GIỚI THIỆU MÔN HỌC

Xác suất thống kê

Nguyễn Ngọc Ái Vân

Chương trình

Xác suất

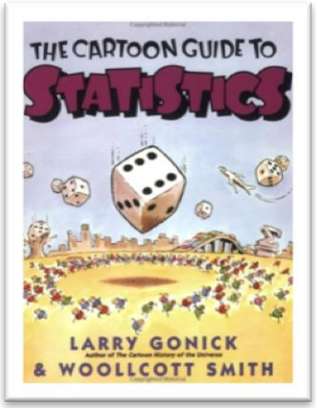
- 1. Xác suất cơ bản
- 2. Đại lượng ngẫu nhiên và Các quy luật phân phối
- 3. Tham số đặc trưng của ĐLNN
- 4. Các luật phân phối xác suất đặc biệt

Thống kê

- 5. Lý thuyết mẫu
- 6. Lý thuyết ước lượng
- 7. Kiểm định giả thiết thống kê
- 8. Hồi quy và tương quan

Tài liệu tham khảo

- *Các mô hình xác suất và ứng dụng. Phần I, II, III*. Nguyễn Duy Tiến, Đặng Hùng Thắng (2002). NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Probability and Statistics for Computer Scientists, *Author: Michael Baron, University of Texas at Dallas, USA* . 2014, 2nd Edition
- Cartoon guide to Statistics.



Đánh giá

- **Điểm quá trình: 20%**
  - **Điểm active: 10%**
  - **Điểm kiểm tra trên lớp: 10%**
- **Thi giữa kì: 20%**
- **Thi cuối kì: 60%**

Chương 1

XÁC SUẤT CƠ BẢN

Mục tiêu

- Tính toán các xác suất cơ bản
- Xây dựng các biến cố để giải bài toán xác suất
- Vận dụng các công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes
- Vận dụng được công thức Bernoulli

Nội dung

- Phép đếm
  - Nguyên lý cộng, nguyên lý nhân
  - Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp
- Biến cố
  - Phép thử và không gian mẫu
  - Biến cố: khái niệm, tính chất, các phép toán trên biến cố
- Xác suất
  - Các hướng tiếp cận xác suất
  - Xác suất có điều kiện
  - Công thức xác suất đầy đủ và Công thức Bayes

PHÉP ĐẾM

- Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân
- Hoán vị
- Chỉnh hợp
- Tổ hợp

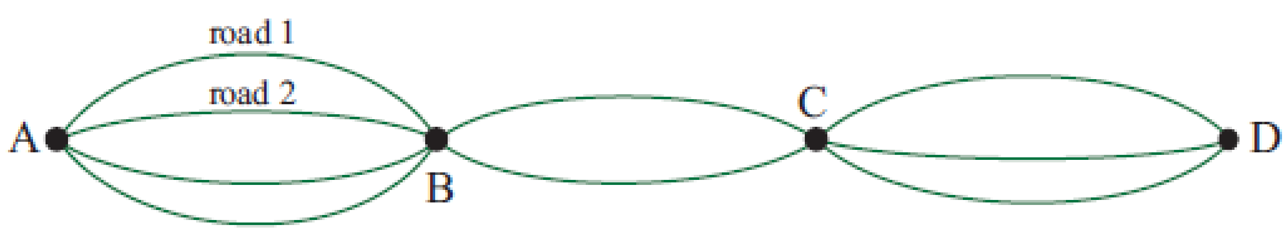
Nguyên lý nhân

- Một công việc được chia thành ***k giai đoạn***
- Giai đoạn i có m_i cách thực hiện $(i = 1,2,\dots,k)$

Tổng cộng có:

$$\boldsymbol{m_1 m_2 \dots m_k = \prod_{i=1}^{k} m_i}$$

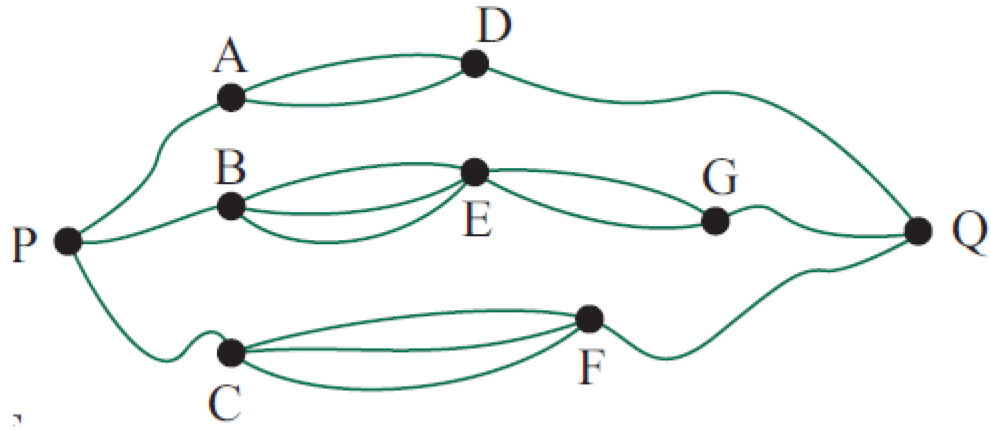
cách thực hiện công việc trên.



$4 \times 2 \times 3 = 24$ different pathways from A to D passing through B and C.

Nguyên lý cộng

- Để đi từ P đến Q, có 3 cách:
  - Hoặc đi qua A: 2 cách
  - Hoặc đi qua B: $3 \times 2 = 6$ cách
  - Hoặc đi qua C: 3 cách
- Vậy tổng cộng có: 2 + 6 + 3 = 11 cách đi từ P đến Q.



Nguyên lý cộng vs Nguyên lý nhân

- Nguyên lý cộng: chia trường hợp (hoặc làm cái này hoặc làm cái kia…)
- Nguyên lý nhân: chia giai đoạn

Bài toán

Một mẫu áo sơ mi đặc biệt có 12 màu, có 3 cỡ cho nam và 4 cỡ cho nữ. Hỏi có bao nhiêu loại khác nhau của mẫu áo này?

Đáp số: $12 \times 3 + 12 \times 4 = 84$ mẫu áo.

Hoán vị

Ví dụ: Ba bạn cùng ngồi trên một chiếc xe đạp 3 chỗ. Theo nguyên lý nhân, số cách xếp chỗ là:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Tổng quát

Vị trí 1	Vị trí 2	$\cdots$	Vị trí n
n lựa chọn	$n-1$ lựa chọn	$\cdots$	1 lựa chọn

- Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử vào n vị trí *khác nhau* được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
- Số hoán vị của n phần tử: $P_n = n!$
- Quy ước: $0! = 1$

Chỉnh hợp

- Định nghĩa: Một chỉnh hợp chập k của n phần tử là một bộ được sắp thứ tự gồm k phần tử đôi một khác nhau chọn ra từ tập n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.
- Nhận xét: Hai chỉnh hợp khác nhau do *thứ tự sắp xếp* hoặc do có *ít nhất một phần tử khác nhau*.
- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$P(n,k) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$$

Ví dụ: Có bao nhiêu cách xếp 10 sinh viên vào phòng học 15 vị trí ?

- Số chỉnh hợp chập k của n phần tử
  = số cách chọn ra k phần tử khác nhau trong n phần tử có tính thứ tự.

Ví dụ:
Có bao nhiêu password gồm 6 chữ số khác nhau được lập thành từ 10 chữ số 0,1,2,...,9 ?

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa**: Một *chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử* là một bộ được sắp thứ tự gồm k phần tử (có thể giống hoặc khác nhau) chọn ra từ tập n phần tử.

- Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: n^k

Ví dụ:
Có bao nhiêu password gồm 6 chữ số được lập thành từ 10 chữ số 0,1,2,...,9 ?

Chỉnh hợp lặp

- **Example:**

From an alphabet consisting of 10 digits, 26 lower-case and 26 capital letters, one can create 62^8 different 8-character passwords. At a speed of 1 million passwords per second, it will take a spy program almost 7 years to try all of them. Thus, on the average, it will guess your password in about 3.5 years.

Tổ hợp

- Định nghĩa: Một tổ hợp chập k của n phần tử là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử đôi một khác nhau chọn ra từ tập n phần tử $(1 \leq k \leq n)$.
- Nhận xét: Hai tổ hợp khác nhau chỉ khi có *ít nhất một phần tử khác nhau* (thứ tự không quan trọng!)
- Số tổ hợp chập k của n phần tử:

$$C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

Tổ hợp

- **Example:**

An antivirus software reports that 3 folders out of 10 are infected. How many possibilities are there ?

In this case, the order is not important. The number of possibilities is C(3,10) = 120.

- **Example:**

Trong 1 lô hàng gồm 100 sản phẩm, trong đó có 3 sản phẩm bị lỗi. Chọn ra 5 sản phẩm để kiểm tra. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong đó có 2 sản phẩm bị lỗi.

Tổ hợp lặp

Ví dụ : Liệt kê tất cả các đơn thức bậc 3 theo 4 biến X , Y , Z, T với hệ số bằng 1 ?

XYZ, XYT, XZT , XYY = XY^2, XZZ=XZ^2 , XTT= XT^2

XXY = X^2Y, XXZ= X^2Z , XXT = X^2T

XXX

YZT, YZZ, YTT, YYZ=Y^2Z, YYT= Y^2T, YYY = Y^3 ,

ZTT, ZZT, ZZZ, TTT

Định nghĩa: Một *tổ hợp lặp chập k của n phần tử* là một bộ không sắp thứ tự gồm k phần tử (có thể giống hoặc khác nhau) chọn ra từ tập n phần tử.

- Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử: C_{n+k-1}^{k}

- Mỗi đơn thức trong VD tương ứng với việc chọn ra 3 phần tử có thể trùng từ {X,Y,Z,T} ko kể thứ tự.
- Việc chọn như thế cũng tương ứng với việc chọn ra 1 bộ các số tự nhiên $(k_1,\ldots,k_n)$ sao cho

$$k_1 + k_2 + \ldots. + k_n = k$$

với k_i là số mũ của biến thứ i.

- Một *tổ hợp lặp chập k của n phần tử* là một cách chọn ra 1 bộ các số tự nhiên $(k_1,\ldots,k_n)$ sao cho

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$$

Tổ hợp lặp

- VD: Có bao nhiêu cách xếp k viên bi giống nhau vào trong n hộp khác nhau ?

$$\begin{array}{cccc} H_1 & H_2 & \ldots\ldots & H_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ k_1 & k_2 & \ldots\ldots & k_n \end{array}$$

Mỗi cách xếp tương ứng với việc chọn 1 bộ các số tự nhiên ($k_1,\ldots,k_n$) sao cho

$$k_1 + k_2 + \ldots. + k_n = k$$

Mỗi cách xếp là một tổ hợp lặp chập k của n phần tử. Do đó số cách xếp là C_{n+k-1}^{k}

Quick review

- Một hoán vị = một cách xếp thứ tự
  - Số hoán vị của n phần tử: n!
- Một chỉnh hợp = một cách chọn ***có thứ tự*** k phần tử từ n phần tử.
  - Số chỉnh hợp: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Một tổ hợp = một cách chọn k phần tử từ n phần tử mà ***không quan tâm đến thứ tự***
  - Số tổ hợp: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Bài tập

1. Tám người vào một căn phòng, mỗi người bắt tay với mỗi người còn lại. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?
2. Có bao nhiêu tập con của một tập hợp có n phần tử?
3. Trong một lớp học có 11 nam và 22 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách:
   a. Chọn ra 3 bạn tùy ý
   b. Chọn ra 3 bạn làm lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ
   c. Trong 3 bạn có nhiều nhất 2 bạn nữ

Biến cố (event)

- Phép thử ngẫu nhiên và Không gian mẫu
- Biến cố
- Các phép toán trên biến cố
- Tính chất của biến cố

Phép thử ngẫu nhiên

- Ví dụ 1: Tung một con xúc xắc cân bằng hay tung 1 đồng xu.
  Không thể biết trước kết quả mỗi lần tung.
  Có thể biết trước tập tất cả các kết quả có thể xảy ra.

- Ví dụ 2: Chọn một sản phẩm bất kì trong 1 lô hàng để kiểm tra.

Phép thử ngẫu nhiên là thí nghiệm, quan sát, hành động,... mà không biết trước được kết quả xảy ra.

Phép thử ngẫu nhiên và Không gian mẫu

Không gian mẫu: tập hợp tất cả các khả năng có thể xảy ra của một phép thử, kí hiệu Ω

VD: tung 1 đồng xu, Ω = {ngửa, sấp}

tung 1 xúc xắc, Ω = {1,2,3,4,5,6}

Mỗi phần tử thuộc Ω được gọi là **biến cố sơ cấp**.

Một tập con của không gian mẫu Ω được gọi là **biến cố.**

VD: tung 1 xúc xắc, Ω = {1,2,3,4,5,6}

Biến cố xuất hiện mặt chẵn/ lẻ

VD: tung 2 đồng xu Ω = {NN,NS,SN,SS}

-> Biến cố có ít nhất 1 mặt ngửa {NN, NS,SN}

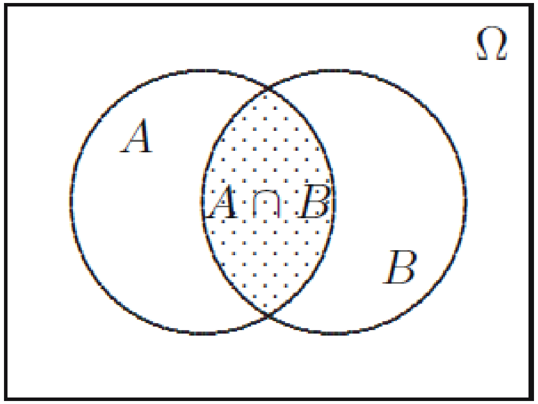
Phân loại biến cố

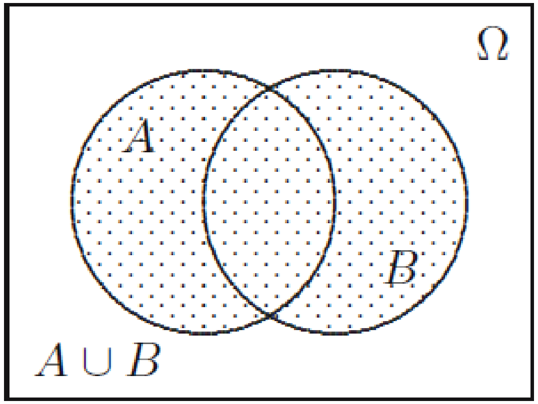
1. Biến cố không thể: là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử thực hiện, ký hiệu: $\varnothing$.
2. Biến cố chắn chắn: là biến cố luôn xảy ra khi phép thử thực hiện (chính là không gian mẫu Ω).
3. Biến cố ngẫu nhiên: là biến có có thể xảy ra hoặc không xảy ra.

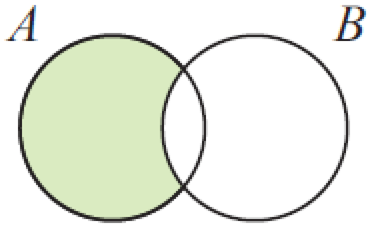
Các phép toán trên biến cố

- Bản chất của biến cố là tập hợp.
- Hiệu, giao, hợp các biến cố, ta được các biến cố mới.

- $A \cap B = A.B =$ là biến cố: {A xảy ra **và** B xảy ra}
- $A \cup B = A + B =$là biến cố: {A xảy ra **hoặc** B xảy ra}
- $A \backslash B =$là biến cố: {A xảy ra **nhưng** B **không** xảy ra}







Các tính chất

- Giao hoán: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- Kết hợp:
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Phân phối:
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Mối quan hệ giữa các biến cố

- Biến cố xung khắc
- Biến cố đối lập
- Biến cố kéo theo

Biến cố xung khắc

- A và B được gọi là các biến cố xung khắc, nếu chúng **không thể đồng thời xảy ra** trong một phép thử.

$$A, \text{B xung khắc} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

- *Ví dụ:* tung một con xúc xắc, **xuất hiện mặt chẵn** và **xuất hiện mặt lẻ** là 2 biến cố xung khắc ($C \cap L = \{2,4,6\} \cap \{1,3,5\} = \emptyset$)
- Nhưng, biến cố xuất hiện mặt chia hết cho 3 và biến cố C không xung khắc (vì...)

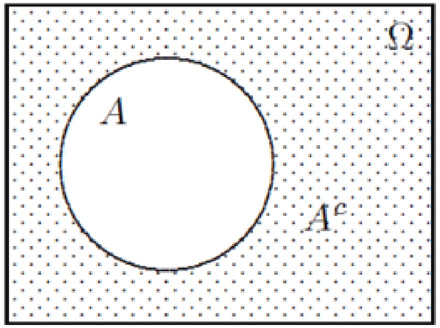
Biến cố xung khắc

Ví dụ: Một hộp có 2 bi đỏ, 5 bi xanh, 7 bi vàng. Lấy ra một bi để xem màu. A là biến cố lấy được bi màu đỏ, B là biến cố lấy được bi màu vàng

Thì A, B là 2 biến cố xung khắc.

Biến cố đối lập

- **Biến cố đối** của biến cố A, là biến cố **xảy ra** *khi và chỉ khi* **A không xảy ra**.
  Ký hiệu: $\bar{A} = A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$



- *Ví dụ:* C và L là hai biến cố đối lập
- *Ví dụ:* sinh vào mùa xuân và sinh vào mùa hè là hai biến cố xung khắc nhưng không đối lập

- A và B **đối lập** $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ và $A \cup B = \Omega$

Quy tắc đối ngẫu

- Phủ định của hợp là giao 2 phủ định:

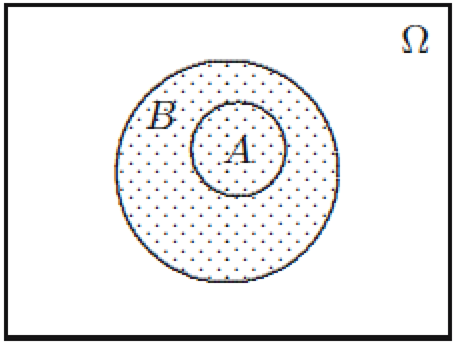
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

- Phủ định của giao là hợp 2 phủ định:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Biến cố kéo theo

- A kéo theo B ⇔ A xảy ra **làm cho** B xảy ra.
  – Ký hiệu $A \subset B$



- Ví dụ:
  – A = "Đậu Giải tích"
  – B = "Điểm Giải tích ≥ 4"

  Thì A kéo theo B.

Tính chất

Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$ và $A \cup B = B$

Hệ quả:

- $A \cap A = A$ và $A \cup A = A$
- $\emptyset \cap A = \emptyset$ và $\emptyset \cup A = A$
- $A \cap \Omega = A$ và $A \cup \Omega = \Omega$

Bài tập biến cố

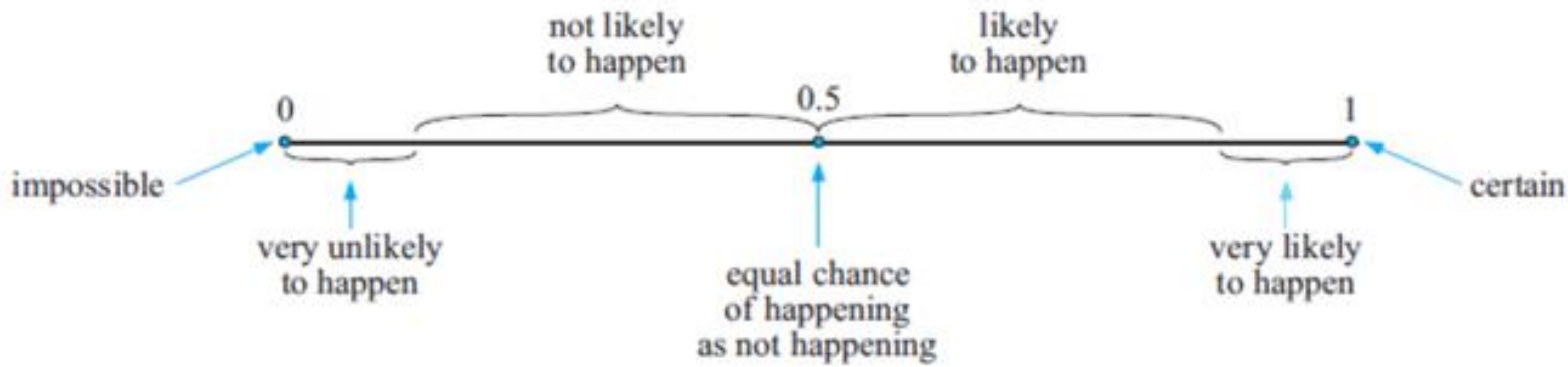
Một xạ thủ bắn ba phát vào bia.
Gọi A_i là biến cố phát thứ i trúng ($i = \overline{1, 3}$).
Hãy biểu diễn qua A_1, A_2, A_3 các biến cố:

1. A: cả 3 phát đều trúng
2. B: có ít nhất một phát trúng
3. C: có một (và chỉ một) phát trúng
4. D: có nhiều nhất hai phát trúng

Xác suất

Các định nghĩa xác suất

- Ý tưởng: xác suất dùng để đo lường *khả năng xảy ra* của biến cố ngẫu nhiên.



1. Tiếp cận cổ điển
2. Tiếp cận thống kê
3. Tiếp cận xác suất theo tiên đề
4. Tiếp cận hình học

Tiếp cận cổ điển

Giả sử phép thử thỏa mãn 2 điều kiện:

i) Không gian mẫu là tập hợp hữu hạn.
ii) Các kết quả có cùng khả năng xảy ra.

Khi đó, **xác suất biến cố A xảy ra**:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

VD: Xét phép thử là tung 1 xúc xắc. Khi đó , $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Gọi A_i là biến cố xuất hiện nút i khi tung xúc xắc. $A_i=\{i\}$.

Ta có $P(A_i)=1/6$.

Gọi L là biến cố xuất hiện mặt lẻ. $L=\{1,3,5\}$

Xác suất xuất hiện mặt lẻ $P(L)=1/2$.

- VD: Trong trường có 30% sinh viên nữ. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên.

  Xác suất sinh viên đó là nữ: 0.3

  Xác suất sinh viên đó là nam: 0.7

Lưu ý: Bài toán hỏi về tỷ lệ cũng là bài toán về xác suất

Xác suất thực nghiệm (theo thống kê tần suất)

Giả sử phép thử C có thể được thực hiện lặp lại độc lập nhiều lần trong những điều kiện giống hệt nhau. Nếu trong n lần thực hiện phép thử C, biến cố A xuất hiện k lần thì tỉ số

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

được gọi là **tần suất** xuất hiện của biến cố A trong n phép thử

Luật số lớn Bernoulli: Khi số phép thử n càng lớn thì tần suất f(A) tiến về một giá trị xác định.
Ta định nghĩa giá trị đó là xác suất của biến cố A.

Định nghĩa xác suất theo tiên đề

Định nghĩa: Xét phép thử có không gian mẫu là Ω.
Xác suất là một hàm số

$$P: \quad \Omega \rightarrow [0,1]$$

thỏa các điều kiện sau:

1) $P(\Omega) = 1$
2) Với bất kì họ đếm được các biến cố xung khắc đôi một A_1, A_2, ..., ta có:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$0 \le P(A) \le 1$$

$$P(\varnothing) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

Tính chất cơ bản

Xét không gian mẫu Ω và các biến cố A, B bất kì. Ta có:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(\varnothing) = 0$

3) $P(\Omega) = 1$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nếu A, B xung khắc: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

Nếu $A \subset B$ **:** $i)\ \ P(A) \le P(B)$

$ii)\ \ P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

Ví dụ

Một hãng nước ngọt thăm dò thị hiếu người tiêu dùng về 2 loại nước giải khát A và B. Trong số 200 người được hỏi có 120 người thích loại A, 100 người thích loại B, 60 người thích cả 2 loại A và B. Chọn ngẫu nhiên 1 người trong số được thăm dò.

Tính xác suất người này:

1. Thích ít nhất một loại nước giải khát trên
2. Không thích loại nước nào cả.

<u>Ví dụ 2:</u> Một cửa hàng có 30 máy tính, trong đó có 20 máy tính do cty A sản xuất và 10 máy tính do cty B sản xuất. Một khách hàng đến cửa hàng mua 3 máy tính. Giả sử khả năng được mua của mỗi máy là như nhau. Tính xác suất để khách hàng này mua được 2 máy của A và 1 máy của B.

Xác suất có điều kiện

VD1: Tung đồng thời 2 xúc xắc (1 trắng và 1 đen) . Hỏi xác suất tổng số nút là 3 ?

VD2: Tung đồng thời 2 xúc xắc (1 trắng và 1 đen).

a) *Giả sử xúc xắc màu trắng xuất hiện 1 nút*, hỏi xác suất tổng số nút là 3 ?

b) Hỏi xác suất tổng số nút là 4, *biết rằng xúc xắc màu trắng xuất hiện 2 nút* ?

Bài toán: Tính xác suất biến cố B xảy ra trong điều kiện biến cố A đã xảy ra.

Xác suất có điều kiện

P(B|A) : xác suất biến cố B xảy ra trong điều kiện A đã xảy ra.

Nếu $|\Omega| < 0$, ta có:

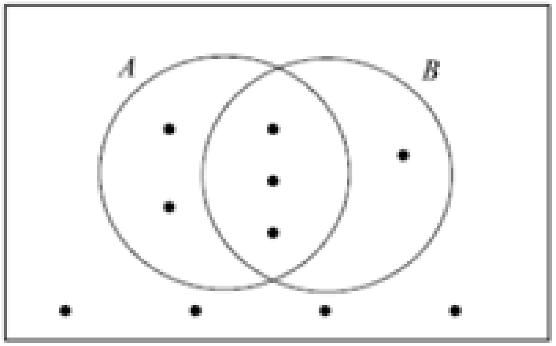
$$\boxed{P(B\,|\,A) = \frac{|\,AB\,|}{|\,A\,|}}$$

Xác suất có điều kiện

- Xét 2 biến cố A và B với $P(A) > 0$.
- Xác suất để biến cố B xảy ra khi biết biến cố A đã xảy ra:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- *Lưu ý:* do biến cố A đã xảy ra nên ta xem không gian mẫu mới A thay cho không gian mẫu Ω ban đầu:



Công thức nhân

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Cho A_1 , A_2 , …, A_n là họ các biến cố ngẫu nhiên sao cho $P(A_1A_2 \ldots A_n) > 0$. Khi đó

$$\boxed{P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1A_2) \ \cdots \ P(A_n | A_1A_2 \cdots A_{n-1})}$$

Ví dụ

Một hộp phấn có 10 viên trắng, 6 viên đỏ. Chọn ngẫu nhiên không hoàn lại 2 viên (mỗi lần 1 viên).

1. Tính xác suất viên thứ nhất màu trắng.
2. Tính xác suất viên thứ hai màu đỏ, biết rằng viên thứ nhất màu trắng.

Ví dụ 2: Lớp có 20 sv trong đó có 17 sv giỏi toán; 8 sv giỏi anh ; trong đó có 5 sv giỏi cả hai môn. Với giả thiết chọn được một sinh viên giỏi toán, tính xác suất để sinh viên đó cũng giỏi anh.

Biến cố độc lập

- *Định nghĩa.* A độc lập **với** B ⇔**sự xảy ra** của A không ảnh hưởng đến ***khả năng xảy ra*** của B

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

- *Định lý.* Nếu A độc lập với B thì B cũng độc lập với A.

- *Định nghĩa.* A và B độc lập⇔ A độc lập với B **và** B độc lập với A.

Biến cố độc lập

Định lý.

A và B độc lập $\Leftrightarrow$ $P(B|A) = P(B)$

$\Leftrightarrow$ $P(A|B) = P(A)$

$\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Công thức nhân cho các biến cố độc lập

Cho A_1, A_2, … , A_n là các biến cố đôi một độc lập nhau, khi đó

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)}$$

Kiểm tra sự độc lập

- Dựa vào
  - Ý nghĩa của 2 biến cố
    - *Ví dụ:* "lấy được bi đỏ từ hộp 1" và "lấy được bi đỏ từ hộp 2" là 2 biến cố độc lập
  - Dựa vào điều kiện: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
    - *Ví dụ:* kiểm tra sự độc lập của A và B, biết rằng P(A) = 0.4, P(B) = 0.5 và $P(A \cup B) = 0.7$.

Ví dụ. Tung 2 đồng xu. Gọi

- A: biến cố đồng xu thứ nhất xuất hiện mặt ngửa
- B: biến cố đồng xu thứ hai xuất hiện mặt ngửa
- C: biến cố 2 đồng xu xuất hiện mặt giống nhau.

Xác định không gian mẫu và biểu diễn A,B,C dưới dạng tập hợp. Từ đó tính P(A), P(B), P(C).

Chứng minh A,B,C *đôi một độc lập*.

Exercises

1. Given $P(A) = .40$, $P(B) = .50$. If A and B are independent, find $P(A \cap B)$.

2. Given $P(A) = .40$, $P(B) = .50$, and $P(A \cap B) = .05$. (a) Find $P(A \mid B)$. (b) In this problem, are A and B independent?

3. **Which pairs of events are independent?**
   a. $P(A) = .60$, $P(B) = .40$, $P(A \cap B) = .24$.
   b. $P(A) = .90$, $P(B) = .20$, $P(A \cap B) = .18$.
   c. $P(A) = .50$, $P(B) = .70$, $P(A \cap B) = .25$.

Exercises

4. Based on past data, the probability that a customer at a certain Noodles & Company restaurant will order a dessert (event *D*) with the meal is .08.
The probability that a customer will order a bottled beverage (event *B*) is .14.
The probability that a customer will order both a dessert *and* a bottled beverage is .0112. *Is ordering a dessert independent of ordering a bottled beverage?*

Exercises

5. Suppose that a shuttle's launch depends on three key devices that operate independently of each other and malfunction with probabilities 0.01, 0.02, and 0.02, respectively. If any of the key devices malfunctions, the launch will be postponed. Compute the probability for the shuttle to be launched on time, according to its schedule.

Sự **độc lập** của các biến cố **đối lập**

Định lý. A và B độc lập $\Rightarrow \begin{cases} \bar{A} \text{ và } B \text{ độc lập} \\ A \text{ và } \bar{B} \text{ độc lập} \end{cases}$

- **Hệ quả.** A và B độc lập ⇒ $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập.
- Trong 4 cặp biến cố $\{A, B\}$, $\{\bar{A}, B\}$, $\{A, \bar{B}\}$ và $\{\bar{A}, \bar{B}\}$, **nếu** có 1 cặp độc lập, **thì** 3 cặp còn lại cũng độc lập.

- **Áp dụng.** Chứng minh: "nếu A, B độc lập, thì $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}).P(B)$". Điều ngược lại có đúng không?

Ví dụ

Có 2 lô hàng:

- Lô 1 có 10 sản phẩm loại A, 5 sản phẩm loại B
- Lô 2 có 12 sản phẩm loại A, 8 sản phẩm loại B.

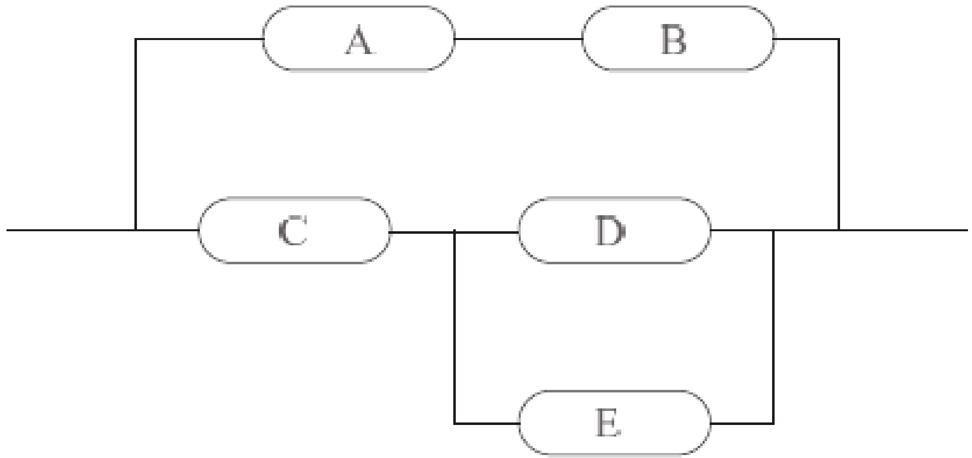
Chọn ngẫu nhiên *mỗi lô một sản phẩm*. Tính xác suất được:

1. Hai sản phẩm loại A
2. Hai sản phẩm cùng loại
3. Hai sản phẩm khác loại

Example (Reliability of backups).

There is a 1% probability for a hard drive to crash. Therefore, it has two backups, each having a 2% probability to crash, and all three components are independent of each other. The stored information is lost only in an unfortunate situation when all three devices crash. What is the probability that the information is saved?

Techniques for solving reliability problems



Calculate reliability of the system in the figure if each component is operable with probability 0.92 independently of the other components.

Exercises

6. Over 1,000 people try to climb Mt. Everest every year. Of those who try to climb Everest, 31 percent succeed. The probability that a climber is at least 60 years old is .04. The probability that a climber is at least 60 years old and succeeds in climbing Everest is .005.

(a) Find the probability of success, given that a climber is at least 60 years old.

(b) Is success in climbing Everest independent of age?

(See *The New York Times*, August 21, 2007, p. D3).

7. 50 percent of the customers at Pizza Palooza order a square pizza, 80 percent order a soft drink, and 40 percent order both a square pizza and a soft drink. Is ordering a soft drink independent of ordering a square pizza? Explain.

Example

Ninety percent of flights depart on time. Eighty percent of flights arrive on time. Seventy-five percent of flights depart on time and arrive on time.

(a) You are meeting a flight that departed on time. What is the probability that it will arrive on time?

(b) You have met a flight, and it arrived on time. What is the probability that it departed on time?

(c) Are the events, departing on time and arriving on time, independent?

Ví dụ

Một lô hàng gồm 20 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm. Người ta **lần lượt lấy** mỗi lần một sản phẩm để kiểm tra (không hoàn lại) cho đến khi phát hiện đủ 2 phế phẩm thì dừng.

a/ Tính xác suất để việc kiểm tra dừng ở lần thứ hai
.

b/ Tính xác suất để việc kiểm tra dừng ở lần thứ ba.

Bắn 3 viên đạn độc lập vào một bia. Xác suất trúng bia của mỗi viên đạn lần lượt là 0,6 ; 0,9 ; 0,7. Tính xác suất:

a/ Cả ba viên đều trúng bia.

b/ Không viên nào trúng bia.

c/ Có một viên trúng bia.

d/ Có ít nhất 1 viên trúng bia.

Công thức xác suất đầy đủ & Công thức Bayes

Hệ đầy đủ các biến cố

Định nghĩa. $\{A_1, \dots, A_n\}$ được gọi là **hệ đầy đủ**, nếu thỏa 2 điều kiện

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$

Lưu ý.

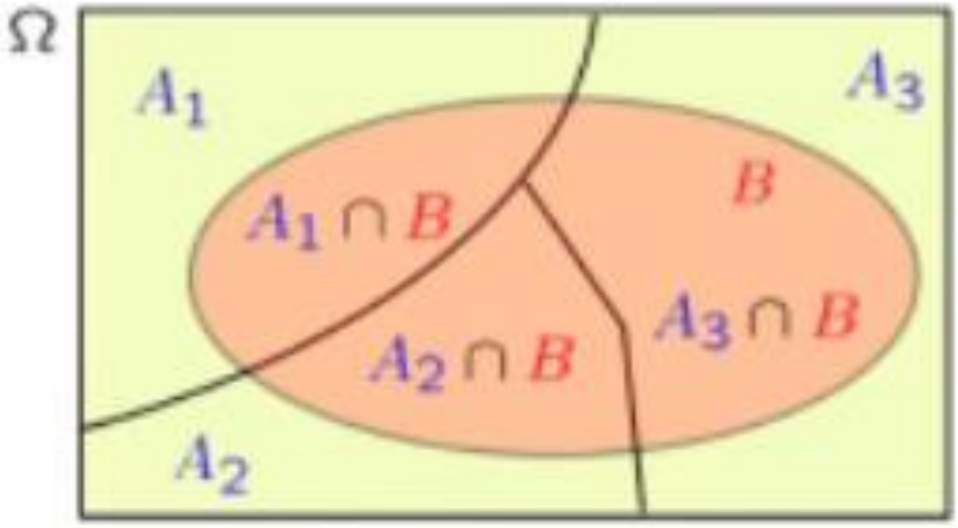
- Nếu $\{A_i\}$ là hệ đầy đủ, thì $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1$
- Nếu $P(A_1) + \cdots + P(A_n) \neq 1$ thì $\{A_i\}$ ***không phải*** hệ đầy đủ

Hệ đầy đủ | Ví dụ

- Chọn ngẫu nhiên 2 bi từ một hộp có 3 bi đỏ, 4 bi xanh.
- Gọi A_i là biến cố lấy được i bi đỏ (i = 0,1,2)

- Khi đó $\{A_0, A_1, A_2\}$ là một hệ đầy đủ, vì
  - $A_0 \cap A_1 = A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_0 = \emptyset$
  - $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$
- **Quiz.** Tính các $P(A_i)$ và kiểm tra $\sum P(A_i) = 1$?

Ví dụ



Giả sử $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là hệ đầy đủ các biến cố.

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$P(A_i \cap B) = P(B) \cdot P(B \mid A_i)$$

Công thức xác suất đầy đủ & Bayes

Cho hệ đầy đủ các biến cố { A_1 , A_2 , ..., A_n } của một phép thử và B là một biến cố bất kỳ.

Công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i) = P(A_1)P(B \mid A_1) + \ldots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

Ví dụ

Giả sử có 1000 vé số và chỉ có 2 vé trúng thưởng.

a) Tính xác suất người mua đầu tiên trúng thưởng.
b) Tính xác suất người mua thứ hai trúng thưởng.
c) Tính xác suất người mua thứ 3 trúng thưởng
d) Thứ tự mua vé có ảnh hưởng đến xác suất trúng thưởng hay không ?

Công thức Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Cho hệ đầy đủ các biến cố { A_1 , A_2 , ..., A_n } của một phép thử và B là một biến cố bất kỳ.

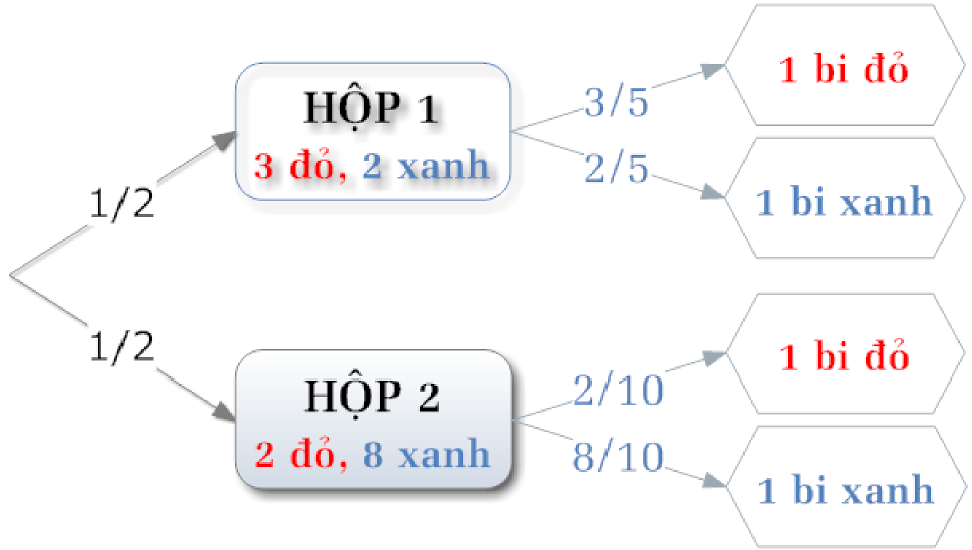
Công thức Bayes cho hệ đầy đủ:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k.B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Ví dụ

Hộp thứ nhất chứa 3 bi đỏ và 2 bi xanh; hộp thứ hai chứa 2 bi đỏ và 8 bi xanh. Chọn ngẫu nhiên *một hộp* và từ hộp đó chọn ngẫu nhiên *một bi*.

1. Tìm xác suất chọn được bi đỏ.
2. Giả sử *đã chọn được* bi đỏ. Tính xác suất để bi đỏ này là của hộp thứ nhất.

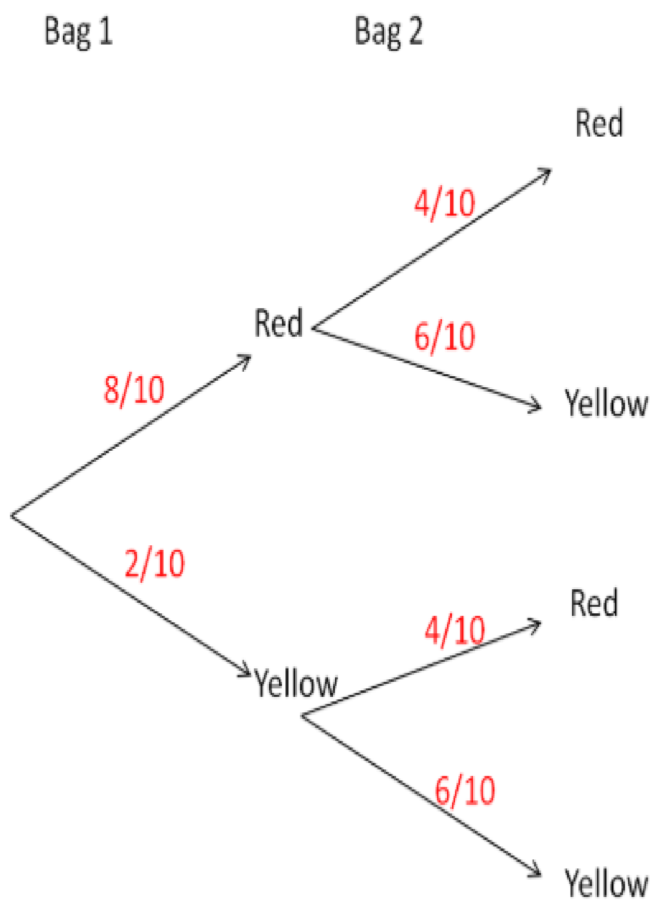


Example

There are 8 red balls and 2 yellow balls in Bag 1.
There are 4 red balls and 6 yellow balls in Bag 2.

Question 1:
Take one ball from Bag 1 and then one ball from Bag 2.
What is the probability of choosing two red balls.

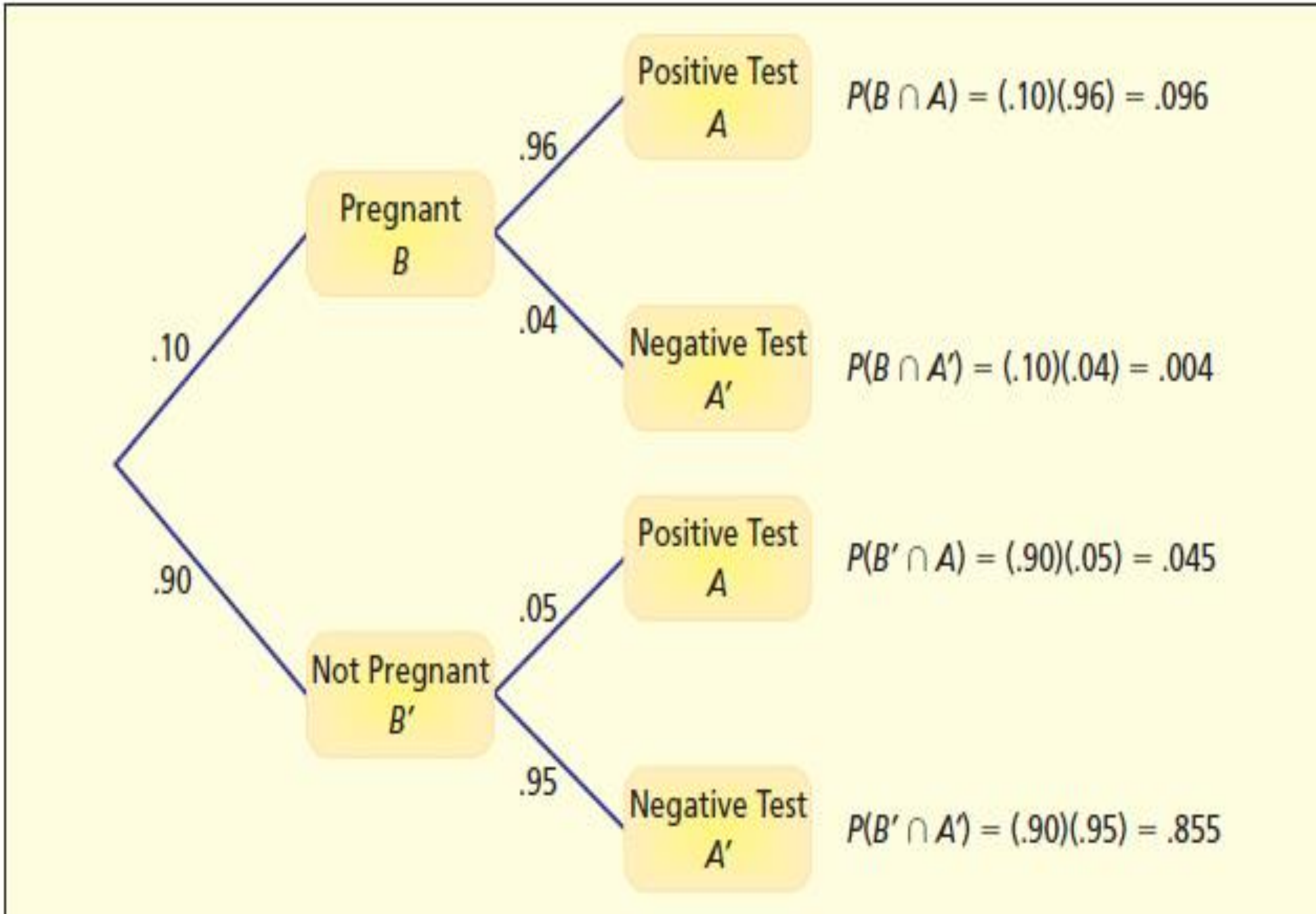
Question 2:
Take one of the bags randomly, then take one ball randomly from this bag.
If the ball taken is red



Example

Suppose that 10% of the women who purchase over-the-counter pregnancy testing kits are actually pregnant. For a particular brand of kit, if a woman is pregnant, the test will yield a positive result 96% of the time and a negative result 4% of the time.
If she is not pregnant, the test will yield a positive result 5% of the time and a negative result 95% of the time.

Suppose the test comes up positive. What is the probability that she is really pregnant ?


Pregnant
B
Not Pregnant
B′
Positive Test
A
Negative Test
A′
Positive Test
A
Negative Test
A′
.10
.90
.96
.04
.05
.95
$P(B \cap A) = (.10)(.96) = .096$
$P(B \cap A') = (.10)(.04) = .004$
$P(B' \cap A) = (.90)(.05) = .045$
$P(B' \cap A') = (.90)(.95) = .855$

Phép thử Bernoulli

- Dãy các phép thử lặp lại, độc lập, trong mỗi phép thử chỉ có 2 kết quả: A và $\overline{A}$, xác suất xảy ra biến cố A không đổi P(A)=p được gọi là dãy phép thử Bernoulli.

- Xác suất biến cố A xảy ra k lần trong n phép thử là:

$$P_{(k,n)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

VD: Phép thử Bernoulli

Tín hiệu thông tin được phát đi 3 lần độc lập nhau. Xác suất thu được mỗi lần là 0.4.

a) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đúng 2 lần.
b) Tìm xác suất để nguồn thu nhận được thông tin đó.
c) Nếu muốn xác suất thu được tin ít nhất là 90% thì phải phát đi ít nhất bao nhiêu lần.

Bài tập

1. There are 20 computers in a store. Among them, 15 are brand new and 5 are refurbished. Six computers are purchased for a student lab. From the first look, they are indistinguishable, so the six computers are selected at random. Compute the probability that among the chosen computers, two are refurbished.

2. Under good weather conditions, 80% of flights arrive on time. During bad weather, only 30% of flights arrive on time. Tomorrow, the chance of good weather is 60%. What is the probability that your flight will arrive on time?