CẤU TRÚC RỜI RẠC

CHƯƠNG 4: **ĐẠI SỐ BOOLE**

4.1. Khái niệm đại số Boole

4.2. Hàm Boole

4.3. Mạch lôgic

4.4. Cực tiểu hoá các mạch lôgic

4.1. KHÁI NIỆM ĐẠI SỐ BOOLE

Định nghĩa: Tập hợp khác rỗng S cùng với các phép toán ký hiệu nhân (.), cộng (+), lấy bù (’) được gọi là một đại số Boole nếu các tiên đề sau đây được thoả mãn với mọi a, b, c S.

1. Tính giao hoán: **a)** a.b = b.a,
b) a+b = b+a.

2. Tính kết hợp: **a)** (a.b).c = a.(b.c),
b) (a+b)+c = a+(b+c).

3. Tính phân phối: **a)** a.(b+c) = (a.b)+(a.c),
b) a+(b.c) = (a+b).(a+c).

4. Tồn tại phần tử trung hoà: Tồn tại hai phần tử khác nhau của S, ký hiệu là 1 và 0 sao cho: **a)** a.1 = 1.a = a,
b) a+0 = 0+a = a.

1 gọi là phần tử trung hoà của phép **.** và 0 gọi là phần tử trung hoà của phép +.

5. Tồn tại phần tử bù: Với mọi a thuộc S, tồn tại duy nhất phần tử a’ thuộc S sao cho:

a) a.a’ = a’.a = 0,

b) a+a’ = a’+a = 1.

a’ gọi là phần tử bù của a.

4.1. KHÁI NIỆM ĐẠI SỐ BOOLE

Ví dụ:

1) **Đại số lôgic** có phải một đại số Boole?

- S là tập hợp các mệnh đề
- Các phép toán (hội), (tuyển), – (phủ định) tương ứng với . , +, ’
- Các hằng đ (đúng), s (sai) tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0.

2) **Đại số tập hợp** là một đại số Boole?

- S là tập hợp P(X) gồm các tập con của tập khác rỗng X,
- Các phép toán (giao), (hợp), – (bù) tương ứng với . , +, ’
- Các tập X, Ø tương ứng với các phần tử trung hoà 1, 0.

4.1. KHÁI NIỆM ĐẠI SỐ BOOLE

Các định lý

6. (Tính nuốt)

a) $a.0 = 0$,

b) $a+1 = 1$

7. (Tính luỹ đẳng)

a) $a.a = a$,

b) $a+a = a$.

8. (Hệ thức De Morgan)

a) $(a.b)' = a'+b'$,

b) $(a+b)' = a'.b'$.

9. (Hệ thức bù kép)

$(a')' = a$.

10. a) $1' = 0$,

b) $0' = 1$.

11. (Tính hút)

a) $a.(a+b) = a$,

b) $a+(a.b) = a$.

4.2. HÀM BOOLE: Định nghĩa

- **Định nghĩa:** Ký hiệu B = {0, 1} và $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i$ B, $1 \leq i \leq n\}$, ở đây B và B^n là các đại số Boole. Biến x được gọi là một biến Boole nếu nó nhận các giá trị chỉ từ B. Một hàm từ B^n vào B được gọi là một hàm Boole (hay hàm đại số lôgic) bậc n.
- Các hàm Boole cũng có thể được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole (xem Bảng 1 trong Thí dụ 1). Các biểu thức Boole với các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau:
  – 0, 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biểu thức Boole.
  – Nếu *P* và *Q* là các biểu thức Boole thì , *PQ* và *P+Q* cũng là các biểu thức Boole.
- Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó

4.2. HÀM BOOLE: Định nghĩa

Hai hàm n biến F và G được gọi là bằng nhau nếu $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)=G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$. Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm Boole được gọi là tương đương. Phần bù của hàm Boole F là hàm $\overline{F}$ với $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$. Giả sử F và G là các hàm Boole bậc n. Tổng Boole F+G và tích Boole FG được định nghĩa bởi:

$$(F+G)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)+G(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$(FG)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)G(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4.2. HÀM BOOLE: Ví dụ

Bảng sau cho giá trị của 16 hàm Boole bậc 2 phân biệt:

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0

trong đó có một số hàm thông dụng như sau:

- Hàm F_1 là hàm hằng 0,
- Hàm F_2 là hàm hằng 1,
- Hàm F_3 là hàm hội, $F_3(x,y)$ được viết là xy (hay $x \wedge y$),
- Hàm F_4 là hàm tuyển, $F_4(x,y)$ được viết là $x+y$ (hay $x \vee y$),
- Hàm F_5 là hàm tuyển loại, $F_5(x,y)$ được viết là $x \oplus y$,
- Hàm F_6 là hàm kéo theo, $F_6(x,y)$ được viết là $x \Rightarrow y$,
- Hàm F_7 là hàm tương đương, $F_7(x,y)$ được viết là $x \Leftrightarrow y$,
- Hàm F_8 là hàm Vebb, $F_8(x,y)$ được viết là $x \downarrow y$,
- Hàm F_9 là hàm Sheffer, $F_9(x,y)$ được viết là $x \uparrow y$.

4.2. HÀM BOOLE: Ví dụ

Các giá trị của hàm Boole bậc 3 $F(x, y, z) = xy+\bar{z}$ được cho bởi bảng sau:

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy+\bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

4.2. HÀM BOOLE: Định nghĩa

Định nghĩa: Cho x là một biến Boole và $\sigma \in$B. Ký hiệu:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x \; khi \; \sigma = 1, \\ \bar{x} \; khi \; \sigma = 0. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$. Với mỗi hàm Boole *F* bậc n, ký hiệu:

$$T_F = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n \mid F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$$

Và gọi nó là tập đặc trưng của hàm *F*. Khi đó ta có:

$$T_{\overline{F}} = \overline{T_F}, \; T_{F+G} = T_F \cup T_G, \; T_{FG} = T_F \cap T_G.$$

Cho n biến Boole $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Một biểu thức dạng:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$$

trong đó $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in$ B, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ được gọi là một hội sơ cấp của n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Số các biến xuất hiện trong một hội sơ cấp được gọi là hạng của của hội sơ cấp đó.

Cho F là một hàm Boole bậc n.

• ***Nếu F được biểu diễn dưới dạng tổng (tuyển) của một số hội sơ cấp khác nhau của n biến thì biểu diễn đó được gọi là dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc của F.***

• ***Dạng tổng (tuyển) chuẩn tắc hoàn toàn là dạng chuẩn tắc duy nhất của F mà trong đó các hội sơ cấp đều có hạng n.***

4.2. HÀM BOOLE: Định nghĩa

Mệnh đề: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể biểu diễn dưới dạng:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in B^i} x_1^{\sigma_1} \ldots x_i^{\sigma_i} F(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad (1),$$

trong đó i là số tự nhiên bất kỳ, 1 ≤ i ≤ n.

Hệ quả: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể được khai triển theo một biến x_i:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x_i} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_i F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Cho i=n trong mệnh đề trên và bỏ đi các nhân tử bằng 1 trong tích, các số hạng bằng 0 trong tổng, ta được hệ quả sau.

Hệ quả: Mọi hàm Boole *F* bậc n đều có thể được khai triển dưới dạng:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in T_F} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

4.2. HÀM BOOLE: Ví dụ

Dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của hàm F cho trong Thí dụ trên là:

$$F(x, y, z) = xyz + xyz + xyz + xyz + xyz,$$

và dạng tích chuẩn tắc hoàn toàn của nó là:

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + z)(x + y + z).$$

Bài tập

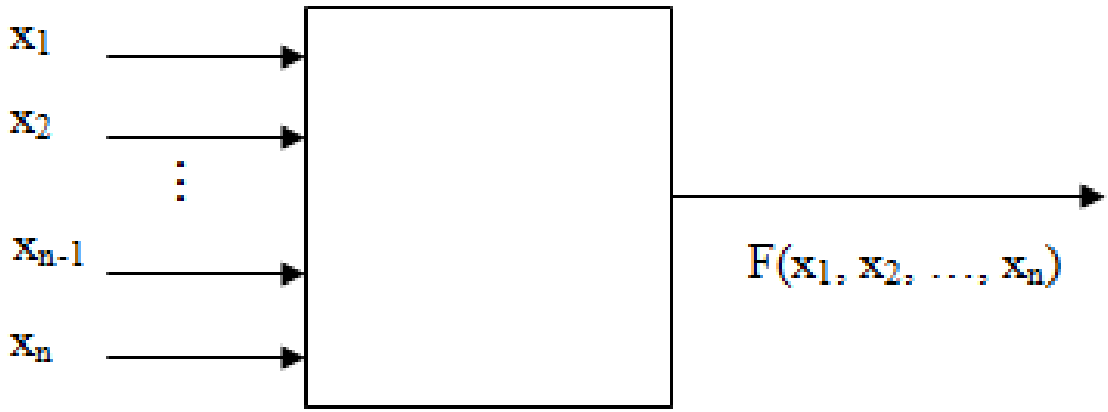
4.

Cho các hàm Boole F_1, F_2, F_3 xác định bởi bảng sau:

x	y	z	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Viết công thức hàm F_1, F_2, F_3

4.3. MẠCH LÔGIC: Cổng logic



• Xét một thiết bị như hình trên, có một số đường vào (dẫn tín hiệu vào) và chỉ có một đường ra (phát tín hiệu ra). Giả sử các tín hiệu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ta gọi là đầu vào hay input) cũng như tín hiệu ra F (đầu ra hay output) đều chỉ có hai trạng thái khác nhau, tức là mang một bit thông tin, mà ta ký hiệu là 0 và 1.

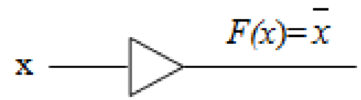
• Ta gọi một thiết bị với các đầu vào và đầu ra mang giá trị 0, 1 như vậy là một mạch lôgic.

• Đầu ra của một mạch lôgic là một hàm Boole F của các đầu vào $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ta nói mạch lôgic trong hình trên thực hiện hàm F.

4.3. MẠCH LÔGIC: Cổng logic

1. Cổng NOT: Cổng NOT thực hiện hàm phủ định. Cổng chỉ có một đầu vào. Đầu ra *F(x)* là phủ định của đầu vào *x*.

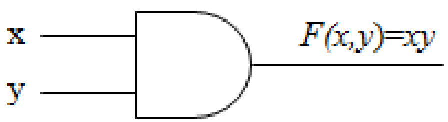
$$F(x) = \bar{x} = \begin{cases} 0 \; khi = 1, \\ 1 \; khi \; x = 0. \end{cases}$$

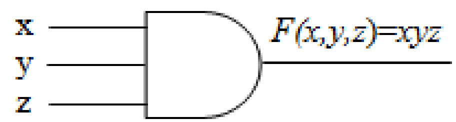


Chẳng hạn, xâu bit 100101011 qua cổng NOT cho xâu bit 011010100.

2. Cổng AND: Cổng AND thực hiện hàm hội. Đầu ra *F(x,y)* là hội (tích) của các đầu vào.

$$F(x, y) = xy = \begin{cases} 1 \; khi \; x = y = 1, \\ 0 \;\; trong \; các \; trường \; hợp \; khác. \end{cases}$$

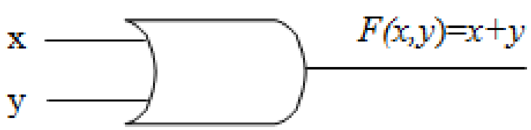


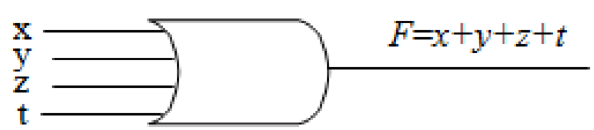


Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010110 qua cổng AND cho 101000100.

3. Cổng OR: Cổng OR thực hiện hàm tuyển (tổng). Đầu ra *F(x,y)* là tuyển (tổng) của các đầu vào.

$$F(x, y) = x + y = \begin{cases} 1 \; khi \; x = 1 \; hay \; y = 1, \\ 0 \; khi \; x = y = 0. \end{cases}$$





Chẳng hạn, hai xâu bit 101001101 và 111010100 qua cổng OR cho 111011101.

4.3. MẠCH LÔGIC: Mạch logic

Tổ hợp các cổng:

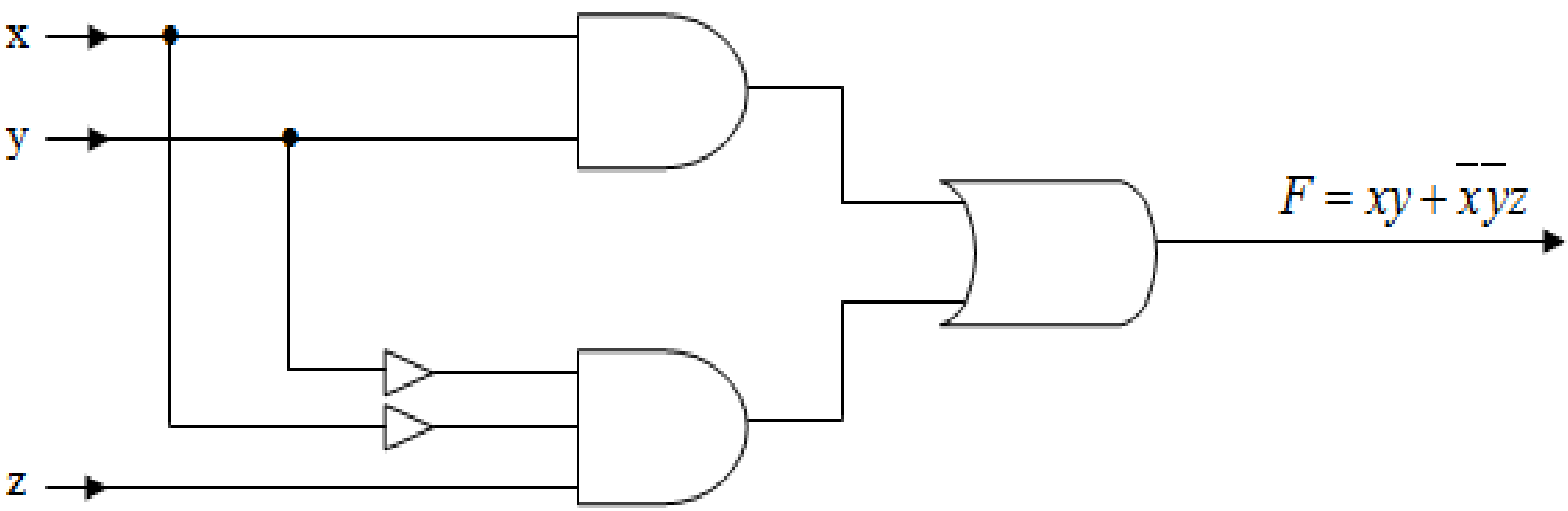
- Các cổng lôgic có thể lắp ghép để được những mạch lôgic thực hiện các hàm Boole phức tạp hơn.
- Như ta đã biết rằng một hàm Boole bất kỳ có thể biểu diễn bằng một biểu thức chỉ chứa các phép –, ., +. Từ đó suy ra rằng có thể lắp ghép thích hợp các cổng NOT, AND, OR để được một mạch lôgic thực hiện một hàm Boole bất kỳ.

4.3. MẠCH LÔGIC: Mạch logic

Biểu thức của *F(x, y, z)* có thể rút gọn:

$$xyz + xyz + x\,yz = xy(z + z) + x\,yz = xy + x\,yz$$.

Hình dưới đây cho ta mạch lôgic thực hiện hàm $xy + x\,yz$.



Bài tập

Cho các hàm Boole F_1, F_2, F_3 xác định bởi bảng sau:

x	y	z	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Vẽ mạch thực hiện các hàm Boole này.

Bài tập

Bài tập: Tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn và dạng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole ba biến sau. Vẽ mạch logic của mỗi hàm F.

a) $F = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.

b) $F = xyz + xy\bar{z} + +\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$.

c) $F = xy\bar{z} + +x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$.

d) $F = xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại.
- Có một phương pháp đồ thị, gọi là bản đồ ***Karnaugh***, được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ.
- Phương pháp mà ta mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953.
- Các bản đồ Karnaugh cho ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích, nhưng chúng không thích hợp với việc cơ khí hoá quá trình này.

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Trước hết, ta sẽ minh hoạ cách dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến.
- Có bốn hội sơ cấp khác nhau trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến x và y.

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1.
- Các hình ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong khai triển được ghi số 1.
- Các hình ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.

Ví dụ : Tìm các bản đồ Karnaugh cho các biểu thức:

a) $xy+\bar{x}y$ b) $x\bar{y}+\bar{x}y$ c) $x\bar{y}+\bar{x}y+\bar{x}\bar{y}$

và rút gọn chúng.

Ta ghi số 1 vào ô vuông khi hội sơ cấp được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong khai triển tổng các tích. Ba bản đồ Karnaugh được cho trên hình sau.

	y	
x	1	
$\bar{x}$	1	

	1
1	

	y	$\bar{y}$
x		1
$\bar{x}$	1	1

Việc nhóm các hội sơ cấp được chỉ ra trong hình trên bằng cách sử dụng bản đồ Karnaugh cho các khai triển đó. Khai triển cực tiểu của tổng các tích này tương ứng là:

a) y, b) $x\bar{y}+\bar{x}y$, c) $\bar{x}+\bar{y}$.

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Bản đồ Karnaugh ba biến là một hình chữ nhật được chia thành tám ô. Các ô đó biểu diễn tám hội sơ cấp có được.
- Hai ô được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một biến.
- Một trong các cách để lập bản đồ Karnaugh ba biến được cho trong hình:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	xyz	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

- Để rút gọn khai triển tổng các tích ba biến, ta sẽ dùng bản đồ Karnaugh để **nhận dạng các hội sơ cấp có thể tổ hợp lại**.
- Các khối gồm hai ô kề nhau biểu diễn cặp các hội sơ cấp có thể được tổ hợp lại thành một tích của hai biến; các khối 2 x 2 và 4 x 1 biểu diễn các hội sơ cấp có thể tổ hợp lại thành một biến duy nhất; còn khối gồm tất cả tám ô biểu diễn một tích không có một biến nào, cụ thể đây là biểu thức 1.

Bài tập

Ví dụ: Tìm bản đồ Karnaugh ba biến để rút gọn các khai triển tổng các tích sau:

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

4.4. CỰC TIỂU HOÁ CÁC MẠCH LÔGIC

4.4.1. Bản đồ Karnaugh

Ví dụ: Dùng các bản đồ Karnaugh ba biến để rút gọn các khai triển tổng các tích sau:

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích này được cho trong hình sau:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$,

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích này được cho trong hình sau:

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

	yz	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
x	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

Việc nhóm thành các khối cho thấy rằng các khai triển cực tiểu thành các tổng Boole của các tích Boole là:

a) $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$, b) $\bar{y} + \bar{x}z$, c) $x + \bar{y} + z$.

Phương pháp Quine-McCluskey

- Ta đã thấy rằng các bản đồ Karnaugh có thể được dùng để tạo biểu thức cực tiểu của các hàm Boole như tổng của các tích Boole.
- Tuy nhiên, các bản đồ Karnaugh sẽ rất khó dùng khi số biến lớn hơn bốn. Do việc dùng các bản đồ Karnaugh lại dựa trên việc rà soát trực quan để nhận dạng các số hạng cần được nhóm lại.
- Vì những nguyên nhân đó, cần phải có một thủ tục rút gọn những khai triển tổng các tích có thể cơ khí hoá được.

Phương pháp Quine-McCluskey

- Phương pháp Quine-McCluskey là một thủ tục có thể được dùng cho các hàm Boole có số biến bất kỳ.
- Phương pháp này được W.V. Quine và E.J. McCluskey phát triển vào những năm 1950.
- Về cơ bản, phương pháp Quine-McCluskey có hai phần:
  – Phần đầu là tìm các số hạng là ứng viên để đưa vào khai triển cực tiểu như một tổng các tích Boole mà ta gọi là các nguyên nhân nguyên tố.
  – Phần thứ hai là xác định xem trong số các ứng viên đó, các số hạng nào là thực sự dùng được

Phương pháp Quine-McCluskey

- **Định nghĩa:** Cho hai hàm Boole F và G bậc n. Ta nói G là một *nguyên nhân* của F nếu G ➔ F là một hằng đúng. (Mỗi hội sơ cấp trong một dạng tổng chuẩn tắc của F là một nguyên nhân của F)
- Hội sơ cấp A của F được gọi là một *nguyên nhân nguyên tố* của F nếu trong A xoá đi một biến thì hội nhận được không còn là nguyên nhân của F.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn

- Giả sử F là một hàm Boole n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mỗi hội sơ cấp của n biến đó được biểu diễn bằng một dãy n ký hiệu trong bảng $\{0, 1, -\}$ theo quy ước: ký tự thứ i là 1 hay 0 nếu x_i có mặt trong hội sơ cấp là bình thường hay với dấu phủ định, còn nếu x_i không có mặt thì ký tự này là $-$.
- Chẳng hạn, hội sơ cấp của 6 biến $x_1, \ldots, x_6$ là $\overline{x_1}x_3x_4\overline{x_6}$ được biểu diễn bởi 0−11−0.
- Hai hội sơ cấp được gọi là kề nhau nếu các biểu diễn nói trên của chúng chỉ khác nhau ở một vị trí 0, 1.
- Các hội sơ cấp chỉ có thể dán được với nhau bằng phép dán $\mathrm{A}x + \mathrm{A}\overline{x} = A$ nếu chúng là kề nhau.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn

Thuật toán được tiến hành như sau: Lập một bảng gồm nhiều cột để ghi các kết quả dán. Sau đó lần lượt thực hiện các bước sau:

- **Bước 1:** Viết vào cột thứ nhất các biểu diễn của các nguyên nhân hạng n của hàm Boole *F*. Các biểu diễn được chia thành từng nhóm, các biểu diễn trong mỗi nhóm có số các ký hiệu 1 bằng nhau và các nhóm xếp theo thứ tự số các ký hiệu 1 tăng dần.
- **Bước 2:** Lần lượt thực hiện tất cả các phép dán các biểu diễn trong nhóm i với các biểu diễn trong nhóm i+1 (i=1, 2, …). Biểu diễn nào tham gia ít nhất một phép dán sẽ được ghi nhận một dấu * bên cạnh. Kết quả dán được ghi vào cột tiếp theo.
- **Bước 3:** Lặp lại Bước 2 cho cột kế tiếp cho đến khi không thu thêm được cột nào mới. Khi đó tất cả các biểu diễn không có dấu * sẽ cho ta tất cả các nguyên nhân nguyên tố của *F*.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn

Ví dụ: Tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của các hàm Boole:

$$F_1 = \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}xyz + wxyz\,,$$

$$F_2 = \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}yz + w\bar{x}yz + wx\bar{y}\bar{z} + wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + wxyz\,.$$

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc thu gọn

0 0 0 1 *	0 – 0 1 *	0 – – 1
0 1 0 1 *	0 0 – 1 *	– 0 – 1
0 0 1 1 *	– 0 0 1 *	– – 1 1
1 0 0 1 *	– 0 1 1 *	
1 0 1 1 *	1 0 – 1 *	
0 1 1 1 *	0 1 – 1 *	
1 1 1 1 *	0 – 1 1 *	
	1 – 1 1 *	
	– 1 1 1 *	

0 0 1 0 *	0 0 1 –	1 1 – –
0 0 1 1 *	– 0 1 1	
1 1 0 0 *	1 1 0 – *	
1 0 1 1 *	1 1 – 0 *	
1 1 0 1 *	1 – 1 1	
1 1 1 0 *	1 1 – 1 *	
1 1 1 1 *	1 1 1 – *	

Từ các bảng trên ta có dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của F_1 và F_2 là:

$$F_1 = \overline{w}z + \overline{x}z + yz\,,$$

$$F_2 = \overline{w}\,\overline{x}y + \overline{x}yz + wyz + wx.$$

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu

- Sau khi tìm được dạng tổng chuẩn tắc thu gọn của hàm Boole *F*, nghĩa là tìm được tất cả các nguyên nhân nguyên tố của nó, ta tiếp tục phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu (cực tiểu) của *F* như sau.
- Lập một bảng chữ nhật, mỗi cột ứng với một cấu tạo đơn vị của *F* (mỗi cấu tạo đơn vị là một hội sơ cấp hạng n trong dạng tổng chuẩn tắc hoàn toàn của *F*) và mỗi dòng ứng với một nguyên nhân nguyên tố của *F*.
- Tại ô (i, j), ta đánh dấu cộng (+) nếu nguyên nhân nguyên tố ở dòng i là một phần con của cấu tạo đơn vị ở cột j. Ta cũng nói rằng khi đó nguyên nhân nguyên tố i là phủ cấu tạo đơn vị j.
- Một hệ S các nguyên nhân nguyên tố của *F* được gọi là phủ hàm *F* nếu mọi cấu tạo đơn vị của *F* đều được phủ ít nhất bởi một thành viên của hệ. Dễ thấy rằng nếu hệ S là phủ hàm *F* thì nó là đầy đủ, nghĩa là tổng của các thành viên trong S là bằng *F*.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu

- Một nguyên nhân nguyên tố được gọi là cốt yếu nếu thiếu nó thì một hệ các nguyên nhân nguyên tố không thể phủ hàm *F*. Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu được tìm như sau: tại những cột chỉ có duy nhất một dấu +, xem dấu + đó thuộc dòng nào thì dòng đó ứng với một nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.
- Việc lựa chọn các nguyên nhân nguyên tố trên bảng đã đánh dấu, để được một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu, có thể tiến hành theo các bước sau.
  - **B1:** Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.
  - **B2:** Xoá tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.
  - **B3:** Trong bảng còn lại, xoá nốt những dòng không còn dấu + và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xoá bớt một cột.
  - **B4:** Sau các bước trên, tìm một hệ S các *nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất* phủ các cột còn lại.
- Tổng của các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu và các nguyên nhân nguyên tố trong hệ S sẽ là dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của hàm *F*.

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu

- Các bước 1, 2, 3 có tác dụng rút gọn bảng trước khi lựa chọn. Độ phức tạp chủ yếu nằm ở Bước 4.
- Tình huống tốt nhất là mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Trường hợp này không phải lựa chọn gì và hàm F có duy nhất một dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu cũng chính là dạng tổng chuẩn tắc thu gọn.
- Tình huống xấu nhất là không có nguyên nhân nguyên tố nào là cốt yếu. Trường hợp này ta phải lựa chọn toàn bộ bảng

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu

Ví dụ: Tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của các hàm Boole cho trong ví dụ trên:

	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$w\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$wxyz$
$\bar{w}z$	+	+	+				
$\bar{x}z$	+		+	+	+		
yz			+		+	+	+

Các nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu nên dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu của F_1 là:

$$F_1 = \bar{w}z + \bar{x}z + yz$$

Phương pháp Quine-McCluskey tìm dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu

	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}xyz$	$wx\bar{y}\bar{z}$	$wx\bar{y}z$	$wxy\bar{z}$	$wxyz$
wx				+	+	+	+
$\bar{w}\bar{x}y$	+	+					
$\bar{x}yz$		+	+				
wyz			+				+

Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu nằm ở dòng 1 và 2. Sau khi rút gọn, bảng còn dòng 3, 4 và một cột 3. Việc chọn S khá đơn giản: có thể chọn một trong hai nguyên nhân nguyên tố còn lại. Vì vậy ta được hai dạng tổng chuẩn tắc tối thiểu là:

$$F_2 = wx + \bar{w}\bar{x}y + \bar{x}yz,$$
$$F_2 = wx + \bar{w}\bar{x}y + wyz.$$