MA_4

Бабаев Минходж Зафарович

Признак Лейбница. Пусть $b_n \geq 0$, $\{b_n\}$ – монотонно (нестрого) убывающая последовательность и $b_n \to 0, n \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ сходится и верна следующая оценка на остаток этого ряда: $|r_n| \leq b_{n+1}$.

Признак Дирихле. Пусть

1) существует $M > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$ (т.е. все частичные суммы ограничены сверхну одной константой)

2) последовательность $\{b_n\}$ (нестрого) монотонная (возрастающая или убывающая)

3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Признак Абеля. Пусть

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2) последовательность $\{b_n\}$ (нестрого) монотонная (возрастающая или убывающая)

3) $\exists M > 0: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq M$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

$|\sum \sin n| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

$|\sum \cos n| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

Задание 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^P}$

Пусть $a_n = \frac{\cos n}{n^p}$. Рассмотрим случаи

1) $p \leq 0 \;\; a_n \to \infty, n \to \infty$

2) $p > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^P}$ сходится по признаку Дирихле, т/к

2.1) $|\sum \cos n| \leq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$

2.2) $\frac{1}{n^p}$ - монотонна

2.3) $\frac{1}{n^p} \to 0$

Рассмотрим ряд $|a_n|$

1) при p > 1 $|\frac{\cos n}{n^p}| \le \frac{1}{n^p}, \sum \frac{1}{n^p}$ при p > 1 сходится $\Rightarrow$ по Вейерштрассу ряд $|\frac{\cos n}{n^p}|$ сходится

2) $p \le 1$ $\frac{|\cos n|}{n^p} \ge \frac{\cos^2 n}{n^p} = \frac{\cos 2n}{2n^P} - \frac{1}{2n^p}$. Так как $\sum \frac{\cos 2n}{2n^p}$сходится и $\sum \frac{1}{2n^p}$ расходится ⇒ исходный ряд сходится $\frac{|\cos n|}{n^p}$

Ответ:

p > 1 сходится абсолютно

$0 < p \le 1$ сходится условно

p $\le$0 расходится

Задание 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

Воспользуемся

$\sin x \sim x, x \to 0$

$\sin\left(\frac{\sin n}{n}\right) \sim \frac{sinn}{n}$, при $n \to \infty$, ряд $\frac{sinn}{n}$ сходится по признаку Дирихле

$|\sin\left(\frac{\sin n}{n}\right)| \sim |\frac{sinn}{n}|$, при $n \to \infty$, ряд $|\frac{sinn}{n}|$ расходится, т/к

$|\frac{sinn}{n}| \ge \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n}$. Первое слагаемое расходится, а второе сходится по признаку Дирихле

Следовательно, исходный ряд сходится условно

Задание 3: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{\sin n}{n}\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

$\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \frac{\sin n}{n^{\frac{6}{5}}}$, при $n \to \infty$ такой ряд сходится сходится по Дирихле.

$|\frac{\sin n}{n^{\frac{6}{5}}}| \le \frac{1}{n^{\frac{6}{5}}}, \sum \frac{1}{n^p}, p > 1 \Rightarrow$ ряд сходится

Следовательно, ряд сходится абсолютно

Задание 4: $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}$

$\prod p_n \sim \sum \ln p_n \Rightarrow \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}$

$\ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2+n+2}\right)$

Так как $\frac{2n-1}{n^2+n+2} \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow \ln\left(1+\frac{2n-1}{n^2+n+2}\right) \sim \frac{2n-1}{n^2+n+2} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}, \sum \frac{1}{n^p}, p \leq 1 \Rightarrow$ исходный ряд расходится $\Rightarrow$ расходится абсолютно