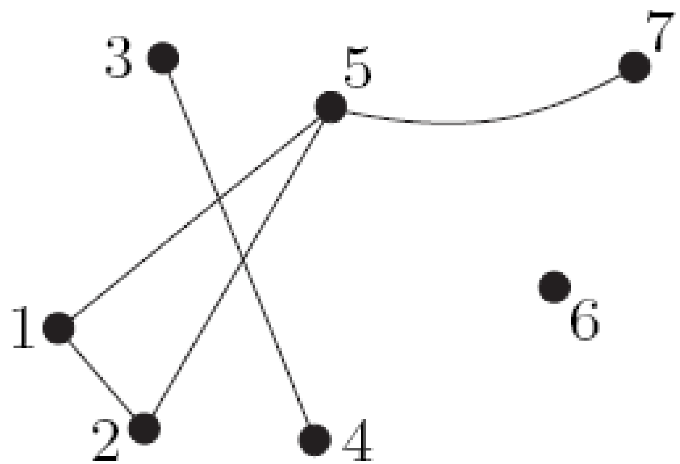
CHƯƠNG 5: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

PHẦN 1:

- Các khái niệm cơ bản
- Biểu diễn đồ thị
- Một số đồ thị đặc biệt
- Sự đẳng cấu của các đồ thị
- Đồ thị có hướng
- Đường đi và chu trình
- Sự liên thông

Các khái niệm cơ bản

- Đồ thị (Graph)
  - $G = (V, E)$ với $V \neq \emptyset$
    - V: tập các đỉnh
    - E: tập các cạnh
  - Cạnh $e \in E$
    - ứng với 2 đỉnh $v, w \in V$
    - v, w là 2 đỉnh kề (hay liên kết) với nhau, e liên thuộc với v và w
    - Ký hiệu: $e = vw$ (…)
    - $v \equiv w$: e được gọi là vòng (khuyên) tại v

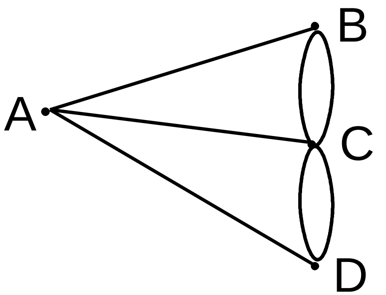


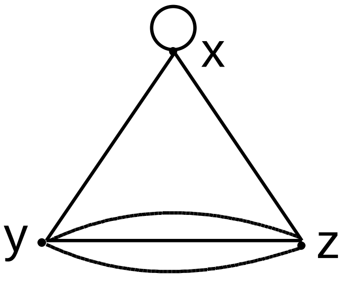
$V = \{1, \ldots, 7\}$

$E = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{5,7\}\}$

Các khái niệm cơ bản

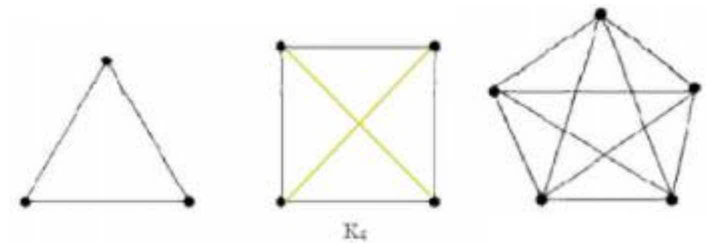
- Đồ thị (Graph)
  - *Cạnh bội* (song song)
    - Các cạnh phân biệt cùng tương ứng với một cặp đỉnh
  - *Đơn đồ thị*
    - Đồ thị không có vòng và cạnh song song
  - *Đa đồ thị*
    - Các đồ thị không phải là đơn đồ thị



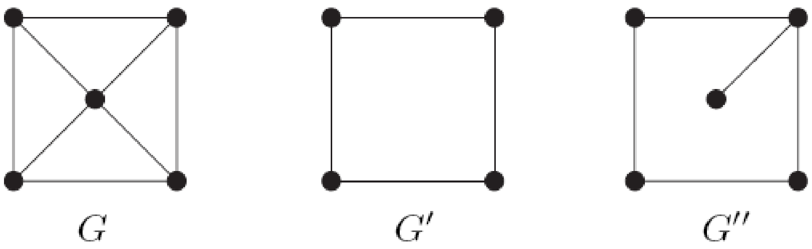


Các khái niệm cơ bản

- Đồ thị (Graph)
  - *Đồ thị đầy đủ*
    - Đơn đồ thị mà mọi cặp đỉnh đều kề nhau
    - K_n: đồ thị đầy đủ có n đỉnh



  - *Đồ thị con*
    - Đồ thị $G' = (V', E')$
    - $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$



  - *Đồ thị hữu hạn*
    - E và V hữu hạn
  - *Đồ thị vô hạn*

Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn hình học
  - Mỗi đỉnh ≡ một điểm
  - Mỗi cạnh ≡ một đường (cong hoặc thẳng) nối 2 đỉnh liên thuộc với nó
- Biểu diễn bằng ma trận
  - Thường được dùng để biểu diễn trên máy tính
  - 2 cách biểu diễn thường dùng
    - Ma trận kề
    - Ma trận liên thuộc

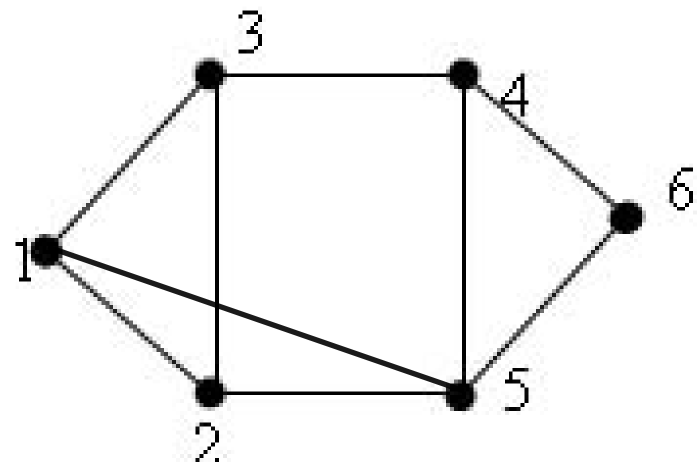
Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ma trận vuông cấp *n* (số đỉnh của đồ thị)
    - Các phần tử a_{ij} được xác định bởi
      - $a_{ij} = 1$: Nếu $v_i v_j$ là một cạnh của *G*
      - $a_{ij} = 0$: Nếu $v_i v_j$ không là một cạnh của *G*
    - Tính chất
      - Phụ thuộc vào thứ tự liệt kê của các đỉnh
      - Ma trận là đối xứng
      - Một vòng được tính là một cạnh ($a_{kk} = 1$)

Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ví dụ 1

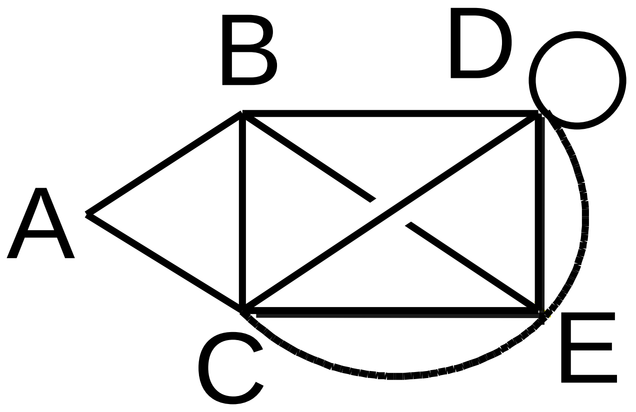
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0



Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận kề
    - Ví dụ 2

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



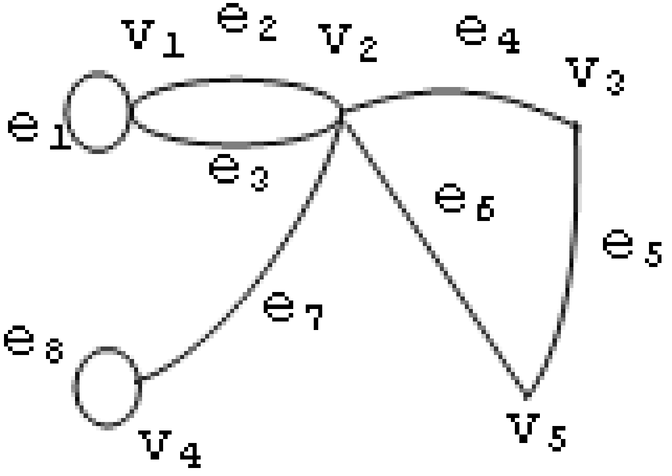
Biểu diễn đồ thị

- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma trận liên thuộc
    - Ma trận $M = (a_{ij})_{nxm}$
    - Các phần tử a_{ij} được xác định bởi
      - $a_{ij} = 1$: Nếu cạnh e_j liên thuộc với v_i của *G*
      - $a_{ij} = 0$: Nếu cạnh e_j *không* liên thuộc với v_i của *G*
    - Tính chất
      - Các cột tương ứng với các cạnh bội là giống nhau trong ma trân liên thuộc
      - Các vòng ứng với một cột có đúng một phần tử bằng 1 ứng với đỉnh nối với vòng đó.

Biểu diễn đồ thị

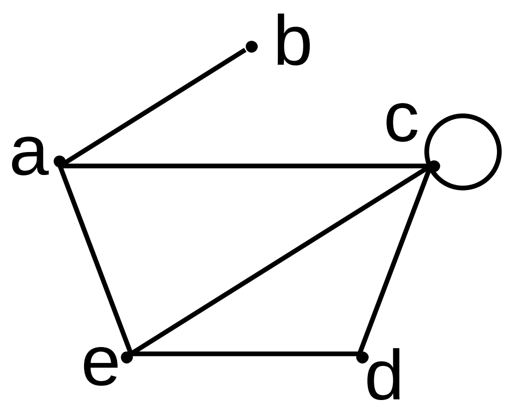
- Biểu diễn bằng ma trận
  - Ma liên thuộc
    - Ví dụ

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$



Biểu diễn đồ thị

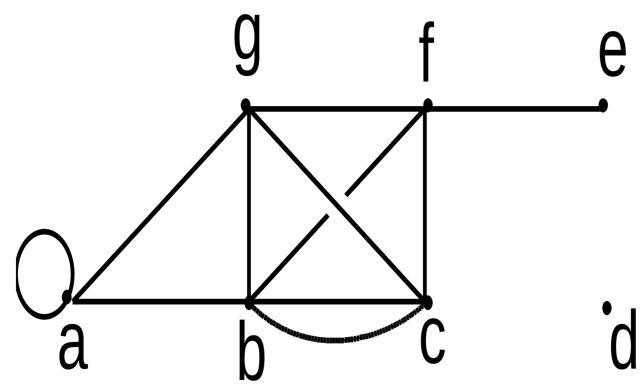
- Biểu diễn bằng bảng (danh sách liền kề)
  - Lưu trữ các đỉnh liền kề với một đỉnh
  - Ví dụ



Đỉnh	Đỉnh liền kề
a	b, c, e
b	a
c	a, c, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Đỉnh của đồ thị G có bậc là *n* nếu nó kề với *n* đỉnh khác.
  - Ký hiệu: *deg*(*v*) hay *d*(*v*)
  - Mỗi vòng được kể là 2 cạnh tới một đỉnh
  - Đỉnh cô lập $\Leftrightarrow$ *deg*(*v*)=0
  - Đỉnh treo $\Leftrightarrow$ *deg*(*v*)=1
  - Cạnh treo có đầu mút là một đỉnh treo
  - Đồ thị rỗng: *deg*(*v*)=0 $\forall v$



deg(a) = 4; deg(b) = 5; deg(c) = 4; deg(d) = 0; deg(e) = 1; deg(f) = 4; deg(g) = 4

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.1
    - *Trong mọi đồ thị G = (V, E), tổng số bậc của các đỉnh của G bằng 2 lần số cạnh của nó*

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} d(v)$$

    - *Hệ quả*
      - *Trong mọi đồ thị G = (V, E) ta có*
        - *Số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn*
        - *Tổng bậc của đỉnh bậc lẻ là một số chẵn*

Các khái niệm cơ bản

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.2
    - *Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 1 thì tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*
  - Định lý 1.3
    - *Trong mọi đơn đồ thị G = (V, E), nếu số đỉnh nhiều hơn 2 và có đúng hai đỉnh cùng bậc thì hai đỉnh này không đồng thời có bậc bằng 0 hoặc n-1.*

Các khái niệm cơ bản

- Chứng minh và giải toán bằng phương pháp đồ thị
  1. *Xây dựng đồ thị mô tả đầy đủ thông tin của bài toán*
     - *Mỗi đỉnh $v \in V \equiv$ một **đối tượng** trong bài toán*
     - *Mỗi cạnh $e \in E \equiv$ **mối quan hệ** giữa hai đối tượng*
     - *Vẽ đồ thị mô tả bài toán*
  2. *Sử dụng các định nghĩa, tính chất, định lý, … suy ra điều cần phải chứng minh*

Các khái niệm cơ bản

- Một số bài toán ví dụ

Chứng minh rằng trong một cuộc họp tùy ý có ít nhất 2 đại biểu tham gia trở lên, luôn có ít nhất hai đại biểu mà họ có số người quen bằng nhau trong các đại biểu đến dự họp.

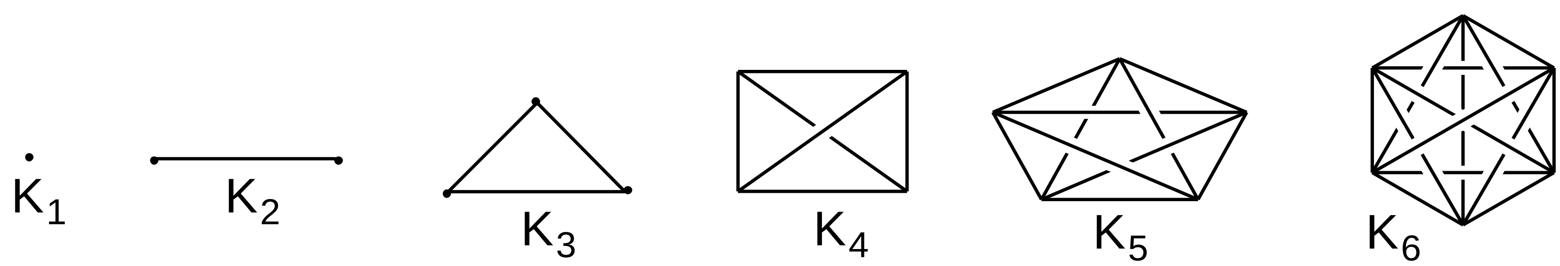
Các khái niệm cơ bản

- Một số bài toán ví dụ

Chứng minh rằng số người mà mỗi người đã có một số lẻ lần bắt tay nhau trên trái đất là một con số chẵn.

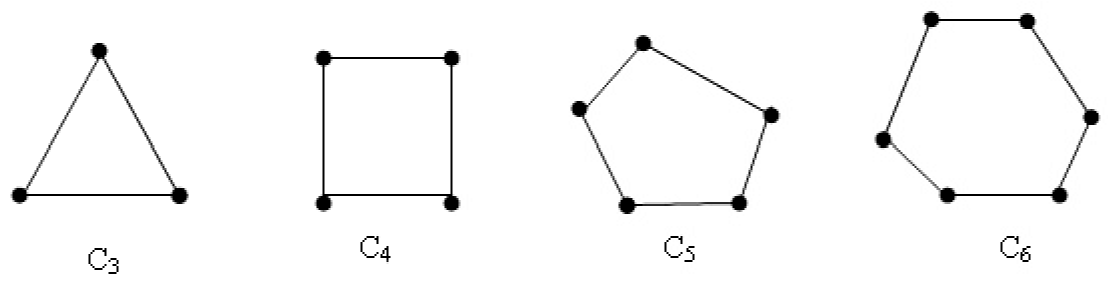
Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị đầy đủ K_n
  - Đơn đồ thị
  - Số đỉnh: $|V| = n$
  - *Bậc:* $deg(v) = n - 1, \forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n(n - 1) / 2$



Một số đồ thị đặc biệt

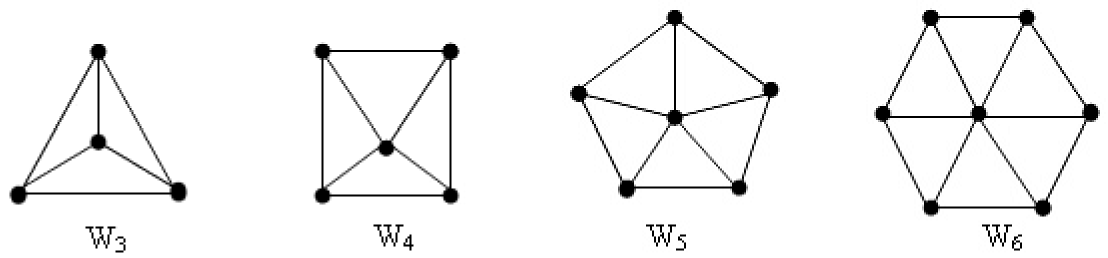
- Đồ thị vòng C_n
  - Đơn đồ thị
  - Số đỉnh: $|V| = n \geq 3$
  - *Bậc:* $deg(v) = 2, \forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n$



Một số đồ thị đặc biệt

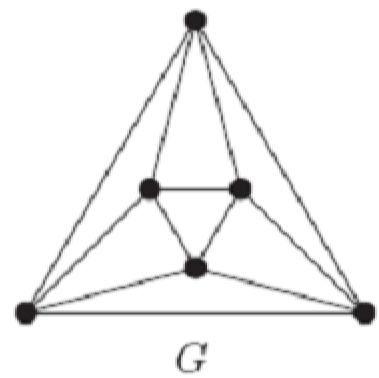
- Đồ thị hình bánh xe W_n
  - Nối các đỉnh của C_n với một đỉnh mới u ta được W_n
  - Số đỉnh: $|V| = n + 1, \quad n \geq 3$
  - *Bậc:* $deg(v) = 3, \forall v \in V \setminus \{u\};$

    $deg(u) = n$
  - Số cạnh: $|E| = 2n$



Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị đều bậc k (Đồ thị k-đều)
  - Mọi đỉnh đều có cùng bậc k
  - Số đỉnh: $|V| = n$
  - *Bậc:* $deg(v) = k, \forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n.k/2$

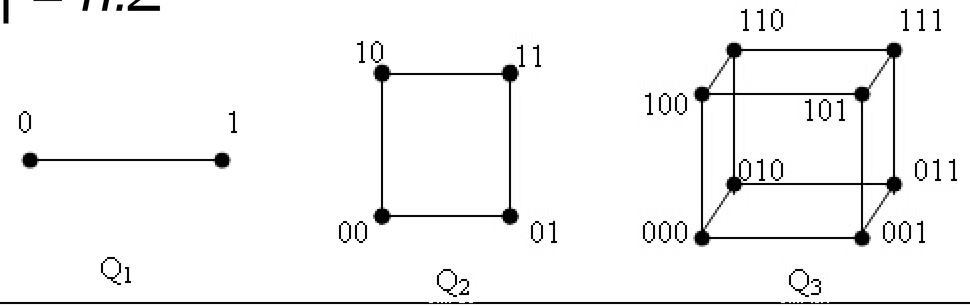


Ví dụ:

- C_n là đồ thị đều bậc 2
- K_n là đồ thị đều bậc (n-1)

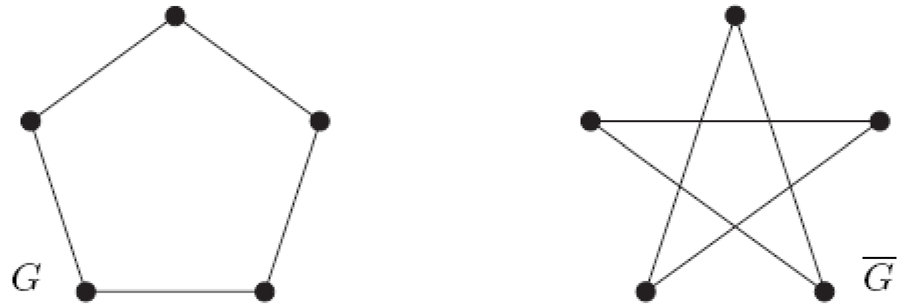
Một số đồ thị đặc biệt

- Các khối *n*-lập phương Q_n
  - Có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một dãy số nhị phân với độ dài n.
  - Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các dãy nhị phân biểu diễn chúng chỉ khác nhau đúng 1 bit.
  - Số đỉnh: $|V| = 2^n$
  - *Bậc: deg*(v) = n, $\forall v \in V$
  - Số cạnh: $|E| = n.2^{n-1}$



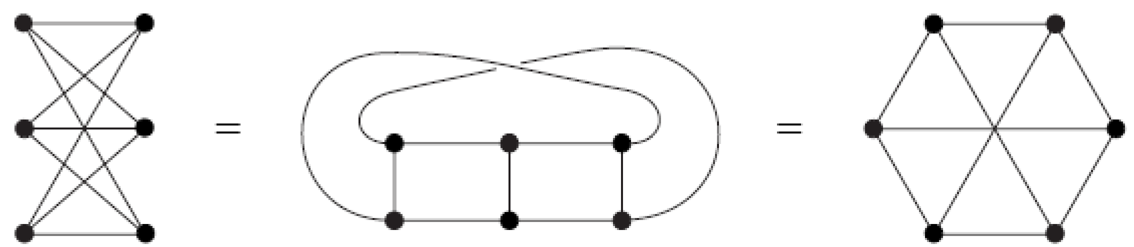
Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị bù
  - Hai đơn đồ thị G và G’ được gọi là bù nhau
    - chúng có chung các đỉnh
    - Cạnh nào thuộc G thì không thuộc G’ và ngược lại
  - Ký hiệu: G’ = $\overline{G}$



Một số đồ thị đặc biệt

- Đồ thị lưỡng phân
  - Một đồ thị G được gọi là đồ thị lưỡng phân nếu tập các đỉnh của G có thể phân thành 2 tập hợp không rỗng, rời nhau sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc tập này đến một đỉnh thuộc tập kia.
  - Ký hiệu: $K_{m,n}$



$K_{3,3}$

Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

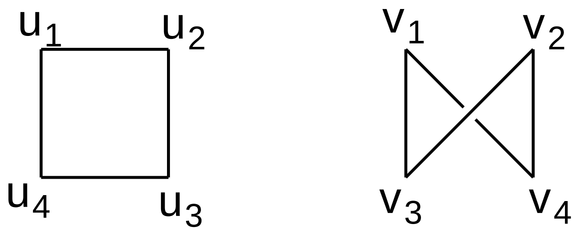
- Định nghĩa
  - *G*(*V*, *E*) *đẳng cầu* với *G'(V', E')*, ($G \approx G'$) nếu
    - Tồn tại song ánh $f: V \rightarrow V'$
    - Bảo toàn quan hệ liền kề:

$$\forall u,v \in V,\ uv \in E \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E'$$

  - G đẳng cấu với G' thì
    - $|V| = |V'|$
    - $|E| = |E'|$
    - $\deg(v) = \deg(f(v)),\ \forall v \in V$

Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Định nghĩa
  - Chứng minh 2 đồ thị đẳng cấu
    - Điều kiện cần
      - Xét số cạnh, số đỉnh, bậc của đỉnh
    - Điều kiện đủ
      - Xây dựng song ánh bảo toàn quan hệ liền kề
  - Ví dụ 1:



G = (V,E)　　H = (W,F)

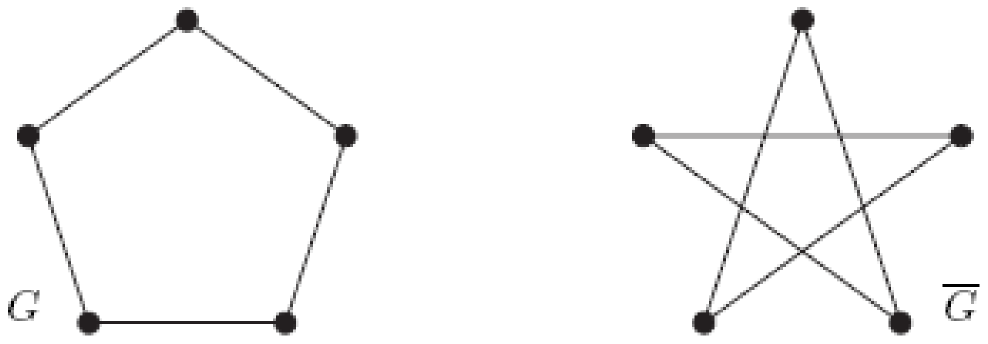
$$f: V \to W$$
$$u_1 \mapsto f(u_1) = v_2$$
$$u_2 \mapsto f(u_2) = v_4$$
$$u_3 \mapsto f(u_3) = v_1$$
$$u_4 \mapsto f(u_4) = v_3$$

$\Rightarrow$ Xây dựng $f: V \to W$ song ánh, bảo toàn quan hệ liền kề

$\Rightarrow G \approx H$

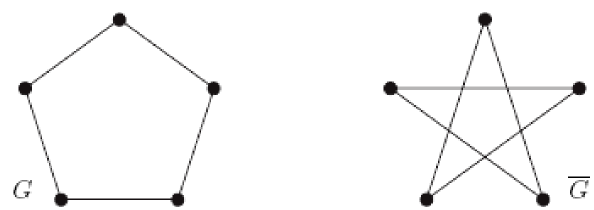
Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

- Định nghĩa
  - Chứng minh 2 đồ thị đẳng cấu
    - Ví dụ 2



Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

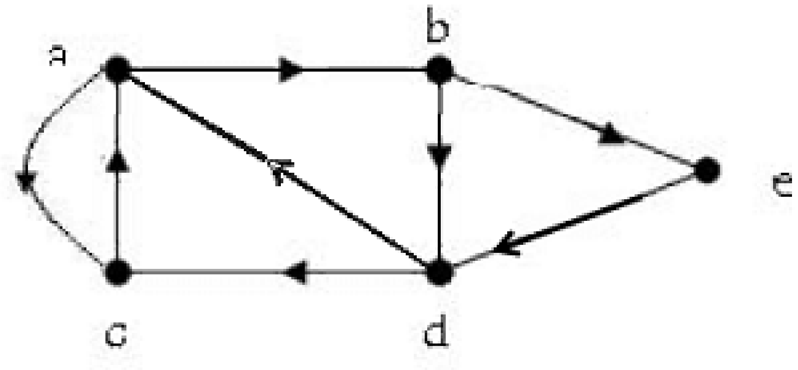
- Đồ thị tự bù
  - Định nghĩa
    - Đồ thị G tự bù nếu G đẳng cấu với phần bù của nó
    - Ví dụ



  - Định lý 1.4
    - Hai đồ thị có ma trận liền kề (theo một thứ tự nào đó của các đỉnh) bằng nhau thì đẳng cấu với nhau

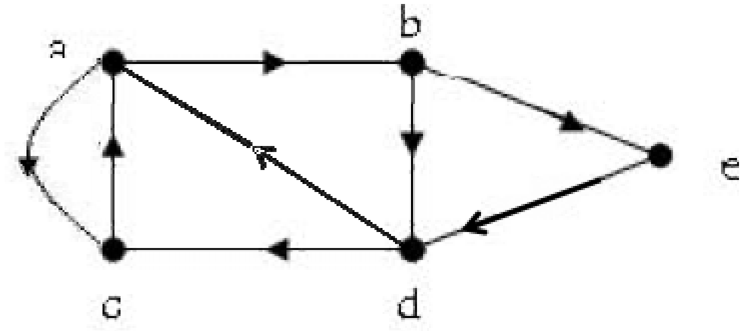
Đồ thị có hướng

- Định nghĩa
  - G = (V, E)
    - Tập đỉnh V
    - Tập cạnh (cung) E = { (a, b) | a,b $\in$ V }
  - e = (a, b) $\in$ E
    - Ký hiệu: e = $\overrightarrow{ab}$
    - e có hướng từ a đến b
    - a: đỉnh đầu;   b: đỉnh cuối
    - e là khuyên (vòng) $\Leftrightarrow$ a≡b
    - G được gọi là đầy đủ nếu đồ thị vô hướng của nó là đầy đủ



Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Bậc vào
    - $deg^{-}(v) = |\{ u \mid (u, v) \in E \}|$ = số cạnh có đỉnh cuối là v
  - Bậc ra
    - $deg^{+}(v) = |\{ u \mid (v, u) \in E \}|$ = số cạnh có đỉnh đầu là v



  - Chú ý: Một khuyên (vòng) tại một đỉnh sẽ góp thêm một đơn vị vào bậc vào và bậc ra của đỉnh này.

Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Định lý 1.5
    - Tổng bậc vào của các đỉnh bằng tổng bậc ra và bằng số cạnh của đồ thị

$$\sum_{i=1}^{|V|} \deg^{+}(v) = \sum_{i=1}^{|V|} \deg^{-}(v) = |E|$$

  - Đồ thị cân bằng

$$\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v), \forall v \in V$$

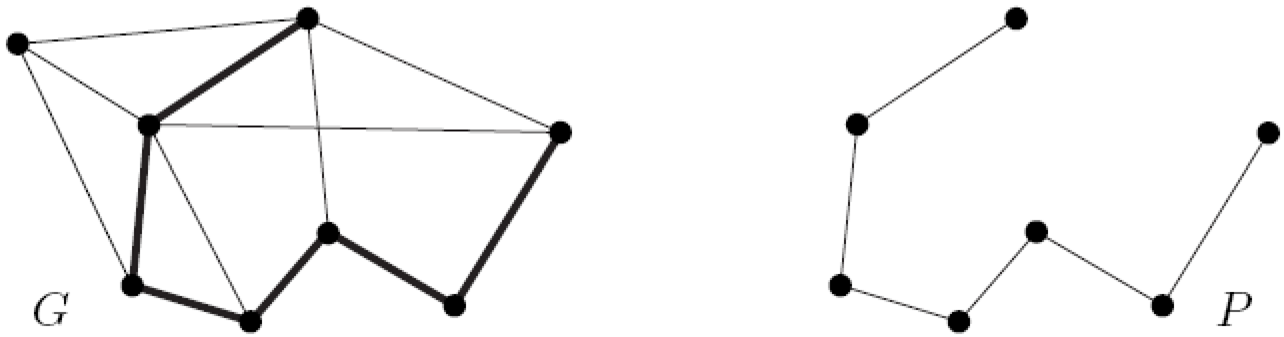
Đồ thị có hướng

- Bậc của đỉnh
  - Ví dụ
    - Có một nhóm gồm 9 đội bóng bàn thi đấu vòng tròn một lượt.
    - Hỏi sau khi có kết quả thi đấu của tất cả các đội có thể có trường hợp *bất kỳ đội nào trong 09 đội này cũng đều thắng đúng 05 đội khác trong nhóm được không?*

      (Lưu ý trong thi bóng bàn không có trận hòa)

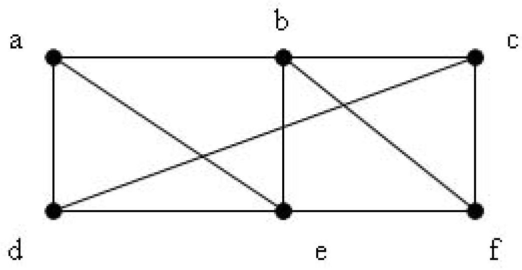
Đường đi và chu trình

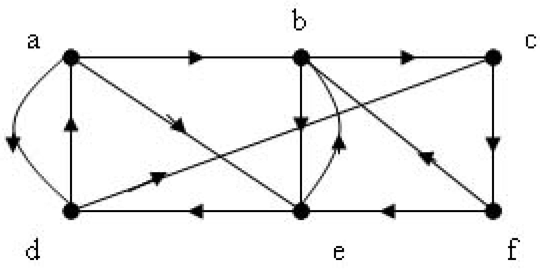
- Đường đi
  - Định nghĩa
    - Đường đi có độ dài n từ v_0 đến v_n với n là một số nguyên dương là một dãy các cạnh liên tiếp $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{n-1}v_n$
    - v_0: đỉnh đầu; v_n: đỉnh cuối
    - Ký hiệu: $v_0v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_n$
      đường đi v_0 - v_n



Đường đi và chu trình

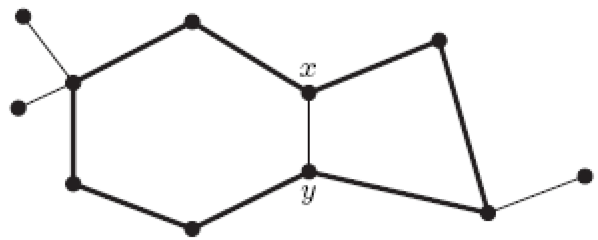
- Đường đi
  - Định nghĩa
    - Đường đi đơn giản (đường đi đơn)
      - Đường đi không qua cạnh nào quá một lần
    - Đường đi sơ cấp
      - Đường đi không qua đỉnh nào quá một lần
    - Đường đi sơ cấp ⇒ Đường đi đơn giản





Đường đi và chu trình

- Chu trình
  - Định nghĩa
    - Chu trình
      - đường đi khép kín ($v_0v_1v_2 \ldots v_{n-1}v_nv_0$)
      - độ dài ít nhất là 3



    - Chu trình đơn giản
      - Chu trình không đi qua cạnh nào quá 1 lần
    - Chu trình sơ cấp
      - Chu trình không đi qua đỉnh nào quá 1 lần (trừ đỉnh đầu, đỉnh cuối)

Đường đi và chu trình

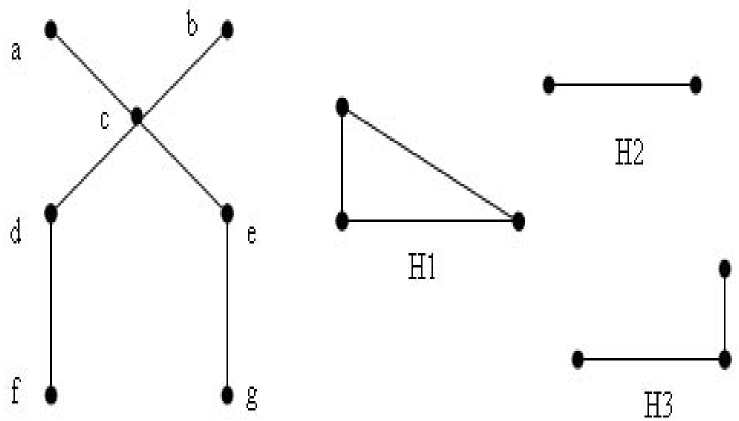
- Chu trình
  - Định lý 1.6
    - G = (V, E) là một đồ thị vô hướng
      - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 3
      - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 2

    thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp
  - Định lý 1.7
    - G = (V, E) là một đồ thị vô hướng
      - Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 4
      - Bậc của mọi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 3

    thì trong G luôn tồn tại một chu trình sơ cấp có độ dài chẵn

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định nghĩa
    - Hai đỉnh v, u trong đồ thị G được gọi là liên thông nếu tồn tại một đường đi nối chúng với nhau.
    - Đồ thị G gọi là liên thông nếu hai đỉnh phân biệt bất kỳ trong đồ thị đều liên thông. Ngược lại thì ta gọi là đồ thị không liên thông.

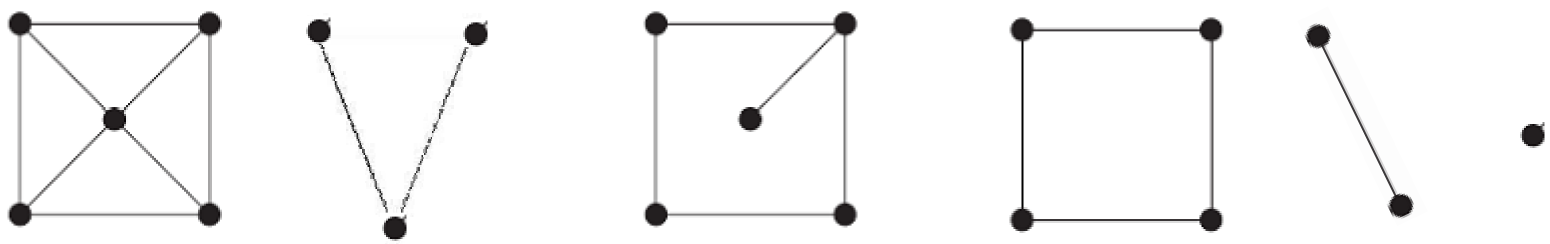


Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định nghĩa
    - Cho G = (V,E), v $\in$ V .
      - V' là tập con của V gồm đỉnh v và tất cả các đỉnh liên thông với v trong G.
      - E' là tập con của E gồm tất cả các cạnh nối các đỉnh thuộc V'.

      Khi đó G' = (V', E') gọi là **thành phần liên thông của G** chứa v.

  Chú ý: Nếu v và u liên thông trong G thì thành phần liên thông của G chứa v cũng là thành phần liên thông của G chứa u.



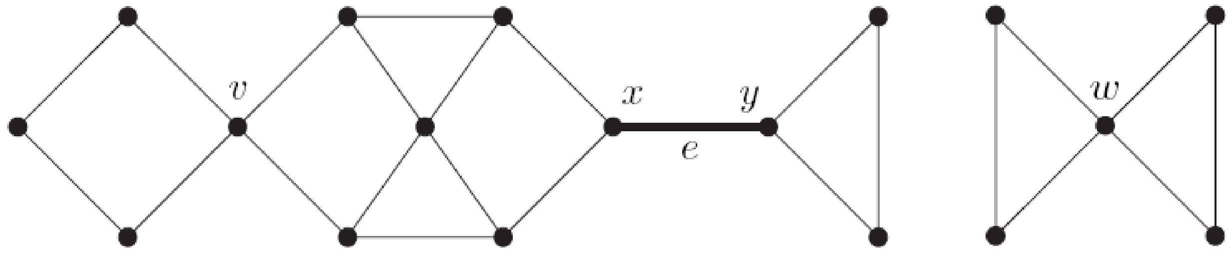
Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định lý 1.8
    - Đồ thị G=(V, E) là liên thông khi và chỉ khi G có duy nhất một thành phần liên thông.

    (Sv tự chứng minh)

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Đỉnh cắt và cầu
    - *u* là *đỉnh cắt* (điểm khớp) ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ *u* và các cạnh liên thuộc với nó.
    - *e* là cầu ⇔ số thành phần liên thông tăng lên nếu bỏ cạnh *e.*



Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định lý 1.9:
    - Đơn đồ thị $G = (V , E)$ có
      - $|V| = n \geq 2$
      - $\deg(u) + \deg(v) \geq n, \forall u,v \in V$

    thì G là đồ thị liên thông
  - Hệ quả:
    - Đơn đồ thị $G = (V , E)$, $|V| = n$ có

      $\deg(v) \geq n/2, \forall v \in V$

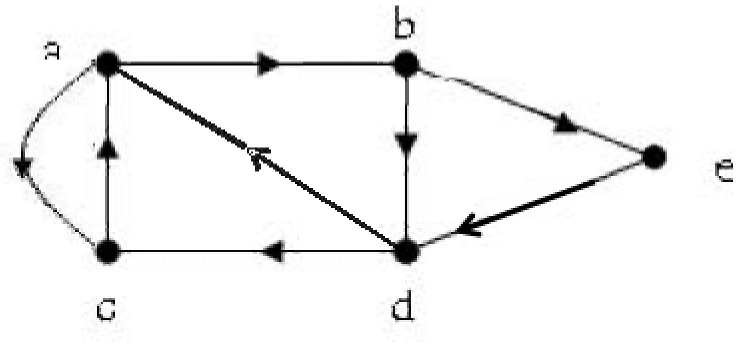
    thì G là đồ thị liên thông

Tính liên thông

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng
  - Định lý 1.10
    - *Nếu đồ thị G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ thì 2 đỉnh này phải liên thông với nhau*
  - Định lý 1.11
    - *Đồ thị G là một đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của nó đều có độ dài chẵn*

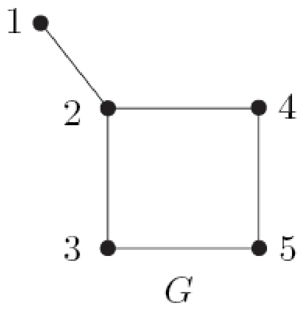
Tính liên thông

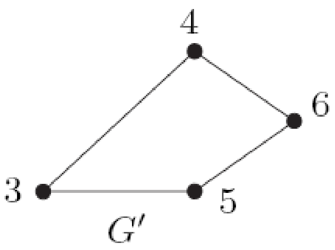
- Tính liên thông trong đồ thị có hướng
  - Liên thông mạnh
    - Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông mạnh nếu giữa 2 đỉnh u,v bất kỳ trong G luôn có đường đi từ v đến u và từ u đến v.
  - Liên thông yếu
    - Đồ thị có hướng G được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng của nó là liên thông

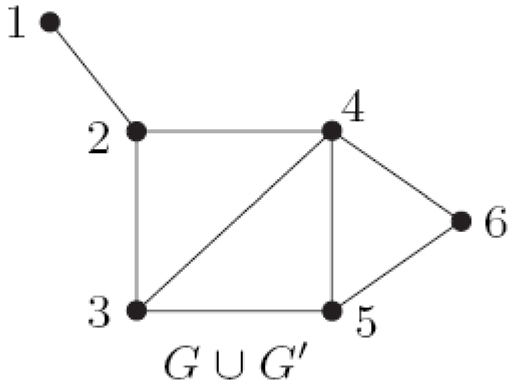


Một số phép biến đổi đồ thị

- Hợp của 2 đồ thị
  - G = (V, E)
  - G’ = (V’, E’)
  - G’’ = G ∪ G’ = (V’’, E’’)
    - V’’ = V ∪ V’
    - E’’ = E ∪ E’

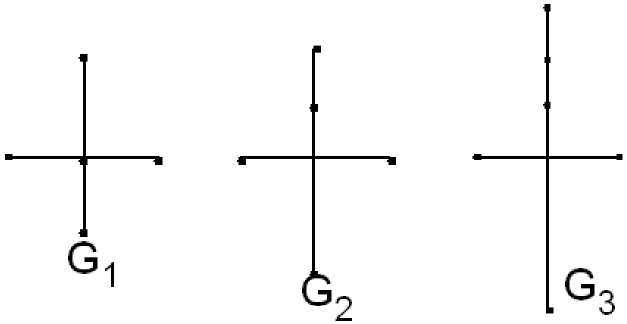






Một số phép biến đổi đồ thị

- Phép phân chia sơ cấp
  - Phép thay thế cạnh *e* = *uv* của G bởi một đỉnh mới *w* cùng với 2 cạnh *uw* và *vw*
- Đồng phôi
  - G và G’ gọi là đồng phôi nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp
  - Hai đồ thị đồng phôi chưa chắc đẳng cấu với nhau



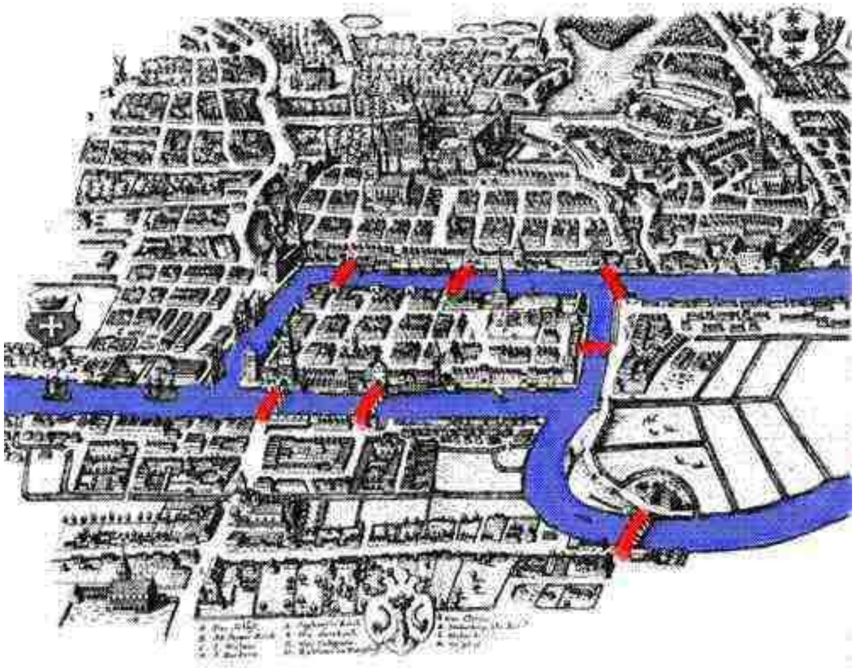
CHƯƠNG 5: CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

PHẦN 2:

- Chu trình và đường đi Euler
- Chu trình và đường đi Hamilton
- Thuật toán Dijkstra

Chu trình và đường đi Euler

- Bài toán
  - Có thể xuất phát tại một điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?
  - Leonhard Euler đã tìm ra lời giải cho bài toán vào năm 1736



Leonhard Euler
1707 - 1783

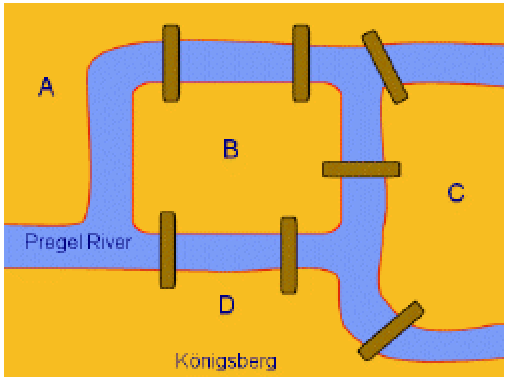
- Leonhard Euler (15/04/1707 – 18/9/1783) là một nhà toán học và nhà vật lý học Thụy Sĩ. Ông (cùng với Archimedes và Newton) được xem là một trong những nhà toán học lừng lẫy nhất. Ông là người đầu tiên sử dụng từ "hàm số" (được Gottfried Leibniz định nghĩa trong năm 1694) để miêu tả một biểu thức có chứa các đối số, như y = F(x). Ông cũng được xem là người đầu tiên dùng vi tích phân trong môn vật lý.

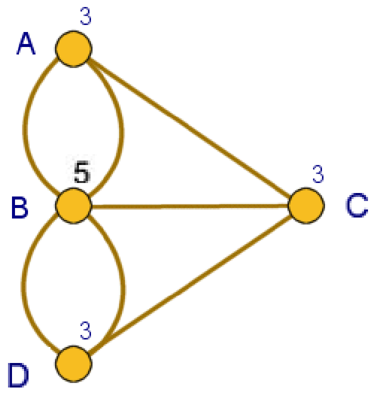
Leonhard Euler
1707 - 1783

- Ông sinh và lớn lên tại Basel, và được xem là thần đồng toán học từ nhỏ. Ông làm giáo sư toán học tại Sankt-Peterburg, sau đó tại Berlin, rồi trở lại Sankt-Peterburg. Ông là nhà toán học viết nhiều nhất: tất cả các tài liệu ông viết chứa đầy 75 tập. Ông là nhà toán học quan trọng nhất trong thế kỷ 18 và đã suy ra nhiều kết quả cho môn vi tích phân mới được thành lập. Ông bị mù hoàn toàn trong 17 năm cuối cuộc đời, nhưng khoảng thời gian đó là lúc ông cho ra hơn nửa số bài ông viết.
- Tên của ông đã được đặt cho một miệng núi lửa trên Mặt Trăng và cho tiểu hành tinh 2002.

Chu trình và đường đi Euler

- Bài toán
  - Mô hình hóa bài toán
    - Xây dựng đồ thị G
      - Đỉnh: Các vùng đất trong sơ đồ
      - Cạnh: các cây cầu nối giữa hai vùng đất
    - Yêu cầu
      - Tồn tại hay không một chu trình đơn trong đa đồ thị G = (V, E) có chứa tất cả các cạnh của đồ thị?





Chu trình và đường đi Euler

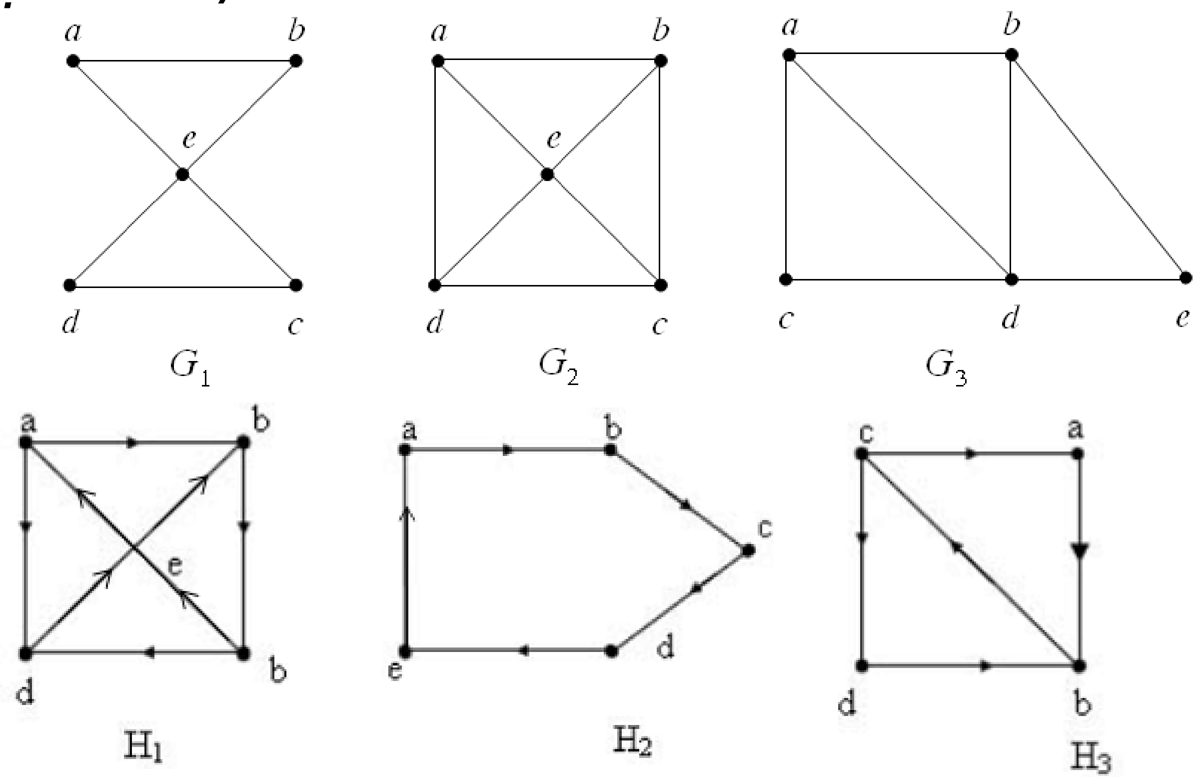
- Định nghĩa

  Cho đồ thị G=(V,E) liên thông

  - Chu trình Euler
    - Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.
  - Đồ thị Euler
    - Đồ thị có chứa một chu trình Euler
  - Đường đi Euler
    - Đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G

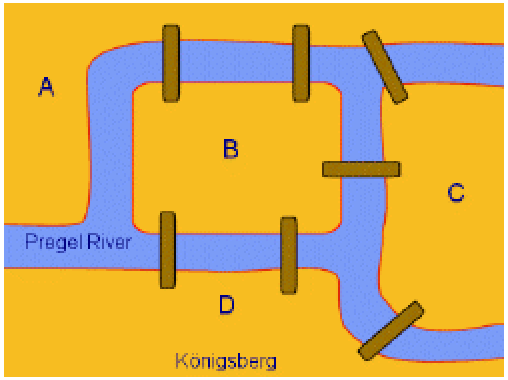
Chu trình và đường đi Euler

- Định nghĩa
  - Ví dụ: *Chỉ ra đường đi và chu trình Euler (nếu có) trong các đồ thị sau đây?*



Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về chu trình Euler
    - *Một đồ thị liên thông G=(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*
  - Áp dụng định lý trên tìm lời giải cho bài toán mở đầu?



5

C

D

Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

1. Thuật toán Euler

Ký hiệu: C – chu trình Euler cần tìm của đồ thị G.

Bước 1: Đặt H := G, k :=1, C := ∅. Chọn đỉnh v bất kỳ của G.

Bước 2: Xuất phát từ v, xây dựng chu trình đơn bất kỳ C_k trong H.

Nối C_k vào C, $C := C \cup C_k$.

Bước 3: Loại khỏi H chu trình C_k . Nếu H chứa các đỉnh cô lập thì loại chúng ra khỏi H.

Bước 4: Nếu H = ∅ thì kết luận C là chu trình Euler cần tìm, kết thúc.

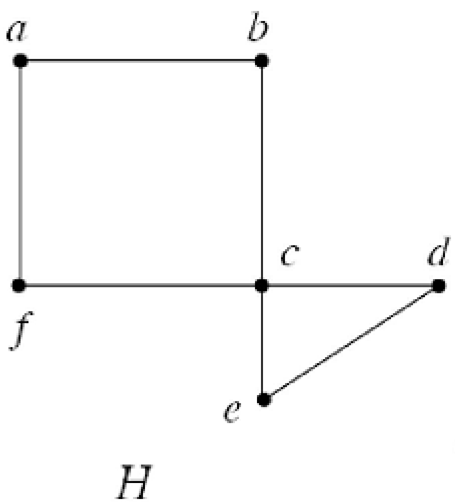
Nếu H ≠ ∅ thì chọn v là đỉnh chung của H và C. Đặt k:= k+1, quay lại bước 2.

Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

1. Thuật toán Euler

Ví dụ: Tìm chu trình Euler

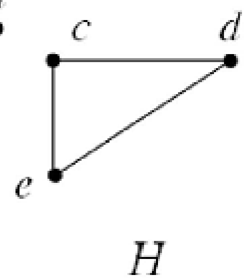


B1: H:=G. k:=1, C:= $\varnothing$, v:=a

B2: $C_1 = abcfa$, $C := C \cup C_1 = abcfa$

B3: Loại khỏi H chu trình $C_1 = abcfa$ và các đỉnh cô lập a, b,f

B4: $H \neq \varnothing$, chọn c đỉnh chung của H và C_1, k:=k+1.



B2': $C_2 = cdec$, $C := C \cup C_2 = abcfa \cup cdec$

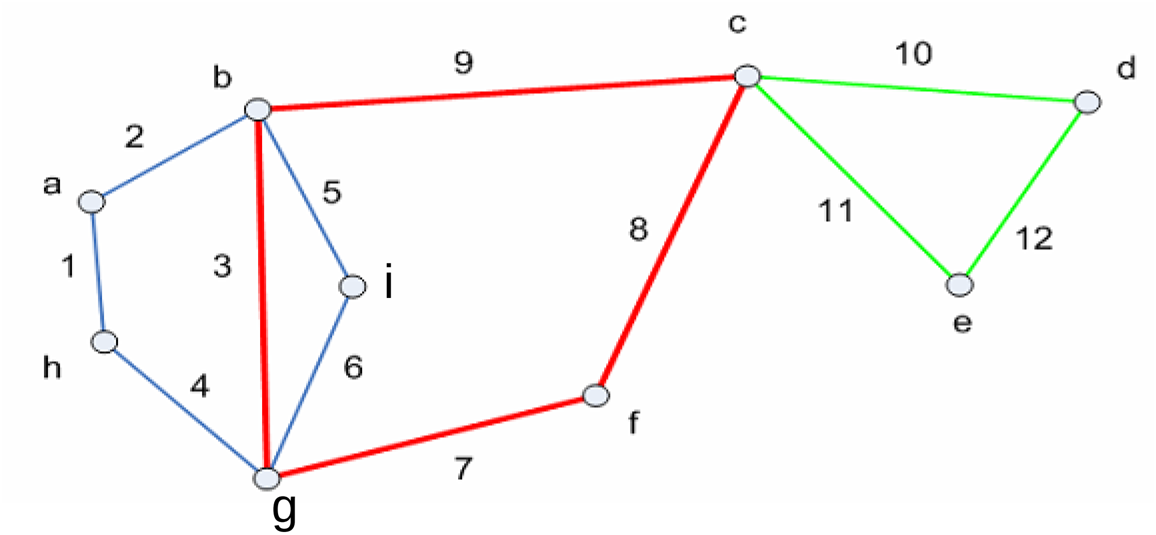
B3': Loại khỏi H chu trình C_2 và các đỉnh cô lập c, d,e

B4': $H = \varnothing$. Dừng

$$C = abcfa \cup cdec$$
$$= abcdecfa$$

Chu trình và đường đi Euler

Ví dụ: Tìm chu trình Euler



Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Các thuật toán tìm chu trình Euler:

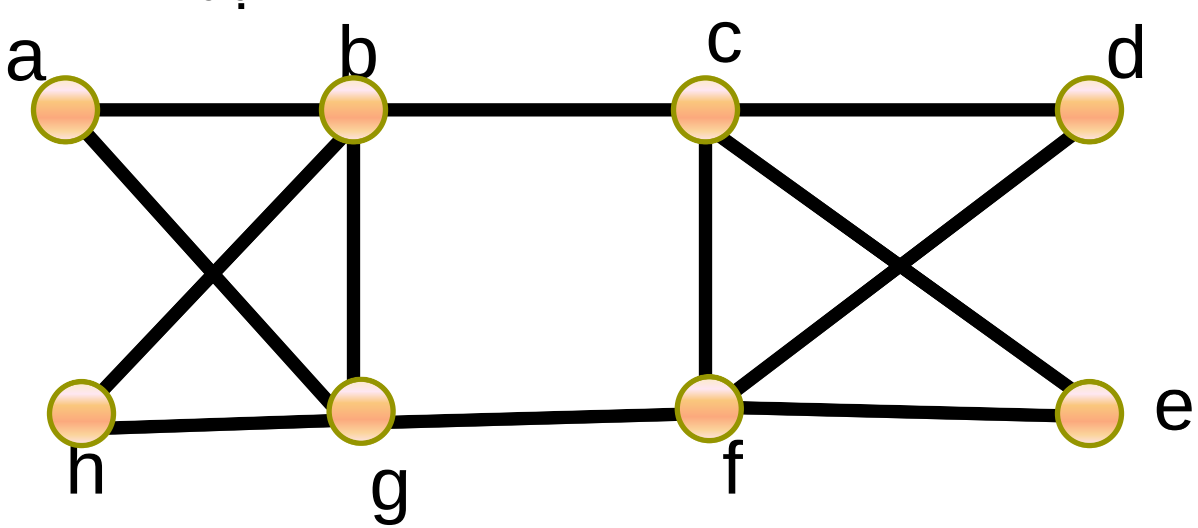
  2. Thuật toán Fleury: Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị và tuân theo hai quy tắc sau
    - Qui tắc 1: Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì
      - Xóa cạnh vừa đi qua
      - Xóa đỉnh cô lập (nếu có)
    - Qui tắc 2:
      - Tại mỗi đỉnh, ta chỉ đi theo một cạnh là cầu nếu không có sự lựa chọn nào khác.

- Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó sẽ làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị

Chu trình và đường đi Euler

2. Thuật toán Fleury:

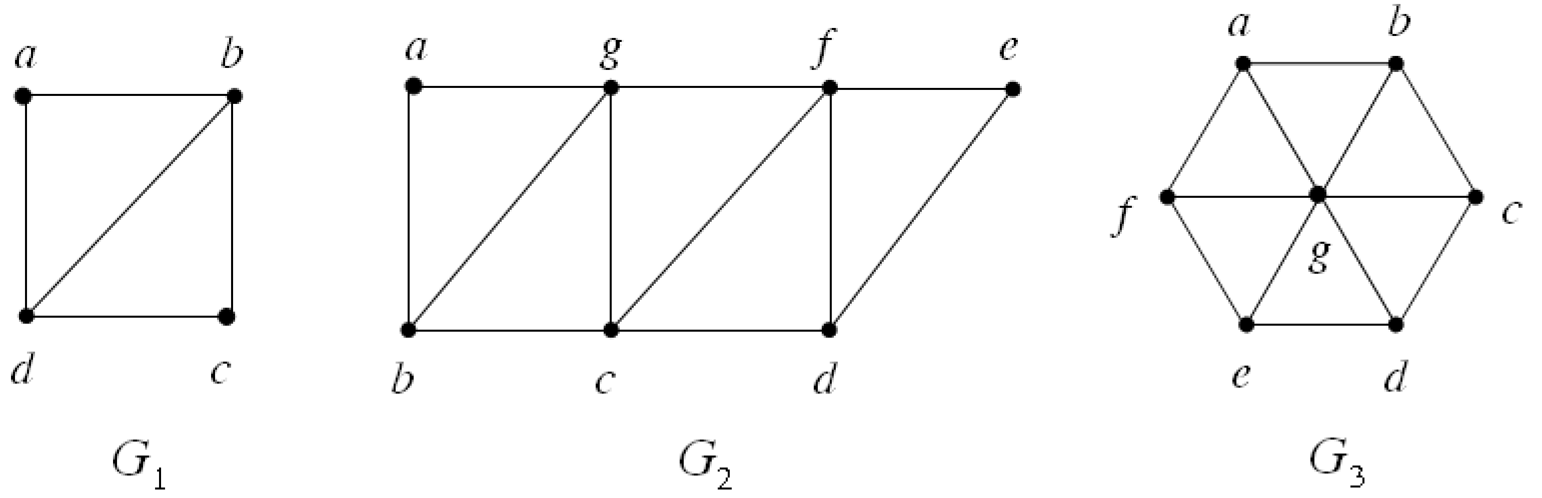
Ví dụ:



abcfdcefghbga

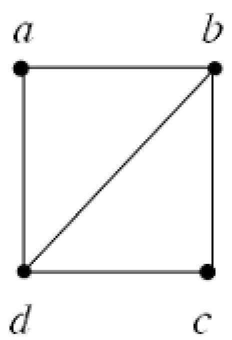
Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Đồ thị liên thông G có đường đi Euler, không có chu trình Euler khi và chỉ khi G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ
    - Ví dụ: Đồ thị nào có đường đi Euler



Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị vô hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Đồ thị liên thông G có đường đi Euler, không có chu trình Euler khi và chỉ khi G có đúng 2 đỉnh bậc lẻ
    - Ví dụ: Đồ thị nào có đường đi Euler



G_1

$G = G_1 \cup \alpha, \alpha = bd$

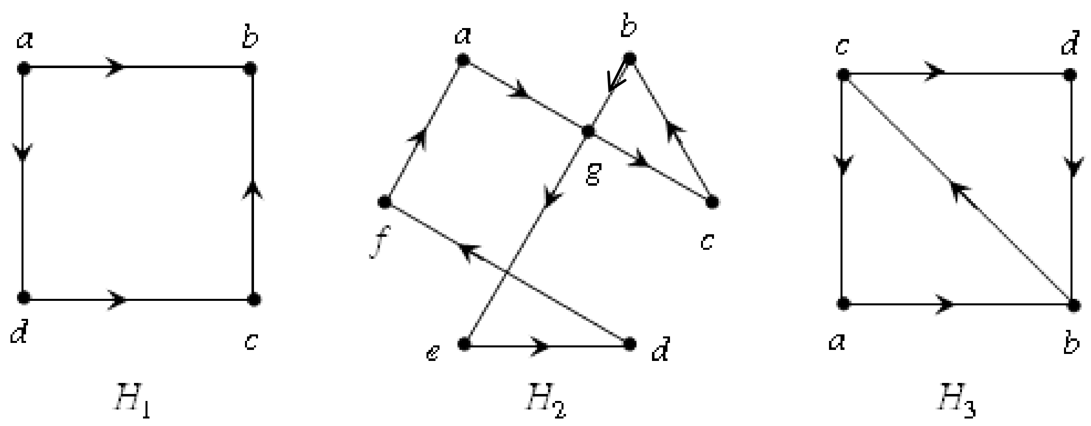
C_E của G: abdcb/da

P_E của G_1 dabdcb

bcdbad

Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về chu trình Euler
    - *Đồ thị có hướng G=(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi*
      - *G liên thông mạnh*
      - *$deg^+(v) = deg^-(v)$, $\forall v \in V$*
  - Ví dụ: Đồ thị nào có chu trình Euler

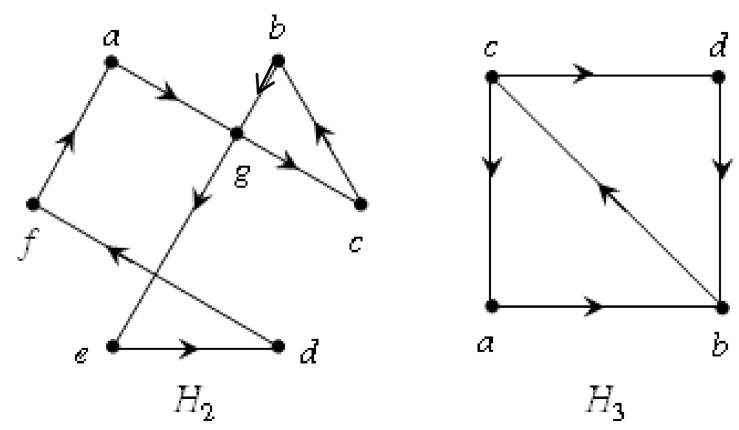


Chu trình và đường đi Euler

- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - G = (V, E) là đồ thị có hướng
    - G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi
      - G liên thông yếu
      - $\exists!\ s \in V$: $\deg^+(s) = \deg^-(s) + 1$
      - $\exists!\ t \in V$: $\deg^+(t) = \deg^-(t) - 1$
      - $\deg^+(v) = \deg^-(v),\ \forall v \in V \setminus \{s, t\}$

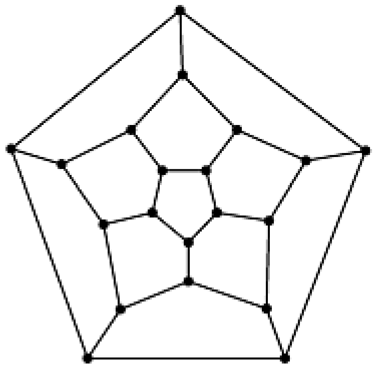
Chu trình và đường đi Euler

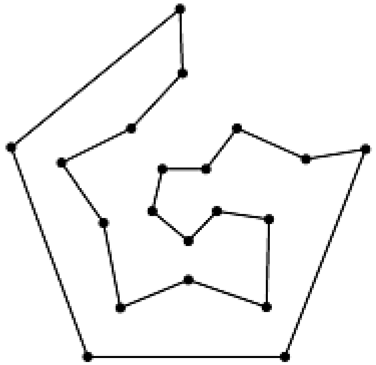
- Trong đồ thị có hướng
  - Định lý về đường đi Euler
    - Ví dụ



Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Định nghĩa
    - Chu trình Hamilton
      - Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton
    - Đồ thị Hamilton
      - Đồ thị có chứa chu trình Hamilton





Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Định lý Ore (1960)
      - Cho G = (V, E) là một đơn đồ thị liên thông
        - $|V| = n \geq 3$
        - $deg(v) + deg(w) \geq n$, với mọi cặp đỉnh không liền kề v, w

      Khi đó G có chu trình Hamilton

Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - *Hệ quả (Định lý Dirac-1952)*
      - Cho G = (V, E) là một đơn đồ thị
        - $|V| = n \geq 3$
        - $deg(v) \geq n/2, \forall v \in V$

      Khi đó G có chu trình Hamilton

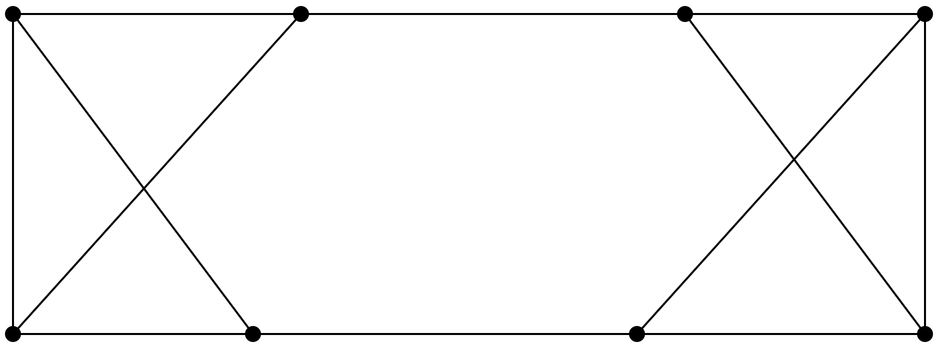
Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Định lý Pósa
      - Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, $|V| = n \geq 3$
        - $|\{v \in V: deg(v) \leq k\}| \leq k-1 \ \forall \ k \in [1, (n-1)/2)$
        - $|\{v \in V: deg(v) \leq (n-1)/2\}| \leq (n-1)/2$, nếu *n* lẻ

      Khi đó G có chu trình Hamilton

Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Điều kiện đủ
    - Ví dụ

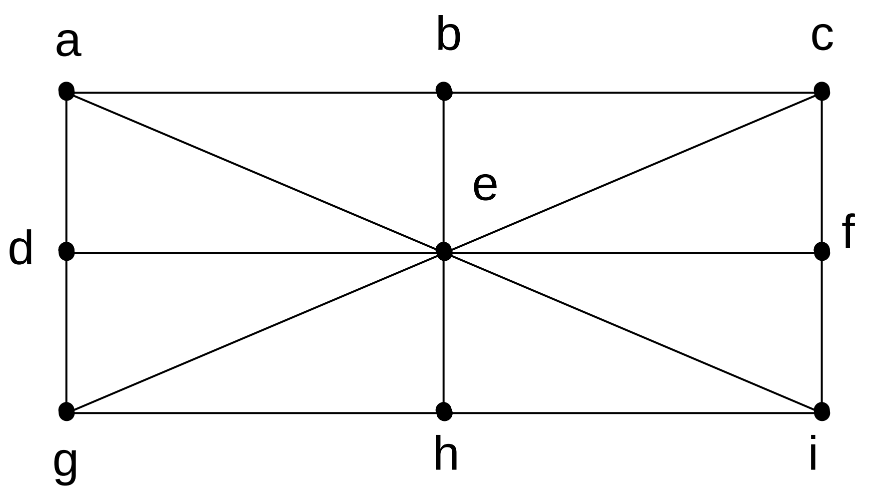


Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Qui tắc 1: Nếu tồn tại một đỉnh v của G có d(v)<=1 thì đồ thị G không có chu trình Hamilton.
    - Qui tắc 2: Nếu đỉnh v có bậc là 2 thì cả 2 cạnh tới v đều phải thuộc chu trình Hamilton.
    - Qui tắc 3: Chu trình Hamilton không chứa bất kỳ chu trình con thực sự nào.
    - Qui tắc 4: Trong quá trình xây dựng chu trình Hamilton, sau khi đã lấy 2 cạnh tới một đỉnh v đặt vào chu trình Hamilton rồi thì không thể lấy thêm cạnh nào tới v nữa, do đó có thể xóa mọi cạnh còn lại tới v.

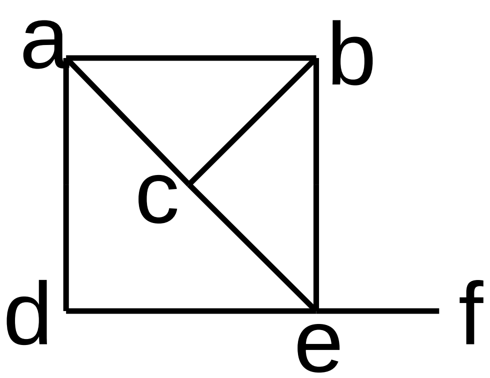
Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 1: Tìm một chu trình Hamilton



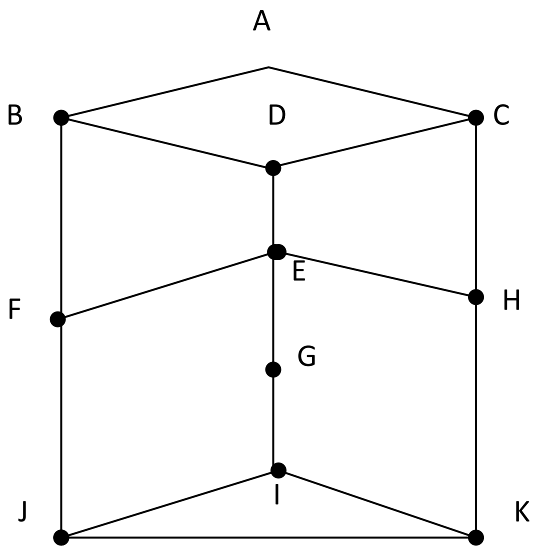
Chu trình & đường đi Hamilton

- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 2: Đồ thị sau có chu trình Hamilton không?



Chu trình & đường đi Hamilton

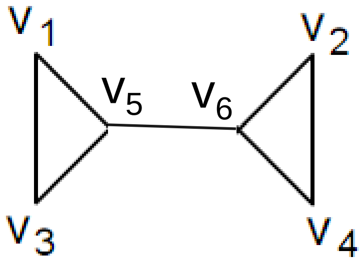
- Chu trình Hamilton
  - Phương pháp tìm chu trình Hamilton
    - Ví dụ 3: Đồ thị sau có chu trình Hamilton không?



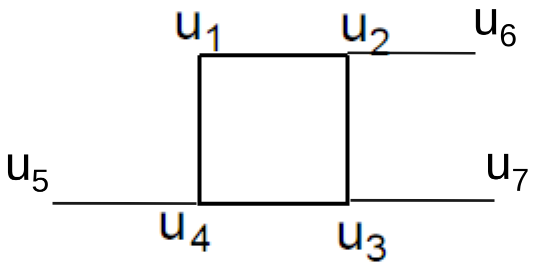
Chu trình & đường đi Hamilton

- Đường đi Hamilton
  - Định nghĩa
    - Đường đi sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị G (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần).

Ví dụ:



v_1 v_3 v_5 v_6 v_2 v_4

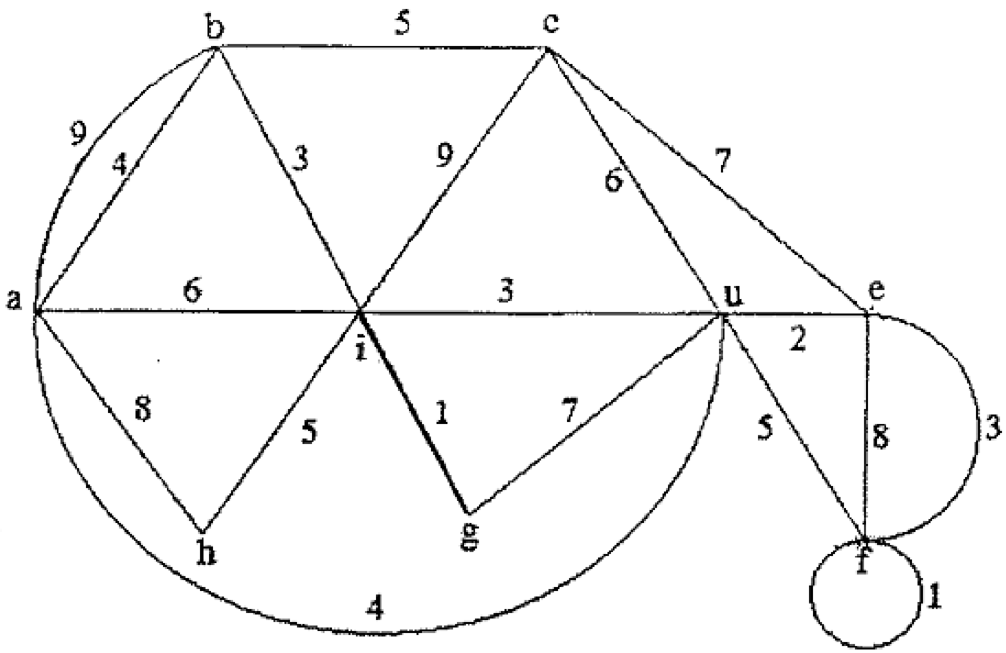


Không có đường đi Hamilton

Chu trình & đường đi Hamilton

- Đường đi Hamilton
  - Định lý König
    - Mọi đồ thị có hướng đầy đủ (đồ thị vô hướng tương ứng là đầy đủ) đều có đường đi Hamilton.

    Chứng minh (xem tài liệu)



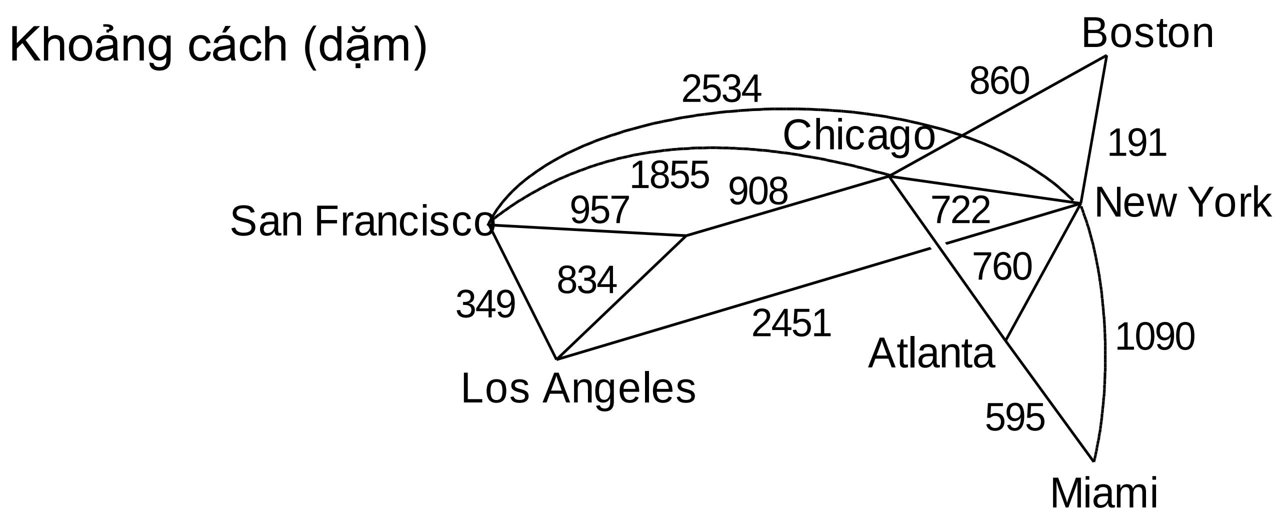
G

a) Hỏi G có chu trình (đường đi) Euler không? Tại sao? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Euler của G.

b) Hãy chỉ ra một chu trình (đường đi) Hamilton của G nếu có.

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Mở đầu
  - Nhiều bài toán không chỉ quan tâm tồn tại hay không đường đi giữa 2 đỉnh
  - Lựa chọn đường đi với chi phí ít nhất



Bài toán đường đi ngắn nhất

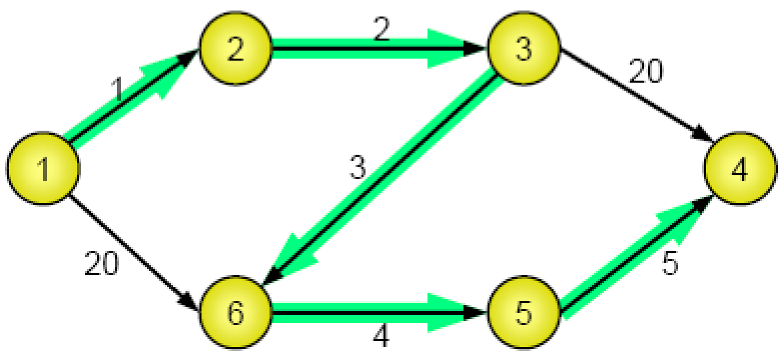
- Mở đầu
  - Mô hình hóa bài toán về đồ thị có trọng số
  - Đồ thị có hướng $G = (V,E)$ với hàm trọng số $W: E \to R$ (gán các giá trị thực cho các cạnh)
  - Trọng số của đường đi $p = v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_k$ là

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1})$$

  - Đường đi ngắn nhất là đường đi có trọng số nhỏ nhất

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Mở đầu
  - Ví dụ: Đường đi ngắn nhất giữa đỉnh 1 và 4:



Bài toán đường đi ngắn nhất

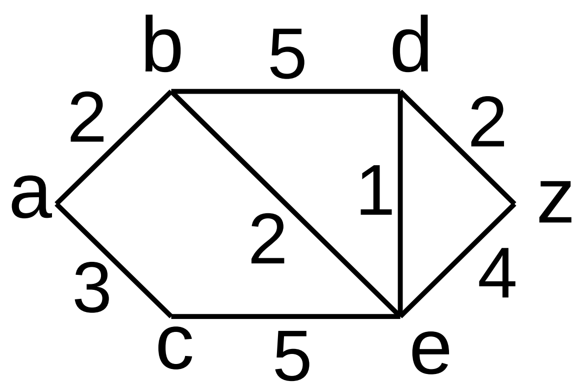
- Thuật toán Dijkstra: Giả sử xuất phát từ đỉnh a
  - Ý tưởng
    - Ở mỗi lần lặp thì thuật toán sẽ tìm ra 1 đỉnh với đường đi ngắn nhất từ *a* tới đỉnh này là xác định.
  - Ký hiệu:
    - Nhãn của đỉnh *v*: L(*v*)
      - Lưu trữ độ dài đường đi ngắn nhất từ *a* đến *v* được biết cho đến thời điểm hiện tại
    - Tập S: tập các đỉnh mà đường đi ngắn nhất từ *a* đến chúng đã xác định

Bài toán đường đi ngắn nhất

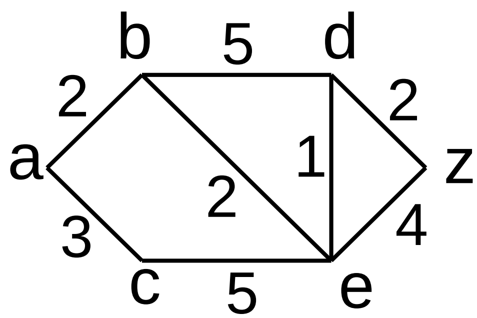
- Thuật toán Dijkstra
  - Thuật toán (Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z)
    - Bước 1: Khởi tạo
      - L(a) = 0; L(v)=vo cung lon, S = $\varnothing$
    - Bước 2: Nếu z$\in$S thì kết thúc
    - Bước 3: Chọn đỉnh
      - Chọn u sao cho: L(u) = min { L(v) | v $\notin$ S}
      - Đưa u vào tập S: S = S $\cup$ {u}
    - Bước 4: Sửa nhãn
      - Với mỗi đỉnh v (v $\notin$ S) kề với u
        - L(v) = min { L(v); L(u) + w(uv) } (ký hiệu w(uv)=trọng số cạnh uv)
    - Bước 5: Quay lại Bước 2

Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán Dijkstra
  - Ví dụ
    - Tìm đường đi ngắn nhất giữa đỉnh *a* và *z*?



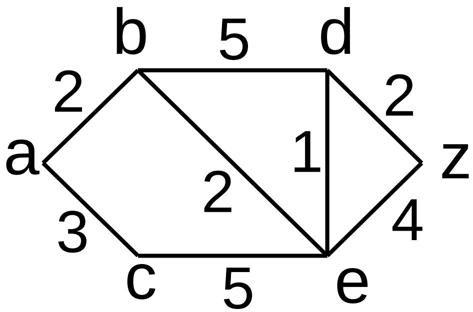
Đáp án: đường đi ngắn nhất: abedz, độ dài 7.



đường đi ngắn nhất giữa đỉnh *a* và *z*

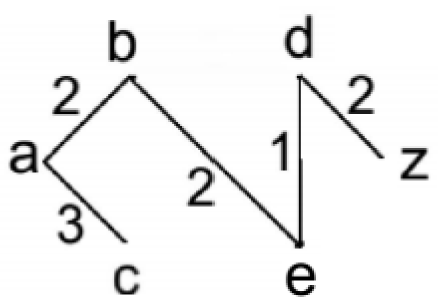
Bước lặp	a	b	c	d	e	z	Tập S
Khởi tao	0,a*	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	{ }
1	–	2,a*	3,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	{a}
2		–	3,a*	7,b	4,b	∞ ,a	{a, b}
3			–	7,b	4,b*	∞ ,a	{a,b,c}
4				5,e*	–	8, e	{a,b,c,e}
5				–		7, d*	{a,b,c,e,d}
6						–	{a,b,c,e,d,z}

Đường đi ngắn nhất: abedz, độ dài 7.
Nếu hỏi độ dài ngắn nhất đi từ a đến d thì đáp số là……?? Và đường đi là……….



đường đi ngắn nhất từ a đến tất cả các đỉnh còn lại.

Bước lặp	a	b	c	d	e	z	Tập S	Cạnh
Khởi tao	0,a*	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	{ }	{ }
1	–	2,a*	3,a	∞ ,a	∞ ,a	∞ ,a	{a}	{ }
2		–	3,a*	7,b	4,b	∞ ,a	{a, b}	ab
3			–	7,b	4,b*	∞ ,a	{a,b,c}	ac
4				5,e*	–	8, e	{a,b,c,e}	be
5				–		7, d*	{a,b,c,e,d}	ed
6						–	{a,b,c,e,d,z}	dz



a -> Đỉnh	Đường đi	Độ dài
b	ab	2
c	ac	3
d	abed	5
e	abe	4
z	abdez	7

Ví dụ

Cho ma trận kề của đơn đồ thị có trọng số G có dạng

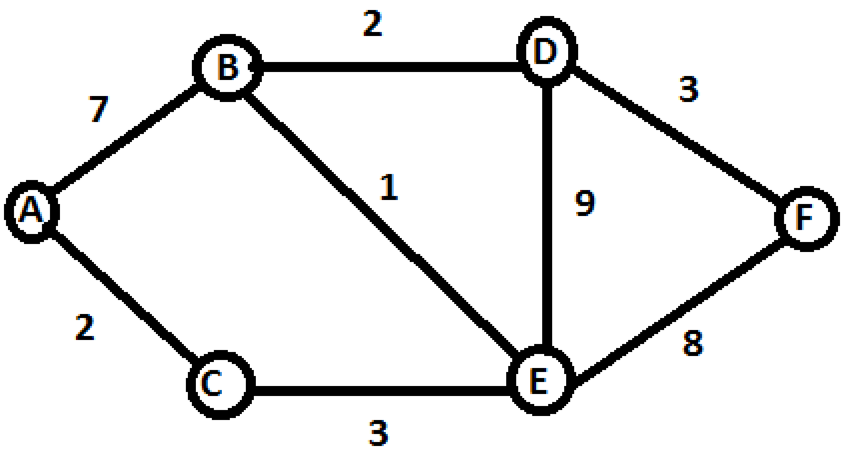
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Vẽ đồ thị G

Dùng thuật toán Dijkstra:

b) Tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến các đỉnh còn lại của G? Chỉ ra các đường đi đó.

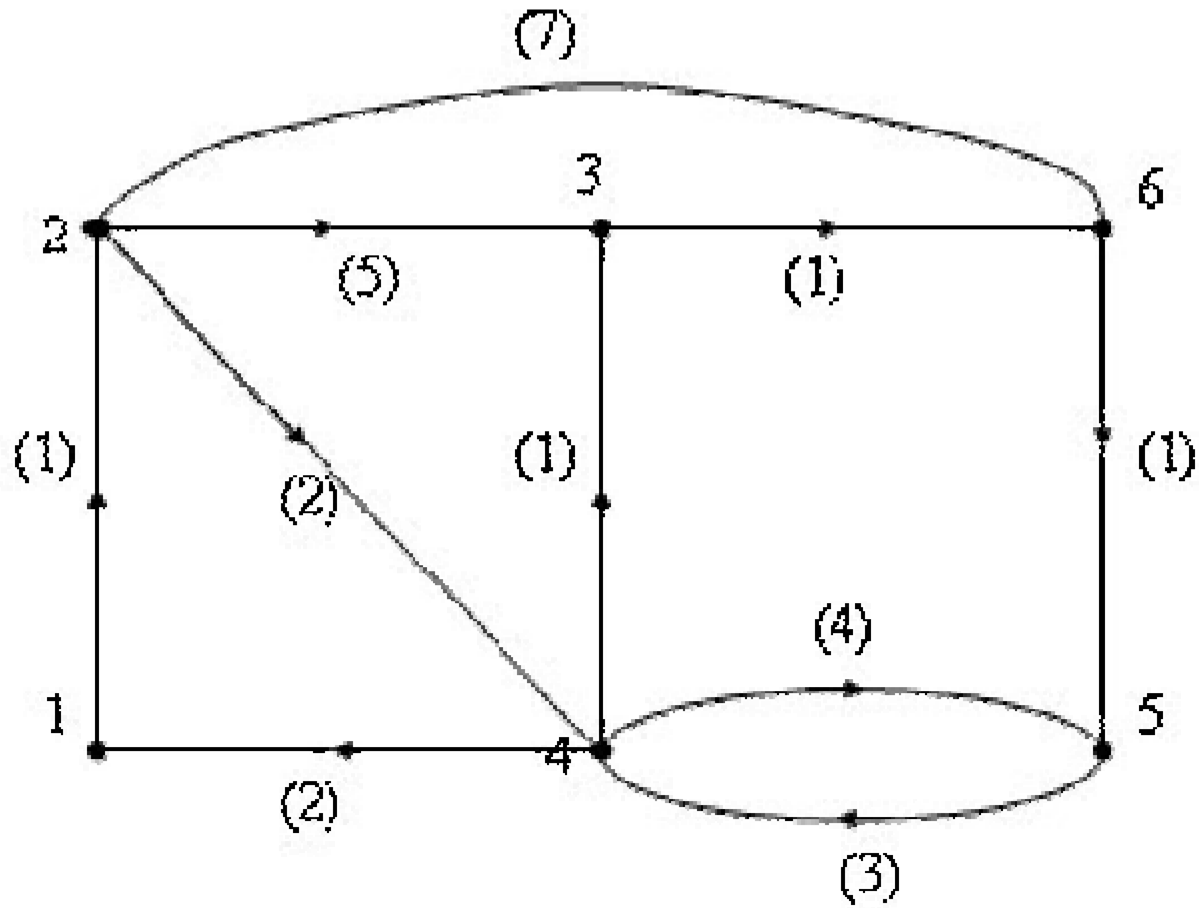
$$
\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 \\
0 & 1 & 3 & 9 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



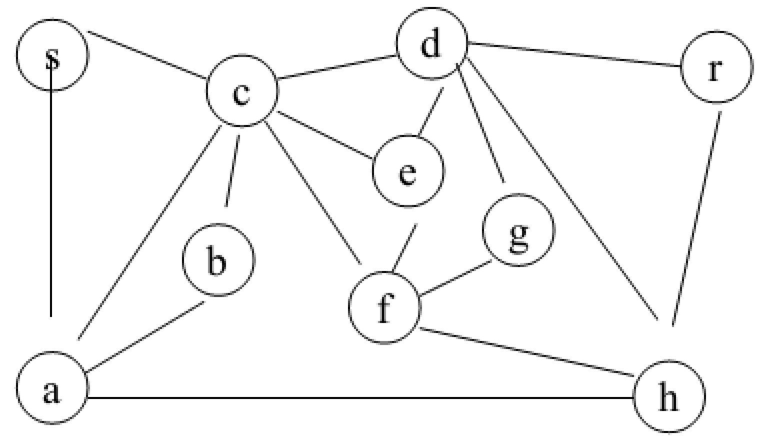
Bài toán đường đi ngắn nhất

- Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất
  - Thuật toán Dijkstra
    - Định lý
      - Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh trong đồ thị liên thông, có trọng số.
    - Nhận xét
      - Chỉ đúng cho đồ thị có trọng số không âm
      - Nhãn sau cùng của mỗi đỉnh là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh xuất phát đến nó.

Tìm đường đi ngắn nhất từ 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị ở hình dưới



9. Chứng minh rằng đồ thị G cho trong hình sau có đường đi Hamilton (từ s đến r) nhưng không có chu trình Hamilton.



10. Cho thí dụ về:

1) Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton;

2) Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton, nhưng hai chu trình đó không trùng nhau;

3) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Hamilton, nhưng không phải là đồ thị Euler;

4) Đồ thị có 6 đỉnh, là đồ thị Euler, nhưng không phải là đồ thị Hamilton.