Klausurrelevante Aufgabe 4, 9.2.2021

(Abgabe bis spätestens Montag, 15.2.2021, 23:55 Uhr)

"Differentialrechnung mehrerer Variablen / Extremwerte" (max. 10 Punkte)

Aufgabe 1. (Papierarbeit)

Laut Vorlesung definieren die Gleichung $z = f(x, y)$ einer Fläche F in 3-D und die einer Kurve in der x-y-Ebene, $\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, eine Kurve auf F:

$$C_F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{p}(t)\,,\ z = f(\vec{p}(t)) \right\}.$$

Die Fläche F sei eine Halbkugel mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung.

$\vec{p}(t)$ sei eine Ellipse, deren Gleichung in Polarkoordinaten durch

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \ \text{mit}\ r(t) = \frac{\frac{2}{3}R}{\sqrt{1 + 3\sin^2\left(t + \frac{\pi}{6}\right)}}$$

gegeben ist und alternativ kartesisch durch

$$7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = \left(\frac{4}{3}R\right)^2.$$

Zu bestimmen sind sämtliche Extrempunkte der Kurve C_F, also die Punkte, in denen die Koordinaten x, y oder z auf der Kurve ihr jeweiliges absolutes Minimum oder Maximum annehmen. Anmerkung: Aus Symmetriegründen wird z je zwei Maxima und Minima mit jeweils gleichem Wert aufweisen, insgesamt sind also 8 Punkte zu bestimmen.

Die Extremwerte der x- und der y-Koordinate entlang der Kurve sind mit der Methode von Lagrange zu bestimmen (2 Punkte Abzug bei Verwendung anderer Rechenwege). Für z sind alle schlüssigen Rechenwege zugelassen.

Auf die Berechnung zweiter Ableitungen zur Klassifizierung der kritischen Stellen kann verzichtet und stattdessen die Grafik aus Aufgabe 2 als Begründung herangezogen werden.

Übermäßig weitschweifige oder überflüssige Rechnungen können zu Punktabzug führen, selbst wenn sie am Ende zum korrekten Ergebnis führen.

Aufgabe 2. (MATLAB)

Zur Visualisierung ist eine M-Function `kugelbahn.m` zu erstellen, die als Eingabeargument den Radius R hat (Default-Wert: 6) und die minimalen und maximalen Werte der Koordinaten in 3 Vektoren mit je 2 bzw. bei z) mit 4 Elementen ausgibt (erste Codezeilen vergleichbar mit der Klausurrelevanten Aufgabe 2 "Kegelschnitt").

Die Function soll in <u>einem</u> 3D-Diagramm die Halbkugel mit Transparenz 50%, die Ellipse in der x-y-Ebene und die Kurve C_F auf der Halbkugel darstellen. Die Kurven sollen gut hervorgehoben und erkennbar sein.

Außerdem sollen alle Extrempunkte sowohl auf der Kugeloberfläche als auch auf der Ellipse in der x-y-Ebene gut erkennbar markiert werden.