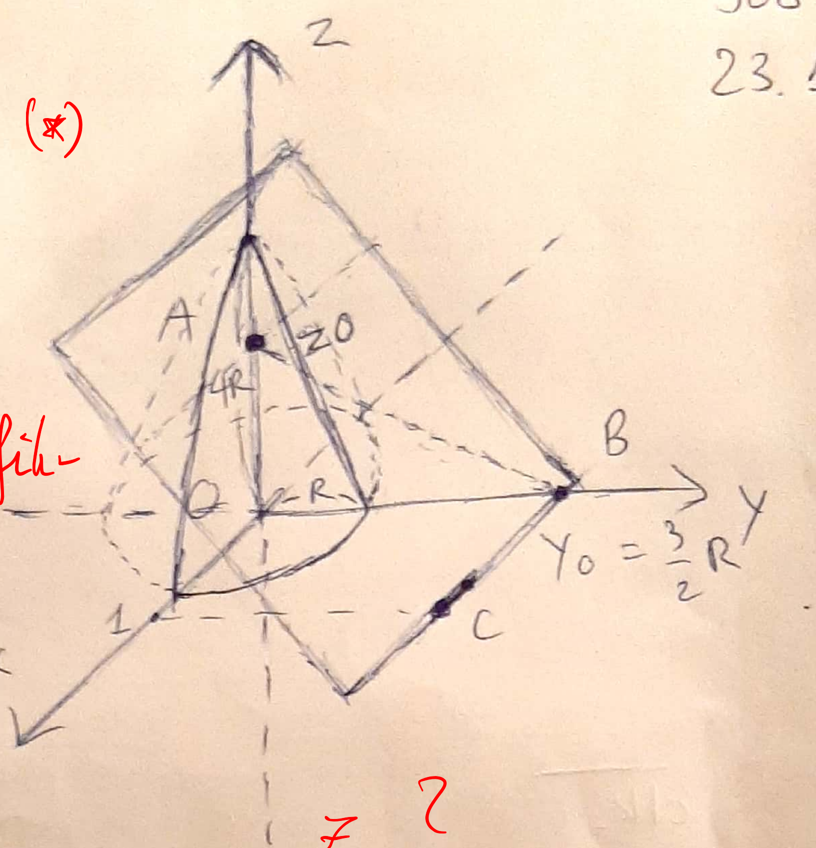
Aufgabe 2

Minh Tue Cung
5081738
23.12.2020

1) HA: 9
M: 5 (*)

AP: 9



(*) Schlechte Grafik-Skalierung bei Aufruf mit $R \leq 1$

a) [crossed out] • Schnittpunkt von Ebene und z-Achse: z_0 ?

$A(0;0;z0) = A(0;0;3R)$?

• Schnittpunkt von Ebene und y-Achse:

$B(0;y_0;0) = B(0;\frac{3}{2}R;0)$

• Sei $C(1;y_0;0) = C(1;\frac{3}{2}R;0)$ ein Punkt auf x-y Ebene

• Ebene parallel zur x-Achse

$\Rightarrow$ C gehört zur Ebene

• 2 Vektoren auf der Ebene: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}R \\ 3R \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \\ z_C - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1 Normalenvektor: $\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}R \\ 3R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3R \\ \frac{3}{2}R \end{pmatrix} = 3R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 1 Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ✓ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Parameterdarstellung:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OB} + u \cdot \overrightarrow{BA} + v \cdot \overrightarrow{BC}$$

($\vec{x}$: Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene;
O: Koordinatenursprung)

$$\Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}R \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}R \\ 3R \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

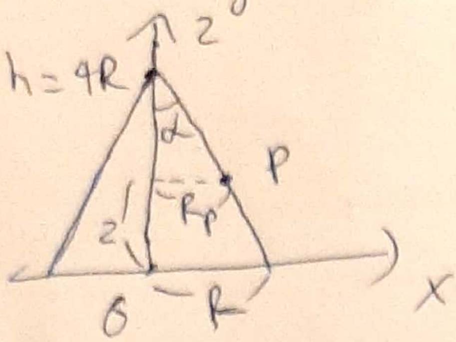
$$= \begin{pmatrix} v \\ \frac{3}{2}R(1-u) \\ 3 \cdot R \cdot u \end{pmatrix}$$ ✓

$\Rightarrow$ ~~Ebene~~: $x = @(u,v)\ v$

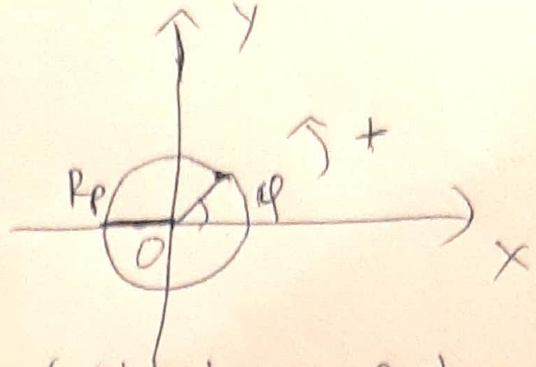
$\cancel{y = @(u,v)\ \frac{3}{2} \cdot R \cdot (1-u)}$

$\cancel{z = @(u,v)\ 3 \cdot R \cdot u}$

c) Ein Kegelabschnitt:



(Abbildung 1)



(Abbildung 2)

Ein Punkt P, der auf dem Kegelmantel liegt, hat folgende Koordinaten:

$$x = R_P \cdot \cos\varphi$$
$$y = R_P \cdot \sin\varphi \qquad (\varphi: \text{Drehwinkel Abbildung 2})$$
$$z = z$$

- R_P hängt von z ab, und zwar (Abbildung 1)

$$R_P = \tan\alpha \cdot (h - z) = \frac{R}{h}(h - z)$$
$$= \frac{4R - z}{4} = R - \frac{z}{4} \qquad (R: \text{Radius des Grundkreises})$$

$\Rightarrow$ Kegelmantel: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(R - \frac{z}{4}\right) \cdot \cos\varphi \\ \left(R - \frac{z}{4}\right) \cdot \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

d) Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (von a) und Punkt A $(0; 0; 3R)$

$\Rightarrow$ Ebene (Normalenform): $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3R \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2y + z = 3R$ ✓

Mit CamScanner gescannt

- Kegelmantel: $\begin{pmatrix} \left(R-\frac{z}{4}\right)\cos\varphi \\ \left(R-\frac{z}{4}\right)\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(R - \frac{z}{4}\right)^2$$

- Schnittlinie: $z_{\text{Ebene}} = z_{\text{Kegelmantel}}$

$$z_{\text{Ebene}} = 3R - 2y$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \left(R - \frac{3R-2y}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{4} + \frac{y}{2}\right)^2 \text{ (Schnittlinie)} \\ z_{\text{linie}} = 3R - \cancel{*}\,2y_{\text{linie}} \end{cases}$$

e) Schnittlinie: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{4} + \frac{y}{2}\right)^2 \\ z_{\cancel{\phi}} = 3R - 2y \end{cases}$

$z_{\text{Kegelmantel}} \geq 0$ (Vorbedingung)

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{R^2}{16} + y \cdot \frac{R}{4} + \frac{y^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3y^2}{4} - y \cdot \frac{R}{4} = \frac{R^2}{16} - x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{3}\,y}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\,y}{2} \cdot \frac{R}{4\sqrt{3}} + \frac{R^2}{48} = \frac{R^2}{16} - x^2 + \frac{R^2}{48}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}\,y}{2} - \frac{R}{4\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{R^2}{12} - x^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}\,y}{2} - \frac{R}{4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2} \\ \frac{\sqrt{3}\,y}{2} - \frac{R}{4\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2} \end{array}\right.$$

(Vorbedingung: $x^2 \leq \frac{R^2}{12} \Leftrightarrow \frac{-R}{2\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{R}{2\sqrt{3}}$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{R}{4\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2}\right) \\ y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{R}{4\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2}\right) \end{array}\right.$$

Vereinfachen

- Wir haben 2 Vorbedingungen für die Schnittlinie: ⊕ $\frac{-R}{2\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{R}{2\sqrt{3}}$

  ⊕ $z_{\text{Schnittline}} \geq 0$ (weil Schnittline $\in$ Kugelmantel)

$z_{\text{linie}} \geq 0 \Leftrightarrow 3R - 2y \geq 0$

$\Leftrightarrow y \leq \frac{3R}{2}$

- Niedrigster Punkt $\Rightarrow z_{\text{linie}}\ \text{min} \Leftrightarrow y_{\text{linie}}\ \text{max}$?

$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{R}{4\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2}\right)$ und y max

?

$\Rightarrow \frac{R^2}{12} - x^2$ max $\Leftrightarrow x^2$ min

?

$\cancel{\Leftrightarrow}$ $x = 0$ (Vorbedingung: $\frac{-R}{2\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{R}{2\sqrt{3}}$

nicht verletzen $\Rightarrow$ gut !) ??

$\Rightarrow y_{N.P}$ (N.P = Niedrigster Punkt) $= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{R}{4\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{R^2}{12}} \right)$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R = \frac{R}{2}$

$x_{N.P} = 0$; $z_{N.P} = 3R - 2 \cdot \frac{R}{2}$

$= 2R$

$\Rightarrow N \left(0; \frac{R}{2}; 2R \right)$ ✓

- Höchster Punkt $\Rightarrow z_{linie}$ max $\Leftrightarrow y_{linie}$ min

$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{R}{4\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{R^2}{12} - x^2} \right)$ und y min

$\Rightarrow \frac{R^2}{12} - x^2$ max $\Leftrightarrow x^2$ min $\Leftrightarrow x = 0$

(Vorbedingung von x nicht verletzen $\Rightarrow$ gut !)

$\Rightarrow y_{H.P}$ (H.P = Höchster Punkt) $= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{R}{4\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{R^2}{12}} \right)$

$= \frac{-R}{6}$

$\Rightarrow z_{H.P} = 3R - 2 \cdot \left(\frac{-R}{6} \right) = \frac{10R}{3}$

Mit CamScanner gescannt

$\Rightarrow H\left(0; \frac{-R}{6}; \frac{10R}{3}\right)$

f) Die Kegel: ⊕ symmetrisch zur x-, y-, z-Achse

⊕ Grundkreis mit Mittelpunkt $\equiv O(0; 0; 0)$

Die Ebene: ⊕ parallel zur x-Achse

Gemäß e) erkennen wir: $x_N = x_H = 0$

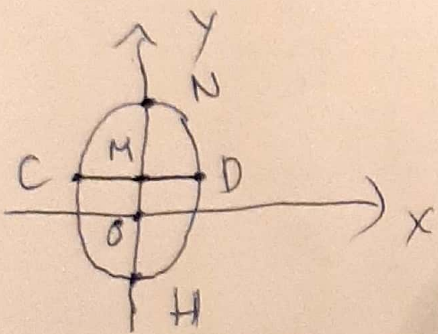
(N: niedrigster Punkt
H: höchster Punkt)

$\Rightarrow$ Schnittlinie (hier Ellipse) ist symmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow$ Länge der 1. Hauptachse $= \sqrt{(y_H - y_N)^2 + (z_H - z_N)^2}$

Rechnung fehlt

$= \frac{2\sqrt{5}}{3} R = NH$



Sei M der Mittelpunkt der Ellipse

Länge der 2. Hauptachse = CD

CD: Vorbedingung der Ellipse: $\frac{-R}{2\sqrt{3}} \le x \le \frac{R}{2\sqrt{3}}$

C, D liegen jeweils genau da, wo x_{linie} min und max ist

$\Rightarrow CD = 2 \cdot \frac{R}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{3}}$

· $x_M = 0$; $y_M = y_C = y_D = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{R}{4\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{R^2}{12} - \left(\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)^2}\right)$

$= \frac{R}{6}$

· $z_M = z_N + \frac{z_H - z_N}{2} = \frac{8R}{3} \Rightarrow M\left(0; \frac{R}{6}; \frac{8R}{3}\right)$