

CHƯƠNG 4: ĐẠI SỐ BOOL VÀ HÀM BOOL

1/ MỘT SỐ KHÁI NIỆM

Cho tập hợp $S = \{0,1\}$. ($S = \text{Set}$)

Trên S ta có 2 phép toán 2 ngôi: phép cộng (+), phép nhân (\cdot), cùng với 1 phép toán 1 ngôi: phép lấy phần bù ($\bar{}$), thỏa:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0+0=0.0=0.1=1.0=0 \\ 1+0=0+1=1.1=1+1=1 \\ \bar{1}=0 \\ \bar{0}=1 \end{array} \right.$$

Ta gọi cấu trúc đại số $(S, +, \cdot, \bar{}, 0, 1)$ là một đại số Bool.

Một hàm bool n biến là một ánh xạ

$$f : B^n \rightarrow B$$
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ví dụ:

Ta có hàm bool 3 biến $f : B^3 \rightarrow B$, với

$$f(x, y, z) = (\overline{xy} + y\bar{z} + xy)(\overline{xz} + y + yz) + x\bar{y}\bar{z}$$

Ta có hàm bool 4 biến $f : B^4 \rightarrow B$, với

$$f(x, y, z, t) = (\overline{xyz + \bar{x}y + yz + \bar{z} + yzt})(\bar{x}yz + \bar{y}t) + \overline{zt + xyz + yzt}$$

Từ công thức ban đầu của hàm bool f ta có thể viết lại f dưới dạng tổng các tích cơ bản của các biến, mà ta thường gọi là dạng chính tắc tuyển (dạng chính tắc nối rời) (disjunctive normal form – d.n.f) của f .

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 3 biến là:

$$f(x, y, z) = x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + xyz$$

Ví dụ: ta có dạng chính tắc tuyển (chính tắc nối rời – d.n.f) của hàm bool 4 biến là:

$$f(x, y, z, t) = \bar{x}yzt + xy\bar{z}t + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + xyz\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee \bar{x}y\bar{z}t \vee x\bar{y}zt$$

2/ CÁCH TÌM DẠNG CHÍNH TẮC NỐI RỜI (CHÍNH TẮC TUYỂN – D.N.F) CHO HÀM BOOL

a/ Cách 1: dùng bảng chân trị

- + Ta lập bảng chân trị cho f .
- + Ta xét các dòng làm cho chân trị của f bằng 1.
- + Ta viết công thức cho dạng d.n.f theo quy tắc:

- Các biến có chân trị bằng 0 thì ta ghi biến đó “có gạch đầu”
- Các biến có chân trị bằng 1 thì ta ghi biến đó “không có gạch đầu”

Lưu ý: ta có $\overline{xy} \neq \bar{x}.\bar{y}$ do $\overline{xy} \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{y}$.

Ví dụ mẫu: Tìm dạng chính tắc nổi rời cho hàm bool

$$f : B^3 \rightarrow B, \text{ với } f(x, y, z) = \underbrace{(x\bar{y} + \overline{y\bar{z}} + \bar{x}z)}_A \underbrace{(\overline{\bar{x}y\bar{z}} + yz + xz)}_C + \bar{x}.\bar{y}$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_B \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_D$

Giải:

Ta có bảng chân trị của f là:

x	y	z	\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$x\bar{y}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}z$	A	B	$\bar{x}y\bar{z}$	yz	C	xz	D	$\bar{x}.\bar{y}$	BD	f
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1

Từ bảng chân trị của f ta có dạng d.n.f là:

$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} + \bar{x}.\bar{y}z + x\bar{y}.\bar{z} + x\bar{y}z + xyz.$$

Bài tập tương tự: tìm dạng chính tắc tuyển (chính tắc nổi rời) cho hàm bool sau:

1/ $f(x, y, z) = (\overline{x\bar{y} + \bar{z}} + xz)(\overline{xy\bar{z} + y + y\bar{z}}) + \bar{x}y.$

2/ $f(x, y, z) = (\overline{xy + yz + xz + \bar{x}})(\overline{x\bar{y} + \bar{y}z}) + xy.$

3/ $f(x, y, z) = (\overline{xy\bar{z} + \bar{y}z + \bar{x}y}) + xy + \bar{z} + \bar{x}\bar{z}.$

4/ $f(x, y, z) = (\overline{x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x} + \bar{z}})(\overline{x\bar{y}.\bar{z} + xz + y}) + xy.$

5/ $f(x, y, z) = (\overline{x\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}})(\overline{xy + \bar{z} + \bar{y}z}) + xz.$

6/ $f(x, y, z, t) = (\overline{xy\bar{t} + y\bar{z} + \bar{z}t + \bar{x}zt})(\overline{xy\bar{z} + zt + x\bar{y}}) + \bar{z}\bar{t} + yz.$

7/ $f(x, y, z, t) = (\overline{x\bar{y}t + \bar{z}t + xy})(\overline{y\bar{t} + xyz}) + xz\bar{t} + y\bar{z} + zt.$

8/ $f(x, y, z, t) = (\overline{xy\bar{z} + y\bar{t} + yz + xz})(\overline{x\bar{t} + \bar{x}y + zt}) + xyt + \bar{z}\bar{t}.$

$$9/ f(x, y, z, t) = \left(z\bar{t} + \overline{yz + \bar{x}y\bar{z}} + y\bar{z} \right) (xyt + z\bar{t}) + xy + \bar{z}t + yz.$$

$$10/ f(x, y, z, t) = \left(\overline{xyt + z\bar{t}} + yz \right) \left(y\bar{t} + \overline{\bar{x}z + zt} \right) + x\bar{y}t + \bar{z}t + xy\bar{z}.$$

b/ Cách 2: biến đổi trực tiếp từ công thức

Ví dụ mẫu: Tìm công thức dạng chính tắc nổi rời cho hàm bool:

$$f(x, y, z, t) = (xy\bar{t} + \bar{x}z)(y\bar{z} + xt) + \overline{yzt + \bar{z}t} + yzt$$

Giải:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, t) &= (xy\bar{t} + \bar{x}z)(y\bar{z} + xt) + \overline{yzt + \bar{z}t} + yzt \\ &= xy\bar{z}\bar{t} + (\bar{y} + \bar{z} + \bar{t})(z + \bar{t}) + yzt \\ &= xy\bar{z}\bar{t} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{t} + \bar{z}\bar{t} + z\bar{t} + \bar{t} + yzt \\ &= \bar{t} + \bar{y}z + yzt \\ &= (x + \bar{x})(y + \bar{y})(z + \bar{z})\bar{t} + (x + \bar{x})\bar{y}z(t + \bar{t}) + (x + \bar{x})yzt \\ &= xyz\bar{t} + xy\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}.\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}.\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}zt \vee \bar{x}.\bar{y}zt + xyzt + \bar{x}yzt \end{aligned}$$

Đây là dạng d.n.f cần tìm của hàm bool f .

Bài tập tương tự: tìm dạng chính tắc nổi rời cho hàm bool sau

$$11/ f(x, y, z, t) = \left(\overline{xy\bar{t} + \bar{z}t + \bar{x}z} + yz \right) \left(\overline{xt + z\bar{t}} + yz \right) + xzt + z\bar{t}.$$

$$12/ f(x, y, z, t) = \left(\overline{\bar{x}y + zt} + y\bar{t} \right) \left(xz + \overline{\bar{y}t + xy} \right) + x\bar{z}t + yz\bar{t}.$$

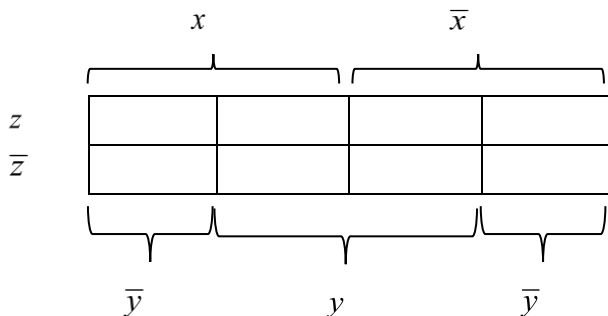
$$13/ f(x, y, z, t) = \left(zt + \overline{\bar{x}z + yz\bar{t}} \right) (xy + y\bar{z}) + xyt + \overline{\bar{x}z + \bar{z}t + y}.$$

$$14/ f(x, y, z, t) = \left(xz + \overline{\bar{y}t + xy\bar{z}} + yt \right) (z\bar{t} + xy) + x\bar{y}z + \overline{zt + x\bar{z}}.$$

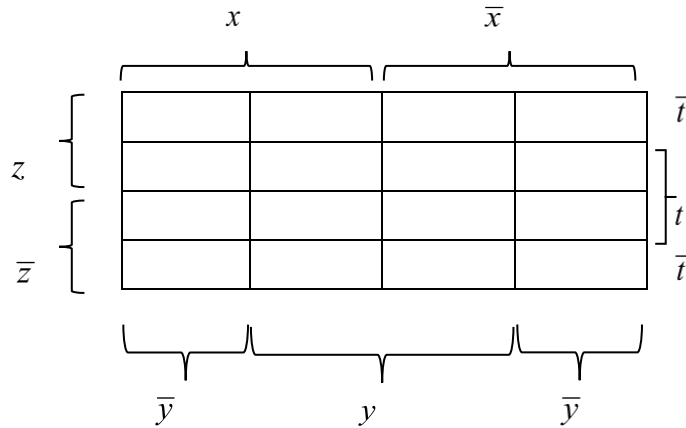
$$15/ f(x, y, z, t) = \left(xz + \overline{\bar{y}t + xy\bar{z}} \right) (y\bar{z}\bar{t} + xz) + \overline{\bar{x}yt + y\bar{z} + zt} + xy + \bar{z}\bar{t}.$$

c/ Cách 3: dùng phương pháp biểu đồ Karnaugh (bìa Karnaugh) của hàm bool

Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(f)) của hàm bool 3 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:



Ta có biểu đồ Karnaugh (bìa Kar(f)) của hàm bool 4 biến là biểu đồ có cấu trúc như sau:



Ví dụ mẫu: Cho hàm bool $f(x, y, z, t) = xy\bar{z} + y\bar{t} + \bar{x}zt + x\bar{y} + \bar{z}\bar{t}$.

Ta có biểu đồ Kar(f) của hàm f là

Từ biểu đồ Karnaugh của f ta có dạng d.n.f cần tìm là:

$$f(x, y, z, t) = x\bar{y}z\bar{t} + xyz\bar{t} + \bar{x}yz\bar{t} + x\bar{y}zt + \bar{x}yzt + \bar{x}.\bar{y}zt + x\bar{y}.\bar{z}t + xy\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} + \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\bar{t}$$

Ngoài ra, ta có:

$$f^{-1}(1) = \{1010, 1110, 0110, 1011, 0111, 0011, 1001, 1101, 1000, 1100, 0100, 0000\} = \bar{f}^{-1}(0)$$

= ảnh ngược của hàm bool f = những ô được tô trong bìa Kar(f) của f .

$$f^{-1}(0) = \{0010, 1111, 0101, 0001\} = \bar{f}^{-1}(1)$$

= ảnh ngược của hàm bool f = những ô bị bỏ trống (không được tô) trong bìa Kar(f) của f .

Bài tập tương tự:

+ Vẽ biểu đồ Karnaugh cho f .

+ Tìm dạng d.n.f cho f .

+ Viết dạng $f^{-1}(1) = \bar{f}^{-1}(0) = ?$ và dạng $f^{-1}(0) = \bar{f}^{-1}(1) = ?$

+ Phân tích các tế bào lớn có trong biểu đồ Kar(f) của f .

16/ $f(x, y, z, t) = xz\bar{t} + \bar{x}z + \bar{y}zt + \bar{y}\bar{t} + xyz$.

$$17/ f(x, y, z, t) = xy + \bar{z}t + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}z + xyt .$$

$$18/ f(x, y, z, t) = xyz + y\bar{z}\bar{t} + \bar{x}t + \bar{y}zt + yt .$$

$$19/ f(x, y, z, t) = xyz + z\bar{t} + \bar{x}y + \bar{y}.z\bar{t} + xz .$$

$$20/ f(x, y, z, t) = xy\bar{t} + y\bar{z}t + xyz + \bar{z}\bar{t} + \bar{y}t .$$

$$21/ f(x, y, z, t) = x\bar{y} + yzt + \bar{x}z\bar{t} + zt + x\bar{z}t .$$

$$22/ f(x, y, z, t) = xy + \bar{y}z\bar{t} + \bar{x}z + yt + \bar{z}t .$$

* **Phân tích các tế bào lớn có trong bìa $Kar(f)$ của hàm bool:**

Từ biểu đồ $Kar(f)$ của f , ta phân tích thành các tế bào lớn như sau:

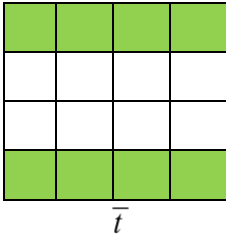
+ Tế bào 8 ô:

z

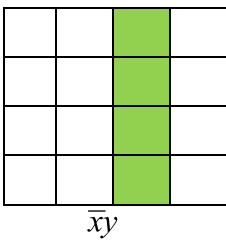
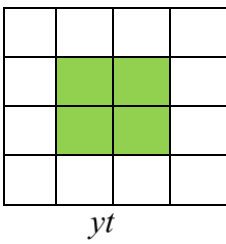
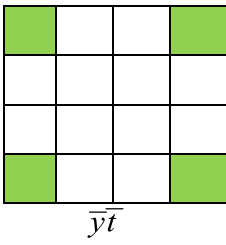
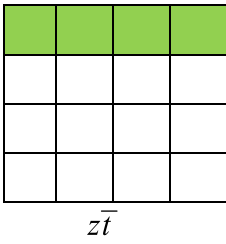
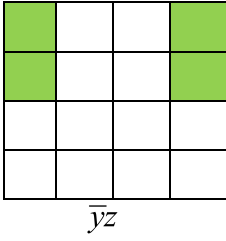
\bar{y}

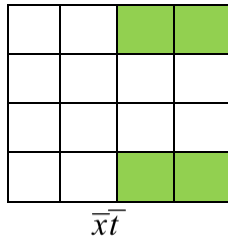
\bar{x}

\bar{z}

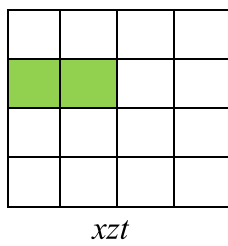
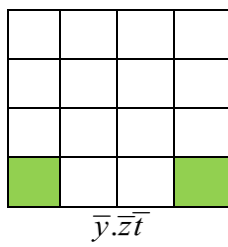
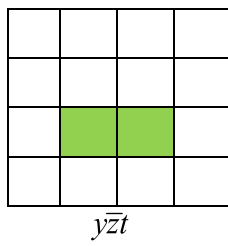
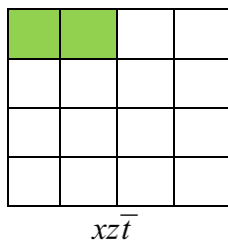
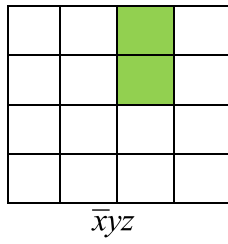


+ Tế bào 4 ô:

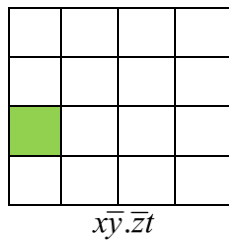
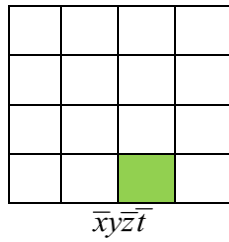
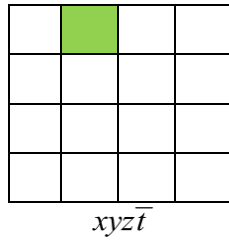
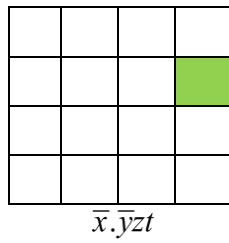




+ Tế bào 2 ô:



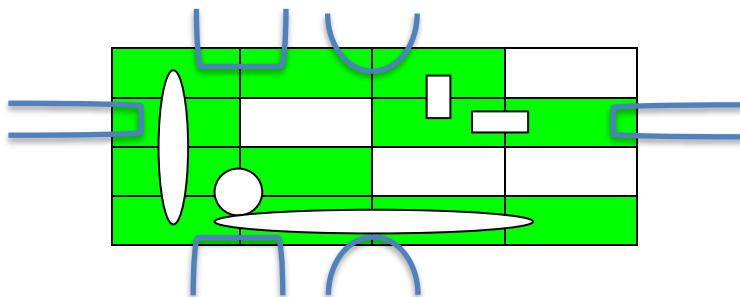
+ Tế bào 1 ô:



Áp dụng: phân tích tế bào có trong bìa Kar(f) của hàm bool f .

Ví dụ mẫu: Cho hàm bool $f(x, y, z, t) = xy\bar{z} + y\bar{t} + \bar{x}zt + x\bar{y} + \bar{z}\bar{t}$.

Ta có biểu đồ Kar(f) của hàm f là



Ta có các tế bào lớn trong bìa Kar(f) của f là:

- + Tế bào 8 ô: không có;
- + Tế bào 4 ô: $T_1 : x\bar{y}; T_2 : \bar{z}\bar{t}; T_3 : x\bar{z}; T_4 : x\bar{t}; T_5 : y\bar{t}$.
- + Tế bào 2 ô: $T_6 : \bar{x}yz; T_7 : \bar{x}zt; T_8 : \bar{y}zt$.
- + Tế bào 1 ô: không có.