CẤU TRÚC RỜI RẠC

CHƯƠNG II:
CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

1. Tập hợp các tập hợp con. Biểu diễn tập hợp trên máy tính. Các phép toán tập hợp và các tính chất liên quan. Tập hợp tích Descartes.
2. Nguyên lý cộng, Nguyên lý nhân, Nguyên lý chuồng bồ câu.
3. Hoán vị, Tổ hợp và Chỉnh hợp. Công thức nhị thức Newton.
4. Hoán vị và tổ hợp lặp.

TẬP HỢP

1. Khái niệm

2. Quan hệ giữa các tập hợp

3. Các cách xác định tập hợp

4. Tập hợp các tập hợp con (Tập hợp lũy thừa)

KHÁI NIỆM

Định nghĩa tập hợp:

- Một tụ tập của vô hạn hay hữu hạn các đối tượng có một tính chất chung nào đó gọi là một tập hợp.
- Các đối tượng trong một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp đó.
- Các phần tử của tập hợp là khác nhau, không quan tâm đến thứ tự
- Tập hợp thường gọi vắn tắt là tập.

KHÁI NIỆM

Ví dụ:

R là tập các số thực.

Z là tập các số nguyên.

N là tập các số tự nhiên.

Ghi chú:

$x \in A$ để chỉ x là phần tử của tập A

$x \notin A$ để chỉ x không phải là phần tử của tập A

$\emptyset$ (tập rỗng): là tập không chứa bất kì phần tử nào

QUAN HỆ GIỮA CÁC TẬP HỢP

Tập hợp bằng nhau: Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử, tức là mỗi phần tử thuộc A đều là phần tử thuộc B và ngược lại. Kí hiệu: A=B.

Ví dụ: {1, 3, 5} và {3, 5, 1}

Tập con: Tập A được gọi là tập con của tập B khi và chỉ khi mọi phần tử của A đều là phần tử của B.

Kí hiệu: $A \subseteq B$.

Nhận xét: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$ là đúng

QUAN HỆ GIỮA CÁC TẬP HỢP

Ví dụ: Tập *<u>các số nguyên dương lẻ</u>* nhỏ hơn 10 là một tập con của tập *<u>các số nguyên dương nhỏ hơn 10</u>* .

Ghi chú: Khi muốn nhấn mạnh tập A là tập con của tập B nhưng $A \neq B$, ta viết $A \subset B$ và nói rằng A là tập con thật sự của B.

Nhận xét:

- Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$.
- Tập rỗng là con của mọi tập hợp.
- Mọi tập hợp đều là tập con của chính nó.

CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

1. Liệt kê các phần tử

Một tập hợp có thể được xác định bằng cách liệt kê tất cả các phần tử của nó. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu trong đó tất cả các phần tử của một tập hợp được liệt kê ở giữa hai dấu móc.

Ví dụ:

- V = {a, e, i o, u}
- O = {1,3, 5, 7, 9}
- N = {0, 1, 2, 3, …}
- Z = {…., 0, 1, 2, 3, …}.

CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

2. Chỉ ra các thuộc tính đặc trưng của phần tử

Một tập hợp cũng có thể được xác định bằng cách chỉ ra rõ các thuộc tính đặc trưng của các phần tử của nó.

Cách viết: $A=\{x\in U \mid p(x)\}$ ($A=\{x\in U: p(x)\}$) hay vắn tắt $A=\{x \mid p(x)\}$ ($A=\{x: p(x)\}$)

Ví dụ:

- $V = \{x \mid x$ là nguyên âm$\}$
- $O = \{x \mid x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $10\}$
- $A = \{x \mid x = 2n, n\in N\}$
- $B = \{n\in N \mid n$ là số nguyên tố$\}$.

CÁC CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

3. Cách xác định tập hợp dưới dạng ảnh của một tập hợp khác

Cách viết: $A=\{f(x) | x \in B\}$ $(A = \{f(x): x \in B\})$

Ví dụ:

- $A = \{(2n+1) | n \in N\}$.
- $B = \{2x | x \in R\}$

TẬP HỢP CÁC TẬP HỢP CON

Cho tập X, tập tất cả các tập con của X (còn gọi là tập lũy thừa của X) được kí hiệu là P(X). Nói cách khác, P(X) là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một tập hợp con của X.

Ví dụ: $X = \{0, 1, 2\}$

$\Rightarrow P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

Chú ý:

- $X \subset Y \Rightarrow P(X) \subset P(Y)$.
- Nếu X có n phần tử ($n \in N$) thì P(X) có 2^n phần tử.

BIỂU DIỄN TẬP HỢP TRÊN MÁY TÍNH

1. Phương pháp biểu diễn

- Có nhiều cách biểu diễn tập hợp trên máy tính.

- Ở đây chúng ta sẽ nói đến một phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp xếp tùy ý các phần tử của tập vũ trụ.

BIỂU DIỄN CÁC TẬP HỢP TRÊN MÁY TÍNH

1. Phương pháp biểu diễn

Giả sử tập vũ trụ U là hữu hạn. Trước hết sắp xếp tuỳ ý các phần tử của U, ví dụ a_1, a_2, …,a_n, sau đó biểu diễn tập con A của U bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i là 1 nếu a_i thuộc A và là 0 nếu a_i không thuộc A.

BIỂU DIỄN CÁC TẬP HỢP TRÊN MÁY TÍNH

2. Ví dụ

Cho U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} và sự sắp xếp các phần tử trong U theo thứ tự tăng dần, tức là $a_i = i$.

○ Khi đó, chuỗi bit biểu diễn tập con A = {1, 2, 3, 4, 5} là 11111 00000; xâu bit biểu diễn tập con B = {1, 3, 5, 7, 9} là 10101 01010.

○ Để nhận được xâu bit cho các tập là hợp và giao của hai tập hợp, ta sẽ thực hiện phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó.

○ Xâu bit đối với hợp của hai tập là:

11111 00000 ∨ 10101 01010 = 11111 01010

A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}.

○ Xâu bit đối với giao của hai tập này là:

11111 00000 ∧ 10101 01010 = 10101 00000

A∩B = {1, 3, 5}.

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

1. Phép hợp

2. Phép giao

3. Phép hiệu

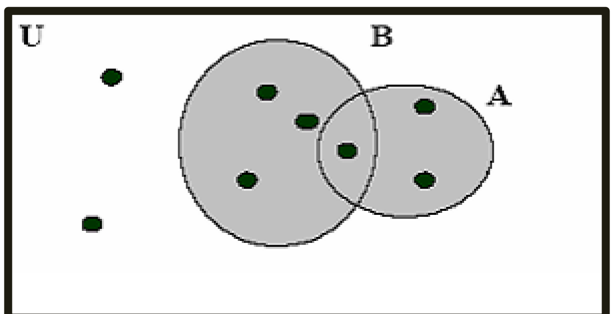
4. Các tính chất liên quan

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

1. Phép hợp

▪ Định nghĩa: Cho A và B là hai tập hợp. Hợp của hai tập hợp A và B, được ký hiệu là A∪B, là tập hợp chứa các phần tử, hoặc thuộc A hoặc thuộc B hoặc thuộc cả hai.

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$



Giản đồ Venn biểu diễn hợp của A và B

Ví dụ:

○ Cho A = {1, 2, 3} và B = {1, 3, 5} thì A∪B = {1, 2, 3, 5}.

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

1. Phép hợp

Định nghĩa: Hợp của n tập hợp là một tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số n tập hợp đó.

Ta ký hiệu:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

để chỉ hợp của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ví dụ:

Cho $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Khi đó:

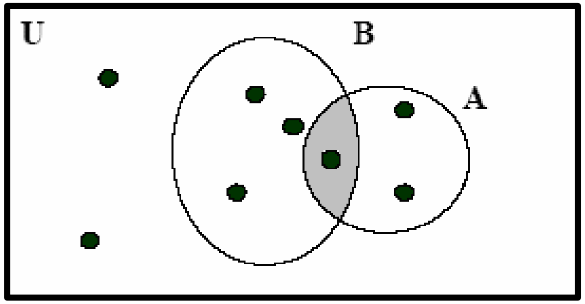
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

2. Phép giao

Định nghĩa: Cho A và B là hai tập hợp. Giao của hai tập hợp A và B, được ký hiệu là $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả hai tập A và B.

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$



Giản đồ Venn biểu diễn giao của A và B

Ví dụ:

- Cho A = {1, 2, 3} và B = {1, 3, 5} thì $A \cap B$ = {1, 3}.
- Cho M={1,2} và N={3,4} thì $M \cap N = \emptyset$, khi đó ta nói M, N rời nhau.

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

2. Phép giao

Định nghĩa: Giao của n tập hợp là một tập hợp chứa các phần tử thuộc tất cả n tập hợp đó. Ta ký hiệu:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

để chỉ giao của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ví dụ: Cho $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Khi đó:

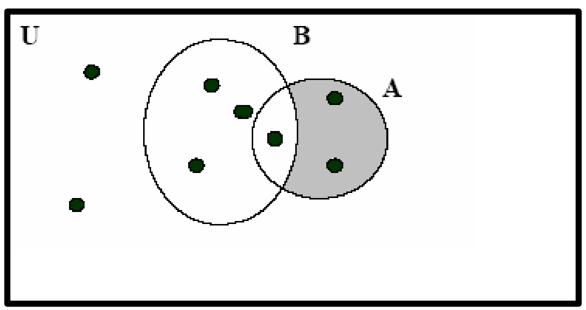
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

3. Phép hiệu

Định nghĩa: Cho A và B là hai tập hợp, hiệu của A và B, được ký hiệu là A–B, là tập hợp chứa các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B. Hiệu của A và B cũng được gọi là phần bù của B đối với A.

$$A-B=\{x \mid (x\in A) \land (x\notin B)\}$$



Giản đồ Venn biểu diễn hiệu A-B

Ví dụ:

- Cho A={1, 2, 3} và B={1, 3, 5} thì A–B={2}; B–A={5}.

CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

3. Phép hiệu

Nhận xét: A-B=B-A khi và chỉ khi A=B. Khi đó A-B=B-A=∅.

Định nghĩa: Cho U là tập vũ trụ. Phần bù của tập A, được kí hiệu là $\bar{A}$, là phần bù của A đối với U: $\bar{A}=\{x \mid x \notin A\}$.

Ví dụ: Cho A={a, e, i, o, u } thì $\bar{A}$={b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z} (ở đây tập vũ trụ là tập các chữ cái tiếng Anh).

CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN

Tính chất	Tên gọi
$A \cup \varnothing = A ; A \cap U = A$	Phần tử trung hòa
$A \cup U = U ; A \cap \varnothing = \varnothing$	Tính thống trị
$A \cup A = A ; A \cap A = A$	Tính lũy đẳng
$A \cup \overline{A} = U; A \cap \overline{A} = \Phi$	Phần bù
$A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$	Tính giao hoán
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Tính kết hợp
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Tính phân phối
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} ; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Công thức De Morgan

TÍCH DESCARTES

Định nghĩa 1: Cho hai tập A và B. Tích Descartes của A và B, được ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp gồm tất cả các cặp (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \land (b \in B)\}.$$

Ví dụ: Cho $A=\{1, 2\}$, $B=\{a, b, c\}$ thì:

$A \times B = \{(1,a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$

$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$A^2 = A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Nhận xét: $A \times B \neq B \times A$.

TÍCH DESCARTES

Định nghĩa 2:Tích Descartes của n (n>1) tập hợp A_1, A_2, …, A_n , được ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, là tập hợp gồm tất cả các bộ n phần tử (a_1, a_2, …, a_n) trong đó $a_i \in A_i$ với i=1, 2, …n.

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i$ với $i=1,2, \ldots n\}$

Ví dụ: Cho A={0, 1}, B = {1, 2}, C ={0, 1, 2} thì:

A×B×C={(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2)}.

TÍCH DESCARTES

Ghi chú

- Lũy thừa bậc 2 Descartes (hay bình phương Descartes) của tập A được định nghĩa là tích Descartes của A với A:

$$A^2 = A \times A$$

- Tương tự, lũy thừa Descartes bậc n của tập A là tích Descartes của n tập A:

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

(có n tập A ở vế phải).

LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP

* Số phần tử của một tập hợp hữu hạn A được ký hiệu là $|A|$ và gọi là lực lượng của tập A.
* Nếu tập hợp A không hữu hạn, ta nói A là một tập vô hạn và viết: $|A| = \infty$.
* Quy ước: $|\emptyset| = 0$.
* Tính chất: Cho A, B là các tập hữu hạn. Khi đó:

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2) $|A \times B| = |A| . |B|$

3) $|P(A)| = 2^{|A|}$

VD: $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{3, 5, 6\}$; $A \cup B = \{1,3,5,6,7\}$; $A \cap B = \{3,5\}$
$|A| = 4$; $|B| = 3$; $|A \cap B| = 2$; $|A \cup B| = 5$; $|AxB| = 12$; $|\mathcal{P}(A)| = 2^4 = 16$

CÁC NGUYÊN LÝ

1. Nguyên lý cộng

Mệnh đề: Cho A và B là hai tập hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$. Khi đó ta có:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

*** Tổng quát:** Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots n$) thì

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

CÁC NGUYÊN LÝ

1.Nguyên lý cộng

Giả sử để thực hiện một công việc nào đó, ta có 2 phương pháp, trong đó:

- Phương pháp 1 có n cách thực hiện

- Phương pháp 2 có m cách thực hiện

Khi đó, số cách thực hiện công việc trên là <u>n + m</u>

$\Rightarrow$ Tổng quát?

CÁC NGUYÊN LÝ

1.Nguyên lý cộng

Ví dụ: **Ngọc có 5 cái áo thun, 6 cái áo sơ mi. Vậy Ngọc sẽ có bao nhiêu cách chọn áo để mặc.**

Giải:

Ngọc có 5 cách chọn áo thun

Ngọc có 6 cách chọn áo sơ mi

Vậy Ngọc sẽ có 5+6 =11 cách chọn áo để mặc.

CÁC NGUYÊN LÝ

2.Nguyên lý nhân

Mệnh đề: **Cho A và B là hai tập hữu hạn. Khi đó ta có:**

$$|A \times B| = |A| \, .|B|$$

*** Tổng quát:** **Nếu A_1, A_2, …, A_n là các tập hữu hạn thì**

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \, .|A_2|. \; \ldots \; . \, |A_n|$$

CÁC NGUYÊN LÝ

2.Nguyên lý nhân

Giả sử để thực hiên một công việc nào đó, ta cần thực hiện 2 bước (giai đoạn), trong đó

- Bước 1 có n cách thực hiện

- Bước 2 có m cách thực hiện

Khi đó, số cách thực hiện công việc trên là n.m

⇒ Tổng quát?

CÁC NGUYÊN LÝ

2.Nguyên lý nhân

Ví dụ: **Bạn Phúc từ Quận 9 (A) muốn tới trường Đại học Công Nghiệp, phải qua chặng Ngã tư Thủ Đức (B). Biết từ A tới B có 3 tuyến xe buýt để đi, và từ B tới C có 4 tuyến xe buýt để đi.**

Giải:

Giai đoạn 1 (A đến B): có 3 cách thực hiện

Giai đoạn 2 (B đến C): có 4 cách thực hiện

Vậy Phúc muốn tới Trường Đại học Công Nghiệp thì sẽ có 3.4=12 cách.

CÁC NGUYÊN LÝ

3.Nguyên lý chuồng bồ câu(Dirichlet)

a. Giới thiệu

Nguyên lý chuồng bồ câu được phát triển từ mệnh đề: "Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ô trong chuồng thì chắc chắn có ít nhất một ô chứa nhiều hơn một con chim."

CÁC NGUYÊN LÝ

3.Nguyên lý chuồng bồ câu(Dirichlet)

b.Nguyên lý cơ bản

Nếu ta đặt n đối tượng nào đó vào k hộp, và số hộp k nhỏ hơn số đối tượng n, thì có ít nhất một hộp chứa từ 2 đối tượng trở lên.

CÁC NGUYÊN LÝ

3.Nguyên lý chuồng bồ câu(Dirichlet)

b.Nguyên lý mở rộng

Nếu ta đặt n đối tượng vào k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất là]n/k[đối tượng.

Chú ý: Ký hiệu]a[dùng để chỉ số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng a.

Ví dụ:]5[=5,]4/3[=2

CÁC NGUYÊN LÝ

3.Nguyên lý chuồng bồ câu(Dirichlet)

Ví dụ: Có 20 chim bồ câu ở trong chuồng có 7 ô. Khi đó sẽ có ít nhất 1 ô chứa]20/7[=3 con bồ câu trở lên.

Ví dụ: Có 100 người thì có ít nhất]100/12[= 9 người sinh cùng tháng.

Bài tập 1

Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau?

Gọi N là số sinh viên, khi đó $]N/5[= 6$ khi và chỉ khi $5 < N/5 \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26.

Bài tập 2

Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9)?

Có 10^7 = 10.000.000 số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có]25.000.000/10.000.000[= 3 có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

Ứng dụng 1

Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau?

Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến n – 1. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là n – 1 (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành n –1 nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tai một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau.

Ứng dụng 2

Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{30} < 45$$

$$15 \leq a_1+14 < a_2+14 < ... < a_{30}+14 < 59.$$

Sáu mươi số nguyên a_1, a_2, ..., a_{30}, a_1+14, a_2+14, ..., $a_{30}+14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho ai = aj + 14 (j < i). Điều này có nghĩa là từ ngày j + 1 đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận.

Ứng dụng 3

Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

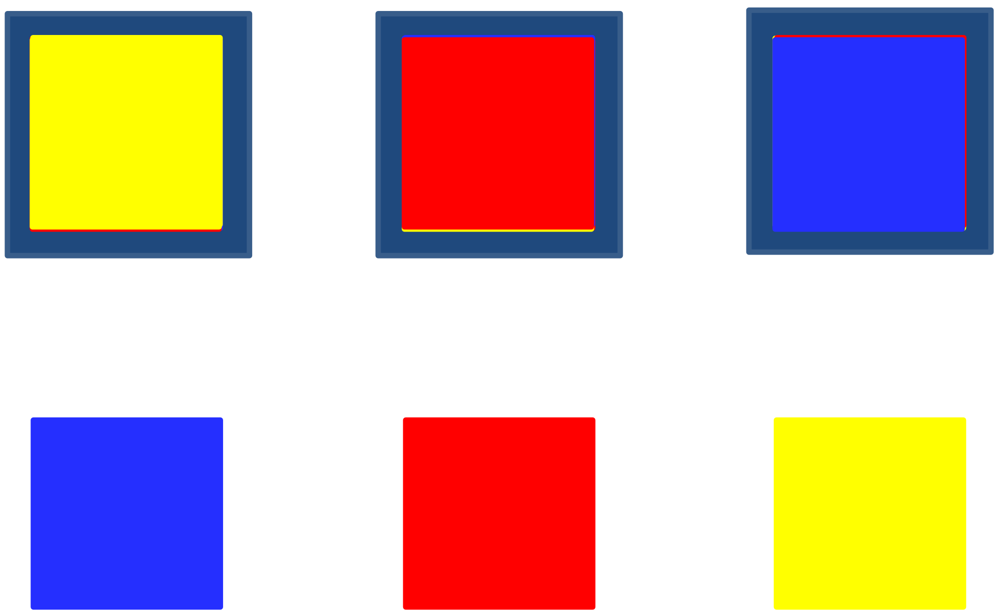
Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì]5/2[= 3. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A.

HOÁN VỊ

a.Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm n phần tử (n>0). *<u>Mỗi cách sắp đặt có thứ tự n phần tử</u>* của A được gọi *<u>là một hoán vị của n phần tử</u>*. Số các hoán vị của n phần tử được ký hiệu là P_n.

Ví dụ 1:



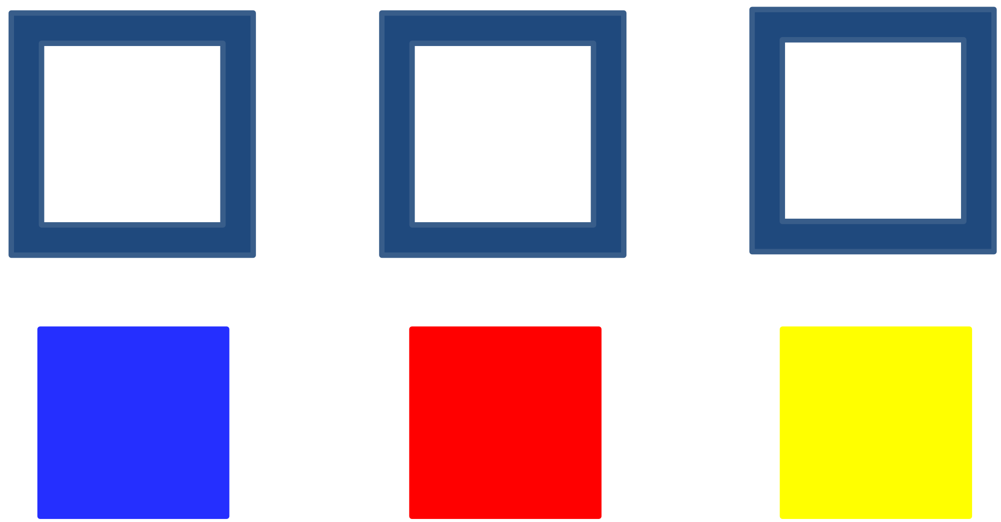
6

$P_n = n!$

HOÁN VỊ

Số cách chọn:

3 x 2 x 1 = 3!



b. Công thức:

$$P_n = n! = 1.2\ldots(n-1).n$$

$$0! = 1$$

HOÁN VỊ

Ví dụ 2: **Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan 7 điểm A,B,C,D,E,F,G. Hỏi có bao nhiêu cách chọn thứ tự tham quan?**

Giải:

Mỗi cách họ chọn thứ tự tham quan là một hoán vị của tập A,B,C,D,E,F,G.

Do vậy đoàn khách có tất cả: $P_7 = 7! = 5040$ cách chọn thứ tự tham quan.

TỔ HỢP

a.Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm n phần tử (n>0). *Mỗi tập con gồm k phần tử* (0 ≤ k ≤ n) của A được gọi *là một tổ hợp chập k của n phần tử*. Số các tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k **.**

Nhận xét: Lấy một tổ hợp chập k của n phần tử chính là lấy ra k phần tử từ n phần tử đó mà không quan tâm đến thứ tự.

TỔ HỢP

b.Công thức:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n.$$

c.Tính chất:

$$C_n^{n-k} = C_n^k, \quad 0 \le k \le n.$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad 1 \le k \le n.$$

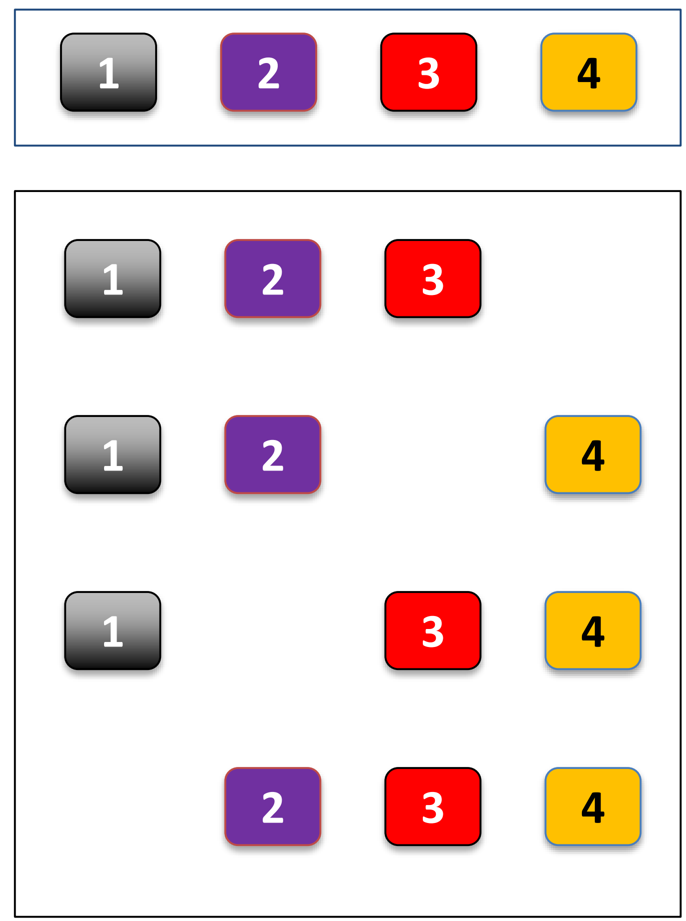
$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

TỔ HỢP

Ví dụ: **Cho tập A gồm 4 số tự nhiên {1,2,3,4}. Tìm tất cả các tập con của A sao cho các tập con chỉ có 3 phần tử.**

Số tập con cóthểtìmđượclà $C_4^3=4$



TỔ HỢP

Ví dụ: **Từ 3 điểm A,B và C, bạn sẽ có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo ra?**

Giải:

Số đoạn thẳng được tạo thành từ 3 điểm A,B,C chính là số tổ hợp chập 2 của 3:

$$C_3^2 = 3$$

Vậy có 3 đoạn thẳng được tạo thành từ 3 điểm A,B,C.

CHỈNH HỢP

a.Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm n phần tử (n>0). *Mỗi bộ gồm k phần tử* ($1 \le k \le n$) *sắp thứ tự* của tập A được gọi *là một chỉnh hợp chập k của n phần tử*. Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là A_n^k.

Nhận xét: Lập một chỉnh hợp chập k của n phần tử chính là lấy ra k phần tử từ n phần tử đó, có quan tâm đến thứ tự.

CHỈNH HỢP

Nói cách khác, hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này không là phần tử của chỉnh hợp kia hoặc các phần tử của 2 chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.

b.Công thức:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

CHỈNH HỢP

Ví dụ: Từ 3 điểm A,B và C sẽ lập được bao nhiêu vector?

Giải:

Số vector được tạo thành từ 3 điểm A,B,C chính là số chỉnhchập 2 của 3:

$$A_3^2 = 6$$

Vậy có 6 vector được tạo thành từ 3 điểm A,B,C.

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Isaac Newton
(1643-1727)

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Định lý: **Với a, b ∈ R và n là số nguyên dương ta có:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Ví dụ:

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n$$

Tính chất:

- **Số các số hạng của công thức là n+1.**
- **Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng luôn luôn bằng số mũ của nhị thức: k+n-k= n**

- **Số hạng tổng quát của nhị thức là:** $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$
- **Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối thì bằng nhau.**

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Một số khai triển hay sử dụng:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 x^0 - C_n^1 x^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n$$

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Ví dụ:

$$(x+y)^6 = C_6^0 x^0 y^6 + C_6^1 x^1 y^5 + C_6^2 x^2 y^4 + C_6^3 x^3 y^3 +$$

$$+ C_6^4 x^4 y^2 + C_6^5 x^5 y^1 + C_6^6 x^6 y^0 =$$

$$= y^6 + 6xy^5 + 15x^2y^4 + 20x^3y^3 + 15x^4y^2 + 6x^5y + x^6$$

Ví dụ: Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(x^2 -2)^5$

$$(x^2-2)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (x^2)^k (-2)^{5-k}$$

$$(x^2)^k = 4 \Rightarrow k = 2$$

Khi k = 2 thì hệ số của x^4: $C_5^2(-2)^{5-2} = -80$

HOÁN VỊ LẶP

a. Định nghĩa: **Cho n đối tượng, trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k) và $n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$. Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lặp của n.**

b. Công thức:

Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có
n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1,
n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,
…,
n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k,
($n_1 + n_2, \ldots + n_k = n$) là

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

HOÁN VỊ LẶP

Ví dụ: **Có bao nhiêu chuỗi ký tự khác nhau nhận được bằng cách sắp xếp lại các ký tự của chuỗi: "YAMAHAM"**

Số ký tự có trong chuỗi là: n=7
Có 3 ký tự 'A'
Có 2 ký tự 'M'
Có 1 ký tự 'Y'
Có 1 ký tự 'H'

Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

Khai triển mở rộng nhị thức Newton

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} a_1^{\,n_1} a_2^{\,n_2} \ldots a_k^{\,n_k}$$

với các số nguyên không âm $n_1, n_2, \ldots, n_k$ thoả $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, ký hiệu

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Khai triển mở rộng nhị thức Newton

$$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+\boldsymbol{t})^{8} = \sum_{1+2+2+3} \binom{8}{1,2,2,3} u^{1}v^{2}w^{2}t^{3}$$

Vậy hệ số cần tìm:

$$=\binom{8}{1,2,2,3}=\frac{8!}{1!2!2!3!}=\mathbf{1680}$$

TỔ HỢP LẶP

a. Định nghĩa:

Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là *<u>tổ hợp lặp chập k của n</u>*. Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là

$$K_n^k$$

TỔ HỢP LẶP

b. Công thức:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Ví dụ: **Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn?**

Ta có mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Số cách chọn:

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

(Cụ thể AA, AB, AC, BB, BC, CC)

TỔ HỢP LẶP

c. Hệ quả: Số nghiệm nguyên không âm ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) (mỗi x_i đều nguyên không âm) của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ là

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n.

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

TỔ HỢP LẶP

Ví dụ : Phương trình X+Y+Z+T= 20 có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ?

Lời giải :

Chọn 20 phần tử từ một tập có 4 loại, sao cho có X phần tử loại 1, Y phần tử loại 2 , có Z phần tử loại 3, có T phần tử loại 4. Vì vậy số nghiệm bằng tổ hợp lặp chập 20 của 4 phần tử và bằng:

$$K_4^{20}$$

=>Cách giải nhanh đối với bài toán tìm nghiệm nguyên không âm: x+y+z+t = n là K_4^n

TỔ HỢP LẶP

Ví dụ: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad (1)$$

Thỏa điều kiện $x_1 \le 3;\ x_2 \ge 2;\ x_3 > 4$ (*).

Giải:

Ta viết điều kiện đã cho thành $x_1 \le 3;\ x_2 \ge 2;\ x_3 \ge 5$.

Xét các điều kiện sau:

$$x_2 \ge 2;\ x_3 \ge 5 \qquad (**)$$

$$x_1 \ge 4;\ x_2 \ge 2;\ x_3 \ge 5 \qquad (***)$$

Gọi p, q, r lần lượt là các số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa các điều kiện (*), (**), (***). Ta có:

$$p = q - r$$

TỔ HỢP LẶP

Ví dụ:

Trước hết ta tìm q.

Đặt

$$x_1' = x_1;\ x_2' = x_2 - 2;\ x_3' = x_3 - 5;\ x_4' = x_4$$

Phương trình (1) trở thành

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 13 \qquad (2)$$

Số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (**) bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình (2)

$$q = K_4^{13} = C_{4+13-1}^{13} = C_{16}^{13}$$

TỔ HỢP LẶP

Ví dụ:

Tương tự, ta có: .

$$r = K_4^9 = C_{4+9-1}^9 = C_{12}^9$$

$$\Rightarrow p = q - r = C_{16}^{13} - C_{12}^9 = 560 - 220 = 340.$$

Vậy số nghiệm nguyên không âm của phương trình (1) thỏa điều kiện (*) là 340.