Klausurrelevante Aufgabe 3, 26.1.2021

(Abgabe bis spätestens Montag, 1.2.2021, 23:55 Uhr)

"Differentialrechnung mehrerer Variablen / Richtungsableitung" (max. 10 Punkte)

Aufgabe 1. (Papierarbeit)

Laut Vorlesung definieren die Gleichung $z = f(x, y)$ einer Fläche F in 3-D und die einer Kurve in der x-y-Ebene, $\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, eine Kurve auf F:

$$C_F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{p}(t)\,,\ z = f\big(\vec{p}(t)\big) \right\}.$$

Die Steigung der Kurve ist $m(t) = grad(f)|_{\vec{p}(t)} \cdot \frac{\dot{\vec{p}}(t)}{|\dot{\vec{p}}(t)|}$.

Leiten Sie die Beziehung zwischen $m(t)$ und der Ableitung $\dot{z} = \frac{dz(t)}{dt}$ her. (Kettenregel)

Aufgabe 2. (Papierarbeit, 2+3 Punkte)

Wir steigen auf den Brocken!

Das Höhenprofil des Brocken sei durch die Funktion

$$z = f(x, y) = He^{-(4x^2+y^2)}.$$

mit $H = 1{,}14$ gegeben. (Wir gehen von Strecken in Kilometern und Zeit in Stunden aus, die Rechnungen sollen aber ohne Einheiten ausgeführt werden.)

Zu untersuchen ist die Steigung entlang zweier möglicher Wege, und zwar sowohl im Sinne des Steigungswinkels als auch der bewältigten Höhenmeter pro Zeiteinheit.

Gestartet wird an der Stelle $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

a) Auf welcher Höhe liegt der Startpunkt?
b) Geben Sie die Richtung der maximalen Steigung im Startpunkt in Form des entsprechenden Einheitsvektors in der x-y-Ebene an.
c) Wie groß ist diese maximale Steigung im Startpunkt, wie groß ist der zugehörige Anstiegswinkel?

Die beiden Wege zum Gipfel, der bei $(0,\ 0)$ liegt, sind gegeben durch ihre Projektion in der x-y-Ebene und zwar

Weg 1: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{p}(t) = (1-t)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

Weg 2: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{p}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-t)\cos(2\pi t) \\ (1-t)\sin(2\pi t) \end{bmatrix}$

Beide Wege werden im Zeitintervall $0 \le t \le 1$ zurückgelegt.

Berechnen Sie (und vereinfachen Sie soweit wie sinnvoll möglich) entlang beider Wege

d) $\dot{z}(t)$, also die vertikale Geschwindigkeit ("Höhen(kilo)meter pro Stunde");

e) den Steigungswinkel $\alpha(t) = \arctan(m(t))$;

f) und die Bahngeschwindigkeit $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$ (mit $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$).

Hinweis: In e) und f) werden Beträge von Geschwindigkeiten benötigt. Für Weg 2 genügt es hier, wenn die Geschwindigkeitsvektoren bestimmt werden. Die Ausdrücke für deren Beträge sind relativ aufwändig und müssen nicht aufgeschrieben werden. Es genügt, wenn sie in MATLAB berechnet werden (siehe Aufgabe 4).

Denken Sie auch an die Erleichterung der Schreibarbeit durch Einsetzen von z, wenn in einer Ableitung die Funktion selbst wieder auftaucht.

g) Nach Visualisierung der Ergebnisse in MATLAB: Geben Sie die entscheidenden Vor- und Nachteile der beiden Wege an. (Stichworte, keine Romane!)

Aufgabe 3. (MATLAB)

Es ist eine MATLAB-function `brocken.m` (erste Zeile: `function brocken()`) mit den notwendigen Berechnungen zu erstellen, die die notwendigen Berechnungen zu Aufgabe 2 ausführt und folgendes darstellt:

a) in `figure(1)` in 3D den Berg mit den beiden Wegen sowie erkennbaren Markierungen bei Start- und Endpunkt. Wählen Sie mit `view(az,el)` einen geeigneten Blickwinkel.

b) in `figure(2)` mit `subplot(2,3,*)`, also in zwei Reihen mit je drei Diagrammen, für Weg 1 in Reihe 1 und Weg 2 in Reihe 2 nebeneinander je ein 2-D-Diagramm mit jeweils dem Betrag der in 1d), e), f) berechneten Verläufe über der Zeit $0 \leq t \leq 1$.

(Alles ohne Verwendung der MATLAB Symbolic Toolbox und ohne `fimplicit`!)

Wie gehabt:

Papierarbeit handschriftlich erstellen, scannen oder fotografieren und als eine PDF-Datei hochladen, MATLAB function "`brocken.m`" ebenfalls hochladen.