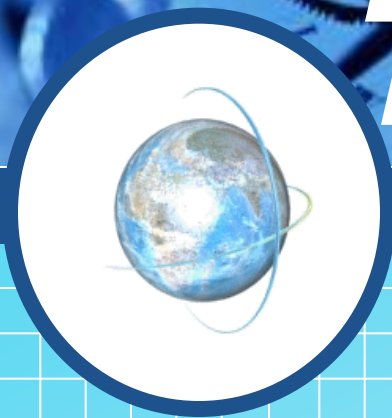


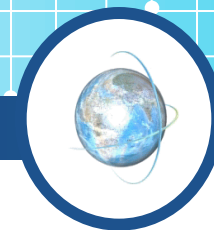
LOGO



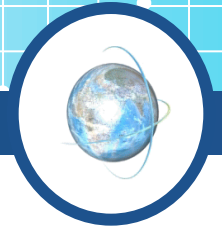
# ***TOÁN RỜI RẠC***

## ***CHƯƠNG II: CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM***

# CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM



- I. Tập hợp các tập hợp con. Biểu diễn tập hợp trên máy tính. Các phép toán tập hợp và các tính chất liên quan. Tập hợp tích Descartes.**
- II. Nguyên lý cộng. Nguyên lý nhân. Nguyên lý chuồng bồ câu.**
- III. Hoán vị, tổ hợp và chỉnh hợp. Công thức nhị thức Newton.**
- IV. Hoán vị lặp, tổ hợp lặp, chỉnh hợp lặp.**



**1. Khái niệm**

**2. Quan hệ giữa các tập hợp**

**3. Các cách xác định tập hợp**

**4. Tập hợp các tập hợp con (Tập hợp lũy thừa)**

# KHÁI NIỆM



## Định nghĩa tập hợp:

- Một tụ tập của vô hạn hay hữu hạn các đối tượng có một tính chất chung nào đó gọi là một tập hợp.
- Các đối tượng trong một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp đó.
- Tập hợp thường gọi vắn tắt là *tập*.

# KHÁI NIỆM



**Ví dụ:**

**R** là tập các số thực.

**Z** là tập các số nguyên.

**N** là tập các số tự nhiên.

**Ghi chú:**

**$x \in A$**  để chỉ  **$x$**  là phần tử của tập  **$A$**

**$x \notin A$**  để chỉ  **$x$**  không phải là phần tử của tập  **$A$**

**$\emptyset$**  (tập rỗng): là tập không chứa bất kì phần tử nào

# QUAN HỆ GIỮA CÁC TẬP HỢP



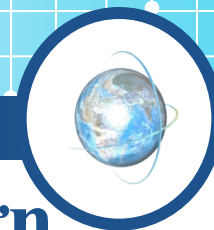
**Tập hợp bằng nhau:** Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử, tức là mỗi phần tử thuộc A đều là phần tử thuộc B và ngược lại. Kí hiệu:  $A=B$ .

**Ví dụ:**  $\{1, 3, 5\}$  và  $\{3, 5, 1\}$

**Tập con:** Tập A được gọi là tập con của tập B khi và chỉ khi mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Kí hiệu:  $A \subseteq B$ .

**Nhận xét:**  $(A \subseteq B) \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$  là đúng

# QUAN HỆ GIỮA CÁC TẬP HỢP



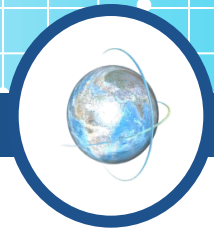
**Ví dụ:** Tập các số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10 là một tập con của tập các số nguyên dương nhỏ hơn 10.

**Ghi chú:** Khi muốn nhấn mạnh tập  $A$  là tập con của tập  $B$  nhưng  $A \neq B$ , ta viết  $A \subset B$  và nói rằng  $A$  là tập con thật sự của  $B$ .

**Nhận xét:**

- Nếu  $A \subseteq B$  và  $B \subseteq A$  thì  $A = B$ .
- Tập rỗng là con của mọi tập hợp.
- Mọi tập hợp đều là tập con của chính nó.

# CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP



## 1. Liệt kê các phần tử

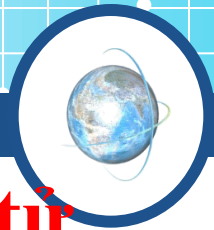
Một tập hợp có thể được xác định bằng cách liệt kê tất cả các phần tử của nó. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu trong đó tất cả các phần tử của một tập hợp được liệt kê ở giữa hai dấu móc.

**Ví dụ:**

- $V = \{a, e, i, o, u\}$
- $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
- $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $Z = \{\dots, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$



# CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP



## 2. Chỉ ra các thuộc tính đặc trưng của phần tử

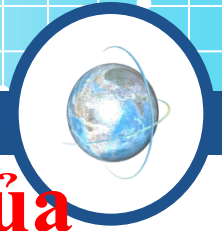
Một tập hợp cũng có thể được xác định bằng cách chỉ ra rõ các thuộc tính đặc trưng của các phần tử của nó.

Cách viết:  $A = \{x \in U \mid p(x)\}$  ( $A = \{x \in U : p(x)\}$ )  
hay vắn tắt  $A = \{x \mid p(x)\}$  ( $A = \{x : p(x)\}$ )

**Ví dụ:**

- $V = \{x \mid x \text{ là nguyên âm}\}$
- $O = \{x \mid x \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 10\}$
- $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$
- $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số nguyên tố}\}.$

# CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP



## 3. Cách xác định tập hợp dưới dạng ảnh của một tập hợp khác

Cách viết:  $A = \{f(x) \mid x \in B\}$  ( $A = \{f(x) : x \in B\}$ )

**Ví dụ:**

- $A = \{(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$  .
- $B = \{2x \mid x \in \mathbb{R}\}$

# TẬP HỢP CÁC TẬP HỢP CON



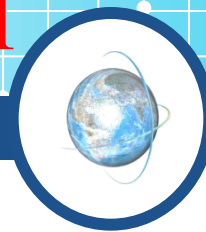
Cho tập  $X$ , tập tất cả các tập con của  $X$  (còn gọi là tập lũy thừa của  $X$ ) được kí hiệu là  $P(X)$ . Nói cách khác,  $P(X)$  là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp con của  $X$ .

**Ví dụ:**  $X = \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$

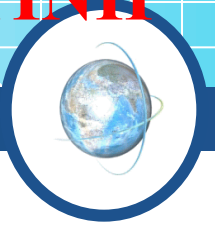
**Chú ý:**

- $X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y).$
- Nếu  $X$  có  $n$  phần tử ( $n \in \mathbb{N}$ ) thì  $P(X)$  có  $2^n$  phần tử.



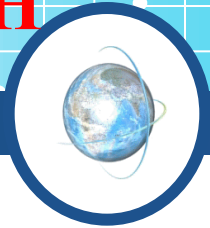
## 1. Phương pháp biểu diễn

- Có nhiều cách biểu diễn tập hợp trên máy tính.
- Ở đây chúng ta sẽ nói đến một phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp xếp tùy ý các phần tử của tập vũ trụ.



## 1. Phương pháp biểu diễn

Giả sử tập vũ trụ  $U$  là hữu hạn. Trước hết sắp xếp tùy ý các phần tử của  $U$ , ví dụ  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , sau đó biểu diễn tập con  $A$  của  $U$  bằng một xâu bit có chiều dài  $n$ , trong đó bit thứ  $i$  là 1 nếu  $a_i$  thuộc  $A$  và là 0 nếu  $a_i$  không thuộc  $A$ .



## 2. Ví dụ

Cho  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  và sự sắp xếp các phần tử trong  $U$  theo thứ tự tăng dần, tức là  $a_i = i$ .

○ Khi đó, chuỗi bit biểu diễn tập con  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  là 11111 00000; xâu bit biểu diễn tập con  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  là 10101 01010.

○ Để nhận được xâu bit cho các tập là hợp và giao của hai tập hợp, ta sẽ thực hiện phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó.

○ Xâu bit đối với hợp của hai tập là:

$$11111 \text{ 00000} \vee 10101 \text{ 01010} = 11111 \text{ 01010}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

○ Xâu bit đối với giao của hai tập này là:

$$11111 \text{ 00000} \wedge 10101 \text{ 01010} = 10101 \text{ 00000}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}.$$

# CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP



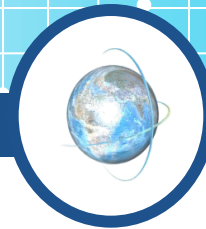
**1. Phép hợp**

**2. Phép giao**

**3. Phép hiệu**

**4. Các tính chất liên quan**

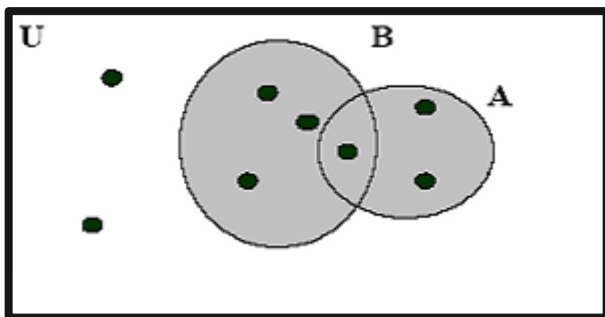
# CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP



## 1. Phép hợp

- **Định nghĩa:** Cho A và B là hai tập hợp. Hợp của hai tập hợp A và B, được ký hiệu là  $A \cup B$ , là tập hợp chứa các phần tử, hoặc thuộc A hoặc thuộc B hoặc thuộc cả hai.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



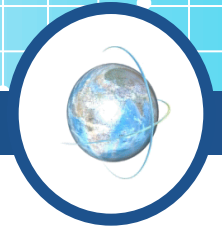
Giản đồ Venn biểu diễn hợp của A và B

### Ví dụ:

- Cho  $A = \{1, 2, 3\}$  và  $B = \{1, 3, 5\}$  thì  $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$ .



# CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP



## 1. Phép hợp

**Định nghĩa:** Hợp của  $n$  tập hợp là một tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số  $n$  tập hợp đó.

Ta ký hiệu: 
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

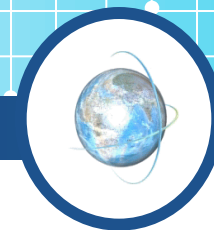
để chỉ hợp của các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Ví dụ:**

Cho  $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ . Khi đó:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

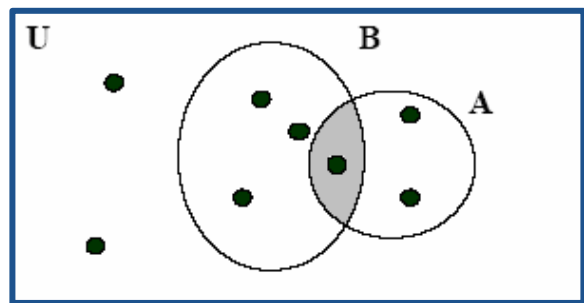
# CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP



## 2. Phép giao

**Định nghĩa:** Cho A và B là hai tập hợp. Giao của hai tập hợp A và B, được ký hiệu là  $A \cap B$ , là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả hai tập A và B.

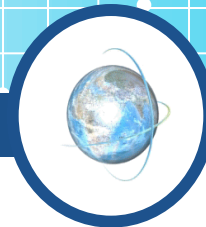
$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



Giản đồ Venn biểu diễn giao của A và B

### Ví dụ:

- Cho  $A = \{1, 2, 3\}$  và  $B = \{1, 3, 5\}$  thì  $A \cap B = \{1, 3\}$ .
- Cho  $M = \{1, 2\}$  và  $N = \{3, 4\}$  thì  $M \cap N = \emptyset$ , khi đó ta nói M, N rời nhau.



## 2. Phép giao

**Định nghĩa:** Giao của  $n$  tập hợp là một tập hợp chứa các phần tử thuộc tất cả  $n$  tập hợp đó. Ta ký hiệu:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

để chỉ giao của các tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Ví dụ:** Cho  $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ . Khi đó:

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

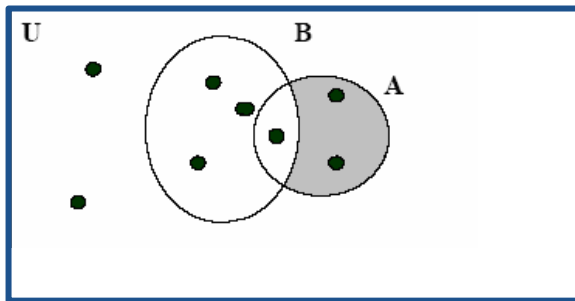
# CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP



## 3. Phép hiệu

**Định nghĩa:** Cho A và B là hai tập hợp, hiệu của A và B, được ký hiệu là  $A \setminus B$ , là tập hợp chứa các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Hiệu của A và B cũng được gọi là phần bù của B đối với A.

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



Giản đồ Venn biểu diễn hiệu  $A \setminus B$

**Ví dụ:**

○ Cho  $A = \{1, 2, 3\}$  và  $B = \{1, 3, 5\}$  thì  $A \setminus B = \{2\}$ ;  $B \setminus A = \{5\}$ .



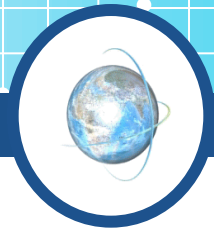
## 3. Phép hiệu

**Nhận xét:**  $A \setminus B = B \setminus A$  khi và chỉ khi  $A = B$ .  
Khi đó  $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$ .

**Định nghĩa:** Cho  $U$  là tập vũ trụ. Phần bù của tập  $A$ , được kí hiệu là  $\bar{A}$ , là phần bù của  $A$  đối với  $U$ :  $\bar{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$ .

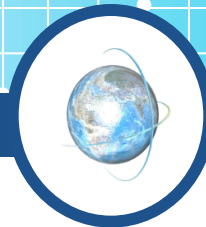
**Ví dụ:** Cho  $A = \{a, e, i, o, u\}$  thì  $\bar{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$  (ở đây tập vũ trụ là tập các chữ cái tiếng Anh).

# CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN



Tính chất	Tên gọi
$A \cup \emptyset = A ; A \cap U = A$	Phần tử trung hòa
$A \cup U = U ; A \cap \emptyset = \emptyset$	Tính thống trị
$A \cup A = A ; A \cap A = A$	Tính lũy đẳng
$A \cup \bar{A} = U ; A \cap \bar{A} = \emptyset$	Phần bù
$A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$	Tính giao hoán
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Tính kết hợp
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Tính phân phối
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} ; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	Công thức De Morgan

# TÍCH DESCARTES



**Định nghĩa 1:** Cho hai tập  $A$  và  $B$ . Tích Descartes của  $A$  và  $B$ , được ký hiệu là  $A \times B$ , là tập hợp gồm tất cả các cặp  $(a, b)$  với  $a \in A$  và  $b \in B$ .

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

**Ví dụ:** Cho  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  thì:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

**Nhận xét:**  $A \times B \neq B \times A$ .

# TÍCH DESCARTES



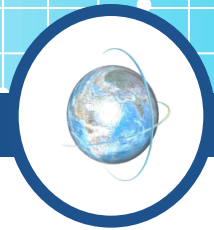
**Định nghĩa 2:** Tích Descartes của  $n$  ( $n > 1$ ) tập hợp  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , được ký hiệu bởi  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , là tập hợp gồm tất cả các bộ  $n$  phần tử  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  trong đó  $a_i \in A_i$  với  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ với } i = 1, 2, \dots, n\}$$

**Ví dụ:** Cho  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ ,  $C = \{0, 1, 2\}$  thì:

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}.$$





## Ghi chú

- Lũy thừa bậc 2 Descartes (hay bình phương Descartes) của tập  $A$  được định nghĩa là tích Descartes của  $A$  với  $A$ :

$$A^2 = A \times A$$

- Tương tự, lũy thừa Descartes bậc  $n$  của tập  $A$  là tích Descartes của  $n$  tập  $A$ :

$$A^n = A \times A \times \dots \times A$$

(có  $n$  tập  $A$  ở vế phải).

# LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP



\*Số phần tử của một tập hợp hữu hạn  $A$  được ký hiệu là  $|A|$  và gọi là lực lượng của tập  $A$ .

\*Nếu tập hợp  $A$  không hữu hạn, ta nói  $A$  là một tập vô hạn và viết:  $|A| = \infty$ .

\* Quy ước:  $|\emptyset| = 0$ .

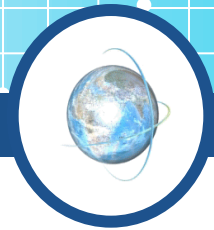
\* Tính chất: Cho  $A, B$  là các tập hữu hạn. Khi đó:

$$1) |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$$2) |A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$3) |P(A)| = 2^{|A|}$$

**VD:**  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ;  $B = \{3, 5, 6\}$ ;  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ ;  $A \cap B = \{3, 5\}$   
 $|A| = 4$ ;  $|B| = 3$ ;  $|A \cap B| = 2$ ;  $|A \cup B| = 5$ ;  $|A \times B| = 12$ ;  $|P(A)| = 2^4 = 16$



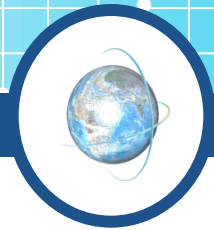
## 1. Nguyên lý cộng

**Mệnh đề:** Cho A và B là hai tập hữu hạn rời nhau, nghĩa là  $A \cap B = \emptyset$ . Khi đó ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

**\* Tổng quát:** Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập hữu hạn rời nhau đôi một, nghĩa là  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j; i, j=1, 2, \dots, n$ ) thì

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$



## 1. Nguyên lý cộng

Giả sử để thực hiện một công việc nào đó, ta có 2 phương pháp, trong đó:

- Phương pháp 1 có  $n$  cách thực hiện
- Phương pháp 2 có  $m$  cách thực hiện

Khi đó, số cách thực hiện công việc trên là  $n + m$

⇒ Tổng quát?



## 1. Nguyên lý cộng

**Ví dụ:** Bạn Ngọc có 5 cái áo sơ mi và 6 cái áo thun. Ngọc chọn 1 cái áo để mặc, hỏi Ngọc có bao nhiêu cách chọn?

**Giải:**

Phương pháp 1: chọn áo sơ mi có 5 cách thực hiện.

Phương pháp 2: chọn áo thun có 6 cách thực hiện.

Vậy Ngọc có:  $5+6=11$  cách để chọn.



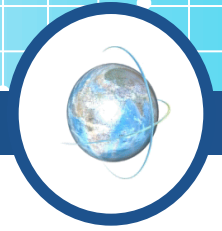
## 2. Nguyên lý nhân

**Mệnh đề:** Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó ta có:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

**\* Tổng quát:** Nếu  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các tập hữu hạn thì

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$



## 2. Nguyên lý nhân

Giả sử để thực hiện một công việc nào đó, ta cần thực hiện 2 bước (giai đoạn), trong đó

- Bước 1 có  $n$  cách thực hiện
- Bước 2 có  $m$  cách thực hiện

Khi đó, số cách thực hiện công việc trên là  $n.m$

⇒ Tổng quát?



## 2. Nguyên lý nhân

**Ví dụ:** Bạn Phúc từ Quận 9 (A) muốn tới trường Công Nghệ Thông Tin (C), phải qua chặng Ngã tư Thủ Đức (B). Biết từ A tới B có 3 tuyến xe buýt để đi, và từ B tới C có 4 tuyến xe buýt để đi.

**Giải:**

Giai đoạn 1 (A đến B): có 3 cách thực hiện

Giai đoạn 2 (B đến C): có 4 cách thực hiện

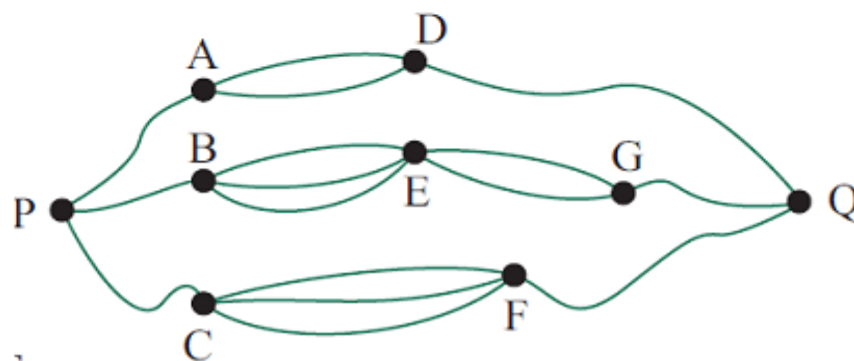
Vậy Phúc muốn tới Trường Công Nghệ Thông Tin thì sẽ có  $3.4=12$  cách.





## Nguyên lý cộng, nguyên lý nhân

- Để đi từ P đến Q, có 3 cách:
  - Hoặc đi qua A: 2 cách
  - Hoặc đi qua B:  $3 \times 2 = 6$  cách
  - Hoặc đi qua C: 3 cách
- Vậy tổng cộng có:  $2 + 6 + 3 = 11$  cách đi từ P đến Q.



# CÁC NGUYÊN LÝ



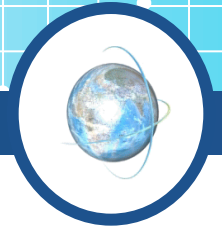
## Nguyên lý cộng vs Nguyên lý nhân

- Nguyên lý cộng: chia trường hợp (hoặc làm cái này hoặc làm cái kia...)
- Nguyên lý nhân: chia giai đoạn

### Bài toán

Một mẫu áo sơ mi đặc biệt có 12 màu, có 3 cỡ cho nam và 4 cỡ cho nữ. Hỏi có bao nhiêu loại khác nhau của mẫu áo này?

► Đáp số:  $12 \times 3 + 12 \times 4 = 84$  mẫu áo.



## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

### *a. Giới thiệu*

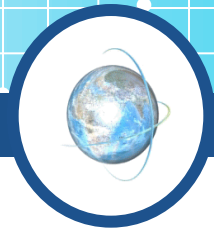
Nguyên lý chuồng bồ câu được phát triển từ mệnh đề: “Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ô trong chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ô chứa nhiều hơn một con chim.”



## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

### *b. Nguyên lý cơ bản*

Nếu ta đặt  $n$  đối tượng nào đó vào  $k$  hộp, và số hộp  $k$  nhỏ hơn số đối tượng  $n$ , thì có ít nhất một hộp chứa từ 2 đối tượng trở lên.



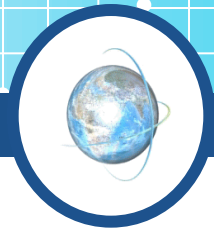
## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

### *b. Nguyên lý mở rộng*

Nếu ta đặt  $n$  đối tượng vào  $k$  hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất là  $[n/k]$  đối tượng.

**Chú ý:** Ký hiệu  $[a]$  dùng để chỉ số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng  $a$ .

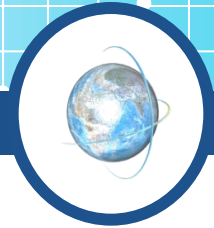
**Ví dụ:**  $[5]=5$ ,  $[4/3]=2$



## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

**Ví dụ:** Có 20 chim bồ câu ở trong chuồng có 7 ô. Khi đó sẽ có ít nhất 1 ô chứa  $[20/7]=3$  con bồ câu trở lên.

**Ví dụ:** Có 100 người thì có ít nhất  $[100/12]=9$  người sinh cùng tháng.



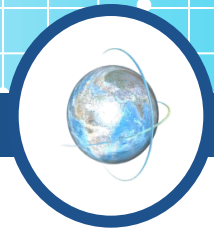
## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

**Ví dụ:** Số sinh viên của một lớp học ít nhất là bao nhiêu để có ít nhất hai sinh viên đạt số điểm như nhau trong kỳ thi môn CTRR, nếu thang điểm là số nguyên từ  $0 \rightarrow 10$ ?

**n:** số sinh viên của lớp

**k:** số loại điểm nguyên từ  $0 \rightarrow 10 \Rightarrow k=11$

Tìm  $n_{\min} = ?$  biết  $[n/k] = [n/11] = 2$



## 3. Nguyên lý chuồng bồ câu (Dirichlet)

**n:** số sinh viên của lớp

**k:** số loại điểm nguyên từ  $0 \rightarrow 10 \Rightarrow k=11$

Tìm  $n_{\min} = ?$  biết  $[n/k] = [n/11] = 2$

Theo NL chuồng bồ câu:

$$[n/11] = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < n/11 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 11 < n \leq 22$$

$$\Rightarrow n_{\min} = 12$$



# HOÁN VỊ



## a. Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm  $n$  phần tử ( $n > 0$ ). Mỗi cách sắp đặt có thứ tự  $n$  phần tử của A được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử. Số các hoán vị của  $n$  phần tử được ký hiệu là  $P_n$ .

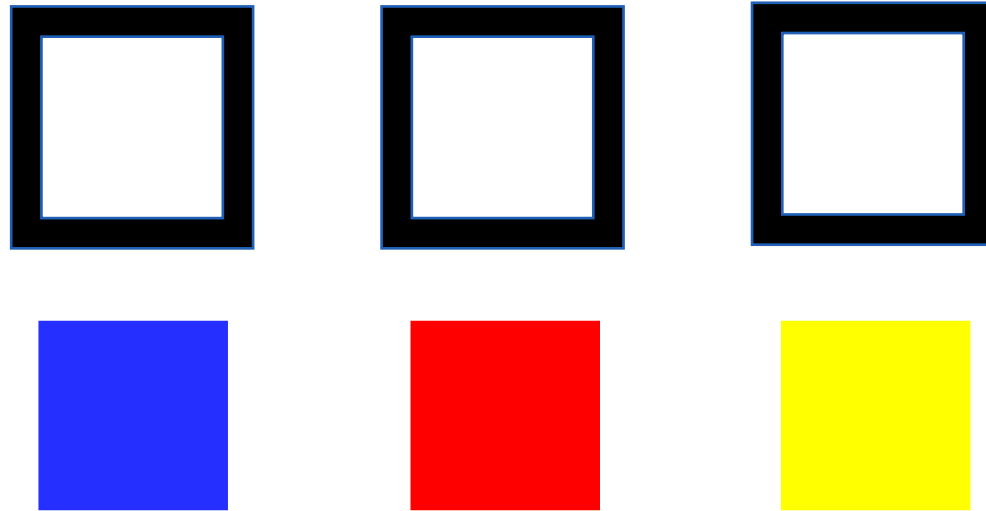
**Ví dụ:** Trên tường có 3 khung tranh; có ba bức tranh xanh, đỏ, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách treo 3 bức tranh lên tường?

# HOÁN VỊ



Số cách chọn:

$$3 \times 2 \times 1 = 3!$$



b. Công thức:

$$P_n = n! = 1.2...(n-1).n$$

$$0! = 1$$

# HOÁN VỊ



**Ví dụ 1:** Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan 7 điểm A,B,C,D,E,F,G. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thứ tự tham quan?

**Giải:**

Mỗi cách họ chọn thứ tự tham quan là một hoán vị của tập A,B,C,D,E,F,G.

Do vậy đoàn khách có tất cả:  $P_7 = 7! = 5040$  cách chọn thứ tự tham quan.



## a. Định nghĩa:

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n > 0$ ). Mỗi tập con gồm  $k$  phần tử ( $0 \leq k \leq n$ ) của  $A$  được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử được ký hiệu là  $C_n^k$ .

**Nhận xét:** Lấy một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử chính là lấy ra  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử đó mà không quan tâm đến thứ tự.



## b. Công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

## c. Tính chất:

$$C_n^{n-k} = C_n^k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

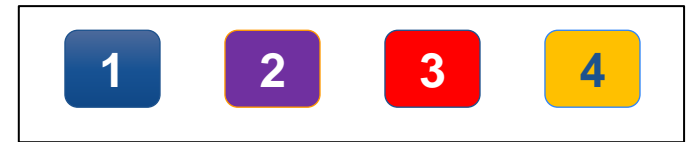
$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

# TỔ HỢP



**Ví dụ:** Cho tập A gồm 4 số tự nhiên {1,2,3,4}. Tìm tất cả các tập con của A sao cho các tập con chỉ có 3 phần tử.

*Số tập con có thể tìm được là  $C_4^3=4$*





**Ví dụ:** Từ 3 điểm A, B và C, bạn sẽ có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo ra?

**Giải:**

Số đoạn thẳng được tạo thành từ 3 điểm A, B, C chính là số tổ hợp chập 2 của 3:

$$C_3^2 = 3$$

Vậy có 3 đoạn thẳng được tạo thành từ 3 điểm A, B, C.

# CHỈNH HỢP



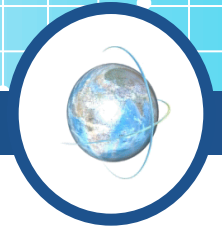
## a. Định nghĩa:

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n > 0$ ). Mỗi bộ gồm  $k$  phần tử ( $1 \leq k \leq n$ ) sắp thứ tự của tập  $A$  được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử. Số các chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử được ký hiệu là  $A_n^k$ .

**Nhận xét:** Lập một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử chính là lấy ra  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử đó, có quan tâm đến thứ tự.



# CHỈNH HỢP



Nói cách khác, hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này không là phần tử của chỉnh hợp kia hoặc các phần tử của 2 chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.

**b.Công thức:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n.$$



**Ví dụ:** Từ 3 điểm A, B và C sẽ lập được bao nhiêu vector?

**Giải:**

Số vector được tạo thành từ 3 điểm A, B, C chính là số chỉnh hợp 2 của 3:

$$A_3^2 = 6$$

Vậy có 6 vector được tạo thành từ 3 điểm A, B, C.

# ***CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON***



**Isaac Newton  
(1643-1727)**

# CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON



**Định lý:** Với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $n$  là số nguyên dương ta có:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

**Ví dụ:**

$$(a + b)^2 = \sum_{k=0}^2 C_2^k a^{2-k} b^k =$$

$$= C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

# CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON



$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$$

## Tính chất:

- Số các số hạng của công thức là  $n+1$ .
- Tổng các số mũ của  $a$  và  $b$  trong mỗi số hạng luôn luôn bằng số mũ của nhị thức:  $k+n-k=n$
- Số hạng tổng quát của nhị thức là:  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$
- Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.

# CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON



**Một số khai triển hay sử dụng:**

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$$

# CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON



**Ví dụ:**

$$\begin{aligned}(x + y)^6 &= C_6^0 x^0 y^6 + C_6^1 x^1 y^5 + C_6^2 x^2 y^4 + C_6^3 x^3 y^3 + \\ &+ C_6^4 x^4 y^2 + C_6^5 x^5 y^1 + C_6^6 x^6 y^0 = \\ &= y^6 + 6xy^5 + 15x^2 y^4 + 20x^3 y^3 + 15x^4 y^2 + 6x^5 y + x^6\end{aligned}$$

**Ví dụ:** Tìm hệ số của  $x^4$  trong khai triển  $(x^2 - 2)^5$

$$(x^2 - 2)^5 = \sum_{k=0}^5 C_5^k (x^2)^k (-2)^{5-k}$$

$$(x^2)^k = x^4 \Rightarrow k = 2$$

**Khi  $k = 2$  thì hệ số của  $x^4$ :**  $C_5^2 (-2)^{5-2} = -80$

# HOÁN VỊ LẮP



**a. Định nghĩa:** Cho  $n$  đối tượng, trong đó có  $n_i$  đối tượng loại  $i$  giống hệt nhau ( $i=1,2,\dots,k$ ) và  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Mỗi cách sắp xếp có thứ tự  $n$  đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lắp của  $n$ .

**b. Công thức:**

Số hoán vị của  $n$  đối tượng, trong đó có  $n_1$  đối tượng giống nhau thuộc loại 1,  $n_2$  đối tượng giống nhau thuộc loại 2, ...,  $n_k$  đối tượng giống nhau thuộc loại  $k$ , ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ) là

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$



# HOÁN VỊ LẶP



**Ví dụ:** Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau nhận được bằng cách sắp xếp lại các ký tự của chuỗi: “YAMAHAM”

Số ký tự có trong chuỗi là:  $n=7$

Có 3 ký tự ‘A’

Có 2 ký tự ‘M’

Có 1 ký tự ‘Y’

Có 1 ký tự ‘H’

Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

# Khai triển mở rộng nhị thức Newton



$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_k^{n_k}$$

với các số nguyên không âm  $n_1, n_2, \dots, n_k$   
thoả  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , ký hiệu

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

# Khai triển mở rộng nhị thức Newton



Ví dụ: Tìm hệ số của  $u^1v^2w^2t^3$  trong khai triển  
 $(u + v + w + t)^8$

$$(u + v + w + t)^8$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=8} \binom{8}{n_1, n_2, n_2, n_4} u^{n_1} v^{n_2} w^{n_3} t^{n_4}$$

Vậy hệ số cần tìm:

$$= \binom{8}{1, 2, 2, 3} = \frac{8!}{1!2!2!3!} = 1680$$

# TỔ HỢP LẶP



## a. Định nghĩa:

Mỗi cách chọn ra  $k$  vật từ  $n$  loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$ . Số các tổ hợp lặp chập  $k$  của  $n$  được ký hiệu là

$$K_n^k$$

# TỔ HỢP LẶP



## b. Công thức:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

**Ví dụ:** Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón.  
Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?

Ta có mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Số cách chọn:

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

(Cụ thể AA, AB, AC, BB, BC, CC)

# TỔ HỢP LẮP

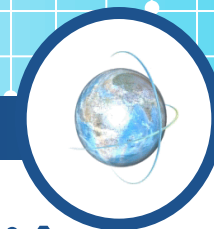


**Hệ quả:** Số nghiệm nguyên không âm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (mỗi  $x_i$  đều nguyên không âm) của phương trình  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  là

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

**VD:** Phương trình  $X+Y+Z+T=20$  có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ?

# TỔ HỢP LẬP



**VD: Phương trình  $X+Y+Z+T=20$  có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ?**

**Lời giải :**

**Chọn 20 phần tử từ một tập có 4 loại, sao cho có X phần tử loại 1, Y phần tử loại 2 , có Z phần tử loại 3, có T phần tử loại 4. Vì vậy số nghiệm bằng tổ hợp lặp chập 20 của 4 loại phần tử và bằng:**

$$K_4^{20}$$

**=> Cách giải nhanh đối với bài toán tìm nghiệm nguyên không âm:  $x+y+z+t = n$  là  $K_4^n$**

# TỔ HỢP LẬP



**Hệ quả:** Số cách chia  $k$  vật đồng chất nhau vào  $n$  hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lập chập  $k$  của  $n$ .

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

**VD:** Có bao nhiêu cách xếp 6 viên bi giống nhau vào trong 3 hộp khác nhau?

$$K_3^6 = C_8^6 = 28$$



# TỔ HỢP LẬP



**Ví dụ:** Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \quad (1)$$

Thỏa điều kiện  $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 > 4$  (\*).

**Giải:**

Ta viết điều kiện đã cho thành  $x_1 \leq 3; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5$ .

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \geq 2; x_3 \geq 5 \quad (**)$$

$$x_1 \geq 4; x_2 \geq 2; x_3 \geq 5 \quad (***)$$

Gọi  $p, q, r$  lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện (\*), (\*\*), (\*\*\*). Ta có:

$$p = q - r$$

# TỔ HỢP LẶP



**Ví dụ:**

Trước hết ta tìm  $q$ .

Đặt

$$x_1' = x_1; x_2' = x_2 - 2; x_3' = x_3 - 5; x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 \quad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (\*\*) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

$$q = K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$$

# TỔ HỢP LẶP



**Ví dụ:**

**Tương tự, ta có:**

$$r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$$

$$\Rightarrow p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

**Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (\*) là 340.**



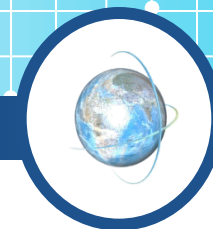
## Định nghĩa:

Mỗi cách chọn ra  $k$  phần tử (có quan tâm thứ tự) từ  $n$  loại phần tử (trong đó mỗi loại phần tử có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là một chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$ .

Số các chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$  là

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

# CHỈNH HỢP LẶP



$$\overline{A}_n^k = n^k$$

**VD:** Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số được tạo thành từ các phần tử của tập  $\{1,2,3,4\}$ .

$$\overline{A}_4^3 = 4^3 = 64$$

Có bao nhiêu password gồm 6 chữ số được lập thành từ 10 chữ số  $0,1,2,\dots,9$  ?

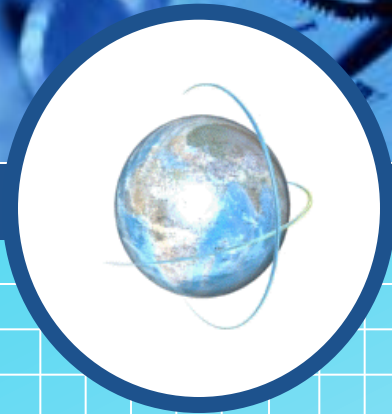


**CHÚ Ý:** Trong một số tài liệu, định nghĩa Tổ hợp lặp, Chỉnh hợp lặp có thể được trình bày với  **$n$  là số phần tử khác nhau** (chứ không phải **là số loại phần tử**).

**Tổ hợp lặp** = 1 bộ **không xét thứ tự** gồm  $k$  phần tử được chọn từ  $n$  phần tử khác nhau ( có thể chọn trùng lặp )

**Chỉnh hợp lặp** = 1 bộ **có thứ tự** gồm  $k$  phần tử được chọn từ  $n$  phần tử khác nhau ( có thể chọn trùng lặp )

LOGO



*Hết*