MA_2

Бабаев Минходж Зафарович

Задание 1: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)}$

$\frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)} \leq \frac{n+3}{n(\ln^2 n+2)} \leq \frac{n+3}{n(\ln^2 n)} \sim \frac{n}{n(\ln^2 n)} = \frac{1}{\ln^2 n} \Rightarrow$ расходится по ряду Бертрана $\Rightarrow$ по признаку сравнения расходится и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n+3}{n(\ln^2 n+2)}$

Задание 2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}})$

Воспользуемся:

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \to 0$

$1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} \sim \frac{(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}})^2}{2} = \frac{\pi^2}{2n^{\frac{4}{3}}} \sim \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ сходится $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}})$ сходится

Задание 3: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Применяем Даламбера:

$\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{4n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n+2} = \frac{1}{4}$

Так как $q<1 \Rightarrow$ По признаку Даламбера ряд сходится

Задание 4: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$

Воспользуемся признаком Коши:

Усиленный радикальный признак Коши: пусть $a_n \geq 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда

1) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится,

2) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$ расходится

Задание 5: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$

Применяем Даламбера:

$\frac{(2(n+1)+3)!!}{(n+1)^3(2(n+1))!!} \cdot \frac{n^3(2n)!!}{(2n+3)!!} = \frac{(2n+5)!!}{(n+1)^3(2n+2))!!} \cdot \frac{n^3(2n)!!}{(2n+3)!!} = \frac{2n+5}{2n+2} \cdot (\frac{n}{n+1})^3 = \frac{2n^4+5n^3}{2n^4+8n^3+12n^2+8n+2} \to 1$

Применяем Гаусса, так как Даламбер про 1 ничего не говорит

$\frac{2n^4+5n^3}{2n^4+8n^3+12n^2+8n+2} = \frac{1+\frac{5n^3}{2n^4}}{1+\frac{8n^3}{2n^4}+\frac{12n^2}{2n^4}+\frac{8n}{2n^4}+\frac{2}{2n^4}} = \frac{1+\frac{5}{2n}}{1+\frac{8}{2n}+\frac{12}{2n^2}+\frac{8}{2n^3}+\frac{2}{2n^4}} = (1+\frac{5}{2n})(1+\frac{8}{2n}+\frac{12}{2n^2}+\frac{8}{2n^3}+\frac{2}{2n^4})^{-1} = (1+\frac{5}{2n})(1-\frac{8}{2n}+O(\frac{64}{4n^2})) = 1-\frac{8}{2n}+\frac{5}{2n}+O(\frac{1}{n^2}) = 1-\frac{3}{2n}+O(\frac{1}{n^2})$

По признаку Гаусса $p = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$ сходится