Klausurrelevante Aufgabe 4

H.A. 4

M 4

AP 3

Minh Tue Cung – 5081738

fehlende Extremwerte

falsche Ausgabe

Aufgabe 1:

- Wir gehen von einer oberen Halbkugel aus * für F:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (\text{Mittelpunkt im Ursprung})$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = R^2 - (x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)} = f(x,y)$$

(obere Halbkugel) ✓

- Außerdem:

$$7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = \left(\tfrac{4}{3}R\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - \left(\tfrac{4}{3}R\right)^2 = 0$$

- Lagrangesches Multiplikatorverfahren
  * Hilfsfunktion:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

hier: $\varphi(x,y) = 7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - \left(\tfrac{4}{3}R\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow F = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2)} + \lambda \cdot \left(7x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - \left(\tfrac{4}{3}R\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = \dfrac{-2x}{2\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} + \lambda(14x+6\sqrt{3}y) = 0 \\ \text{falsche Schreibweise} \\ F'_y = \dfrac{-2y}{2\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}} + \lambda(6\sqrt{3}x+26y) = 0 \\ 7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2-\left(\frac{4}{3}R\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(f : \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'_x = \dfrac{-x}{f} + \lambda(14x+6\sqrt{3}y) = 0 & (1) \\ F'_y = \dfrac{-y}{f} + \lambda(6\sqrt{3}x+26y) = 0 & (2) \\ 7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2-\left(\frac{4}{3}R\right)^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Aus (1) $\Rightarrow \lambda = \dfrac{x}{f\cdot(14x+6\sqrt{3}y)}$

In (2) einsetzen

$$\Rightarrow \frac{-y}{f} + \frac{x(6\sqrt{3}x+26y)}{f\cdot(14x+6\sqrt{3}y)} = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -y(14x+6\sqrt{3}y) + x(6\sqrt{3}x+26y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{3}x^2+12xy-6\sqrt{3}y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x^2+2xy-\sqrt{3}y^2 = 0 & (2) \\ 7x^2+6\sqrt{3}xy+13y^2-\left(\frac{4}{3}R\right)^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2): \quad x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}xy - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^2}{3} - y^2 = 0$$

umständlich

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{y^2}{3} + y^2 = \frac{4y^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4y^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}|y| \\ x + \frac{y}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{4y^2}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}|y| \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{y}{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\frac{4y^2}{3}} = -\frac{y}{\sqrt{3}} \pm \frac{2y}{\sqrt{3}}$$ für alle y

⊕ Wenn $y \geq 0$

extrem umständlich

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{3}} \\ x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}\,y \end{array}\right.$$

⊕ Wenn $y < 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}y \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}\,y \\ x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot -y \Leftrightarrow x = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

- Dies in (3) einsetzen

⊕ 1. Fall: $y \geq 0$ und $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow 7 \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6\sqrt{3} \cdot \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot y + 13y^2 - \frac{16}{9}R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3}y^2 + 6y^2 + 13y^2 = \frac{16}{9}R^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{3}y^2 = \cancel{\frac{16}{9}}\ \frac{16}{9}R^2 \Rightarrow y^2 = \frac{R^2}{12} \Leftrightarrow \cancel{4}$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{R}{2\sqrt{3}}$$

(Dieser umfasst bereits den Fall: $y < 0$ und $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$)

⊕ 2. Fall: $y \geq 0$ und $x = -\sqrt{3}\,y$

$$\Rightarrow 7 \cdot 3y^2 - 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}\,y^2 + 13y^2 = \frac{16}{9}R^2$$

$$\Leftrightarrow 16y^2 = \frac{16}{9}R^2 \Rightarrow y = \pm \frac{R}{3}$$

(Dieser umfasst bereits den Fall: $y < 0$ und $x = -\sqrt{3}\,y$)

* $z = \sqrt{R^2 - \cancel{x}x^2 - y^2}$ (obere Halb Kugel)

⊕ $x = \frac{y}{\sqrt{3}}$ und $y = \pm \frac{R}{2\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{R^2 - \left(\pm\frac{R}{6}\right)^2 - \left(\pm\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$$

⊕ $x = -\sqrt{3}\,y$ und $y = \pm \frac{R}{3}$

$$\Rightarrow z = \sqrt{R^2 - \left(\cancel{\pm} \mp \sqrt{3} \cdot \frac{R}{3}\right)^2 - \left(\pm\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}R$$

für welche Größe?

$\Rightarrow$ 8 Punkte (Extrema) sind:

$A\left(\frac{R}{6}; \frac{R}{2\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)$

$B\left(\frac{-R}{6}; \frac{-R}{2\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{2}}{3}R\right)$

$C\left(\frac{-R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}R\right)$

$D\left(\frac{R}{\sqrt{3}}; \frac{-R}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}R\right)$

(die obere Halb Kugel)

✓

~~Für die untere Halb Kugel sind~~ eher ~~die 4 Paare (x, y) Koordinaten genauso aus~~ ähnlich ~~, nur dass diesmal alle vor allen z Werten ein „–" gesetzt wird (also $-\frac{2\sqrt{2}}{3}R$ (2mal) und~~ $-\frac{\sqrt{5}}{3}R$ (2mal))

x- y- Extremwerte fehlen

Mit CamScanner gescannt