TBaMS_2

Бабаев Минходж Зафарович

Задача 13 (ДЗ). Правильная монета бросается N раз. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза при условии, что всего выпало четное число орлов?

A = “Выпало ровно два орла”

B = “Выпало четное число орлов”

Воспользуемся формулой условной вероятности

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A)$ логично

Выпало ровно два орла из n бросков ⇒ P(A) = $\frac{C_n^2}{2^n}$

P(B) = $\frac{1}{2}$ (логично)

Следовательно

$$P(A|B) = \frac{\frac{C_n^2}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{C_n^2}{2^{n-1}}$$

Задача 14 (ДЗ). Имеется N коробок, в каждой из которых лежит a белых и b черных шаров. Из первой коробки выбирается случайным образом шар и перекладывается во вторую коробку, затем из второй коробки извлекается один шар и перекладывается в третью и т. д. Наконец из последней коробки извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый, если $a)$ $N = 2$; $b)$ $N = 100$?

a) Рассчитаем вероятность события W2 = “выбор белого шара из второго блока” (далее B1 и W1 означают выборку черного/белого в первом извлечении)

$P(W_2) = P(W_2|W_1) \cdot P(W_1) + P(W_2|B_1)P(B_1) = \frac{a+1}{a+b+1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b+1}\frac{b}{a+b} = \frac{a}{a+b} = P(W_1)$

b) ответ: $\frac{a}{a+b}$

Докажем по индукции

A = “шар из n-ой коробки белый ”

B = “из n - 1 - ой коробки достали белый шар”

C = “из n - 1 - ой коробки достали черный шар”

База: n = 1 проверено

Пусть утверждение работает для n = k

При n = k + 1 по формуле полной вероятности P(A) = P(B) P(A|B) + P(C)P(A|C)

P(C) = $\frac{b}{a+b}$ $P(B) = \frac{a}{a+b}$ (понятно, иначе см. пред пункт)

$P(A|B) = \frac{a+1}{a+b+1}$

$P(A|C) = \frac{a}{a+b+1}$

Тогда:

$P(A) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+1} = \frac{a}{a+b}$

b) Приведите пример трех зависимых событий, у которых вероятность пересечения равна произведению вероятностей.

Возьмем прямоугольник 1×8 в качестве вероятностного пространства

Возьмем событие A = “Клетки 1, 2, 5, 6 заштрихованы”

B = “Клетки 1, 2, 3, 6 заштрихованы”

C = “Клетки 4, 7, 8, 6 заштрихованы”

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(B)$

$P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$

$P(C \cap B) = P(C) \cdot P(B)$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Задача 9 (ДЗ). Случайным образом выбираем из $\{1, 2, \ldots, n\}$ одно число. Событие A – выбранное число делится на 2, событие B – выбранное число делится на 5. Найдите все n такие, что события A и B независимы.