Коллоквиум по теории вероятности

Билет 1

Дискретное вероятностное пространство. Свойства вероятностней меры на конечных и счетных множествах

Определение. Пусть задано некоторое множество возможных исходов (эксперимента) $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Это множество называют множеством элементарных исходов. Всякое подмножество $A \subset \Omega$ называют событием. Функцию $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$, удовлетворяющую следующим свойствам:

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) $A \cap B = \varnothing$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (правило суммы или аддитивность), называют вероятностной мерой, а значение $P(A)$ - вероятностью события A.

Для бесконечных вероятностных пространств, где $P(A) = \sum\limits_{j:\omega_j \in A} p_{\omega_j}$ (как известно из курса анализа, эта сумма корректно определена, в том смысле, что результат не зависит от порядка суммирования) мы имеем более сильное свойство, чем (ii), а именно (ii)':

$P(\cup_n A_n) = \sum\limits_n P(A_n)$ для произвольного не более чем счётного набора попарно непересекающихся событий A_n.

Формула включений-исключений

Предложение. Формула включений и исключений. Для произвольных событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ верно равенство $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum\limits_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. База: $P(A_1 \cup A_2) = P((A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)) = P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_1) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Предположим, что утверждение выполняется для n множеств. Проверим, что оно выполнено и для $n + 1$.

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + P(A_{n+1}) - P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + P(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) =$$
$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$ ■

Условная вероятность

Определение. Пусть $P(B) > 0$. Условной вероятностью события A при условии B называется число $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Если фиксировать событие B, то функция $P(\cdot|B)$ является новой вероятностной мерой, т.е. удовлетворяет свойствам (i) и (ii) (или (ii)', если таковой была исходная вероятностная мера P). Равенство из определения часто переписывают в виде $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ и называют правилом произведения.

Формула полной вероятности

Теорема. (Формула полной вероятности)

Пусть $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Предположим, что $P(A_i) > 0$. Тогда для каждого события B имеет место равенство $P(B) = \sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)$.

Доказательство. Имеем равенства $P(B) = \sum\limits_i P(B \cap A_i) = \sum\limits_i P(B|A_i)P(A_i)$. ■

Формула Байеса

Теорема. (Формула Байеса)

Пусть $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$. Тогда имеет место равенство $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$. ■

Независимые события

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. В противном случае говорят, что события являются зависимыми.

Отличие попарной независимости от независимости в совокупности

Заметим, что независимость в совокупности (т.е. в случае, когда для $A_1, A_2, \dots, A_n$ верно $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})$ для произвольного $k \in \{2, \dots, n\}$ и произвольных $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n$) не совпадает с попарной независимостью. Это иллюстрируется парадоксом независимости:

Бросаем правильную монету два раза. Рассмотрим 3 события A - при первом броске выпал орёл, B - про втором броске также выпал орёл, C - орёл выпал только один раз. Все эти события попарно независимы, но в совокупности они не являются независимыми, поскольку любые два из них однозначно определяют третье, например пересечение A и B исключает C, таким образом $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Билет 2

Задача о сумасшедшей старушке.

У нас $N \geqslant 2$ людей стоят ждут посадки в самолёт. Одним из этих людей оказывается сумасшедшая старушка, которая всех расталкивает и садится первой на случайное место. Дальше заходят по очереди остальные пассажиры. Т.к. все люди очень вежливые(кроме данной старушки), если их место уже было занято, то они садятся на другое случайное место.

Мы хотим посчитать вероятность, с которой N-ый(последний) человек сядет на своё место. Рассмотрим по индукции.

База: $N = 2$

$P_N = \frac{1}{2}$ - шанс, что N человек сел на своё место (старушка села на место последнего пассажира или она села на своё)

Шаг: Для всех $k \leqslant N$ людей верен факт $P_k = \frac{1}{2}$, рассмотрим для P_{N+1}

Зададим 2 события:

A_i - старушка села на место i человека

B - последний пассажир $(N+1)$ сел на своё место (вводим чисто, чтобы удобнее было работать)

Тогда хотим найти: $P_{N+1} = P(B) = \sum\limits_i P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ - формула полной вероятности

$P(A_i) = \frac{1}{N+1}$ - старушка садится на произвольное место из $N+1$

$P(B|A_1) = 1$ - если старушка села на своё место(считаю, что она 1 пассажир)

$P(B|A_{N+1}) = 0$ - $N+1$ не сядет на своё место, если там уже сидит старушка

$P(B|A_i) = \frac{1}{2}$ - в остальных случаях

Тогда: $P(B) = \sum\limits_i P(A_i) \cdot P(B|A_i) = \frac{1}{N+1} \cdot 1 + \frac{1}{N+1} \cdot 0 + \frac{1}{N+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot (N+1-2) = \frac{2+N-1}{2(N+1)} = \frac{1}{2}$

$\implies P_N = \frac{1}{2}$ - вероятность, что последний человек сядет на своё место

Парадокс Байеса.

Предположим у нас есть очень редкая болезнь (читай ковид)

$P(Z_+) = 0.001$ - шанс, что ты больной

$P(Z_-) = 0.999$ - шанс, что здоров

Теперь также положим, что у нас есть тест на эту болезнь:

$P(T_+|Z_+) = 0.99$ - ты болен, тест показал, что ты болен

$P(T_+|Z_-) = 0.01$ - ты здоров, но тест ошибся и показал, что ты болен

Теперь, скажем, пришёл положительный тест. Посчитаем шанс, с которым ты здоров. (те тест ошибся)

$P(Z_-|T_+) = \frac{P(T_+|Z_-) \cdot P(Z_-)}{P(T_+)}$ - по формуле Байеса

Надо посчитать $P(T_+)$:

$P(T_+) = P(Z_-) \cdot P(T_+|Z_-) + P(Z_+) \cdot P(T_+|Z_+) = 0.999 \cdot 0.01 + 0.001 \cdot 0.99 = 0.01098$ - по формуле полной вероятности

Тогда: $P(Z_-|T_+) = \frac{P(T_+|Z_-) \cdot P(Z_-)}{P(T_+)} = \frac{0.01 \cdot 0.999}{0.01098} \approx 0.9098 \geqslant 0.9$

те если тебе пришёл положительный тест, ты здоров с шансом больше 90%(интуитивно это очень сложно понять, но это объясняется редкостью нашего теоретического заболевания). Поэтому и надо делать больше 1 теста.

Парадокс Монти Холла

Парадокс Монти Холла

Есть игра: 3 двери за 1 из них автомобиль, за 2-мя другими - козы. Ты выбираешь дверь, после чего ведущий открывает 1 из оставшихся, за которой находится коза(он знает где автомобиль) и предлагает тебе изменить выбор. Банальный вопрос: стоит ли это делать? (увеличатся ли шансы найти автомобиль)

Пускай выбрали 1 дверь, а ведущий открыл 3(чисто для нумерации). Введём события:

A_i - автомобиль за i-ой дверью

B - ведущий открыл 3-ю дверь

Тогда можем определить следующие вероятности:

$P(B|A_1) = \frac{1}{2}$ - автомобиль за 1 дверью, ведущий случайно выбирает дверь

$P(B|A_2) = 1$ - если автомобиль в 3, а выбрали 1, то ведущий точно откроет 2.

$P(B|A_3) = 0$ - ведущий не будет открывать автомобиль -_-

Посмотрим на шансы дверей после открытия 3-ей:

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)\cdot A_2}{P(B)} = \frac{P(B|A_2)\cdot A_2}{P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)} = \frac{1\cdot 1/3}{1/3\cdot 1/2 + 1/3\cdot 1 + 1/3\cdot 0} = \frac{1}{1/2+1} = \frac{2}{3}$$

P.S. Парадоксом называется т.к. интуитивно многие считают, что вероятности стали $\frac{1}{2}$ и выбор не важен.

Билет 3

Случайные величины на дискретном вероятностном пространстве, их распределение.

Определение 13. Случайной величиной на дискретном вероятностном пространстве $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ называют произвольную функцию $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Если X — случайная величина на дискретном вероятностном пространстве, то множество ее значений не более чем счетно.

Определение 14. Пусть X — случайная величина на дискретном вероятностном пространстве и $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — все различные значения X. **Распределением** случайной величины X называется новая вероятностная мера μ_X на пространстве $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, для которой $\mu_X(\{x_j\}) = P(\omega\colon X(\omega) = x_j)$.

В силу того, что события $A_j := \{\omega\colon X(\omega) = x_j\}$ попарно не пересекаются и $\cup_j A_j = \Omega$, μ действительно является вероятностной мерой. Пусть $p_j = P(\omega\colon X(\omega) = x_j)$, тогда распределение дискретной случайной можно задать таблицей:

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Распределение Бернулли и схема Бернулли (биномиальное распределение)

Пример. **Бернуллиевская случайная величина.**

0	1
q	p

Эта случайная величина моделирует однократное бросание монеты с вероятностью орла p. Такая случайная величина обычно появляется, как индикатор какого-то события A.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — конечная последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковое распределение Бернулли с параметром p, то есть при каждом $i = 1, \ldots, n$ величина X_i принимает значения 1 («успех») и 0 («неудача») с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Тогда случайная величина

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Это записывается в виде:

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$

Случайную величину Y обычно интерпретируют как число успехов в серии из n одинаковых независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании.

Функция вероятности задаётся формулой:

$$p_Y(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

Геометрическое распределение

Говорят, что случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0, 1)$, и пишут $\mathrm{Geom}_1(p)$, если принимает значения $n = 1, 2, 3, \ldots$ с вероятностями $\mathbb{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$. Случайная величина с таким распределением имеет смысл номера первого успешного испытания в схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

Распределение Пуассона.

Распределе́ние Пуассо́на — распределение дискретного типа случайной величины, представляющей собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

Выберем фиксированное число $\lambda > 0$ и определим дискретное распределение, задаваемое следующей функцией вероятности:

$$p(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda},$$

где

- k — количество событий,
- λ — математическое ожидание случайной величины (среднее количество событий за фиксированный промежуток времени),
- $k!$ обозначает факториал числа k,
- $e = 2{,}718281828\ldots$ — основание натурального логарифма.

Тот факт, что случайная величина Y имеет распределение Пуассона с математическим ожиданием λ, записывается: $Y \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Совместное распределение случайных величин.

Определение. Пусть X, Y - две случайные величины на дискретном вероятностном пространстве с множествами (различных) значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ и $\{y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots\}$ соответственно. Их совместным распределением называется вероятностная мера $\mu_{(X,Y)}$ на вероятностном пространстве всех пар (x_j, y_k), для которой

$\mu_{(X,Y)}(\{(x_j, y_k)\}) = P(\omega : X(\omega) = x_j, Y(\omega) = y_k) = P(\{\omega : X(\omega) = x_j\} \cap \{\omega : Y(\omega) = y_k)\}$

Аналогично определяется совместное распределение трёх и более случайных величин.

Независимые случайные величины. Эквивалентное определение независимости случайных величин.

Определение. Случайные величины X, Y с множествами значений $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k, \ldots\}$ соответственно называются независимыми, если $\forall k, j : \mu_{(X,Y)}(\{(x_j, y_k)\}) = \mu_X(\{x_j\}) \cdot \mu_Y(\{y_k\})$. Или, другими словами: $\forall k, j : P(\omega : X(\omega) = x_j, Y(\omega) = y_k) = P(\{\omega : X(\omega) = x_j\} \cdot \{\omega : Y(\omega) = y_k)\}$.

Аналогично определяется независимость трёх и более случайных величин.

Билет 4

Математическое ожидание случайной величины на дискретном вероятностном пространстве.

Математическое ожидание отвечает за среднее значение случайной величины

Определение 19. Математическим ожиданием случайной величины X называют число

$$\mathbb{E}X = \sum_j x_j P(\omega \colon X(\omega) = x_j),$$

в предположении абсолютной сходимости ряда. Если ряд не сходится абсолютно, то говорят, что случайная величина не имеет конечного математического ожидания.

Зачем нужна сходимость: Сходимость нужна чтобы сумма была определена, иначе если несходится $\Rightarrow$ сумма не определена из курса матана

Зачем нужна АБС сходимость: если нету абс сходимости то мы можем переставить члены местами и получить другую сумму

Эквивалентный способ вычисления математического ожидания.

Лемма (Эквивалентный способ вычисления математического ожидания)**.** Пусть случайная величина X с конечным математическим ожиданием принимает значения y_k (не обязательно различные) на множествах B_k, причём события B_k попарно не пересекаются, тогда $\mathbb{E}X = \sum\limits_k y_k P(B_k)$.

Доказательство. $\mathbb{E}X = \sum\limits_j x_j \cdot P(X = x_j) = \sum\limits_j \sum\limits_{k: y_k = x_j} y_k \cdot P(B_k) = \sum\limits_k y_k \cdot P(B_k)$ ■

Математическое ожидание функции от случайной величины.

Теорема (Математическое ожидание функции от случайной величины)**.** Пусть X - случайная величина, принимающая значения $\{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим случайную величину $Y = \varphi(X)$, тогда: $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\varphi(X) = \sum\limits_k \varphi(x_k) P(\xi = x_k)$, при условии абсолютной сходимости последнего ряда.

Доказательство. Действительно, случайная величина Y принимает значения $\varphi(x_k)$ на множествах $\{\omega : X(\omega) = x_k\}$ ■

Аналогичная формула справедлива и для функции от нескольких случайных величин $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Свойства математического ожидания: линейность, ожидание неотрицательной случайной величины, неотрицательная случайная величина с нулевым математическим ожиданием.

Теорема 25. (i) $\mathbb{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathbb{E}X + \beta\mathbb{E}Y$ *(математическое ожидание линейно),*
(ii) *если* $X \geq 0$ *почти наверное, то* $\mathbb{E}X \geq 0$ *(математическое ожидание монотонно).*
(iii) *если* $X \geq 0$ *почти наверное и* $\mathbb{E}X = 0$*, то* $X = 0$ *почти наверное.*

Доказательство. Второе и третье утверждения следуют из определения. Докажем первое утверждение. Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ и $\{y_1, y_2, \dots\}$ множества значений случайных величин X и Y соответственно. Пусть $A_i = \{X = x_i\}$ и $B_j = \{Y = y_j\}$. Случайная величина X принимает значения x_i на множествах $A_i \cap B_j$, случайная величина Y принимает значения y_j на множествах $A_i \cap B_j$. Поэтому

$$\alpha\mathbb{E}X + \beta\mathbb{E}Y = \alpha\sum_{i,j} x_i P(A_i \cap B_j) + \beta\sum_{i,j} y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j}(\alpha x_i + \beta y_j)P(A_i \cap B_j).$$

Последний ряд абсолютно сходится, как сумма двух абсолютно сходящихся рядов. Случайная величина $\alpha X + \beta Y$ принимает значения $\alpha x_i + \beta y_j$ на множествах $A_i \cap B_j$. Таким образом, математическое ожидание $\alpha X + \beta Y$ существует и равно

$$\sum_{i,j}(\alpha x_i + \beta y_j)P(A_i \cap B_j),$$

что и требовалось доказать. □

Связь модуля ожидания и ожидания модуля случайной величины

Следствие. Связь модуля ожидания и ожидания модуля случайной величины.
Имеет место оценка: $|\mathbb{E}X| \leqslant \mathbb{E}|X|$

Доказательство. Достаточно заметить, что $-|X| \leqslant X \leqslant |X|$, далее возьмём математическое ожидание с двух сторон неравенства (возможность такого действия можно объяснять линейностью мат. ожидания) и получим:

$-\mathbb{E}|X| \leqslant \mathbb{E}X \leqslant \mathbb{E}|X|$

$|\mathbb{E}X| \leqslant \mathbb{E}|X|$ ■

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.

Теорема (Математическое ожидание произведения независимых случайных величин)**.** Если случайные величины X и Y независимы, и существуют математические ожидания $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{E}Y$, то:

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

Доказательство. Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ и $\{y_1, y_2, \dots\}$ множества значений случайных величин X и Y, соответственно, и пусть $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$ и $B_j = \{\omega : Y(\omega) = y_j\}$. Тогда по теореме о произведении абсолютно сходящихся рядов: $[\mathbb{E}X] \cdot [\mathbb{E}Y] = \left(\sum_i x_i P(A_i)\right) \cdot \left(\sum_j y_j P(B_j)\right) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i) \cdot P(B_j)$ $(=)$

Т.к X и Y - независимые случайные величины имеем $(=) \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \mathbb{E}[X \cdot Y]$. ■

Балансировка векторов.

Случайная величина X положительна есть $X(w) > 0\ \forall w \in \Omega$

Билет 5

Дисперсия

Дисперсией случайной величины X называется число:

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{EX})^2 \text{ или } \mathbb{D}X = \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$$

Дисперсия отвечает за разброс значений случайной величины

Ковариация и билинейность ковариации

Ковариацией пары случайных величин называется число

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)].$$

Заметим, что ковариация является неотрицательно определенной билинейной формой,

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - [\mathbb{E}X] \cdot [\mathbb{E}Y],$$

в частности $\mathbb{D}X = \mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2$ и

$$\mathbb{D}[X+Y] = \mathrm{cov}(X+Y, X+Y) = \mathbb{D}X + 2\mathrm{cov}(X,Y) + \mathbb{D}Y.$$

Коэффициент корреляции.

Величину

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{D}X}\sqrt{\mathbb{D}Y}}$$

называют **коэффициентом корреляции**.

Их связь и основные свойства: случайная величина с нулевой дисперсией, дисперсия линейного образа случайной величины, дисперсия суммы независимых независимых случайных величин.

Теорема (Свойства дисперсии). (i) Если $\mathbb{D}X = 0$, то $X = \mathbb{E}X$ почти наверное

(ii) Для произвольных чисел α, β верно $\mathbb{D}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{D}X$

(iii) Если X и Y независимы, то $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ и $\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$

Доказательство. (i) Исходя из свойства (iii) мат. ожидания о неотрицательной случайной величине с нулевым мат. ожиданием, $(X - \mathbb{E}X)^2 = 0 \implies X = \mathbb{E}X$ почти наверное.

(ii) Исходит из линейности математического ожидания

(iii) Так как $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$, то из независимости X и Y следует $\mathrm{cov}(X,Y) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) - (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y) = 0$. Поэтому, $\mathbb{D}(X+Y) = \mathbb{D}X + 2\mathrm{cov}(X,Y) + \mathbb{D}Y = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$ ■

Неравенство Коши Буняковского и геометрическая интерпретация ковариации, дисперсии и коэффициент корреляции.

Следствие 30. (Неравенство Коши–Буняковского) *При условии* $\mathbb{E}X^2 < \infty, \mathbb{E}Y^2 < \infty$ *имеет место неравенство*

$$\left|\mathbb{E}[XY]\right| \le \sqrt{\mathbb{E}X^2}\sqrt{\mathbb{E}Y^2},$$

причем равенство возможно тогда и только тогда, когда найдутся числа α *и* β *такие, что* $\alpha X + \beta Y = 0$ *почти наверное.*

Доказательство. Если $\mathbb{E}X^2 = 0$, то утверждение очевидно верно. Пусть $\mathbb{E}X^2 > 0$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$p(t) = \mathbb{E}(Y - tX)^2 = \mathbb{E}Y^2 - 2t\mathbb{E}[XY] + t^2\mathbb{E}X^2.$$

Из неотрицательности $p(t)$ для всех t следует, что

$$D = 4\big(\mathbb{E}[XY]\big)^2 - 4[\mathbb{E}Y^2] \cdot [\mathbb{E}X^2] \le 0.$$

Последнее неравенство равносильно требуемому. □

Рассмотрим линейное пространство случайных величин с нулевым математическим ожиданием. На этом пространстве введем скалярное произведение

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{cov}(X, Y).$$

Соответственно появляется норма $\|X\| = \sqrt{\langle X, X\rangle} = \sqrt{\mathbb{D}X}$. Коэффициент корреляции на случайных величинах с нулевым математическим ожиданием имеет вид

$$\varrho(X, Y) = \frac{\langle X, Y\rangle}{\|X\|\|Y\|}.$$

Таким образом, коэффициент корреляции играет роль косинуса угла между векторами X и Y.

Вычисление ожидания и дисперсии у биномиального распределения.

Пример. Пусть случайная величина S_n имеет биномиальное распределение, то есть $P(S_n = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Вычислим ожидание S_n.

Первый способ: по определению $\mathbb{E}S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np$ (последнее равенство из-за того, что мы по сути суммируем все вероятности в случае, когда у нас в условии задачи $n-1$, а не n, значит сумма равна 1)

Второй способ: Заметим, что ожидание зависит только от распределения случайной величины. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностью успеха p. Тогда распределение $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ совпадает с биномиальным, значит $\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np$.

Вычислим дисперсию: $\mathbb{D}S_n = \mathbb{D}X_1 + \mathbb{D}X_2 + \dots + \mathbb{D}X_n = n((1-p)^2 p + p^2(1-p)) = np(1-p)$. Здесь сразу применили второй способ.

Билет 6

Во многих задачах, оказывается, достаточно не посчитать какую нибудь вероятность, а лишь оценить эту вероятность. Самое простое неравенство для этого - неравенство Маркова и чуть сложное неравенство Чебышева.

Определим понятние характеристической функции:

Пусть $A \subset \Omega$ - событие

$$I_A(w) = \begin{cases} 1, \text{если} \;\; w \in A \\ 0, \textit{если} \;\; w \notin A \end{cases}$$

Свойства характерической функции:

1) $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$

2) $I_{A \cup B} = I_A + I_B - I_A \cdot I_B$

3) $I_A = P(A)$

Неравенство Маркова

Пусть есть случайная величина $X \geq 0$ (неотрицательная случайная величина) и $t > 0.$ Тогда $P(X \geq t) \leq \frac{EX}{t}$

▲

Пусть $A = \{w : X(w) \geq t\}$

$1 = I_A + I_{\bar{A}}$, поскольку w лежит либо в A , либо в $\bar{A}$

Домножим на X

$X = XI_A + XI_{\bar{A}} \geq XI_A \geq tI_A$

Так как математическое ожидание сохраняет неравенство получаем:

$\mathbb{E}X \geq \mathbb{E}tI_A = t\mathbb{E}I_A = tP(A)$

Поделив на t, получим неравенство Маркова:

$\frac{\mathbb{E}X}{t} \geq P(A)$

■

Неравенство Чебышева

Выглядит это неравенство так: $P((X - EX) \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}X}{t}$ при $t > 0$

▲

Пусть $Y = (X - EX)^2 \geq 0 \Rightarrow$ может применить неравенство Маркова

$$P((X - EX)^2 \geq t) = P(Y \geq t) \leq \frac{EY}{t} = \frac{E(X-EX)^2}{t} = \frac{DX}{t}$$

■

Закон больших чисел в слабой форме.

Полезным следствием неравенства Чебышева является Закон Больших Чисел.

Пусть $\{X_n\}_n$ - последовательность таких независимых одинаково распределённых случайных величин (т.е. таблички, задающие их распределения, совпадают), что $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Пусть $\mathbb{E}X_1 = m$ (а значит и $\mathbb{E}X_n = m$ при каждом n) тогда для каждого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{E}\dfrac{X1 \dots Xn}{n} = m$ в силу линейности. Тогда, для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}[X_1 + X_2 + \dots + X_n]}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}X_1}{n\varepsilon^2} \to 0$$

Пример: Пусть 1 выпадает с вероятностью p, 0 с вероятность $q = 1 - p$, случайная величина S_n - количество успехов при n подбрасываниях монеты, X_k - число, выпавшее на k-ом шаге.

Тогда $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_k$

$$ES_n = EX_1 + EX_2 + ... + EX_n = nEX_1 = n(1 \cdot p + 0 \cdot q) = np$$

$$DS_N = DX_1 + DX_2 + ... + DX_n = nDX_1 = n(E^2X - (EX)^2) = n((1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q) - p^2) = n(p - n^2p^2) = n(p(1-p)) = npq$$

Тогда $E\frac{S_n}{n} = p$, $D(\frac{S_n}{n}) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$ (тут константа из под дисперсии выносится в квадрате)

$$P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Теорема Пуассона

Пусть $\lambda > 0$ и $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$.

Случайная величина S_n—количество успехов в схеме Бернулли с n испытаниями и вероятностью успеха в одном испытании равной p_n

Тогда $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\lambda e^{-\lambda}}{k!}$

▲

Заметим, что:

- $p_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow q_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$, т.к $q_n = 1 - p_n$
- $p_n \sim \frac{\lambda}{n} \Rightarrow np - N \sim \lambda \Rightarrow np_n = \lambda + o(1) \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n})$

$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} p^k q^{n-k} \sim \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} 1 \cdot (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{k-1}{n}) q^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} q^n q^{-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} q^n \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Далее рассмотрим куда стремится q^n при $n \to \infty$

$q^n = e^{n \ln q} = e^{n \ln(1 - \frac{\lambda}{n} - o(\frac{1}{n}))} \sim e^{-\lambda}$

$n \ln(1 - \frac{\lambda}{n} - o(\frac{1}{n})) \sim n\underbrace{(-\frac{\lambda}{n} + o(\frac{1}{n}))}_{\text{из курса матана}} = -\lambda + o(1) \to -\lambda$

■

Пример с опечатками при наборе книги

Опечатки при наборе книги

Предположим, что при наборе книги наборщиком в среднем совершается λ опечаток на странице. Какова вероятность того, что данная страница книги будет без опечаток? Какова вероятность обнаружить на данной конкретной странице книги ровно k опечаток?

Предположим, что всего при наборе было совершено N опечаток, а в книге N/λ страниц. Тогда вероятность того, что на данной странице будет присутствовать какая-то одна опечатка равна λ/N. Значит вероятность того, что на данной странице не будет опечаток вычисляется по формуле

$$(1 - \lambda/N)^N \to e^{-\lambda}$$

при большом количестве страниц в книге. Вероятность же того, что на странице обнаружено ровно k опечаток, по теореме Пуассона хорошо аппроксимируется значением $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Билет 7

Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

S_n - количество успехов в схеме Бернулли с n испытаниями и $0 < p < 1$ вероятностью успеха в одном испытании

Пусть $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Если $n \to \infty$, а k меняется таким образом, что $|x| \le T$ - фиксированное число, то:

$$P(S_n = k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

равномерно по $|x| \le T$

▲

Имеем : $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$. Хотим проверить : $P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ равномерно по $|x| \le T$

Также нам нужно найти следующие данные:

- $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow k = np + x\sqrt{npq} > np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
- $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \Rightarrow n - k = nq - x\sqrt{npq} \ge nq - T\sqrt{npq} \to +\infty$
- $\alpha = \frac{k}{n} = p + x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to p$
- $1 - \alpha = \frac{n-k}{n} = q - x\sqrt{\frac{pq}{n}} \to q$

Также будем использовать

- формулу Стирлинга: $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$
- $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$

$C_n^k p^k q^{n-k} \sim \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi(n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{(\frac{k}{n})^k (1-\frac{k}{n})^{n-k} \sqrt{2\pi \frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})n}} \sim (\frac{\alpha}{p})^{-k} (\frac{1-\alpha}{1-p})^{-(n-k)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$ мы уже нашли из нашего ответа, теперь нужно найти оставшие части

Теперь нам нужно доказать, что $(\frac{\alpha}{p})^{-k} (\frac{1-\alpha}{1-p})^{-(n-k)} \sim e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow$ $(\frac{\alpha}{p})^{k} (\frac{1-\alpha}{1-p})^{-(n-k)} \sim e^{\frac{x^2}{2}}$

$k \ln(\frac{\alpha}{p}) + (n-k) \ln(\frac{1-a}{1-p}) = \frac{x^2}{2} + o(1)$

$\ln \frac{\alpha}{p} = \ln \frac{p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}})$

$\ln \frac{1-\alpha}{1-p} = \ln \frac{q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq} + O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}})$

И крч, воспользовавшись нашими вычисленными логарифмами, получаем $k\ln(\frac{\alpha}{p}) + (n-k)\ln(\frac{1-a}{1-p}) = \frac{x^2}{2} + o(1)$

■

Формулировка интегральной теоремы Муавра-Лапласа

Теорема 1.2 (Интегральная формулировка теоремы Муавра-Лапласа). *Для любых чисел $a < b$ имеем:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

при $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Билет 8

Вероятностное пространство в общем случае: алгебра и σ-алгебра подмножеств.

Т.е проблема в том что пространство несчетное, а прежде мы работали со счетными либо конечными. И еще неразумно называть все подмножества событиями

Пусть мы выбираем случайную точку. Мы хотим посчитать вероятость, а вероятность эта какая то функция, а вероятность мы хотим посчитать от некоторого множества. Получается так что вероятность от точки какой то равна нулю, т.е $P(x_1) = 0$, а $P(\Omega) = 1$

Пусть $\Omega, \mathcal{A} = \{\text{все события}\} \subset 2^\Omega$

$\mathcal{A}$ (система подмножеств) называется алгеброй, если:

- $\emptyset, \Omega \in A$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A} A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega\ A \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ (система подмножеств) называется $\sigma-$алгеброй, если:

- $\emptyset, \Omega \in A$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Заметим что любая сигма алгебра является просто алгеброй

Примеры σ-алгебр

- $2^{\Omega} - \sigma-$алгебра
- $\{\Omega, \emptyset\} - \sigma-$алгебра
- $\{\Omega, A, \Omega \setminus A, \emptyset\} - \sigma-$алгебра

Примеры алгебр Множество всех конечных объединений попарно непересекающихся промежутков $(a, b]$ на $\mathbb{R}$ является алгеброй, но не является σ алгеброй, поскольку она не содержит одноточечные множества — пересечения счетного числа полуинтервалов.

σ-алгебра, порожденная системой подмножеств

$S \subset 2^{\Omega}, \sigma(S) - \sigma$-алгебра, порожденная множеством S, т.е эта наименьшая по включению $\sigma-$алгебра, содержащаю систему S

Утверждение: $\sigma(S)$ - существует

▲

$\sigma(S) = \cap_{\mathcal{A}:S \subset \mathcal{A}} A.$ Также нужно доказать что такое пересечение является $\sigma-$алгеброй

■

Борелевская σ-алгебра.

Определение. σ-алгебра называется *борелевской σ-алгеброй* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ подмножеств прямой $\mathbb{R}$, если она порождена всеми промежутками (отрезками, интервалами, лучами).

$S = \{(a, b), [a, b), [a, b], (a, b]\}, a, b \in \mathbb{R}$

Борелевская $\sigma-$алгебра - это $\sigma(S), \mathbb{B}(\mathbb{R}) = \sigma(S)$

Аддитивные и счетно аддидивные функции множества на алгебрах и σ-алгебрах.

Определение 41. Пусть $\mathcal{A}_0$ — алгебра множеств. Функция $P\colon \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ называется **аддитивной**, если для произвольных $A, B \in \mathcal{A}_0$, $A \cap B = \emptyset$ выполнено

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Функция $P\colon \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ называется **счетно аддитивной**, если для всякого не более чем счетного набора попарно непересекающихся событий $A_n \in \mathcal{A}$, для которых $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$ выполняется

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Ясно, что в случае, когда $\mathcal{A}_0$ — σ-алгебра, множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$ для произвольных $A_n \in \mathcal{A}_0$. Кроме того, для аддитивной функции $P\colon \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ выполнено $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A)$ для произвольного $A \in \mathcal{A}_0$, $P(A) \le P(B)$, если $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{A}_0$, $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$ для $A, B \in \mathcal{A}_0$.

Вероятностная мера и определение вероятностного пространства.

Определение 0.3. Пусть $\mathcal{A}$ – σ алгебра. Функция $P\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ называется *вероятностной мерой* на $\mathcal{A}$, если $P(\Omega) = 1$ и P — счетно аддитивна на $\mathcal{A}$.

Определение 0.4. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, тогда тройку $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называют *вероятностным пространством.*

Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывностии в нуле для неотрицательной аддитивной функции множества на алгебре.

Предложение. Пусть $P\colon \mathcal{A}_0 \to [0,1]$ — аддитивная функция множества на алгебре $\mathcal{A}_0$. Функция P счетно аддитивна на $\mathcal{A}_0$ тогда и только тогда, когда для произвольного набора $A_n \in \mathcal{A}_0$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть P счетно аддитивна на $\mathcal{A}_0$. Рассмотрим множества $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Тогда

$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \ldots, A_{N+1} = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} C_k,$$

и

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{N} P(C_n) + P(A_{N+1}).$$

Если P счетно аддитивна, то $\sum\limits_{n=1}^{N} P(C_n) \to P(A_1)$, а $P(A_{N+1}) \to 0$.

$\Longleftarrow$ Пусть $C_n \in \mathcal{A}_0$ — набор попарно непересекающихся множеств, причем известно, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 \in \mathcal{A}_0$. Пусть

$$A_{N+1} = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} C_k,$$

тогда $A_{N+1} \subset A_N$, причем $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} A_N = \varnothing$. Если $P(A_{N+1}) \to 0$, то $P(A_1) = \sum\limits_{n=1}^{N} P(C_n) + P(A_{N+1})$ и переходя к пределу, получаем

$$P(A_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n). \qquad \square$$

Свойства непрерывности вероятностной меры. Субаддитивность вероятностной меры.

Следствие (непрерывность вероятностной меры)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Тогда

1. Если $A_n \in \mathcal{A}$, $A_{n+1} \subset A_n$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$;

   Доказательство. Рассмотрим $A'_n = A_n \setminus A$. Очевидно, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A'_i = \varnothing \implies \lim\limits_{n\to\infty} P(A'_n) = 0$. В то же время $P(A_n) = P(A'_n \sqcup A) = P(A'_n) + P(A)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ □

2. Если $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1}$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

   Доказательство. Рассмотрим $A'_n = \Omega \setminus A_n$. Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A'_n = \Omega \setminus A$. По п. 1:

$$1 - P(A) = P(\Omega \setminus A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A'_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A'_n) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega \setminus A_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

□

В частности,

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Билет 9

Случайные величины на общих вероятностных пространствах: опредление и основные свойства(прообраз борелевских лежит σ - алгебре, непрерывная функция от случайной величины, сумма и произведение случайных величин, предел случайных величин).

Определение 0.5. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*, если для всякого числа $t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$X^{-1}((-\infty, t]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{A}.$$

Предложение. Если X случайная величина, то $\{\omega \mid X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всякого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Доказательство. Напомним следующие соотношения для прообраза функции:

$$X^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n), \quad X^{-1}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n), \quad X^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \Omega \setminus X^{-1}(B).$$

Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{C} := \{B \subset \mathbb{R} \mid X^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Эта система образует σ-алгебру. Действительно, $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \mathcal{A}$ и $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{A}$. Если $B \in \mathcal{C}$, то $X^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \Omega \setminus X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Наконец, если $B_n \in \mathcal{C}$, то

$$X^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}.$$

По условию σ-алгебра $\mathcal{C}$ содержит все лучи вида $(-\infty, t]$. Мы знаем, что $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ — наименьшая по включению σ алгебра, содержащая все лучи такого вида, поэтому $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$, что и требовалось. $\square$

Замечание. Т. к. $\{X^2 \leqslant t\} = \{-\sqrt{t} \leqslant x \leqslant \sqrt{t}\}$ (при $t \geq 0$) и отрезок $[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]$ — борелевское множество, получаем, что X^2 — также случайная величина. Можно проверить, что для случайной величины X и для любой «разумной» функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (например, если f непрерывная), $f(X)$ также будет случайной величиной.

Предложение. Пусть X, Y — случайные величины. Тогда случайными величинами будут $\alpha X + \beta Y$, $X \cdot Y$.

Доказательство. Ясно, что αX и βY — случайные величины. Проверим, что $X + Y$ — случайная величина:

$$\{X + Y > t\} = \{X > t - Y\} = \bigcup_{r_n \in \mathbb{Q}} (\{\omega \mid X(\omega) > r_n\} \cap \{\omega \mid r_n > t - Y(\omega)\}) \in \mathcal{A}.$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, поэтому между любыми двумя вещественными числами есть рациональное число. Поэтому и $\{X + Y \leqslant t\} \in \mathcal{A}$, а значит $X + Y$ — случайная величина. Для произведения заметим, что $X \cdot Y = \frac{1}{2}\big((X+Y)^2 - X^2 - Y^2\big)$, и утверждение следует из уже доказанных. $\square$

Предложение. Пусть X_n — случайные величины и для всякого ω существует предел $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Тогда X является случайной величиной.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant t\}$. Заметим, что $X(\omega) \leqslant t$ тогда и только тогда, когда для каждого натурального числа k найдётся такой номер N, что для всех $n > N$ верно неравенство $X_n(\omega) \leqslant t + \frac{1}{k}$. На языке теории множеств эту формулу фразу можно записать так

$$\{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant t\} = \bigcap_{k} \bigcup_{N} \bigcap_{n>N} \{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant t + \frac{1}{k}\}$$

Остаётся заметить, что $\{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant t + \frac{1}{k}\} \in \mathcal{A}$ $\square$

Таким образом, со случайными величинами можно выполнять арифметические операции и переходить к пределу.