

Chương 5: CÂY (Tree)

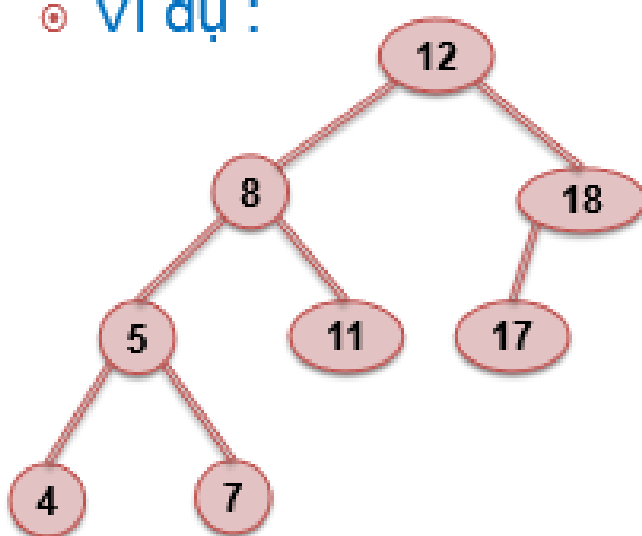


AVL Tree - Định nghĩa

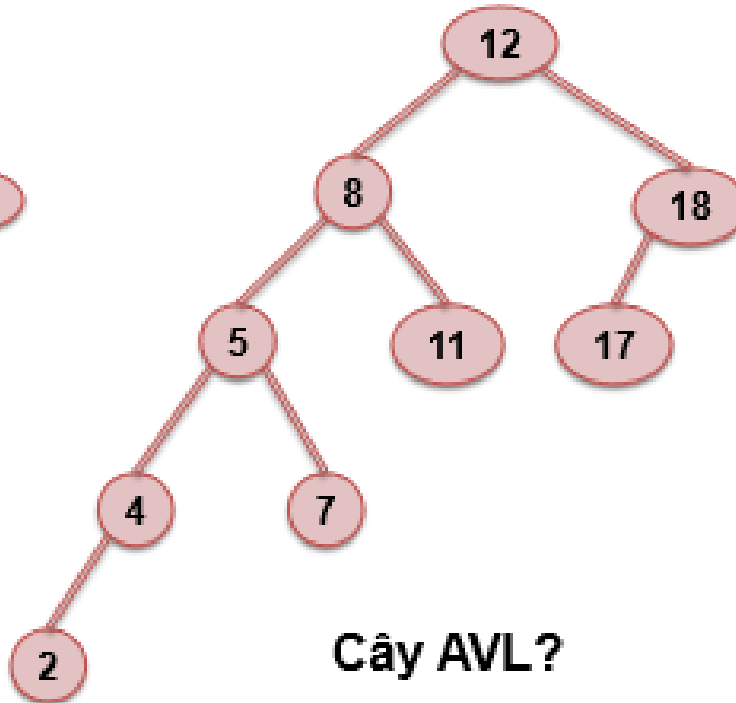
2

- Cây nhị phân tìm kiếm cân bằng là cây mà tại mỗi nút của nó độ cao của cây con trái và của cây con phải chênh lệch không quá một.

⊙ Ví dụ :



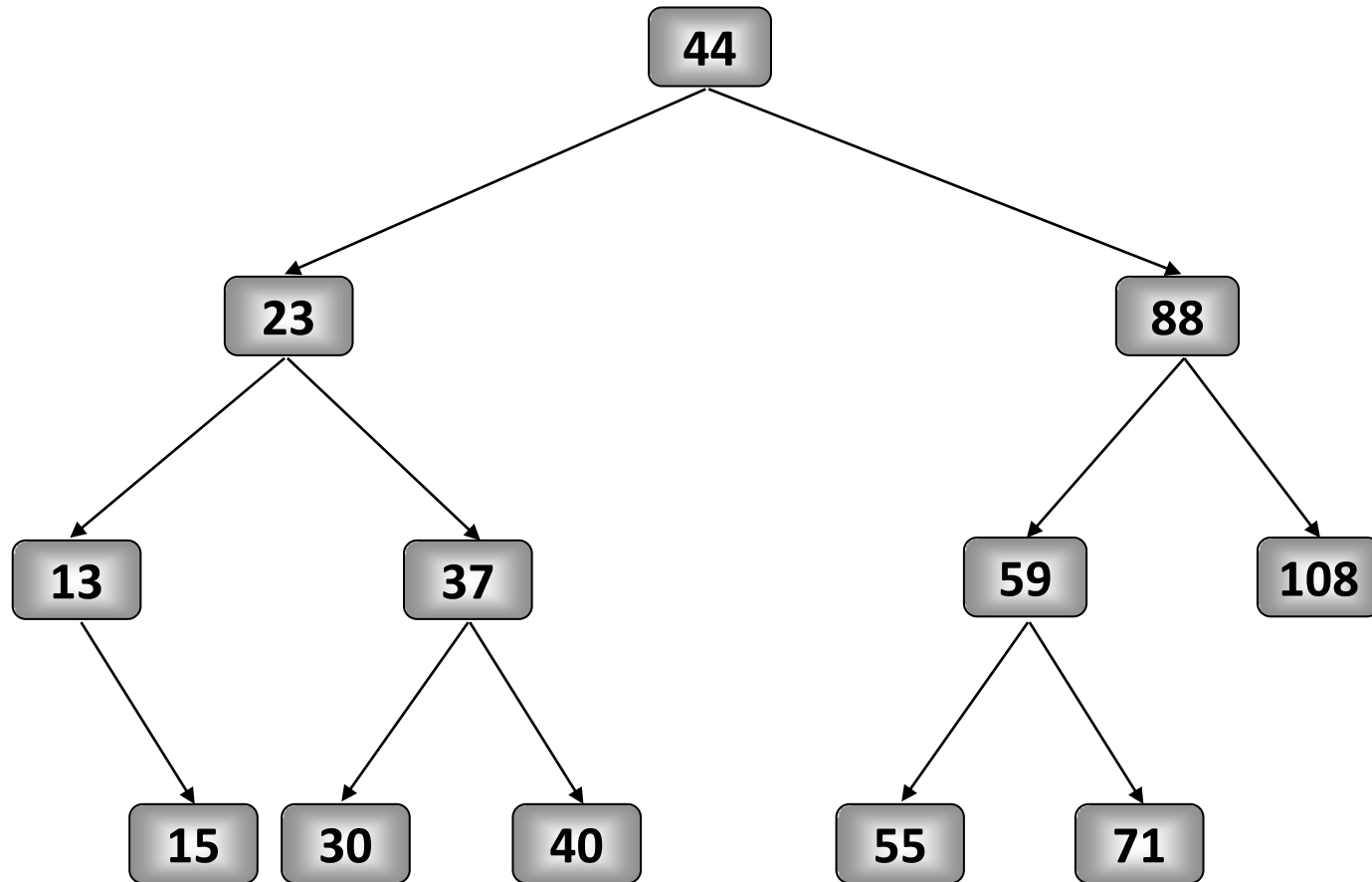
Cây AVL?



Cây AVL?

AVL Tree – Ví dụ

3



AVL Tree

4

- Lịch sử cây cân bằng (AVL Tree):
 - ▣ AVL là tên viết tắt của các tác giả người Nga đã đưa ra định nghĩa của cây cân bằng **A**delson-**V**elskii và **L**andis (1962)
 - ▣ Từ cây AVL, người ta đã phát triển thêm nhiều loại CTDL hữu dụng khác như cây đỏ-đen (Red-Black Tree), B-Tree, ...

- Cây AVL có chiều cao **$\log_2(n)$**

AVL Tree

5

- Chỉ số cân bằng của một nút:
 - ▣ Định nghĩa: Chỉ số cân bằng của một nút p. Viết tắt: $CSCB(p)$
 $CSCB(p) = \text{Độ cao cây phải}(p) - \text{Độ cao cây trái}(p)$
 - ▣ Đối với một cây cân bằng, chỉ số cân bằng của mỗi nút chỉ có thể mang một trong ba giá trị sau đây:
 - **$CSCB(p) = 0 \Leftrightarrow \text{Độ cao cây trái}(p) = \text{Độ cao cây phải}(p)$**
 - **$CSCB(p) = 1 \Leftrightarrow \text{Độ cao cây trái}(p) < \text{Độ cao cây phải}(p)$**
 - **$CSCB(p) = -1 \Leftrightarrow \text{Độ cao cây trái}(p) > \text{Độ cao cây phải}(p)$**
- Để tiện trong trình bày, chúng ta sẽ ký hiệu như sau:
 $p \rightarrow \text{balFactor} = CSCB(p);$
- Độ cao cây trái (p) ký hiệu là **hL**
- Độ cao cây phải(p) ký hiệu là **hR**

AVL Tree – Biểu diễn

6

```
#define LH    -1    /* Cây con trái cao hơn */
#define EH     0    /* Hai cây cao bằng nhau */
#define RH     1    /* Cây con phải cao hơn */
```

```
struct AVLNode{
    char        balFactor; // Chỉ số cân bằng
    DataType    data;
    AVLNode*    pLeft;
    AVLNode*    pRight;
};
typedef AVLNode*  AVLTree;
```

AVL Tree – Biểu diễn

7

- Trường hợp thêm hay hủy một phần tử trên cây có thể làm cây tăng hay giảm chiều cao, khi đó phải cân bằng lại cây
- Việc cân bằng lại một cây sẽ phải thực hiện sao cho chỉ ảnh hưởng tối thiểu đến cây nhằm giảm thiểu chi phí cân bằng
- **Các thao tác đặc trưng của cây AVL:**
 - ▣ Thêm một phần tử vào cây AVL
 - ▣ Hủy một phần tử trên cây AVL
 - ▣ Cân bằng lại một cây vừa bị mất cân bằng

AVL Tree

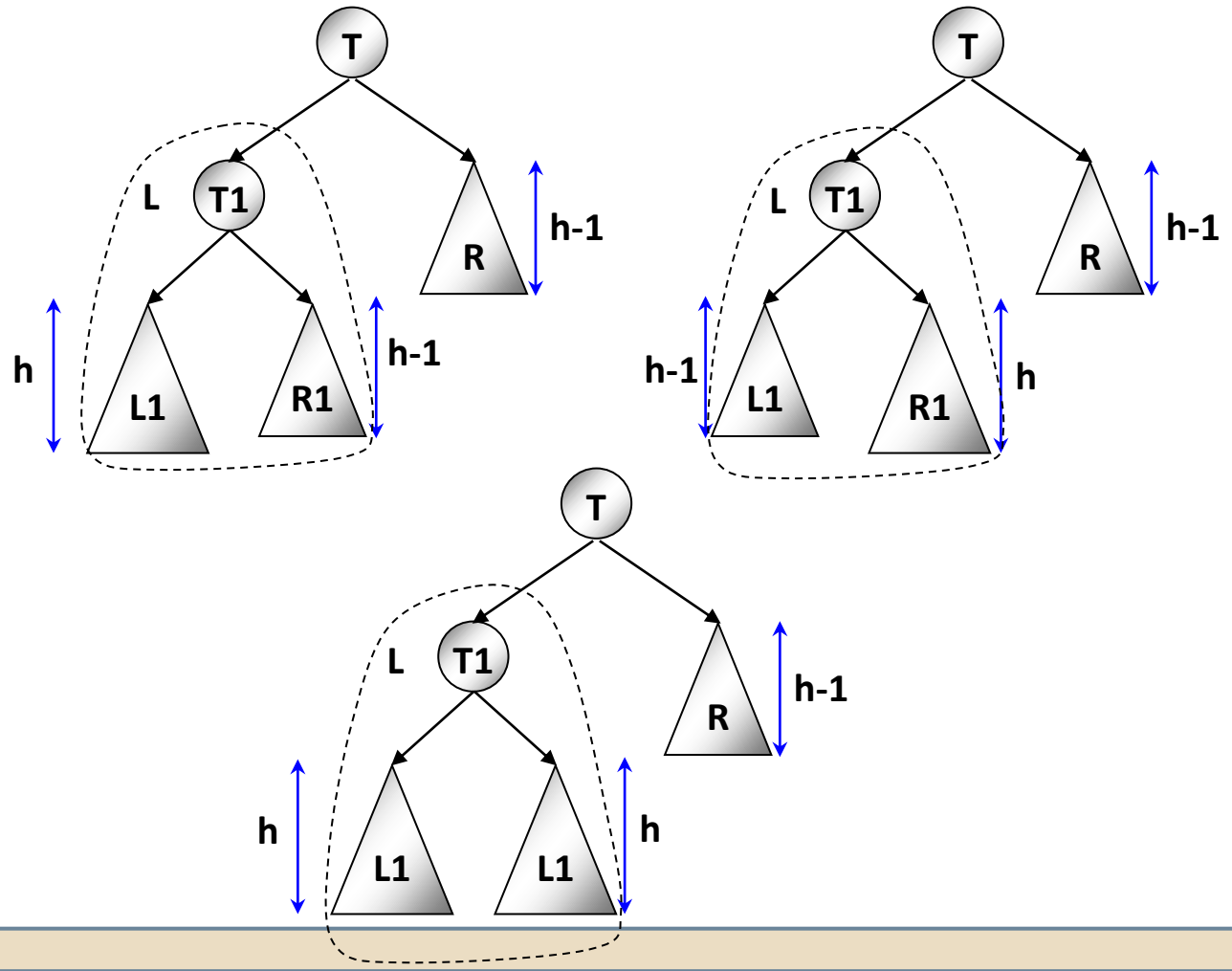
8

- Các trường hợp mất cân bằng:
 - ▣ Ta sẽ không khảo sát tính cân bằng của 1 cây nhị phân bất kỳ mà chỉ quan tâm đến các khả năng mất cân bằng xảy ra khi thêm hoặc hủy một nút trên cây AVL
 - ▣ Như vậy, khi mất cân bằng, độ lệch chiều cao giữa 2 cây con sẽ là 2
 - ▣ Có 6 khả năng sau:
 - Trường hợp 1 - Cây T lệch về bên trái : 3 khả năng
 - Trường hợp 2 - Cây T lệch về bên phải: 3 khả năng

AVL Tree

9

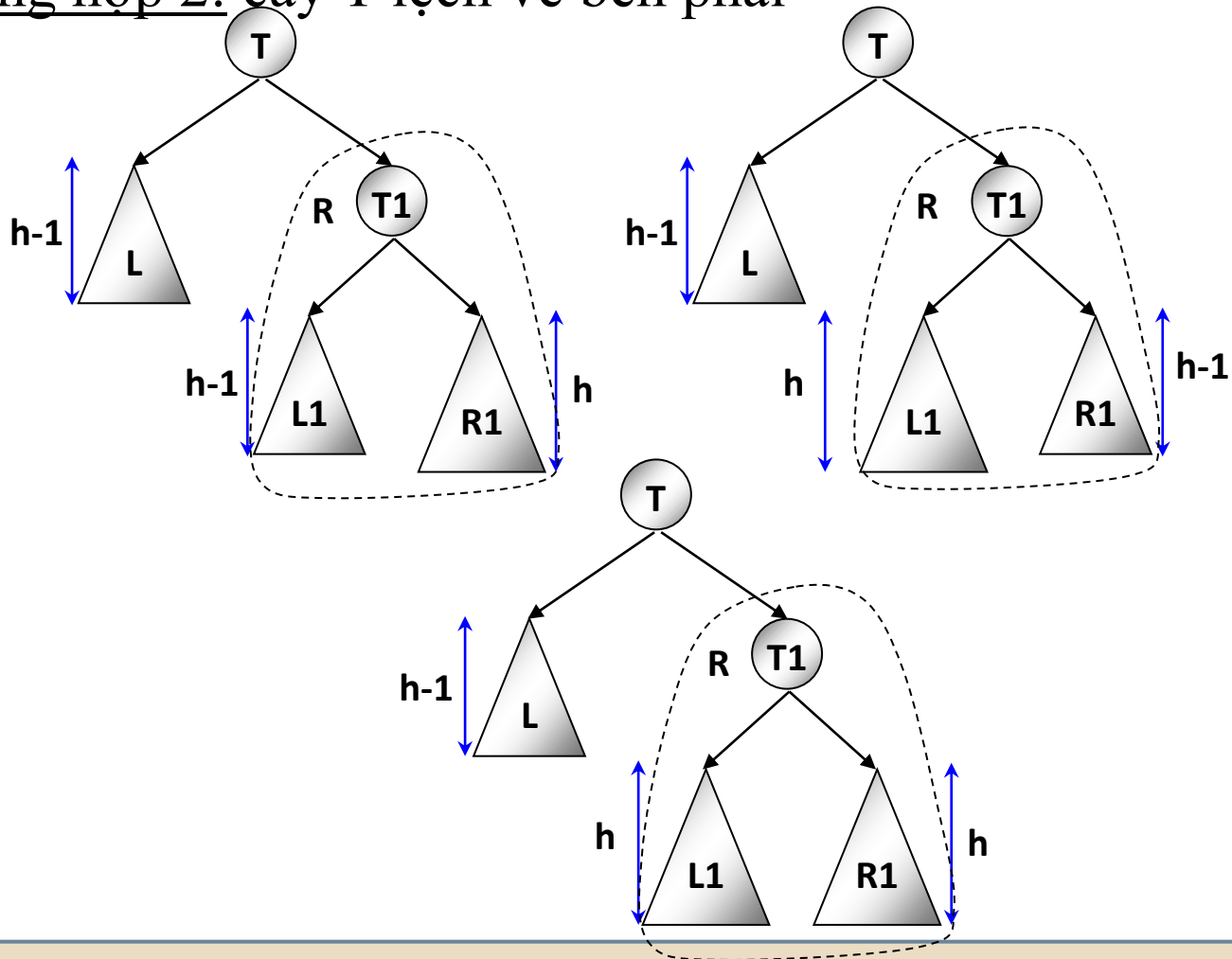
- Trường hợp 1: cây T lệch về bên trái



AVL Tree

10

- Trường hợp 2: cây T lệch về bên phải



AVL Tree

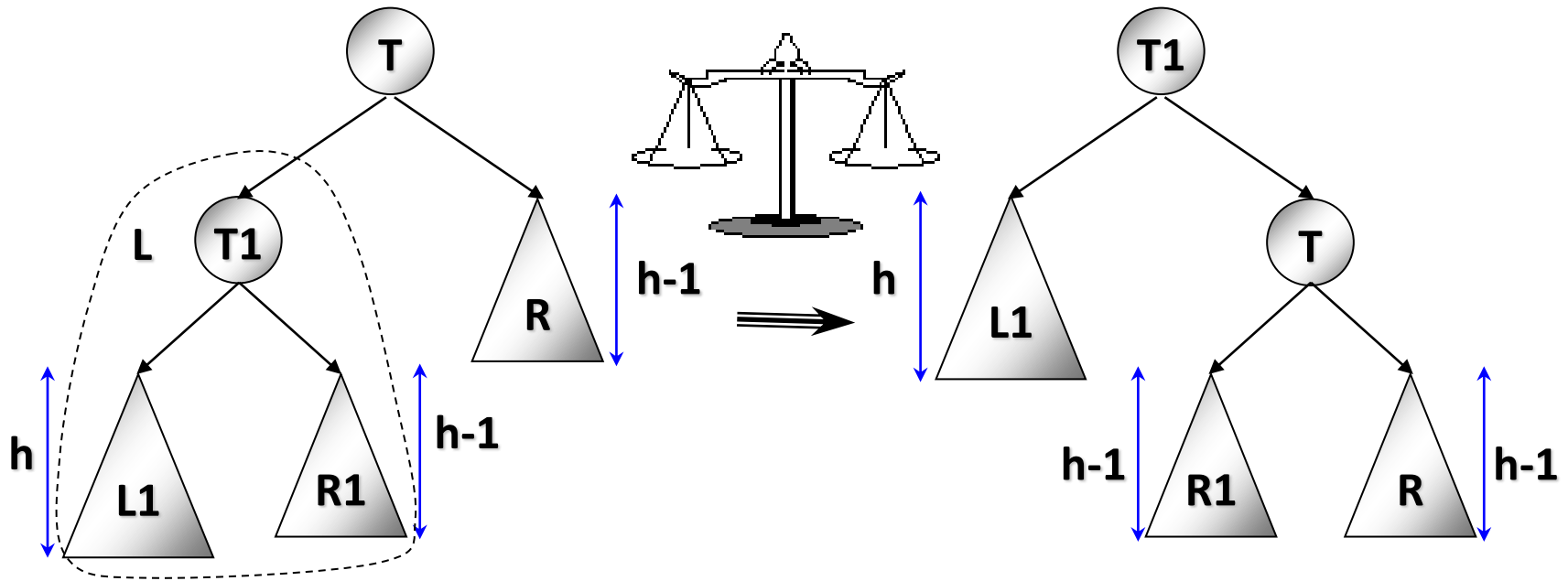
11

- Các trường hợp mất cân bằng:
 - ▣ Các trường hợp lệch về bên phải hoàn toàn đối xứng với các trường hợp lệch về bên trái.
 - ▣ Vì vậy, chỉ cần khảo sát trường hợp lệch về bên trái.
 - ▣ Trong 3 trường hợp lệch về bên trái, trường hợp T1 lệch phải là phức tạp nhất. Các trường hợp còn lại giải quyết rất đơn giản.

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

12

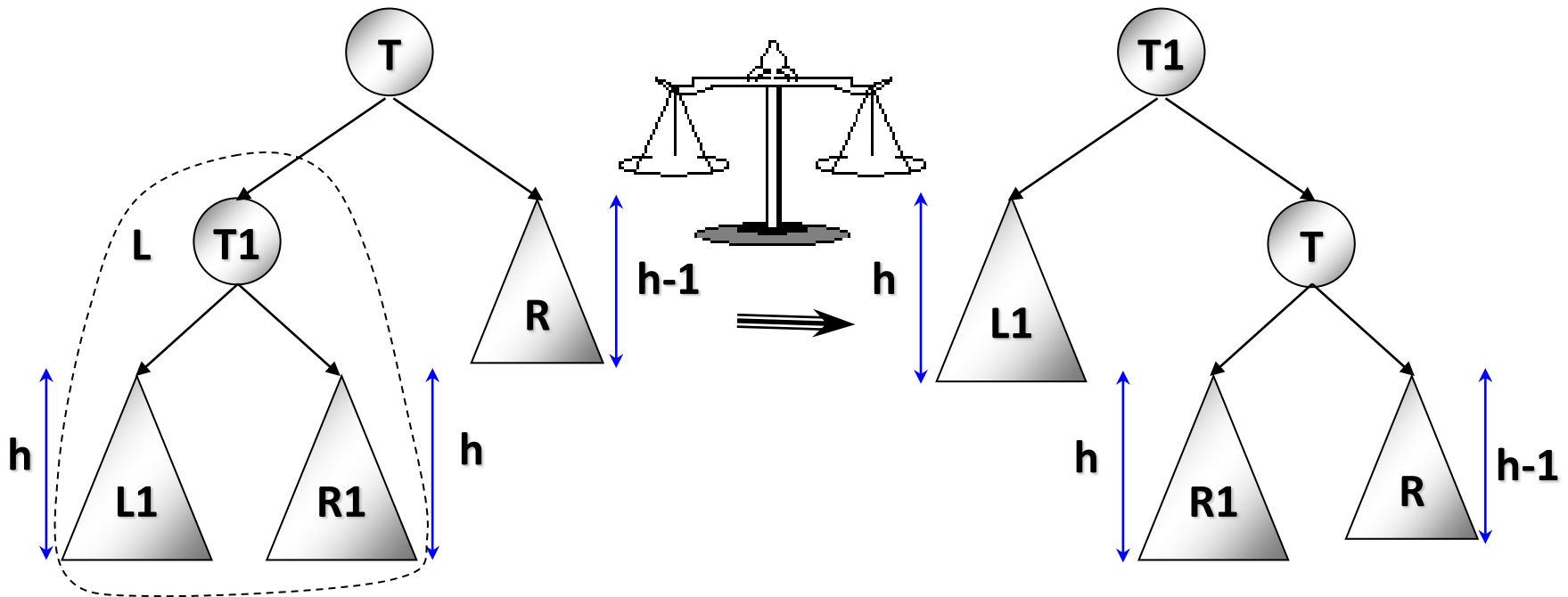
□ T/h 1.1: cây T1 lệch Left-Left



AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

13

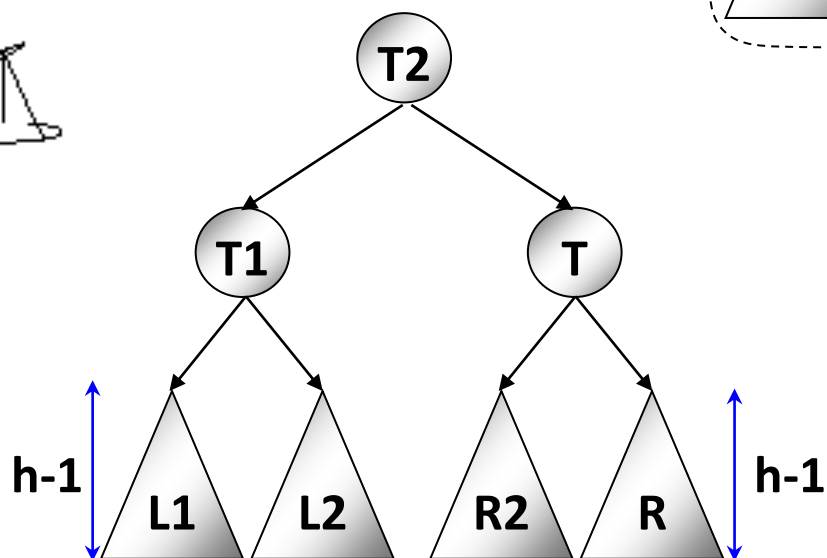
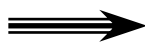
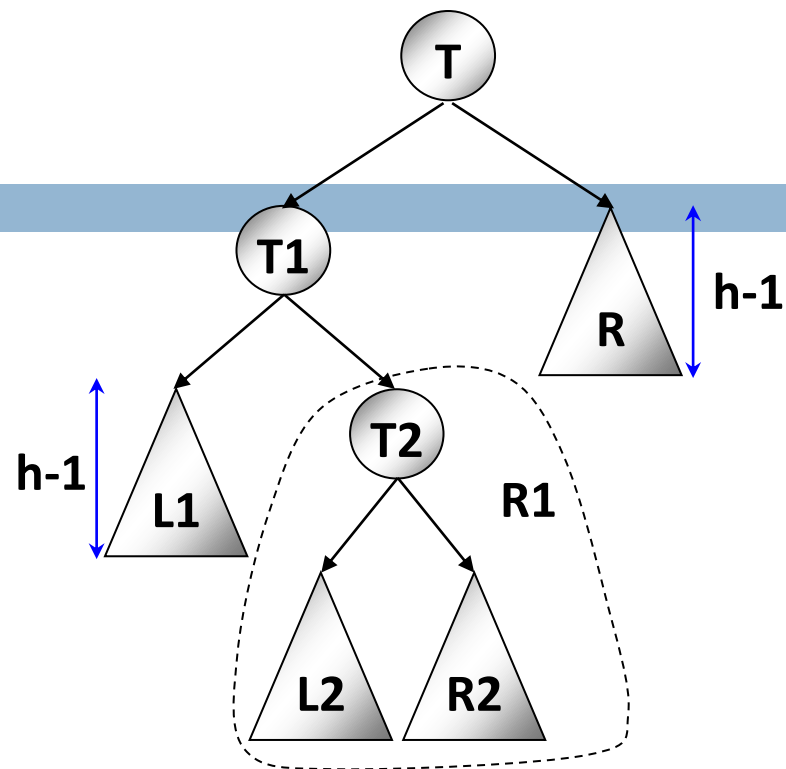
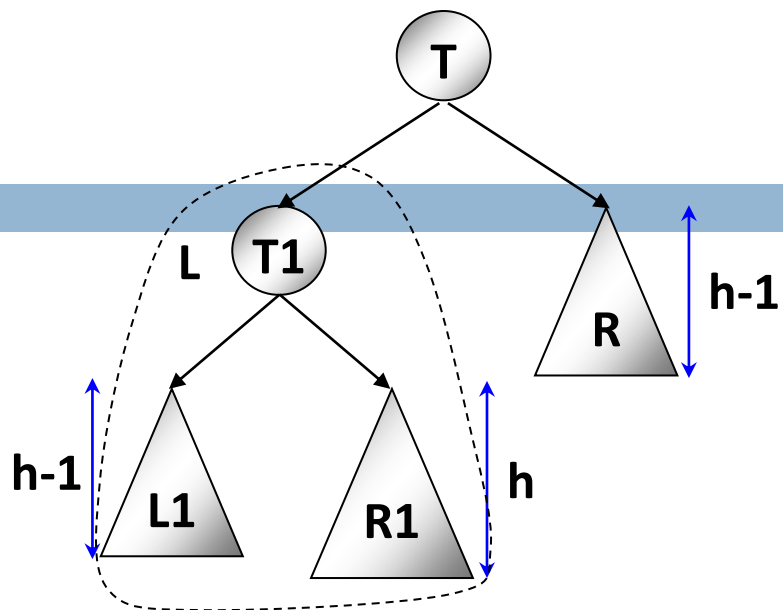
□ T/h 1.2: cây T1 không lệch. Ta thực hiện phép quay đơn Left-Left



AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

14

- T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right
- Do T1 lệch về bên phải ta không thể áp dụng phép quay đơn đã áp dụng trong 2 trường hợp trên vì khi đó cây T sẽ chuyển từ trạng thái mất cân bằng do lệch trái thành mất cân bằng do lệch phải ? cần áp dụng cách khác



AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

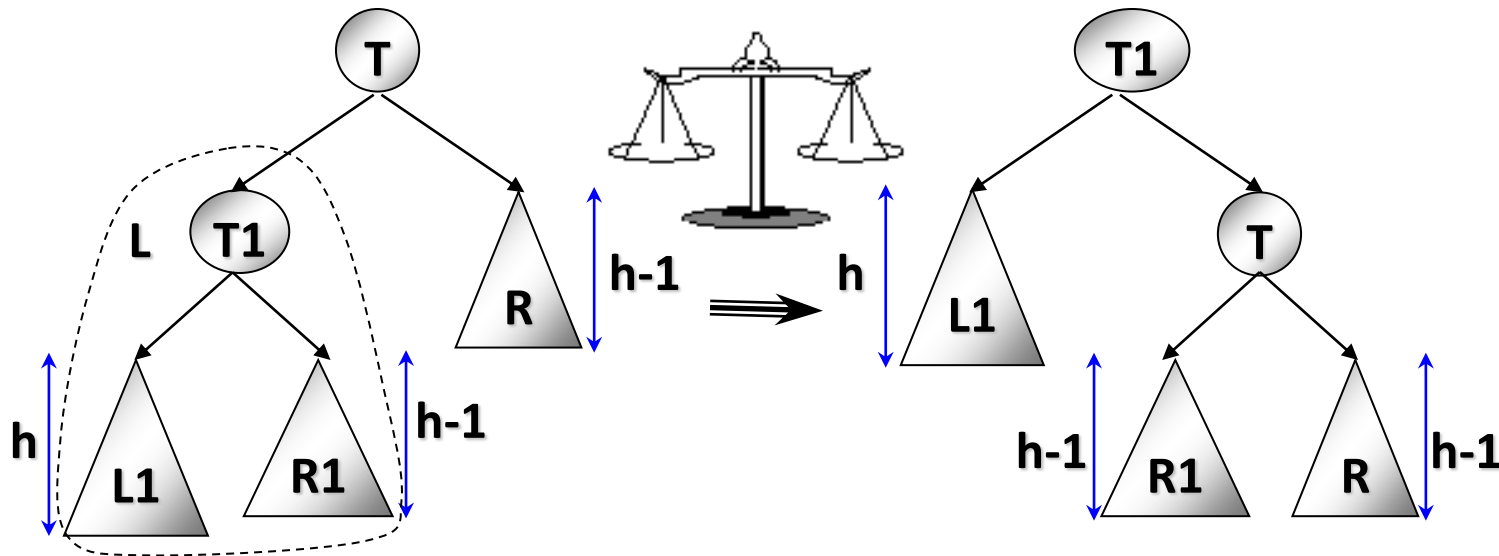
16

- Lưu ý:
 - ▣ Trước khi cân bằng cây T có chiều cao $h+2$ trong cả 3 trường hợp 1.1, 1.2 và 1.3
 - ▣ Sau khi cân bằng:
 - Trường hợp 1.1 và 1.3 cây có chiều cao $h+1$
 - Trường hợp 1.2 cây vẫn có chiều cao $h+2$. Đây là trường hợp duy nhất sau khi cân bằng nút T cũ có chỉ số cân bằng $\neq 0$
 - Thao tác cân bằng lại trong tất cả các trường hợp đều có độ phức tạp $O(1)$

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

17

□ T/h 1.1: cây T1 lệch về bên trái. Ta thực hiện phép quay đơn Left-Left



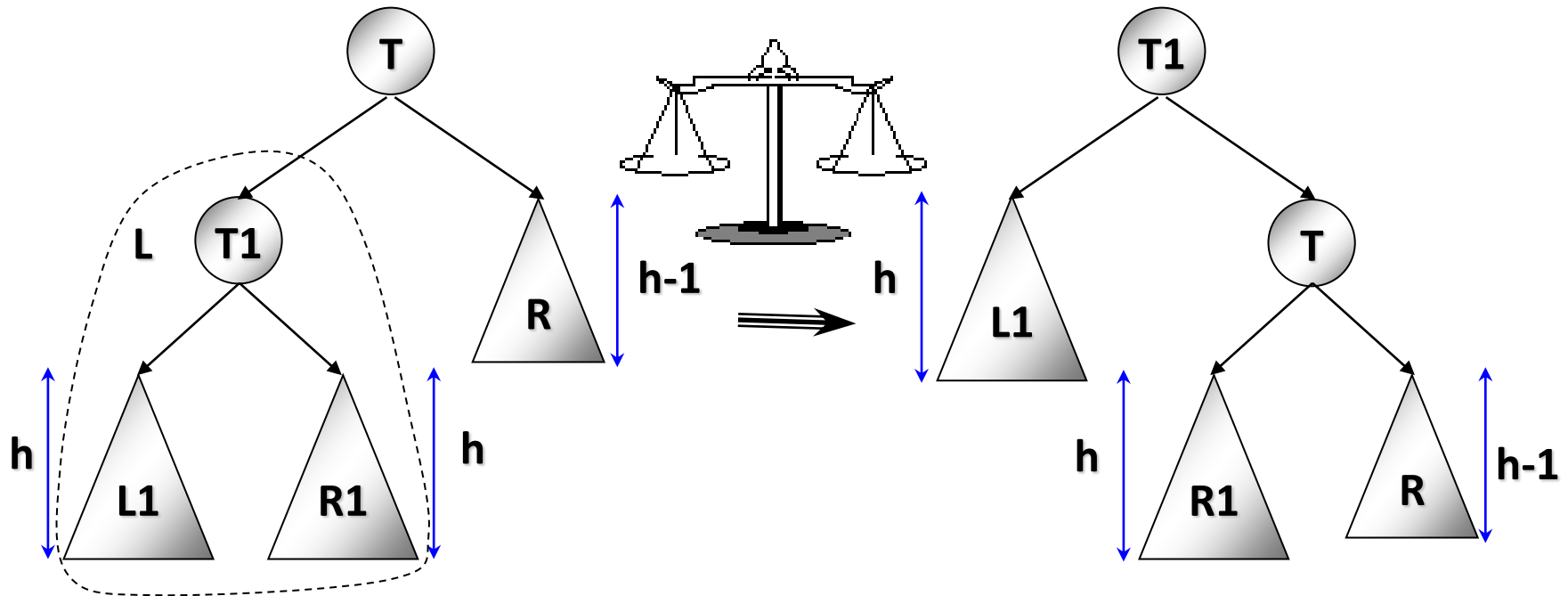
AVLNode* T1 = T->pLeft;
T->pLeft = T1->pRight;
T1->pRight = T;

Case T1->balFactor: **LH**
T->balFactor = **EH**;
T1->balFactor = **EH**;
T = T1;

AVL Tree - Cân bằng lại cây AVL

18

- T/h 1.2: Cây T1 không lệch. Ta thực hiện phép quay đơn Left-Left



AVLNode* T1 = T->pLeft;
T->pLeft = T1->pRight;
T1->pRight = T;

Case T1->balFactor: **EH**

T->balFactor = **LH**;
T1->balFactor = **RH**;

T = T1;

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

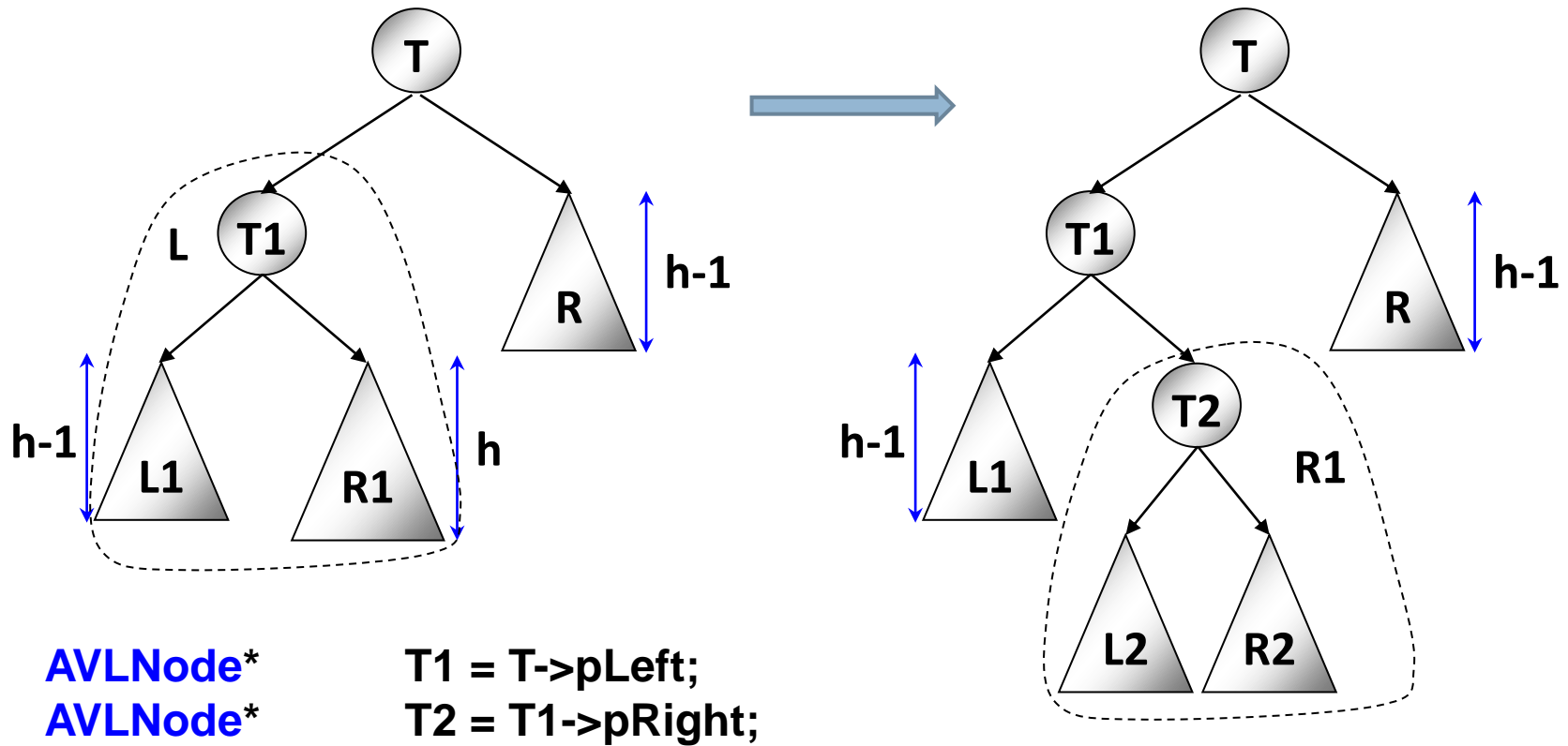
19

❖ Quay đơn *Left-Left*:

```
void rotateLL(AVLTree &T) //quay đơn Left-Left
{
    AVLNode* T1 = T->pLeft;
    T->pLeft      = T1->pRight;
    T1->pRight    = T;
    switch(T1->balFactor) {
        case LH: T->balFactor = EH;
                T1->balFactor = EH;
                break;
        case EH: T->balFactor = LH;
                T1->balFactor = RH;
                break;
    }
    T = T1;
}
```

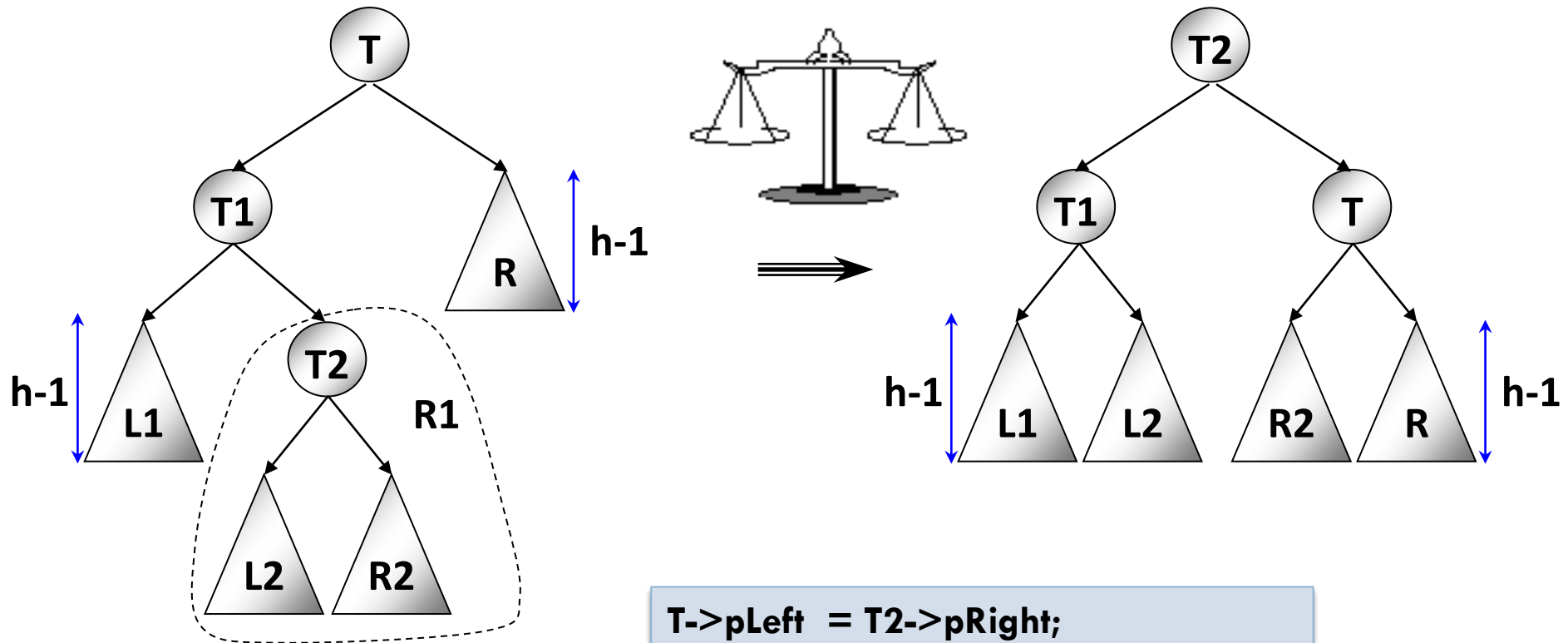
T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right

20



T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right

21



T->pLeft = T2->pRight;

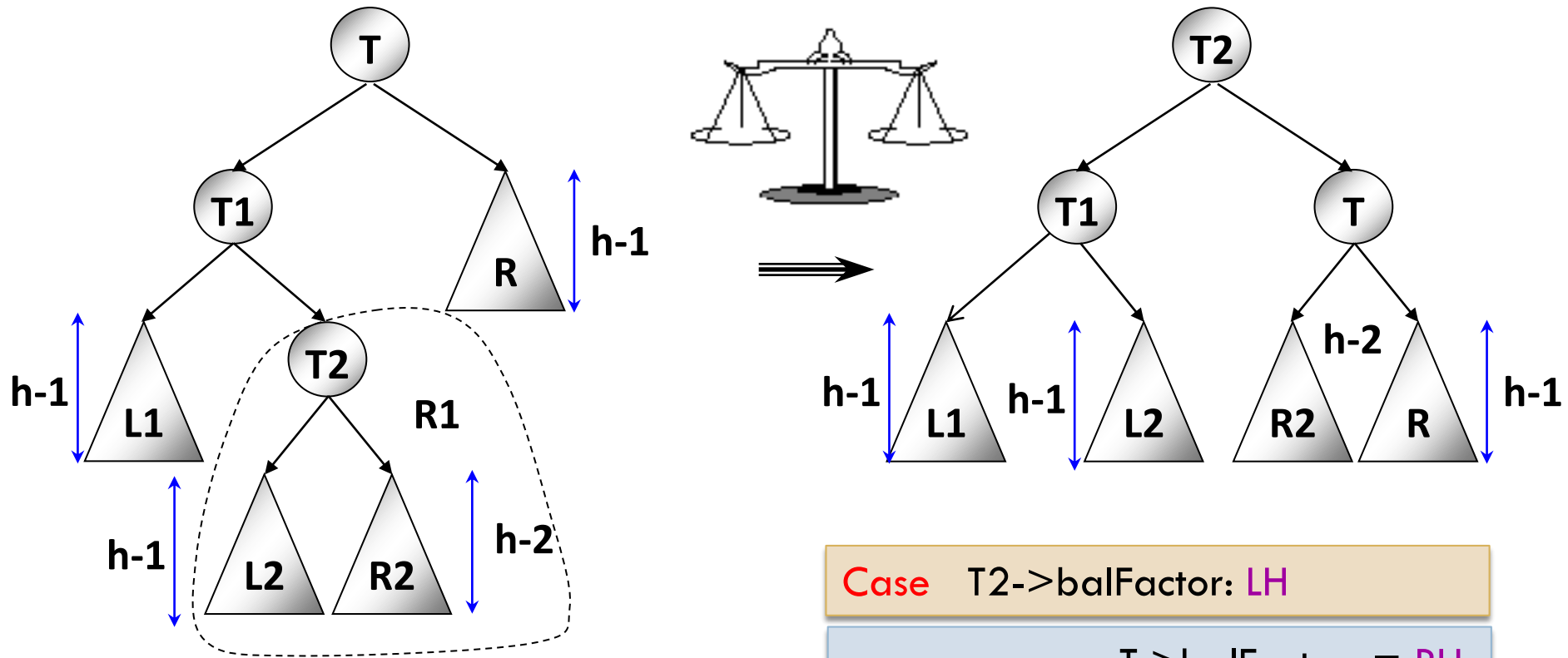
T2->pRight = T;

T1->pRight = T2->pLeft;

T2->pLeft = T1;

T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right

22



$T \rightarrow pLeft = T2 \rightarrow pRight;$
 $T2 \rightarrow pRight = T;$
 $T1 \rightarrow pRight = T2 \rightarrow pLeft;$
 $T2 \rightarrow pLeft = T1;$

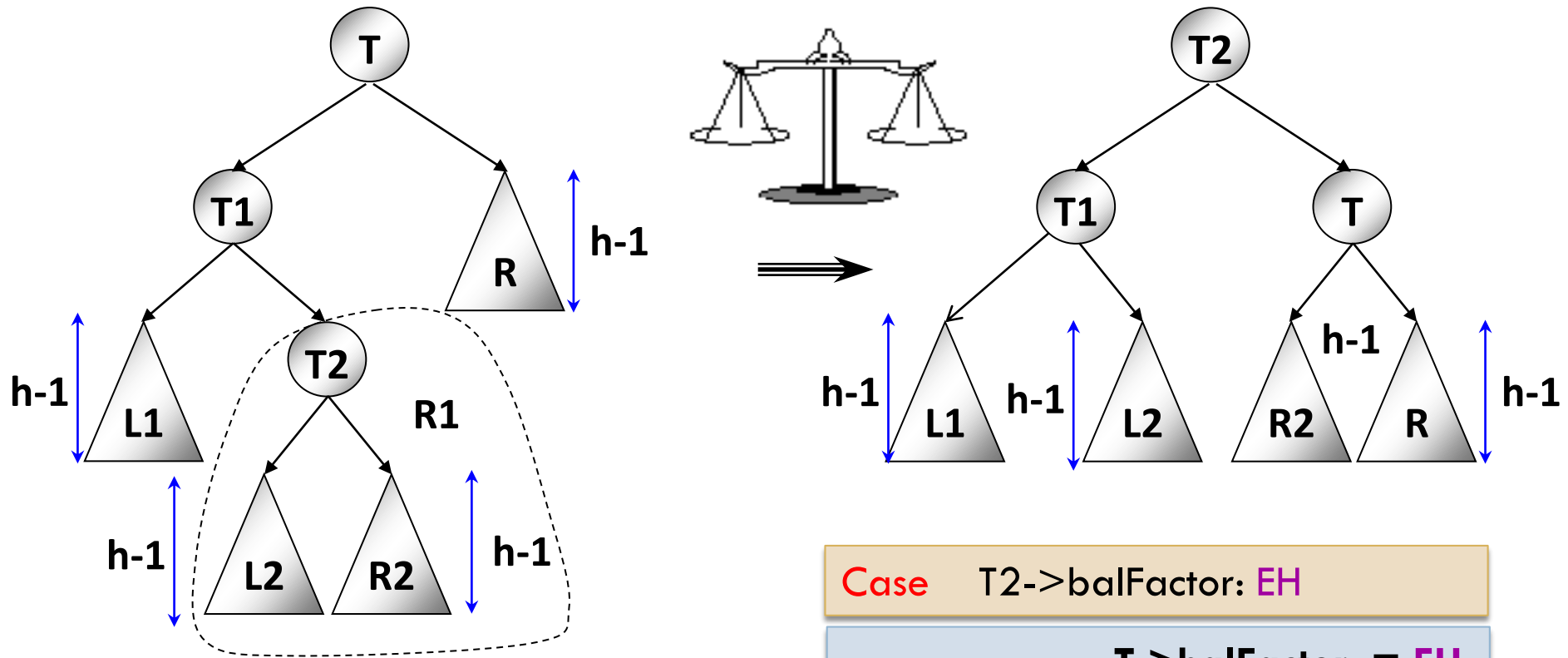
Case $T2 \rightarrow balFactor$: LH

$T \rightarrow balFactor = RH;$
 $T1 \rightarrow balFactor = EH;$

$T2 \rightarrow balFactor = EH;$
 $T = T2;$

T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right

23



$T \rightarrow \text{pLeft} = T2 \rightarrow \text{pRight};$
 $T2 \rightarrow \text{pRight} = T;$
 $T1 \rightarrow \text{pRight} = T2 \rightarrow \text{pLeft};$
 $T2 \rightarrow \text{pLeft} = T1;$

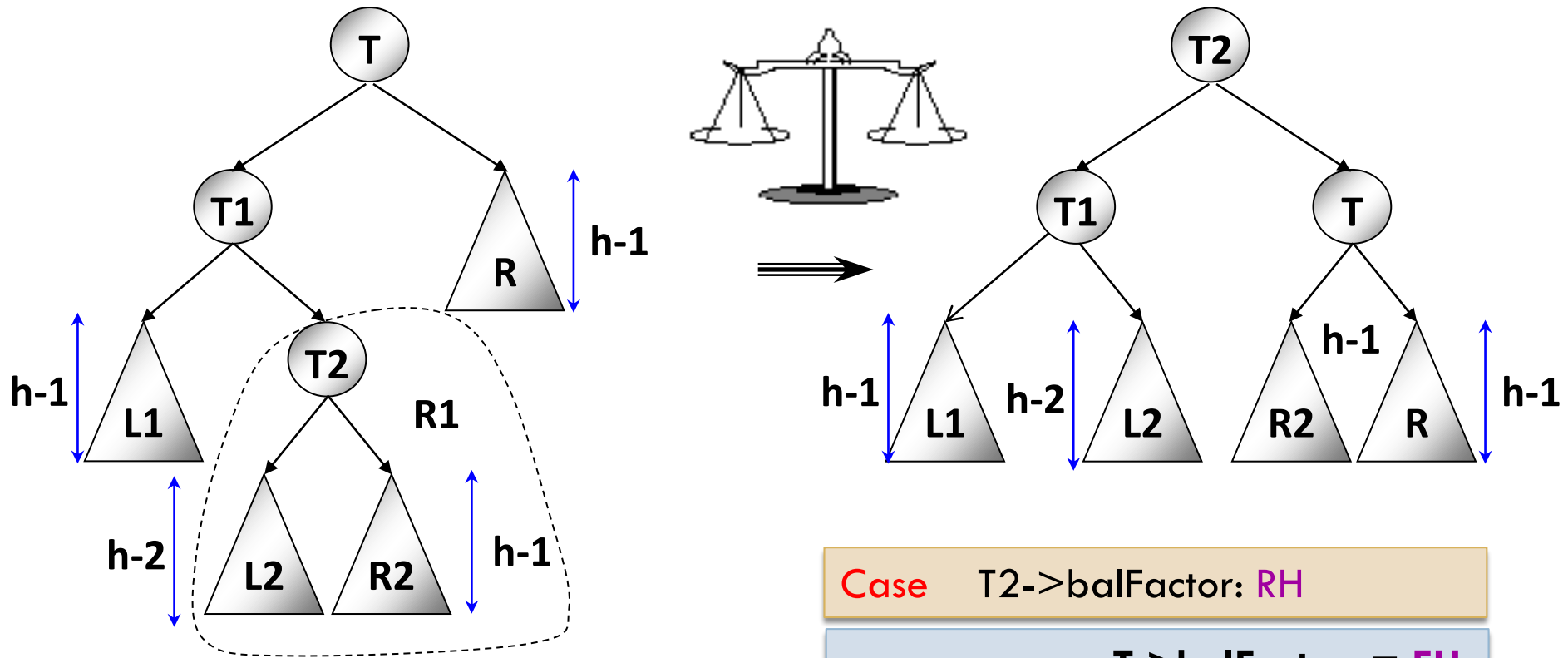
Case $T2 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH}$

$T \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$
 $T1 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH}$

$T2 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$
 $T = T2;$

T/h 1.3: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Left-Right

24



$T \rightarrow \text{pLeft} = T2 \rightarrow \text{pRight};$
 $T2 \rightarrow \text{pRight} = T;$
 $T1 \rightarrow \text{pRight} = T2 \rightarrow \text{pLeft};$
 $T2 \rightarrow \text{pLeft} = T1;$

Case $T2 \rightarrow \text{balFactor} = \text{RH}$

$T \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$
 $T1 \rightarrow \text{balFactor} = \text{LH};$

$T2 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$
 $T = T2;$

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

25

□ Quay kép Left-Right:

```
void rotateLR(AVLTree &T)//quay kép Left-Right
{
    AVLNode*    T1 = T->pLeft;
    AVLNode*    T2 = T1->pRight;
    T->pLeft    = T2->pRight;
    T2->pRight   = T;
    T1->pRight   = T2->pLeft;
    T2->pLeft    = T1;
    switch(T2->balFactor) {
        case LH: T->balFactor = RH; T1->balFactor = EH; break;
        case EH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = EH; break;
        case RH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = LH; break;
    }
    T2->balFactor = EH;
    T = T2;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

26

- Cân bằng khi cây bị lệch về bên trái:

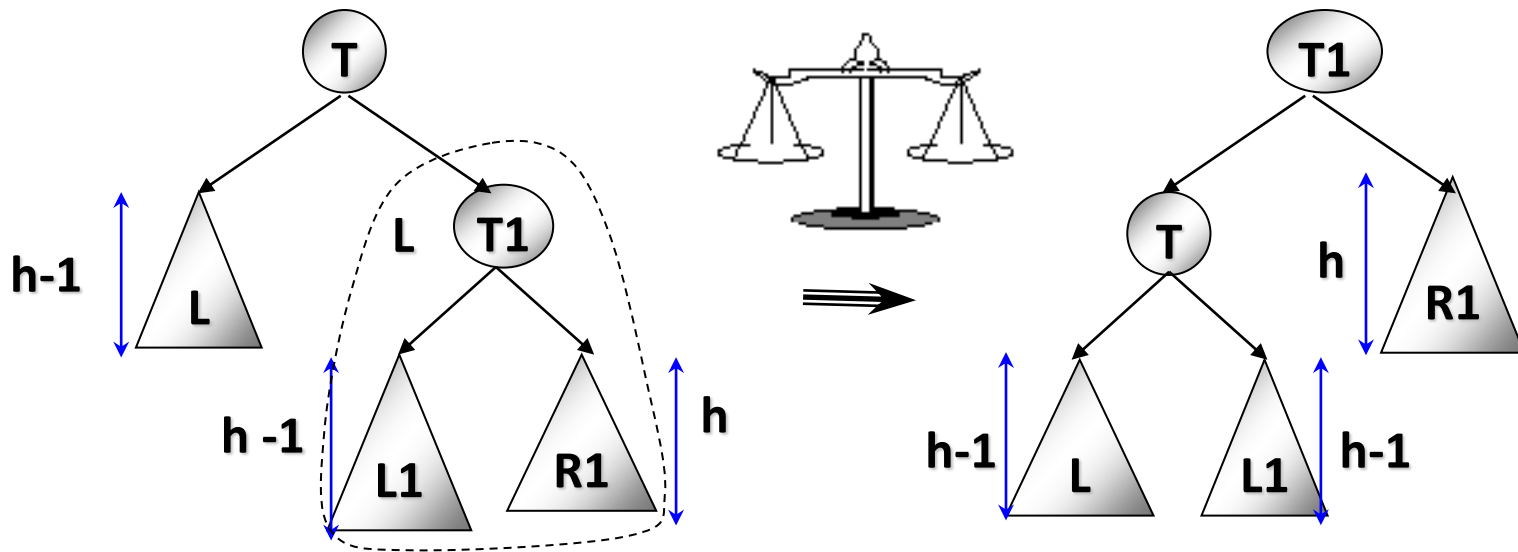
```
int balanceLeft(AVLTree &T)
//Cân bằng khi cây bị lệch về bên trái
{
    AVLNode*    T1 = T->pLeft;

    switch(T1->balFactor)    {
    case LH:    rotateLL(T); return 2;
    case EH:    rotateLL(T); return 1;
    case RH:    rotateLR(T); return 2;
    }
    return 0;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch phải

27

T/h 2.1: cây T1 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay đơn Right - Right



AVLNode* T1 = T->pRight;
T->pRight = T1->pLeft;
T1->pLeft = T;

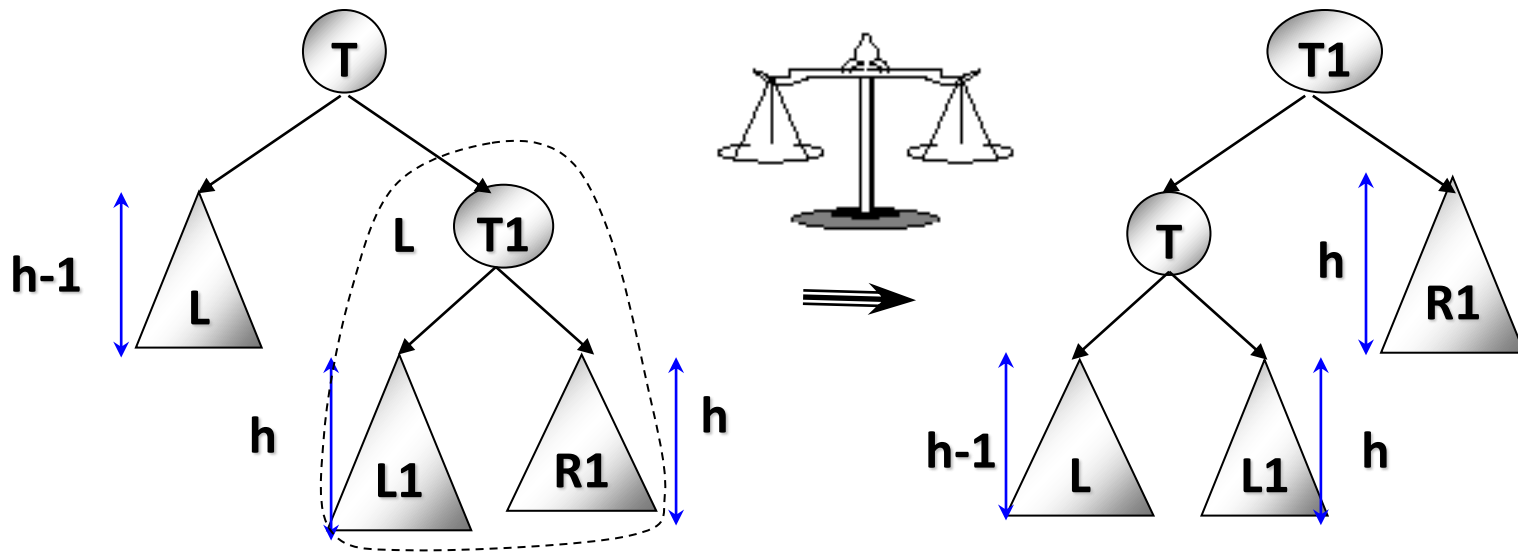
Case T1->balFactor: RH
T->balFactor = EH;
T1->balFactor = EH;

T = T1;

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch trái

28

T/h 2.2: cây T1 cân bằng. Ta thực hiện phép quay đơn Right - Right



AVLNode* T1 = T->pRight;
T->pRight = T1->pLeft;
T1->pLeft = T;

Case T1->balFactor: **EH**
T->balFactor = **RH**;
T1->balFactor = **LH**;
T = T1;

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch phải

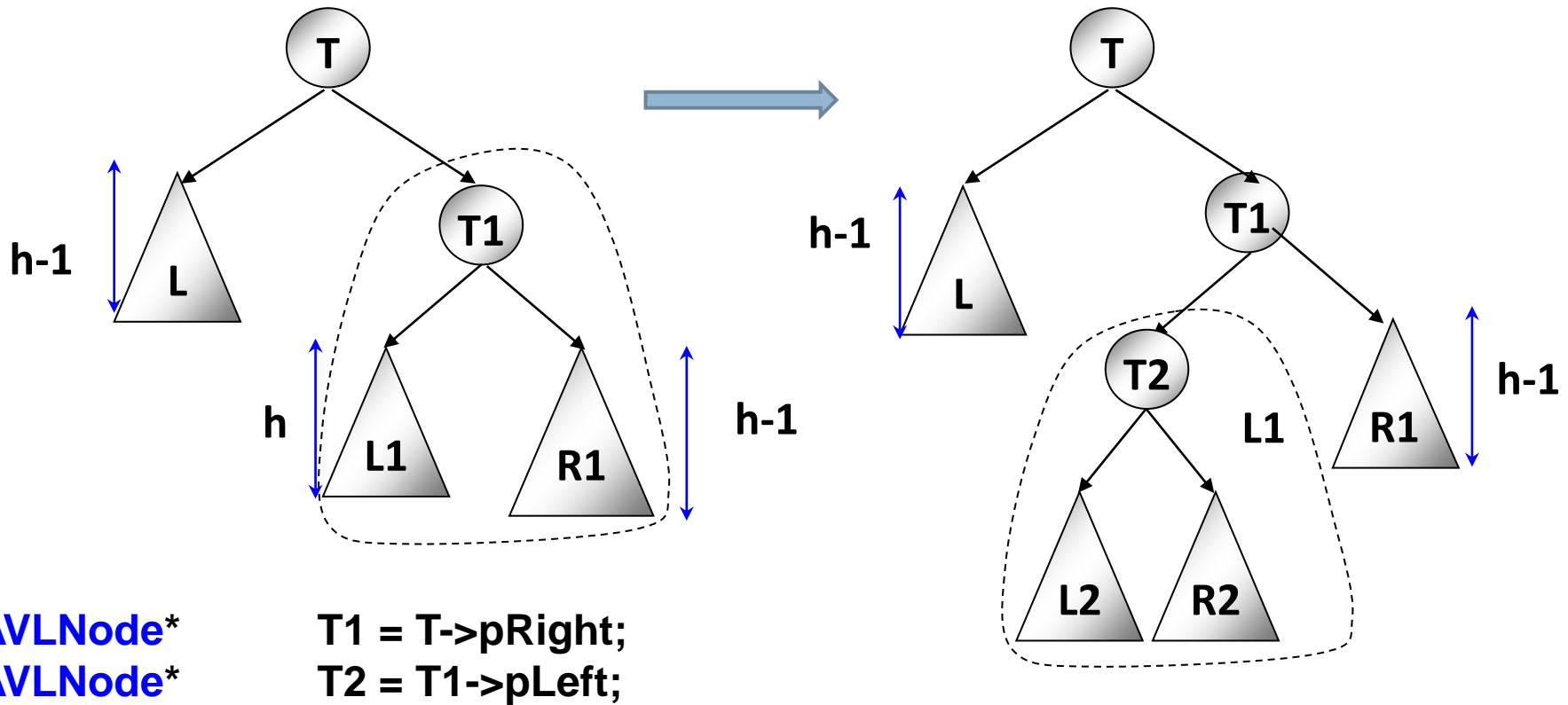
29

□ Quay đơn Right-Right:

```
void rotateRR (AVLTree &T) //quay đơn Right-Right
{
    AVLNode*    T1 = T->pRight;
    T->pRight    = T1->pLeft;
    T1->pLeft    = T;
    switch(T1->balFactor) {
        case RH: T->balFactor = EH;
                  T1->balFactor= EH;
                  break;
        case EH: T->balFactor = RH;
                  T1->balFactor= LH;
                  break;
    }
    T = T1;
}
```

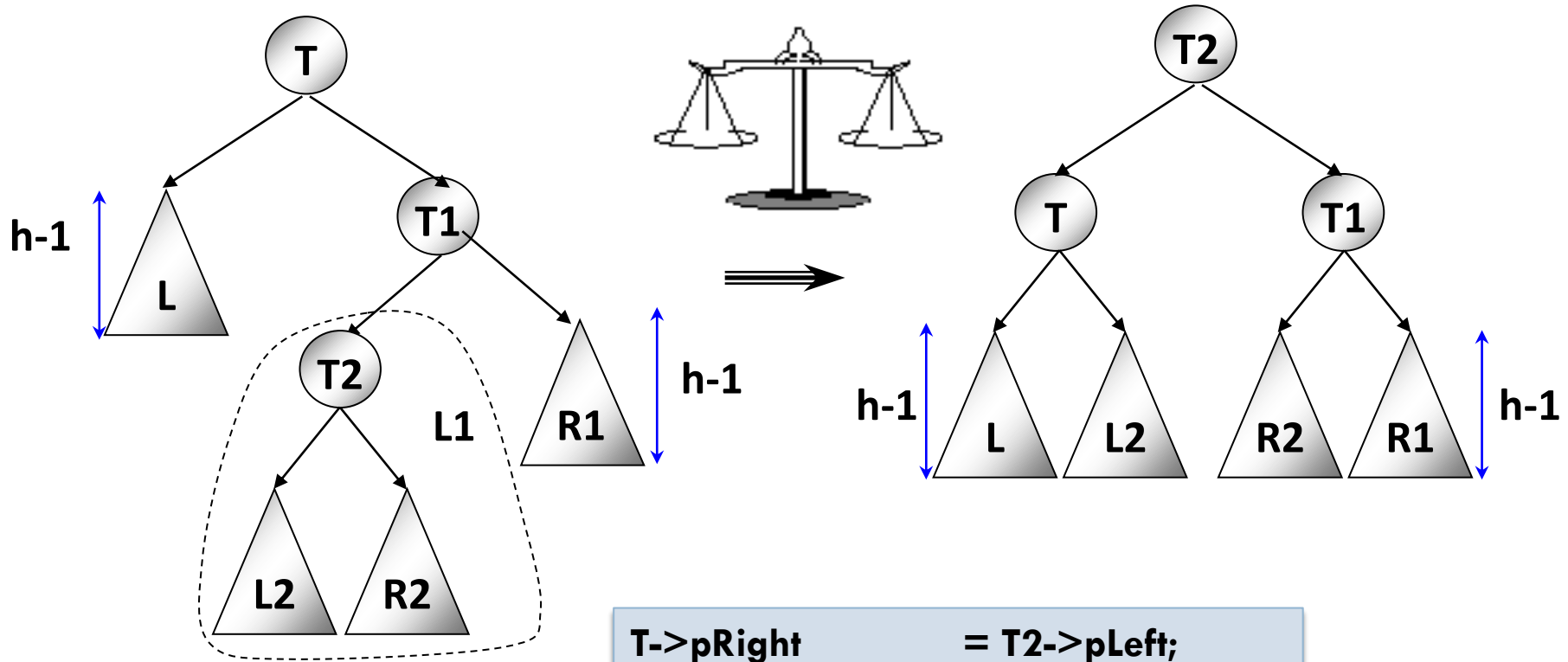
T/h 2.3: cây T1 lệch về bên trái. Ta thực hiện phép quay kép Right - Left

30



T/h 2.3: cây T1 lệch về bên trái. Ta thực hiện phép quay kép Right -Left

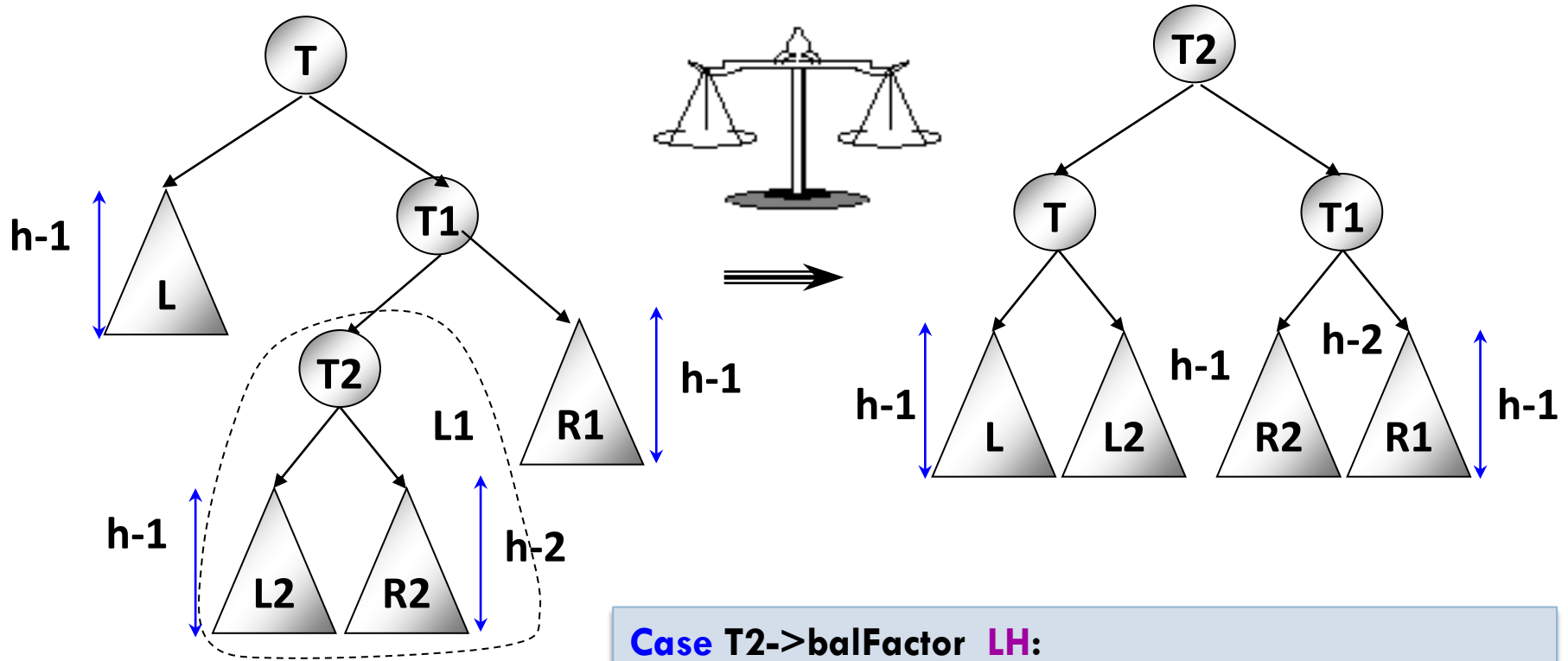
31



$T \rightarrow pRight = T2 \rightarrow pLeft;$
 $T2 \rightarrow pLeft = T;$
 $T1 \rightarrow pLeft = T2 \rightarrow pRight;$
 $T2 \rightarrow pRight = T1;$

T/h 2.3.1: cây T2 lệch về bên trái. Ta thực hiện phép quay kép Right -Left

32

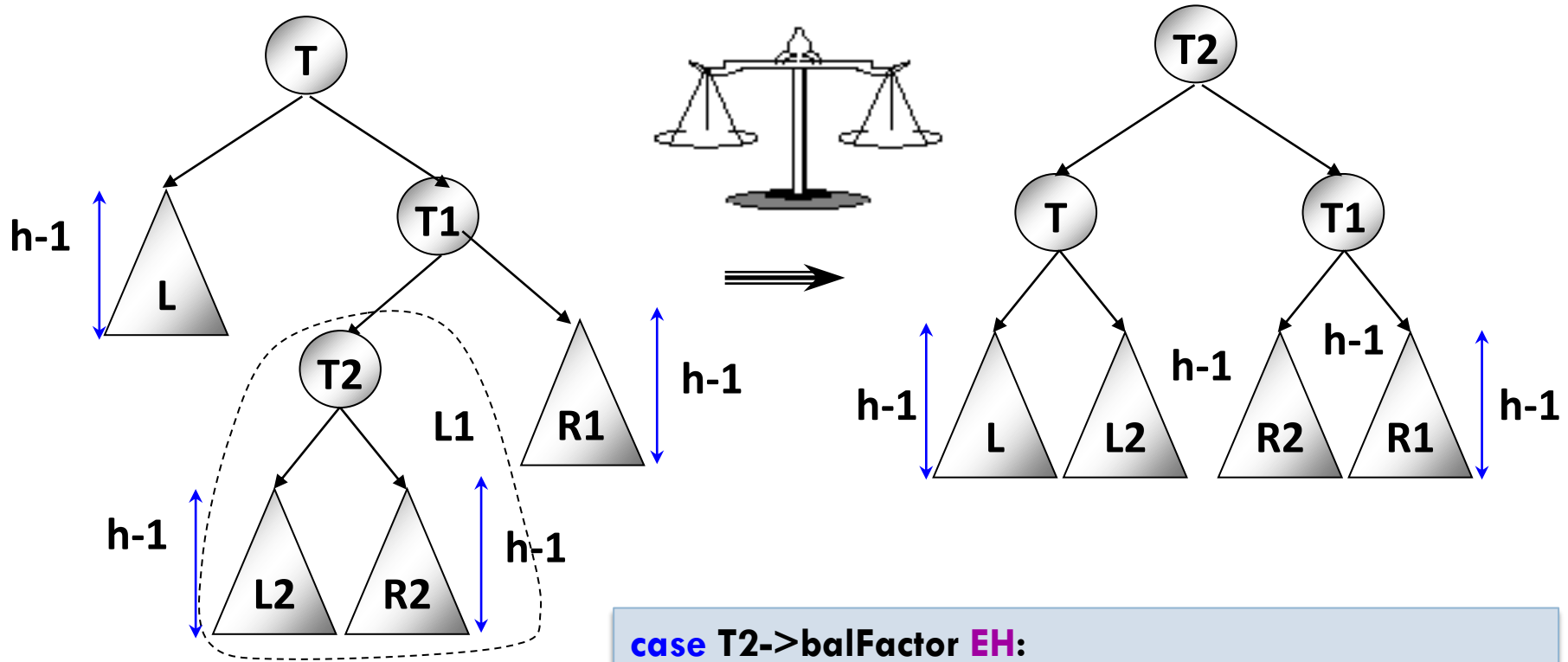


Case T2->balFactor LH:

T->balFactor = **EH**;
T1->balFactor = **RH**
T2->balFactor = **EH**;

T/h 2.3.2: cây T2 cân bằng. Ta thực hiện phép quay kép Right -Left

33

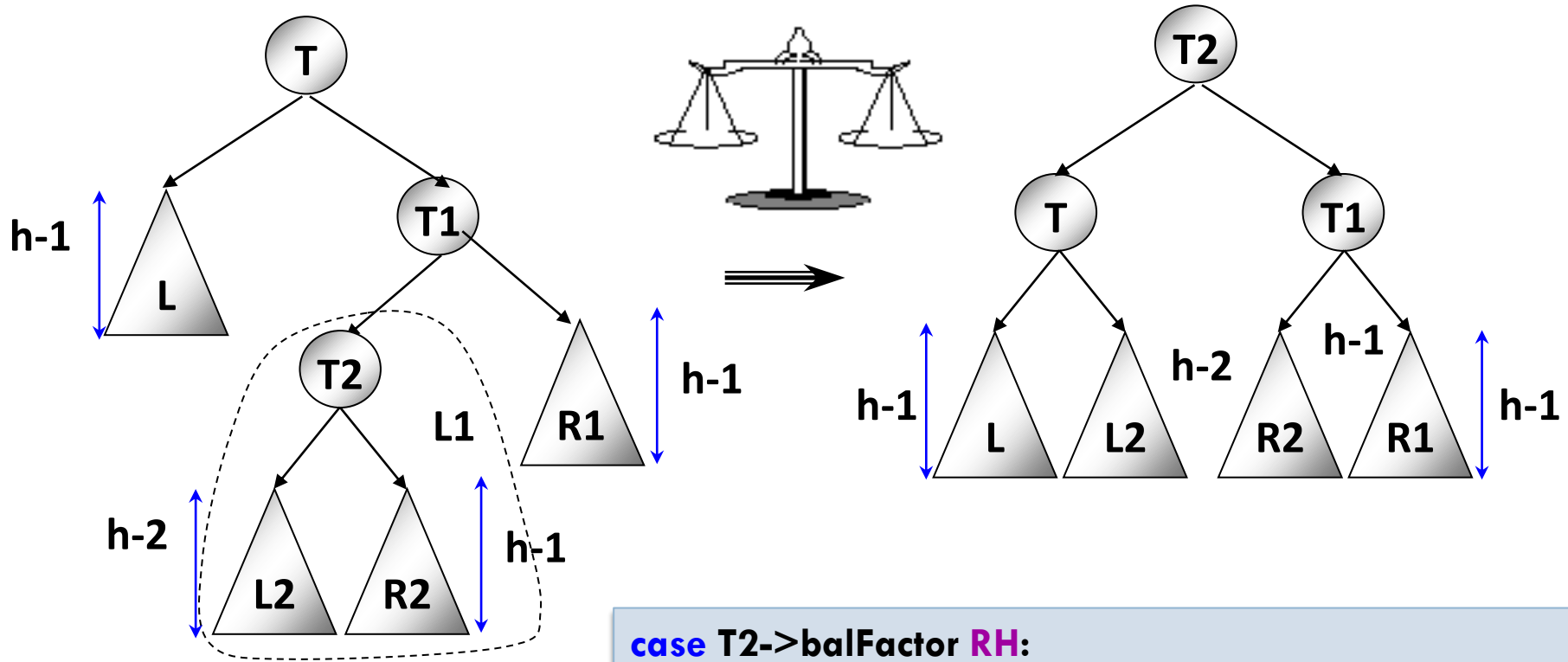


case $T2 \rightarrow \text{balFactor}$ **EH**:

$T \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$
 $T1 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH}$
 $T2 \rightarrow \text{balFactor} = \text{EH};$

T/h 2.3.3: cây T2 lệch về bên phải. Ta thực hiện phép quay kép Right -Left

34



case T2->balFactor RH:

T->balFactor = LH;
T1->balFactor = EH
T2->balFactor = EH;

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch phải

35

□ Quay keùp Right-Left

```
void rotateRL(AVLTree &T)    //quay kép Right-Left
{
    AVLNode*    T1 = T->pRight;
    AVLNode*    T2 = T1->pLeft;
    T->pRight    = T2->pLeft;
    T2->pLeft    = T;
    T1->pLeft    = T2->pRight;
    T2->pRight    = T1;
    switch(T2->balFactor) {
        case RH: T->balFactor = LH; T1->balFactor = EH; break;
        case EH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = EH; break;
        case LH: T->balFactor = EH; T1->balFactor = RH; break;
    }
    T2->balFactor = EH;
    T = T2;
}
```

AVL Tree - Cân bằng lại cây lệch phải

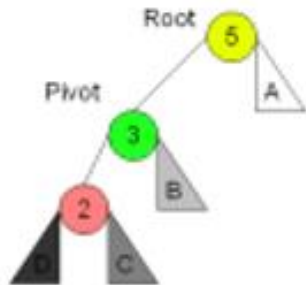
36

- Cân bằng khi cây bị lệch về bên phải

```
int balanceRight(AVLTree &T)
//Cân bằng khi cây bị lệch về bên phải
{
    AVLNode*    T1 = T->pRight;

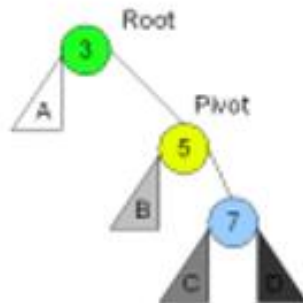
    switch(T1->balFactor)
    {
    case LH:      rotateRL(T); return 2;
    case EH:      rotateRR(T); return 1;
    case RH:      rotateRR(T); return 2;
    }
    return 0;
}
```

Left Left Case



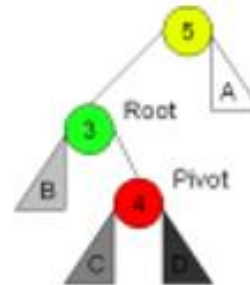
Right
Rotation

Right Right Case



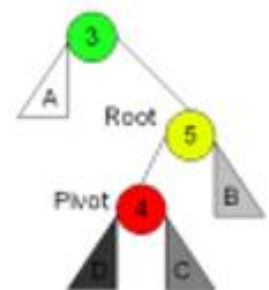
Left
Rotation

Left Right Case

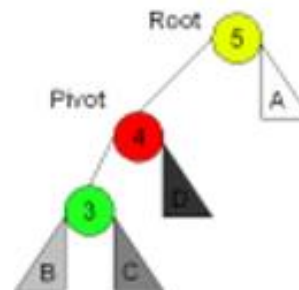


Left
Rotation

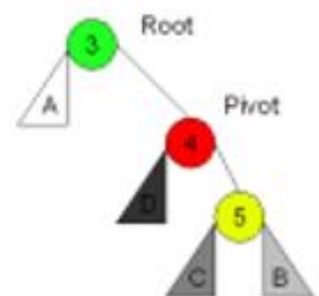
Right Left Case



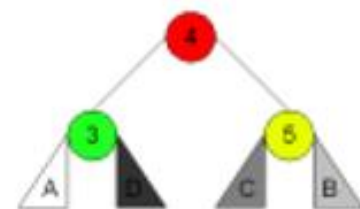
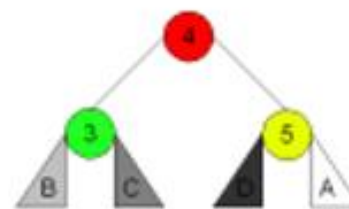
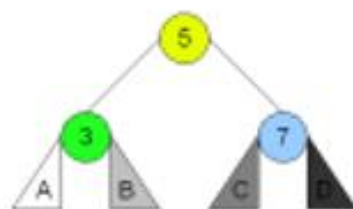
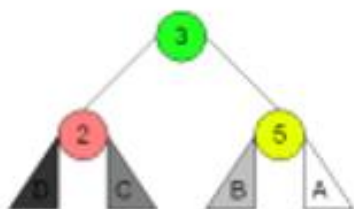
Right
Rotation



Right
Rotation



Left
Rotation



AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

38

- Việc thêm một phần tử vào cây AVL diễn ra tương tự như trên CNPTK
- Sau khi thêm xong, nếu chiều cao của cây thay đổi, *từ vị trí thêm vào, ta phải lần ngược lên gốc để kiểm tra xem có nút nào bị mất cân bằng không*. Nếu có, ta phải cân bằng lại ở nút này
- Việc cân bằng lại chỉ cần thực hiện 1 lần tại nơi mất cân bằng

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

39

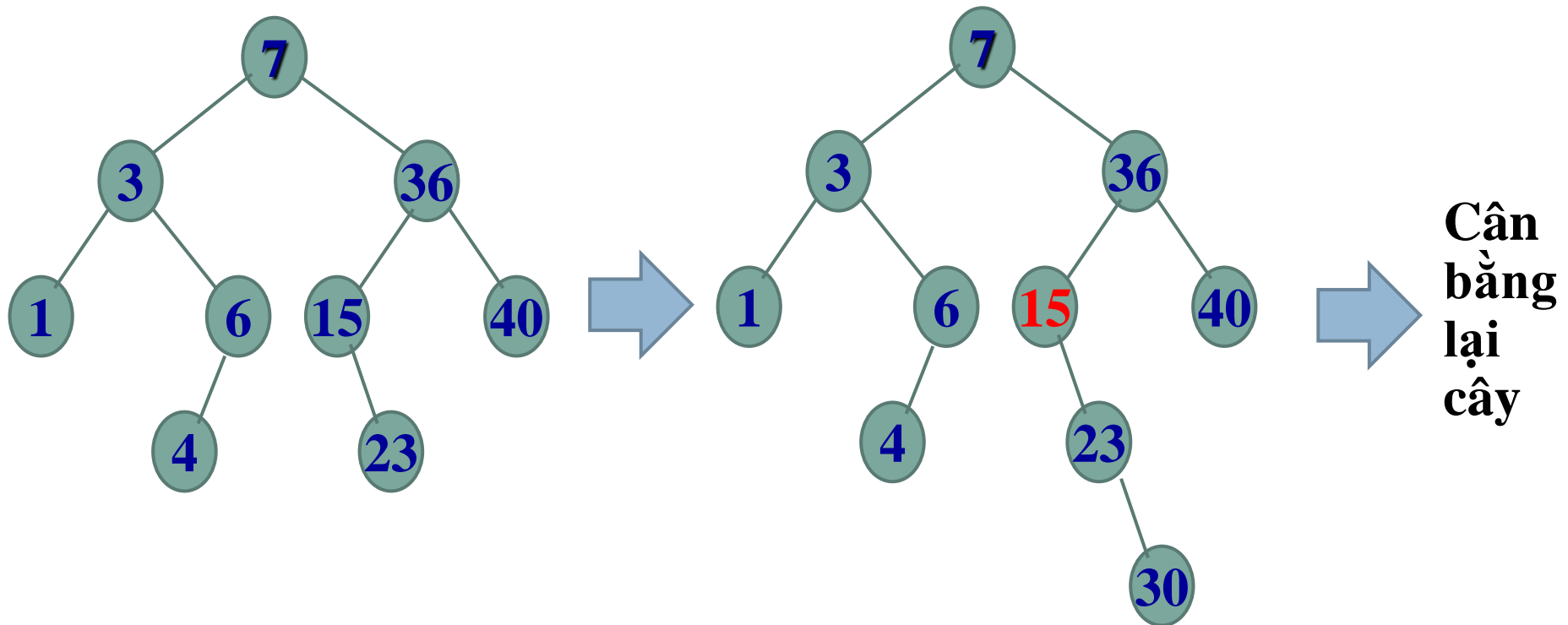
- Hàm *insertNode* trả về giá trị :
 - −1: khi không đủ bộ nhớ
 - 0: khi gặp nút cũ
 - 1: chèn thành công
 - 2: sau khi thêm, chiều cao cây bị tăng

int insertNode(AVLTree &T, DataType X)

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

40

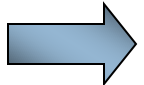
- Ví dụ: Thêm node **30** vào cây nhị phân tìm kiếm sau



AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

41

```
int insertNode(AVLTree &T, DataType X)
{ int res;
  if (T)
  {   if (T->key == X) return 0; //đã có
      if (T->key > X)
      {   res      = insertNode(T->pLeft, X);
          if(res < 2) return res;
          switch(T->balFactor)
          {   case RH: T->balFactor = EH;   return 1;
              case EH: T->balFactor = LH;   return 2;
              case LH: balanceLeft(T);      return 1;
          }
      }
  }
  .....
}
```

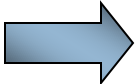


insertNode2

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

42

```
int insertNode(AVLTree &T, DataType X)
{
    .....
    else // T->key < X
    {
        res = insertNode(T-> pRight, X);
        if(res < 2) return res;
        switch(T->balFactor)
        {
            case LH: T->balFactor = EH; return 1;
            case EH: T->balFactor = RH; return 2;
            case RH: balanceRight(T); return 1;
        }
    }
    .....
}
```



insertNode3

AVL Tree - Thêm một phần tử trên cây AVL

43

```
int insertNode (AVLTree &T, DataType X)
{
    .....
    .....
    T = new TNode;
    if (T == NULL) return -1; //thiếu bộ nhớ
    T->key = X;
    T->balFactor = EH;
    T->pLeft = T->pRight = NULL;
    return 2; // thành công, chiều cao tăng
}
```

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

44

- Cũng giống như thao tác thêm một nút, việc hủy một phần tử X ra khỏi cây AVL thực hiện giống như trên CNPTK
- Sau khi hủy, nếu tính cân bằng của cây bị vi phạm ta sẽ thực hiện việc cân bằng lại
- Tuy nhiên việc cân bằng lại trong thao tác hủy sẽ phức tạp hơn nhiều do có thể xảy ra phản ứng dây chuyền

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

45

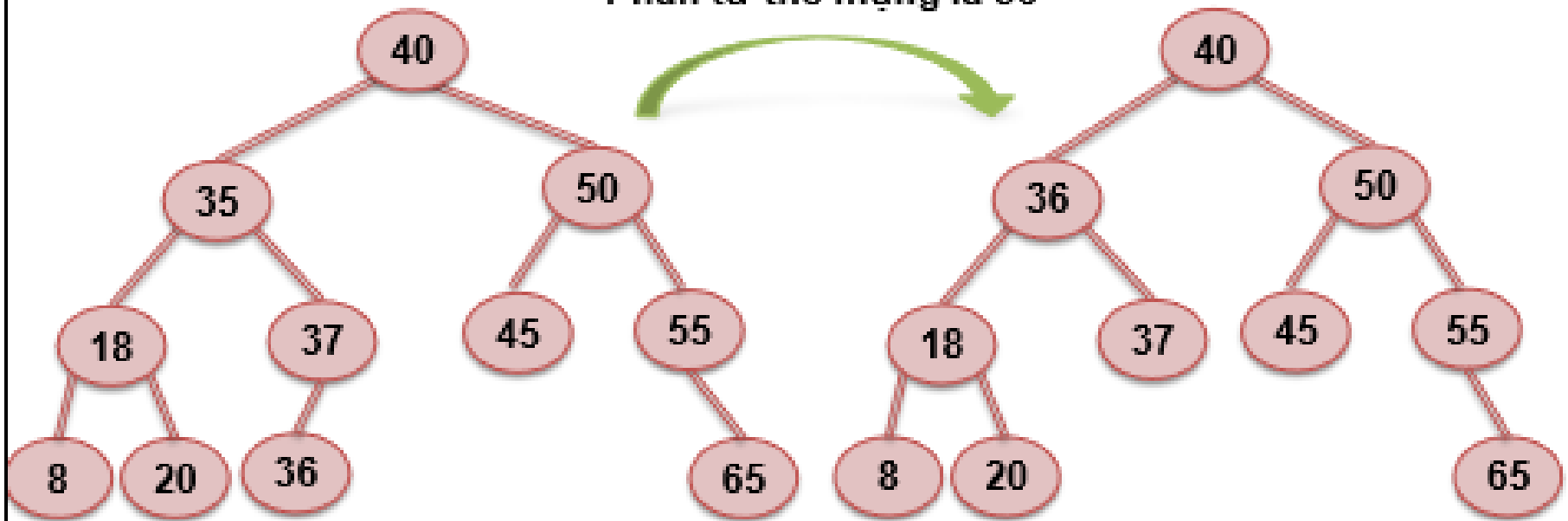
- Hàm *delNode* trả về giá trị :
 - ▣ 1: khi hủy thành công
 - ▣ 0: không có X trong cây.
 - ▣ 2: Nếu sau khi hủy, chiều cao cây bị giảm
- int delNode(AVLTree &T, DataType X)**

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

46

◉ Ví dụ: xóa 35

Phần tử thế mạng là 36

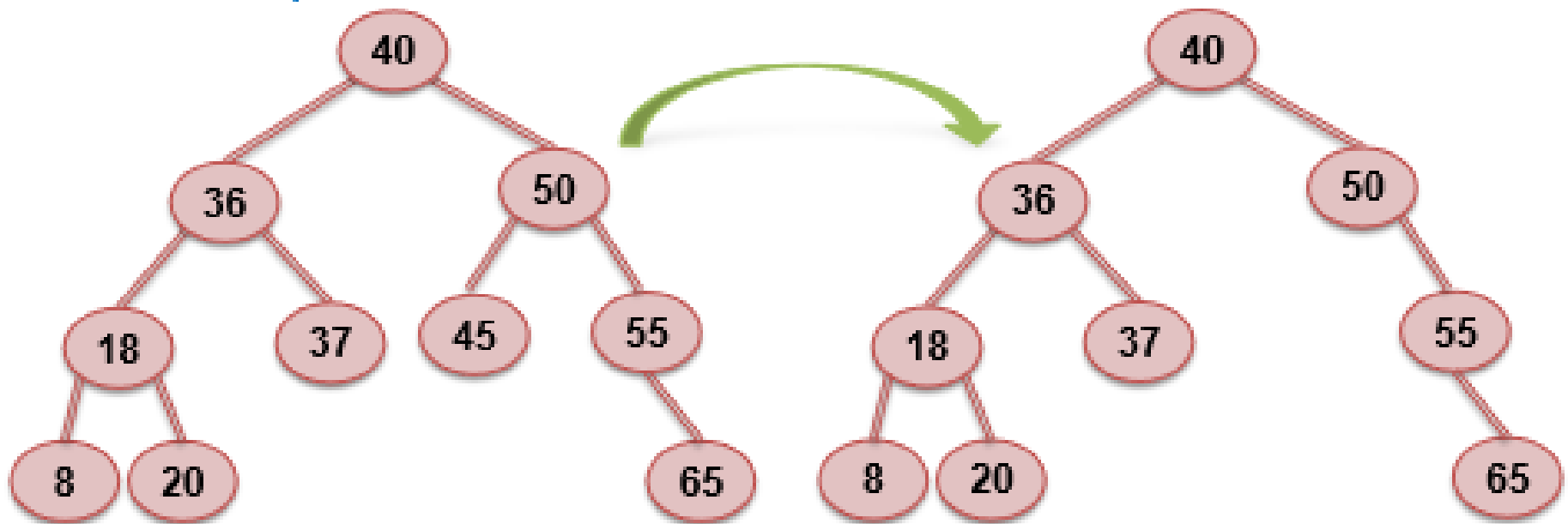


Cây vẫn cân bằng nên
không phải hiệu chỉnh

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

47

⊙ Xóa phần tử 45

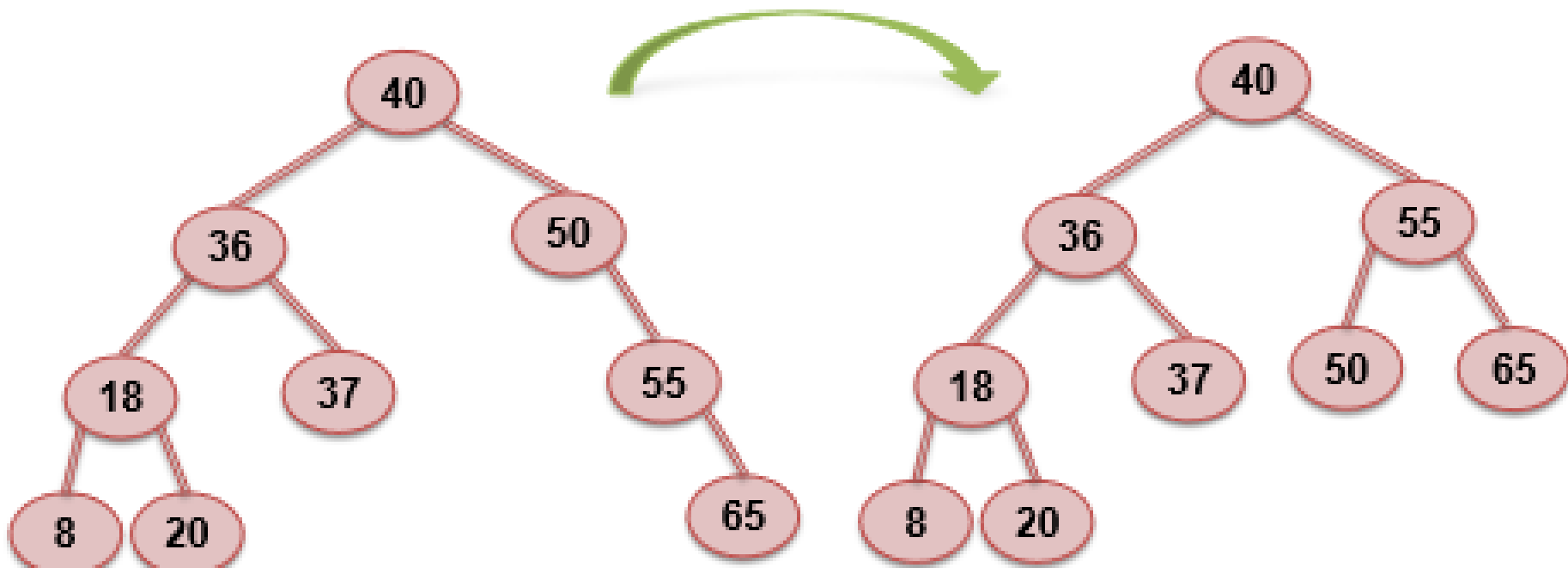


Node 50 bị lệch phải !!!

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

48

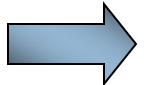
- ⊙ Xóa phần tử 45: cân bằng lại cây
Quay trái tại node 50



AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

49

```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{ int res;
  if (T==NULL)      return 0;
  if (T->key > X)
  { res = delNode (T->pLeft, X);
    if (res < 2)    return res;
    switch (T->balFactor)
    { case LH: T->balFactor = EH; return 2;
      case EH: T->balFactor = RH; return 1;
      case RH: return balanceRight(T);
    }
  } // if (T->key > X)
  .....
}
```

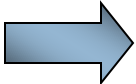


delNode2

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

50

```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{
.....
    if (T->key < X)
    {
        res = delNode (T->pRight, X);
        if (res < 2) return res;
        switch (T->balFactor)
        {
            case RH: T->balFactor = EH; return 2;
            case EH: T->balFactor = LH; return 1;
            case LH: return balanceLeft(T);
        }
    } // if (T->key == X)
.....
}
```



delNode3

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

51

```
int delNode(AVLTree &T, DataType X)
{.....
    else //T->key == X
    {   AVLNode*    p = T;
        if(T->pLeft == NULL)           {   T = T->pRight; res = 2; }
        else if(T->pRight == NULL) {   T = T->pLeft;   res = 2; }
        else //T có đủ cả 2 con
        {   res = searchStandFor(p,T->pRight);
            if(res < 2) return res;
            switch(T->balFactor)
            {   case RH: T->balFactor = EH; return 2;
                case EH: T->balFactor = LH; return 1;
                case LH: return balanceLeft(T);
            }
        }
        delete p; return res;
    }
}
```

AVL Tree - Hủy một phần tử trên cây AVL

52

```
int searchStandFor(AVLTree &p, AVLTree &q)
//Tìm phần tử thể mạng
{ int res;
  if(q->pLeft)
  { res = searchStandFor(p, q->pLeft);
    if(res < 2) return res;
    switch(q->balFactor)
    { case LH: q->balFactor = EH; return 2;
      case EH: q->balFactor = RH; return 1;
      case RH: return balanceRight(T);
    }
  } else
  { p->key = q->key; p = q; q = q->pRight; return 2;
  }
}
```

AVL Tree

53

- Nhận xét:
 - ▣ Thao tác thêm một nút có độ phức tạp $O(1)$
 - ▣ Thao tác hủy một nút có độ phức tạp $O(h)$
 - ▣ Với cây cân bằng trung bình 2 lần thêm vào cây thì cần một lần cân bằng lại; 5 lần hủy thì cần một lần cân bằng lại

AVL Tree

54

□ Nhận xét:

- ▣ Việc hủy 1 nút có thể phải cân bằng dây chuyền các nút từ gốc cho đến phần tử bị hủy trong khi thêm vào chỉ cần 1 lần cân bằng cục bộ
- ▣ Độ dài đường tìm kiếm trung bình trong cây cân bằng gần bằng cây cân bằng hoàn toàn $\log_2 n$, nhưng việc cân bằng lại đơn giản hơn nhiều
- ▣ Một cây cân bằng không bao giờ cao hơn 45% cây cân bằng hoàn toàn tương ứng dù số nút trên cây là bao nhiêu