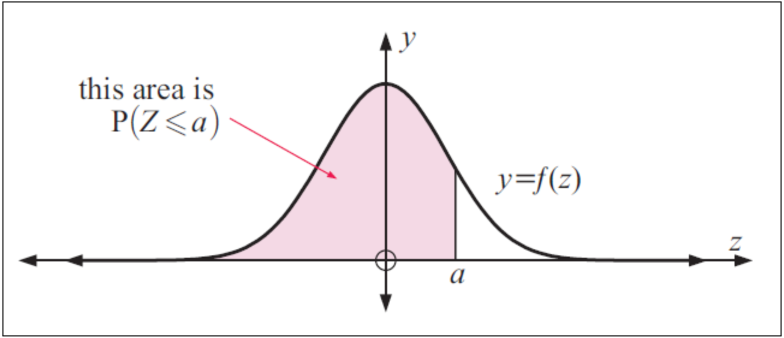
Ví dụ:

Một máy in được dùng để in trung bình 3 lần mỗi giờ.
a) Hỏi thời gian trung bình giữa 2 lần in ?
b) Hỏi xác suất trong vòng 5 phút nữa máy in được sử dụng ?

Giải: Gọi T là khoảng cách thời gian giữa 2 lần in. T có phân phối mũ với tham số $\lambda = 3$
a) Thời gian trung bình giữa 2 lần in: $1/3$ giờ $=$ 20 phút.
b) 5 phút $= 1/12$ giờ
$P(T < 1/12) = 1 - e^{-3.(1/12)}$

Hàm Gauss

- Hàm số Gauss: $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$
- Hàm Gauss là một hàm chẵn, đồ thị có dạng hình chuông *(bell curve)*, đối xứng qua trục tung.

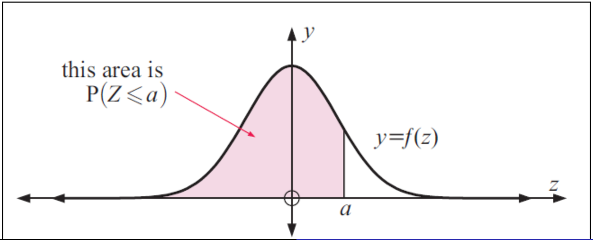


Phân phối chuẩn tắc: $Z \sim N(0, 1)$

- BNN Z được gọi là có phân phối chuẩn tắc, kí hiệu $Z \sim N(0, 1)$, nếu có hàm mật độ là hàm Gauss

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

- Kỳ vọng: $\mu_Z = 0$, độ lệch chuẩn: $\sigma_Z = 1$.
- Hàm phân phối: $F(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(u)\, du.$



Áp dụng

Ví dụ 1

Cho Z có phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$, tìm

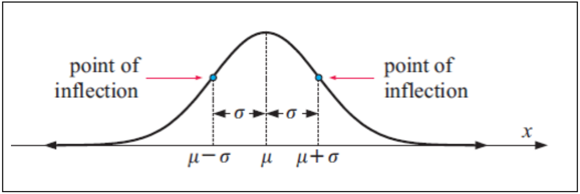
1. $P(Z < 2.42)$
2. $P(Z > 1.92)$
3. $P(1.25 < Z < 2.25)$
4. $P(|Z| < 1.3)$
5. $P(|Z| > 1.85)$

Hàm Gauss tổng quát

- Hàm số Gauss tổng quát ($\sigma > 0$)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Đồ thị có dạng hình chuông *(bell curve)*, đối xứng qua trục $x = \mu$.
- Độ cao của chuông: $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$
- σ càng nhỏ, đồ thị càng hẹp, các giá trị của X càng tập trung gần μ

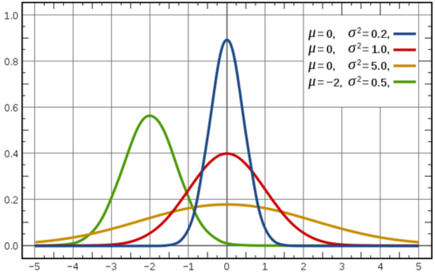


Phân phối chuẩn $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

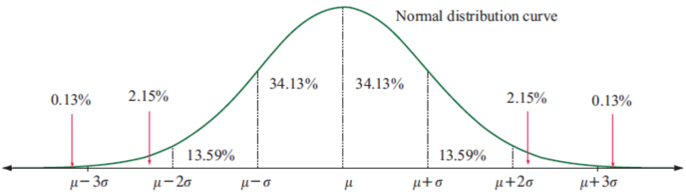
BNN X được gọi là có phân phối chuẩn, kí hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, nếu có hàm mật độ là hàm Gauss tổng quát

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Kỳ vọng: $E(X) = \mu$
- Phương sai: $Var(X) = \sigma^2$, độ lệch chuẩn: $\sigma_X = \sigma$.



Sự phấn bố xác suất của phân phối chuẩn



Notice that:

- $\approx 68.26\%$ of values lie between $\mu-\sigma$ and $\mu+\sigma$
- $\approx 95.44\%$ of values lie between $\mu-2\sigma$ and $\mu+2\sigma$
- $\approx 99.74\%$ of values lie between $\mu-3\sigma$ and $\mu+3\sigma$.

Ví dụ 2

Nếu chiều cao X của sinh viên nam có phân phối chuẩn với trung bình 166cm, độ lệch chuẩn 4cm, thì có bao nhiêu % sinh viên nam có chiều cao

(1) *từ 162cm đến 170cm;*

(2) *từ 154cm đến 178cm;*

(3) *trên 180cm*

(4) *dưới 160cm*

Phân phối chuẩn trong tự nhiên

- Là phân phối *quan trọng nhất* trong các phân phối liên tục.
- Hầu hết các hiện tượng trong tự nhiên đều có pp chuẩn, hoặc *xấp xỉ* phân phối chuẩn.
  - Chiều cao, cân nặng, chiều dài cánh tay...
  - Điểm số trong một kỳ thi
  - Lượng nước đóng chai trong một chai nước ngọt, khối lượng tịnh của đồ hộp...
  - Chiều cao cây lúa, chiều dài của những con cá hồi...

Phân phối chuẩn

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

- $\mu = E(X)$: kỳ vọng.
- σ : độ lệch chuẩn.
- Hàm mật độ:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

- Phương sai:
  $Var(X) = \sigma^2$

Phân phối chuẩn tắc

$Z \sim N(0, 1)$

- $\mu = 0$: kỳ vọng.
- $\sigma = 1$: độ lệch chuẩn.
- Hàm mật độ:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}}$$

- Phương sai:
  $Var(Z) = 1$

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)}$$

Giả sử $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Đặt $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Khi đó $Z \sim N(0,1)$.

a) Tính $P(X < a)$ hay $P(X \leq a)$

$$P(X < a) = P(X \leq a) = P(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

Tra bảng A4 để xác định giá trị hàm

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz.$$

b) Để tính các xác suất dạng khác, lưu ý:

- $P(X > a) = 1 - P(X < a)$
- $P(Z > z) = P(Z < -z)$
- $P(a < X < b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

Table A4, continued. Standard Normal distribution

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Ví dụ

Ví dụ 3

Giả sử đường kính trong của các vòng đệm cao su do một máy sản xuất có phân phối chuẩn, với đường kính trong trung bình là 1.27cm và độ lệch chuẩn là 0.01cm. Đường kính trong của các vòng đệm này được phép có dung sai từ 1,25 đến 1,29 cm, ngược lại thì các vòng đệm được xem bị hỏng. Hãy xác định tỷ lệ phần trăm các vòng đệm do máy này sản xuất bị hỏng.

Giải ví dụ

Gọi X là đường kính trong của các vòng đệm cao su do một máy sản xuất, thì X có phân phối chuẩn $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, với

- Trung bình: $\mu = 1,27cm$;
- Độ lệch chuẩn: $\sigma = 0,01cm$.

Chọn ngẫu nhiên 1 vòng đệm, gọi F là biến cố vòng đệm đạt tiêu chuẩn kỹ thuật, ta có

$$P(F) = P(1,25 \leq X \leq 1,29) = P(X \leq 1,29) - P(X < 1,25) = 95,45\%$$

Tỷ lệ phần trăm các vòng đệm do máy sản xuất bị hỏng

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 4,55\%$$

Bài 1.
a) Giả sử $Z \sim N(0,1)$, chứng minh rằng

$$P(-k \leq Z \leq k) = 2P(Z \leq k) - 1.$$

b) Áp dụng để tìm k, biết $P(-k \leq Z \leq k) = 0.238$

Bài 2. Giả sử chiều cao của sinh viên nam có phân phối chuẩn với trung bình 168cm và độ lệch chuẩn 5cm. Theo bạn trung bình trong 300 sinh viên nam, có bao nhiêu sinh viên có chiều cao:
a) Không quá 164cm?
b) Hơn 172cm?
c) Từ 165 đến 170cm?

Bài 3: Cho $Z \sim N(0, 1)$. Giả sử $P(Z < z) = 0.8508$. Tìm z.

Bài 4: Giả sử thời gian (phút) khách phải chờ để được phục vụ tại một cửa hàng là BNN X có phân phối chuẩn với giá trị trung bình 4,5 phút và độ lệch chuẩn 1,1 phút.
1) Tính xác suất khách phải chờ từ 3,5 phút đến 5 phút.
2) Tính thời gian tối thiểu t nếu xác suất khách phải chờ vượt quá t là không quá 5%.

Bài 5: Tuổi thọ X (năm) của một loại bóng đèn A là BNN tuân theo luật phân phối chuẩn N(4; 2.25).
a. Tính tỉ lệ bóng đèn A có tuổi thọ từ 4.5 năm trở lên.
b. Quan sát ngẫu nhiên 1 bóng đèn loại A thấy nó có tuổi thọ trên tuổi thọ trung bình. Hãy tính xác suất bóng đèn đó có tuổi thọ không quá 5 năm.
c. Cần mua bao nhiêu bóng đèn loại A để xác suất mua được ít nhất 1 bóng có tuổi thọ từ 6 năm trở lên không nhỏ hơn 90%.

Bài 6: Đường kính của một loại trục máy do máy tiện làm ra là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, với giá trị trung bình là 25 mm, và phương sai là 44,1 mm2 . Trục máy được xem là đạt tiêu chuẩn kỹ thuật nếu đường kính nằm trong khoảng từ 23,44 mm đến 26,56 mm.

1) Tìm tỉ lệ trục máy đạt tiêu chuẩn kỹ thuật.

2) Phải sản xuất ít nhất bao nhiêu trục để khả năng có ít nhất 1 trục đạt tiêu chuẩn kỹ thuật không dưới 99,73 %.

3) Tính tỉ lệ trục máy đạt tiêu chuẩn kỹ thuật trong số các trục máy có đường kính trên 25 mm.