

TBaMS_3

Бабаев Минходж Зафарович

Задача 6 (ДЗ). Бросают пару игральных костей. Найдите распределение, математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

X	2	3	4	5	6
P	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36

X	7	8	9	10	11	12
P	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=2}^{12} p_i \cdot i = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{1}{18} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{5}{36} \cdot 6 + \frac{1}{6} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{1}{12} \cdot 10 + \frac{1}{18} \cdot 11 + \frac{1}{36} \cdot 12 = 7$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{329}{6} - 49 = \frac{35}{6}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1}{36} \cdot 2^2 + \frac{1}{18} \cdot 3^2 + \frac{1}{12} \cdot 4^2 + \frac{1}{9} \cdot 5^2 + \frac{5}{36} \cdot 6^2 + \frac{1}{6} \cdot 7^2 + \frac{5}{36} \cdot 8^2 + \frac{1}{9} \cdot 9^2 + \frac{1}{12} \cdot 10^2 + \frac{1}{18} \cdot 11^2 + \frac{1}{36} \cdot 12^2 = \frac{329}{6}$$

Задача 7 (ДЗ). Для оценки числа некоторого редкого вида рыб в озере биологи выловили 5 рыб и пометили их. На следующий день они выловили 2 рыбы. Случайная величина X – число помеченных рыб среди выловленных. При каком количестве N рыб в озере вероятность $P(X = 1)$ максимальна. Найдите распределение случайной величины X при таком N , $\mathbb{E}X$, $\mathbb{D}X$.

Пусть n - количество рыб. Тогда $f(n) = \frac{C_{n-5}^1 \cdot C_5^1}{C_n^2} = \frac{10n-50}{n^2-n}$

Вычислим производную, чтобы найти максимум:

Критические точки: -0.5 и $9.4 \Rightarrow$

Рассмотрим случаи $N = 9$ и $N = 10$

$N = 9$:

$$P(x = 0) = \frac{1}{6}$$

$$P(x = 1) = \frac{5}{9}$$

$$P(x = 2) = \frac{5}{18}$$

$$\mathbb{E}x = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{10}{9}$$

$$\mathbb{D}x = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = -\frac{100}{81} + \frac{5}{3} = \frac{35}{81}$$

$N = 10$:

$$P(x = 0) = \frac{2}{9}$$

$$P(x = 1) = \frac{5}{9}$$

$$P(x = 2) = \frac{3}{9}$$

$$\mathbb{E}x = 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} = 1$$

$$\mathbb{D}x = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2 = -1 + \frac{13}{9} = \frac{4}{9}$$

Задача 9 (ДЗ). Боб загадал случайным образом число от 0 до 4. Алиса получает свое число так: подкидывает монетку и в случае орла прибавляет к числу Боба 1, а в случае решки вычитает 1 (всё по модулю 5). Найдите распределение каждого из полученных чисел, а также их совместное распределение.

Боб	0	1	2	3	4
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Алиса	0	1	2	3	4
P	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Таблица совместного распределения

БА	0	1	2	3	4
0	0	1/10	0	0	1/10
1	1/10	0	1/10	0	0
2	0	1/10	0	1/10	0
3	0	0	1/10	0	1/10
4	1/10	0	0	1/10	0

Задача 12 (ДЗ). При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний A_1 , A_2 и A_3 , а их вероятности в данных условиях равны $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$ и $p_3 = 1/6$ соответственно. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0.1 в случае A_1 , с вероятностью 0.2 в случае A_2 , и с вероятностью 0.8 в случае A_3 . Анализ был произведен четыре раза и дал три раза положительный результат и один раз отрицательный. Какова вероятность каждого заболевания после анализа?

Пусть B_1 – больной с болезнью A_1 , B_2 – болен болезнью A_2 , B_3 – болезнью A_3 , и A – результат анализа

Тогда:

$$Pr(A|B_1) = 0,1^3 \cdot 0,9 = 0,0009$$

$$Pr(A|B_2) = 0,2^3 \cdot 0,8 = 0,0064$$

$$Pr(A|B_3) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024$$

Далее воспользуемся формулой $Pr(B_i|A) = \frac{Pr(A|B_i) \cdot Pr(B_i)}{Pr(A)}$

$$Pr(B_1|A) = \frac{9}{20000 \cdot Pr(A)}$$

$$Pr(B_2|A) = \frac{4}{1875 \cdot Pr(A)}$$

$$Pr(B_3|A) = \frac{9}{20000 \cdot Pr(A)}$$

$$\text{знаем } Pr(B_1|A) + Pr(B_2|A) + Pr(B_3|A) = 1 \Rightarrow Pr(A) = \frac{393}{20000}$$

Следовательно

$$Pr(B_1|A) = \frac{3}{131}$$

$$Pr(B_2|A) = \frac{128}{1179}$$

$$Pr(B_3|A) = \frac{1024}{1179}$$