Mathe 3, Aufgabe 3, 26.1.2021

H.A. 6,5
M 7
AP 8,5

Name: Minh Tue Cung
Matrikel Nr.: 5081738

(1) $\dot{z} = \frac{dz(t)}{dt} = \frac{d(f(\vec{p(t)}))}{d(\vec{p(t)})} \cdot \frac{d(\vec{p(t)})}{dt}$

$= \operatorname{grad}(f)\Big|_{\vec{p(t)}} \cdot \underbrace{\dot{\vec{p(t)}}}$

Ableitung von $\vec{p(t)}$ nach $t$

$= m(t) \cdot \left|\dot{\vec{p(t)}}\right|$ ✓ 2

(2) $z = f(x,y) = H \cdot e^{-(4x^2+y^2)}$

a) Startpunkt: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow$ Die Höhe $z_0 = f(x_0, y_0) = H \cdot e^{-(1+0)}$

$\approx 0{,}419$ (km) ✓

b) Gipfel: $(x_G, y_G) = (0,0)$
Wir sind auf $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\Rightarrow$ Richtung maximaler Steigung – mittels grad f zu berechnen

Begründung nicht ausreichend

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x_G - x_0 \\ y_G - y_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- In Einheitsvektor: $\vec{a_e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Maximale Steigung

$$\Delta H_{max} = \operatorname{grad} f\Big|_{(x_0, y_0)} \cdot \vec{a_e}$$

$$= \begin{pmatrix} -8x_0 H \cdot e^{-(4x_0^2 + y_0^2)} \\ -2y_0 H \cdot e^{-(4x_0^2 + y_0^2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1{,}67753 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1{,}67753 \text{ (Km)}$$

- Anstiegswinkel: $\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta H}{|\vec{a_e}|}\right)$

$$\approx 59{,}2^\circ$$ ✓ 1

d) ~~(t)~~ Weg 1:

$$\dot{z}(t) = \operatorname{grad} f\Big|_{(x,y)} \cdot \frac{d\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}{dt}$$

* In Matrix (Jakobi) Darstellung

$$= \left[\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}\right] \times \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

$$= \left[-8xHe^{-(4x^2+y^2)}, -2yHe^{-(4x^2+y^2)}\right] \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mit CamScanner gescannt

$$= \left[ 4x \cdot H \cdot e^{-(4x^2+y^2)} \right]$$

- $\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dot{z}(t) = \left[ 2(1-t) \cdot H \cdot e^{-(1-t)^2} \right]$ ✓

$= 2 \cdot (1-t) \cdot z(t)$

* In Vektordarstellung

$$\cancel{\vec{\dot{z}}(t) =} \begin{pmatrix} 2(1-t) \cdot H \cdot e^{-(1-t)^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\not$ $z(t)$ ist eine skalare Funktion

- ⊕ Weg 2.

* Matrixdarstellung

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{1}{2}(1-t) \cdot \cos(2\pi t) \right)'$$

$$= \frac{-1}{2}\left( \cos(2\pi t) + 2\pi(1-t) \cdot \sin(2\pi t) \right)$$ ✓

$$\frac{dy}{dt} = \left( (1-t) \sin(2\pi t) \right)'$$

- $$= 2\pi(1-t) \cdot \cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)$$ ✓

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \left[ \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \right]$$

$$= 4xH \cdot e^{-(4x^2+y^2)} \cdot \left( \cos(2\pi t) + 2\pi(1-t) \cdot \sin(2\pi t) \right)$$

$$+ 2yH \cdot e^{-(4x^2+y^2)} \cdot \left( \sin(2\pi t) - 2\pi(1-t) \cdot \cos(2\pi t) \right)$$

- ( $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ sind genauso ähnlich wie im Weg 1 )

* Vektordarstellung

$$\vec{\dot z}(t) = \begin{pmatrix} 4xH\, e^{-(4x^2+y^2)} \cdot \left(\cos(2\pi t) + 2\pi(1-t)\sin(2\pi t)\right) \\ 2yH \cdot e^{-(4x^2+y^2)} \cdot \left(\sin(2\pi t) - 2\pi(1-t) \cdot \cos(2\pi t)\right) \end{pmatrix}$$

z(t) berechnen, dann $\dot z = 2 \cdot (1-t) \cdot z(t)$ !

nicht zu Ende gerechnet

e) Steigungswinkel

⊕ Weg 1: $\alpha(t) = \arctan(m(t))$

$$= \arctan\left(\frac{|\dot z(t)|}{\left|\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}\right|}\right) \quad \left(\text{aus Aufg. 1}\right)$$

Befrag vom Vektor $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \arctan\left(4(1-t) \cdot H \cdot e^{-(1-t)^2}\right) ✓$$

⊕ Weg 2: auch so, mit $\dot z(t)$ bereits bei d) angegeben

f) ⊕ Weg 1: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \dot z(t) \end{pmatrix}$$

Mit CamScanner gescannt

$\Rightarrow v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(2(1-t) \cdot H \cdot e^{-(1-t)^2}\right)^2}$ ✓

⊕ Weg 2: $v(t) = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$

mit $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\cos(2\pi t) + 2\pi(1-t)\sin(2\pi t)\right)$

$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = 2\pi(1-t)\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)$

$\dot{z}(t)$ (bei d) angegeben) 3

g) Auf Visualisierung mit MatLab basierend

$\Rightarrow$ beide Wege sind, im Bezug auf vertikale Geschwindigkeit (also wie schnell man zum Gipfel kommt), ~~gen~~ gleich effizient

Aber: ⊕ Weg 1:

* Vorteil: kürzere Strecke
* Nachteil: steilerer Winkel
  $\rightarrow$ Bahngeschwindigkeit klein

⊕ Weg 2:

* Vorteil: ~~stei~~ flacherer Winkel
  $\rightarrow$ Bahngeschwindigkeit groß
* Nachteil: längere Strecke ✓

0,5