MA_5

Бабаев Минходж Зафарович

Опр. равномерной сходимости. Пусть $D \subset \mathbb{R}$, $f_n, f : D \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Говорят, что функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится *равномерно* к функции $f(x)$ на множестве D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N, \ \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

Эквивалентное определение или **lim-sup критерий**:

$$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim_{n\to\infty} \sup_D |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданном множестве:

$$1.\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3} \quad a)\ D = [0, 1], \quad b)\ D = [1, +\infty)$$

а) $\frac{nx}{1+n^3x^3} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 = f(x)$

Рассмотрим

$\underset{[0,1]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3} - 0| = \underset{[0,1]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3}|$.

$\underset{[1,+\infty]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3} - 0| = \underset{[1,+\infty]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3}|$

$(\frac{nx}{1=n^3x^3})' = \frac{(nx)'(1+n^3x^3)-nx(1+n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2} = \frac{n(1+n^3x^3)-nx(n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$

Приравниваем к нулю

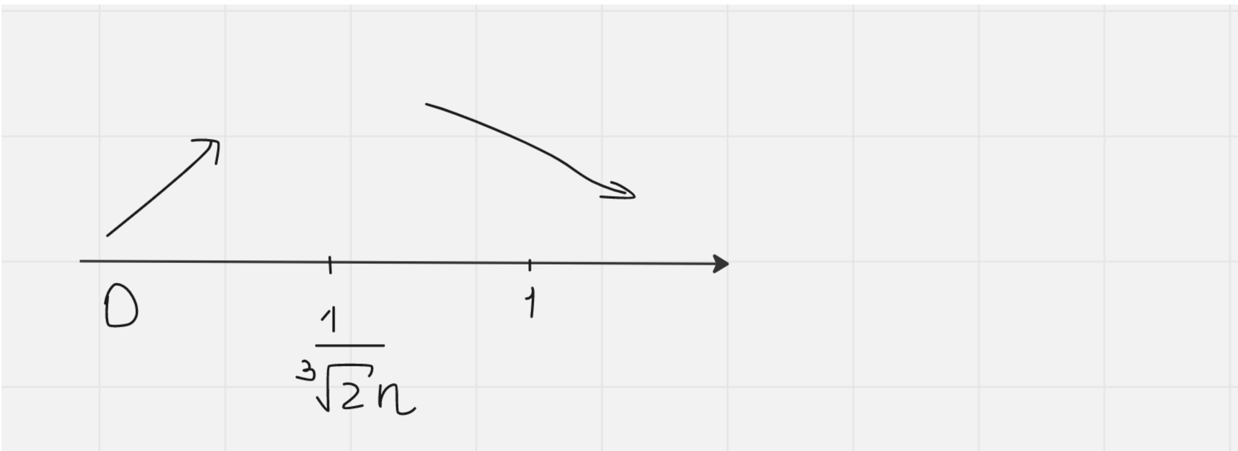
$n(1+n^3x^3) - nx(3n^3x^2) = 0$

$n + n^4x^3 - 3n^4x^3 = 0$

$$n-2n^4x^3=0$$

$$1-2n^3x^3=0$$

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}n}$$



$|\frac{nx}{1+n^3x^3}|=|\frac{n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}n}}{1+n^3(\frac{1}{\sqrt[3]{2}n})^3}|\neq 0 \Rightarrow$ неравном сх

b) $\frac{nx}{1+n^3x^3}\underset{n\to\infty}{\to}0=f(x)$

Рассмотрим

$$\underset{[1,+\infty]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3}-0|=\underset{[1,+\infty]}{sup}|\frac{nx}{1+n^3x^3}|$$

$$(\frac{nx}{1=n^3x^3})'=\frac{(nx)'(1+n^3x^3)-nx(1+n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}=\frac{n(1+n^3x^3)-nx(n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

Приравниваем к нулю

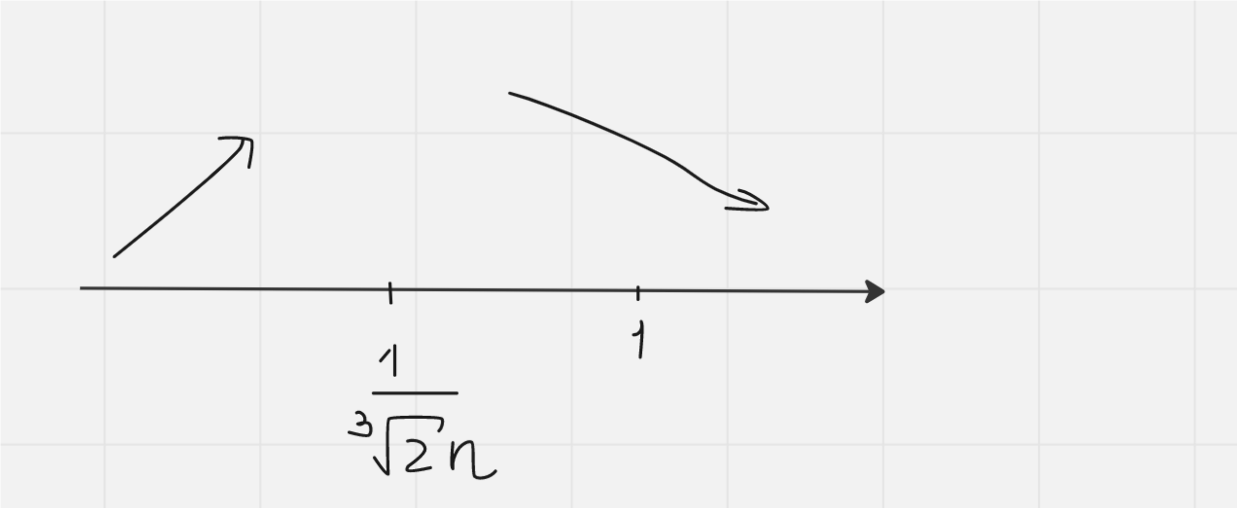
$$n(1+n^3x^3)-nx(3n^3x^2)=0$$

$$n+n^4x^3-3n^4x^3=0$$

$$n-2n^4x^3=0$$

$$1-2n^3x^3=0$$

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}n}$$



$\underset{[1,+\infty]}{sup}\left|\frac{nx}{1+n^3x^3}\right| = \left|\frac{n}{1+n^3}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

есть равномерная сходимость

$$2.\ f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x} \quad a)\ D = [0,2], \quad b)\ D = [2,+\infty)$$

а) $\frac{nx^2}{n+x} \underset{n\to\infty}{\to} x^2 = f(x)$

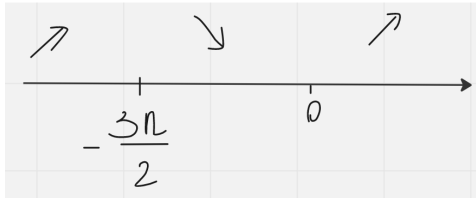
Рассмотрим

$\underset{[0,2]}{sup}\left|\frac{nx^2}{n+x} - x^2\right| = \underset{[0,2]}{sup}\left|\frac{x^3}{n+x}\right|.$

$(\frac{x^3}{n+x})' = \frac{3x^2(n+x)-x^3}{(n+x)^2} = \frac{2x^3+3nx^2}{(n+x^2)}$

$2x^3 + 3nx^2 = 0$

$x^2(2x+3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-3n}{2}$



$\sup\limits_{[0,2]} |\frac{x^3}{n+x}| = \frac{8}{n+2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ есть равномерная сходимость

b)

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^2}{n+x} = +\infty$

f_n непрерывна на D $\Rightarrow$ неравном сх (по теореме)

$$3.\ f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \quad a)\ D = [0,1], \quad b)\ D = [1, +\infty)$$

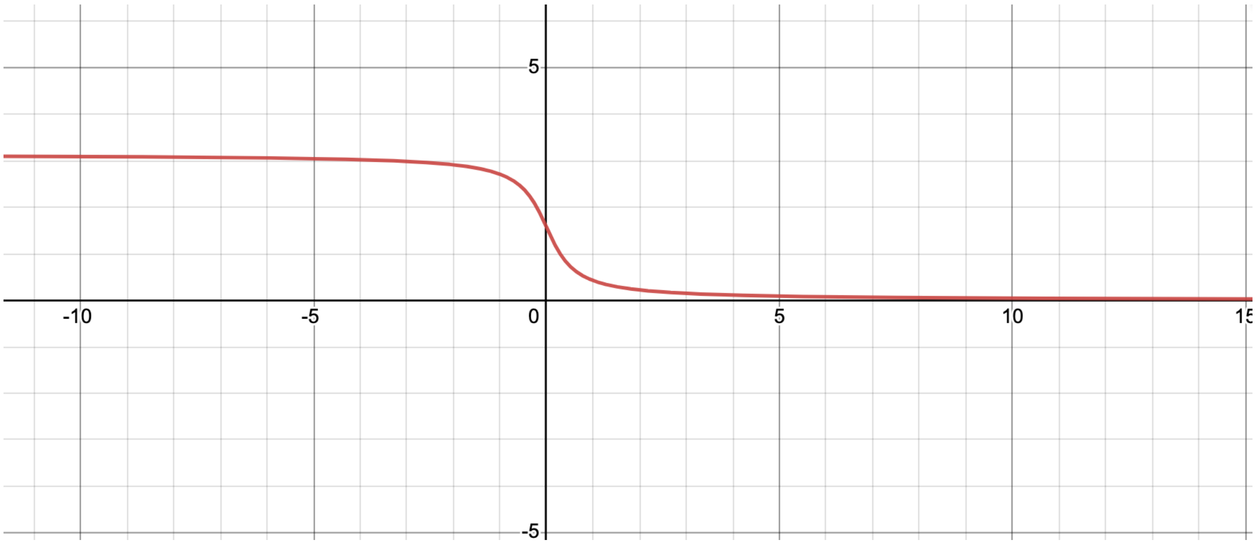
а) $f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} x = 0, 0 \\ x \in (0,1], \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$f_n(x)$ непрерывна на D, $f(x)$ разрывна $\Rightarrow$ противоречие теоремы о непрерывности предельной функции $\Rightarrow$ неравномерная сходимость

б) $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\sup\limits_{[1,+\infty]} |\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}| = |\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ есть равномерная сходимость

Построим график: $|\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}||\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2}|$. По рисунку видно, что $x_{max} = 1$



4. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx?$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = |t = nx, dt = 2xndx| = \frac{1}{2}\int\limits_0^n \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^n =$
$\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} n - 0)] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{4}$

2) $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int\limits_0^1 0 = 0$

Так как $\frac{\pi}{4} \neq 0 \Rightarrow$ переход незаконен