Buổi 06 – Ngày 25-03-2025 – môn Cấu trúc rời rạc – lớp MA004.P27

CHƯƠNG 3: QUAN HỆ (TIẾP THEO)

3/ QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG (EQUIVALENT RELATIONSHIP):

Cho tập hợp $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ và R là một quan hệ 2 ngôi trên *X*.

Ta nói R là quan hệ tương đương khi và chỉ khi R có các tính chất:

+ Tính phản xạ;
+ Tính đối xứng;
+ Tính truyền (tính bắc cầu).

Khi R là một quan hệ tương đương trên *X*, ta định nghĩa:

$\overline{x} = [x]_{\mathrm{R}} = \{y \in X \mid y\mathrm{R}x\}$ = lớp tương đương chứa x trên *X*.

Ta gọi tập hợp bao gồm các lớp tương đương chứa x trên *X* là ***tập hợp thương*** xét theo quan hệ R trên *X* và kí hiệu là:

$X/\mathrm{R} = \{[x_1]_{\mathrm{R}}, [x_2]_{\mathrm{R}}, ..., [x_n]_{\mathrm{R}}\}$

Từ đây ta có thể viết lại tập hợp *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo quan hệ R là:

$X = [x_1]_{\mathrm{R}} \cup [x_2]_{\mathrm{R}} \cup \ldots \cup [x_n]_{\mathrm{R}}$.

Ví dụ mẫu 1:

Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$x\mathrm{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, với $x, y \in X$

a/ Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên *X*.

b/ Hãy chỉ ra các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X*; và tập hợp thương tương ứng. Từ đó, viết lại *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo R trên *X*.

Giải:

a/ Ta chứng minh R là quan hệ tương đương trên *X* như sau:

* *Tính phản xạ*:

$\forall x \in X$, ta có $x\mathrm{R}x \Leftrightarrow |x| = |x|$ luôn đúng.

Cho nên ta nói R là quan hệ có tính phản xạ (1).

* *Tính đối xứng*:

Giả sử: $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow |x| = |y|$, với $x, y \in X$

$\Rightarrow |y| = |x|$, với $x, y \in X$

$\Rightarrow y\mathrm{R}x$, với $x, y \in X$.

Cho nên ta nói R có tính đối xứng (2)

* *Tính truyền (tính bắc cầu)*:

Giả sử: $\begin{cases} x\text{R}y \\ y\text{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=|y| \\ |y|=|z| \end{cases}$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow |x|=|y|=|z|$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow |x|=|z|$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow x\text{R}z$, với $x, y, z \in X$

Cho nên ta nói R có tính truyền (bắc cầu) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra R là quan hệ tương đương trên *X*.

b/ Các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X* là:

$\overline{-3} = [-3]_{\mathbf{R}} = \{-3, 3\} = [3]_{\mathbf{R}} = \overline{3}$

$\overline{-2} = [-2]_{\mathbf{R}} = \{-2, 2\} = [2]_{\mathbf{R}} = \overline{2}$

$\overline{-1} = [-1]_{\mathbf{R}} = \{-1, 1\} = [1]_{\mathbf{R}} = \overline{1}$

$\overline{0} = [0]_{\mathbf{R}} = \{0\}$

$\overline{1} = [1]_{\mathbf{R}} = \{-1, 1\}$

$\overline{2} = [2]_{\mathbf{R}} = \{-2, 2\}$

$\overline{3} = [3]_{\mathbf{R}} = \{-3, 3\}$

$\overline{4} = [4]_{\mathbf{R}} = \{4\}$

$\overline{5} = [5]_{\mathbf{R}} = \{5\}$

Từ đây ta có tập hợp thương xét theo quan hệ R trên *X* là:

$X/\text{R} = \{ [0]_{\text{R}}, [1]_{\text{R}}, [2]_{\text{R}}, [3]_{\text{R}}, [4]_{\text{R}}, [5]_{\text{R}} \}$

và ta viết lại *X* dưới dạng phân hoạch của các lớp tương đương xét theo quan hệ R trên *X* là

$X = [0]_{\text{R}} \cup [1]_{\text{R}} \cup [2]_{\text{R}} \cup [3]_{\text{R}} \cup [4]_{\text{R}} \cup [5]_{\text{R}}$.

<u>Bài tập tương tự</u>:

Yêu cầu như bài ví dụ mẫu 1.

<u>Bài 1</u>: Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow (x + y)$ là số chẵn, với $x, y \in X$

<u>Bài 2</u>: Cho tập hợp $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow (x^2 + y^2) \vdots 2$, với $x, y \in X$

<u>Bài 3</u>: Cho tập hợp $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow x^4 = y^4$, với $x, y \in X$.

<u>Bài 4</u>: Cho tập hợp $X = \{-3, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow x^3 = y^3$, với $x, y \in X$

<u>Bài 5</u>: Cho tập hợp $X = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 2 \Leftrightarrow (x-y) \vdots 2$, với $x, y \in X$.

Bài 6: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3 \Leftrightarrow (x-y) \vdots 3$, với $x, y \in X$.

Bài 7: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow x \equiv y \pmod 4 \Leftrightarrow (x-y) \vdots 4$, với $x, y \in X$.

Bài 8: Cho tập hợp $X = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy\ xRy \Leftrightarrow (2x+3y) \vdots 5$, với $x, y \in X$

Bài 9: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow x = y$, với $x, y \in X$.

Bài 10: Cho tập hợp $X = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X như sau

$xRy \Leftrightarrow x^3 - 4x = y^3 - 4y$, với $x, y \in X$.

4/ QUAN HỆ THỨ TỰ (ORDINAL RELATIONSHIP):

Cho tập hợp X và R là một quan hệ 2 ngôi trên X.

Ta nói R là quan hệ thứ tự nếu và chỉ nếu R có các tính chất:

$\left\{\begin{array}{l}\text{+ Tính phản xạ;}\\ \text{+ Tính phản đối xứng;}\\ \text{+ Tính truyền (tính bắc cầu)}\end{array}\right.$

Khi R là quan hệ thứ tự trên X, ta xét

+ R là quan hệ thứ tự toàn phần, khi và chỉ khi $x\mathrm{R}y$ hay $y\mathrm{R}x$, với mọi $x, y \in X$.

+ R là quan hệ thứ tự không toàn phần (bán phần) khi có $x_0 \in X$ và $y_0 \in X$ sao cho

$$\begin{cases} x_0 \bar{\mathbf{R}} y_0 \\ y_0 \bar{\mathbf{R}} x_0 \end{cases}$$

Ở đây ta xét aRb, với R là quan hệ thứ tự, theo nghĩa là a "có xu hướng" nhỏ hơn b.

Ví dụ: Cho $X = \{1,2,3,4\}$ và quan hệ thứ tự R là $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x \le y$, với $x, y \in X$.

+ Quan hệ này là toàn phần, vì với mọi $x, y \in X$ ta luôn xét được quan hệ

$x \le y$ hay $y \le x$.

+ Ta xét 2R4 theo nghĩa $2 \le 4$, nghĩa là 2 có xu hướng nhỏ hơn hay bằng 4

Ví dụ khác: Cho $X = \{1,2,3,4\}$ và quan hệ thứ tự R là $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x \ge y$, với $x, y \in X$.

+ Quan hệ này là toàn phần, vì với mọi $x, y \in X$ ta luôn xét được quan hệ

$x \ge y$ hay $y \ge x$.

+ Ta xét 4R3 theo nghĩa $4 \ge 3$, nghĩa là 4 có xu hướng nhỏ hơn hay bằng 3.

*** Biểu đồ Hasse của quan hệ thứ R trên X**:

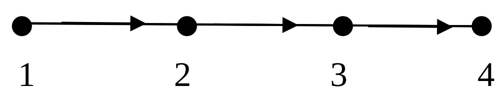
Là một dạng hình học minh họa cho quan hệ thứ tự R trên *X*, theo quy tắc:

+ Mỗi đỉnh: được minh họa bằng 1 chấm điểm trên Oxy hoặc Oxyz, thể hiện cho 1 phần tử trong *X*.

+ Mỗi cạnh (có hướng): được minh họa bằng 1 đoạn nối trực tiếp giữa 2 đỉnh a,b theo thứ tự a hướng mũi tên về b nếu aRb.

Ví dụ: Cho $X = \{1,2,3,4\}$ và quan hệ thứ tự R là $x\text{R}y \Leftrightarrow x \le y$, với $x, y \in X$

Ta có biểu đồ Hasse như sau:



Ta có 1 là phần tử tối tiểu xét theo R trên *X*.

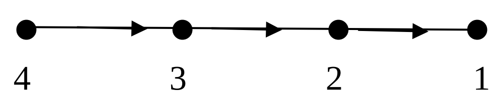
4 là phần tử tối đại xét theo R trên *X*.

Ta có 1 là phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

4 là phần tử cực đại xét theo R trên *X*.

Ví dụ khác: Cho $X = \{1,2,3,4\}$ và quan hệ thứ tự R là $x\text{R}y \Leftrightarrow x \ge y$, với $x, y \in X$

Ta có biểu đồ Hasse như sau:



Ta có 4 là phần tử tối tiểu xét theo R trên *X*.

1 là phần tử tối đại xét theo R trên *X*.

Ta có 4 là phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

1 là phần tử cực đại xét theo R trên *X*.

Ví dụ khác nữa:

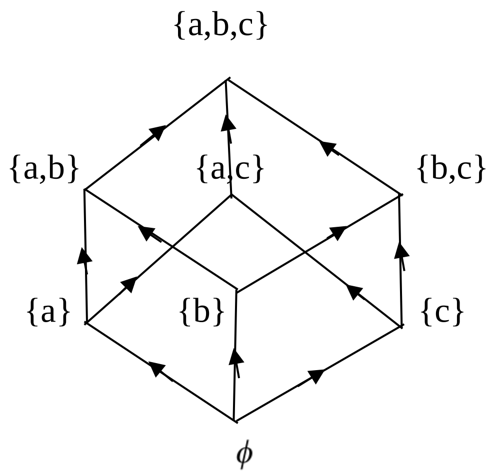
Cho $X = \{a, b, c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = $\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$

Và R là quan hệ thứ tự trên E như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

Ta có biểu đồ Hasse của R như sau:



Ta có ϕ là phần tử tối tiểu xét theo R trên E.

{a,b,c} là phần tử tối đại xét theo R trên E.

Ta có ϕ là phần tử cực tiểu xét theo R trên E.

{a,b,c} là phần tử cực đại xét theo R trên E.

* ***<u>Phần tử tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu, xét theo quan hệ thứ tự R trên X</u>***.

Cho tập hợp *X* và R là quan hệ thứ tự trên *X*.

Ta nói a là phần tử ***tối tiểu (minimal)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

$\forall x \in X, x\overline{R}a$.

Ta nói b là phần tử ***tối đại (maximal)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

$\forall x \in X, b\overline{R}x$.

Ta nói c là phần tử ***cực tiểu (minimum)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

c là phần tử ***tối tiểu*** và c là ***duy nhất***

Nếu có nhiều tối tiểu thì ta không có cực tiểu.

Ta nói d là phần tử ***cực đại (maximum)*** của *X* xét theo R nếu và chỉ nếu

d là phần tử ***tối đại*** và d là ***duy nhất***

Nếu có nhiều tối đại thì ta không có cực đại.

* Ta gọi cấu trúc (*X*,R), với R là quan hệ thứ tự trên *X*, là cấu trúc được sắp tốt (có thứ tự tốt) nếu *X* có phần tử cực tiểu xét theo R trên *X*.

<u>Ví dụ</u>:

Cấu trúc $(\mathbb{N}, \leq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = 0

Cấu trúc $(\mathbb{N}, \geq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^{+}, \leq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = 1

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^+, \geq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^-, \leq)$ là cấu trúc không được sắp tốt do không có phần tử cực tiểu.

Cấu trúc $(\mathbb{Z}^-, \geq)$ là cấu trúc được sắp tốt do có phần tử cực tiểu là min = -1.

Ví dụ mẫu 2:

Cho tập hợp $X = \{2, 3, 5, 7, 8, 14, 16, 20, 24, 27, 30, 32, 40, 42, 48\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên X

$x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x \vdots y \Leftrightarrow x$ là bội số của y, với $x, y \in X$.

a/ Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự trên *X*.

b/ Hỏi R có toàn phần không? Vì sao?

c/ Vẽ biểu đồ Hasse cho quan hệ R trên *X*.

d/ Tìm phần tử tối đại, tối tiểu, cực đại, cực tiểu, xét theo R trên *X* (nếu có)

e/ Hỏi cấu trúc (*X*,R) có được sắp tốt không? Vì sao?

Giải:

a/ Ta chứng minh R là quan hệ thứ tự trên *X* như sau:

* *Tính phản xạ*:

$\forall x \in X$, ta có $x\mathrm{R}x \Leftrightarrow x \vdots x$ luôn đúng

Cho nên ta nói R có tính phản xạ (1)

* *Tính phản đối xứng*:

Giả sử: $\begin{cases} x\mathrm{R}y \\ y\mathrm{R}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ y = nx \end{cases}$, với $x, y \in X$.

$\Rightarrow x = m(nx) = (mn)x \Rightarrow mn = 1$, với $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \end{cases}$ (nhận) hay $\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$ (loại)

$\Rightarrow x = my = 1y = y \Rightarrow x = y$

Cho nên ta nói R có tính phản đối xứng (2)

* *Tính truyền (bắc cầu)*:

Giả sử: $\begin{cases} x\mathrm{R}y \\ y\mathrm{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots y \\ y \vdots z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my \\ y = nz \end{cases}$, với $x, y, z \in X$.

$\Rightarrow x = m(nz) = (mn)z = kz$, với $k = mn, k \in \mathbb{Z}^+$.

$\Rightarrow x = kz \Rightarrow x \vdots z \Rightarrow x\mathrm{R}z$.

Cho nên ta nói R có tính truyền (3)

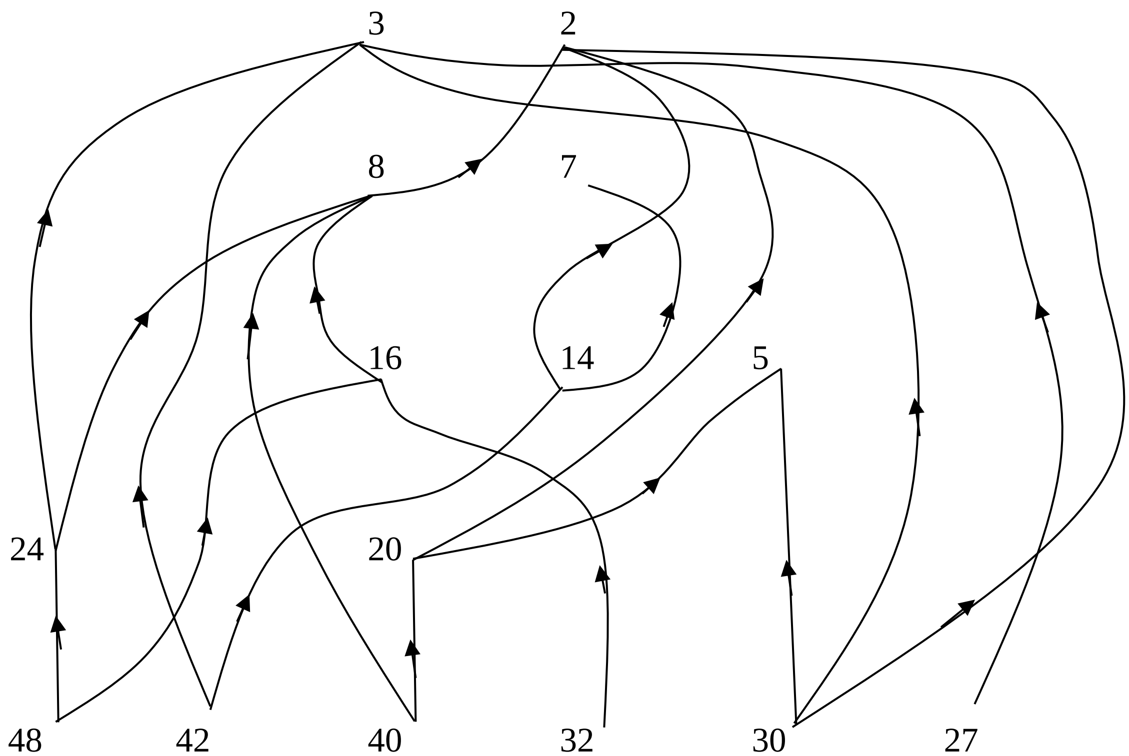
Từ (1), (2), (3) suy ra R là quan hệ thứ tự trên *X*.

b/ Hỏi R có toàn phần không? Vì sao?

Ta chọn $\begin{cases} x_0 = 3 \in X \\ y_0 = 5 \in X \end{cases}$ mà 3 không là bội của 5 và 5 cũng không là bội của 3, nghĩa là

$\begin{cases} x_0 \overline{\mathrm{R}} y_0 \\ y_0 \overline{\mathrm{R}} x_0 \end{cases}$ nên ta nói R là quan hệ thứ tự không toàn phần trên *X*.

c/ Vẽ biểu đồ Hasse:



d/ Từ biểu đồ Hasse ta có:

+ Phần tử tối đại: 3, 2, 7, 5
+ Phần tử tối tiểu: 48, 42, 40, 32, 30, 27
+ Phần tử cực đại: không có (do có nhiều tối đại)
+ Phần tử cực tiểu: không có (do có nhiều tối tiểu).

e/ Cấu trúc (*X*,R) là không được sắp tốt, do không có phần tử cực tiểu.

<u>*Bài tập tương tự*</u>.

Yêu cầu như ví dụ mẫu 2.

<u>Bài 11</u>: Cho $X = \{2,3,8,9,10,15,17,18,20,30,34,36,40\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow x$ là ước số của y, với $x, y \in X$.

<u>Bài 12</u>: Cho $X = \{2,3,8,9,10,15,17,18,20,30,34,36,40\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x = y$, với $x, y \in X$.

<u>Bài 13</u>: Cho $X = \{-3,-2,-1,0,3,5,7,9\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x \le y$, với $x, y \in X$.

<u>Bài 14</u>: Cho $X = \{-3, -2, -1, 0, 3, 5, 7, 9\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x \ge y$, với $x, y \in X$.

<u>Bài 15</u>: Cho $X = \{a, b, c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = $\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$

và R là quan hệ 2 ngôi trên E như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x \subseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

<u>Bài 16</u>:

Cho $X = \{a, b, c\}$ và E = tập hợp chứa tất cả các tập hợp con của *X*, nghĩa là

E = $\{ \phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$

và R là quan hệ 2 ngôi trên E như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x \supseteq y$, với x, y là các tập hợp trên E.

<u>Bài 17</u>: Cho $X = \{-3, -2, 0, 1, 5, 7, 8, 10\}$ và quan hệ 2 ngôi R trên *X* như sau:

$x\text{R}y \Leftrightarrow x^2 \ge y^2$, với $x, y \in X$.

Nội dung ôn tập Giữa kỳ:

Câu 1:

a/ Dùng các luật logic để chứng tỏ biểu thức sau là hằng đúng

b/ Dùng các luật logic, các quy tắc suy diễn để kiểm tra tính đúng đắn của suy luận sau

c/ Cho biết chân trị của mệnh đề sau và viết dạng phủ định cho biểu thức.

Câu 2:

Bài tập về tổ hợp lặp/ chỉnh hợp lặp.

Câu 3:

Bài tập về nguyên lý chuồng bồ câu.

Câu 4:

Bài tập về quan hệ tương đương (như ví dụ mẫu 1, ngày 25-03-2025)

Câu 5:

Bài tập về quan hệ thứ tự (như ví dụ mẫu 2, ngày 25-03-2025)

---Hết---