MA_8

Бабаев Минходж Зафарович

1. Привести двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному во всех возможных порядках, где $D = \{(x,y) \mid x \in [0, 1/2], y \in [0,1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$

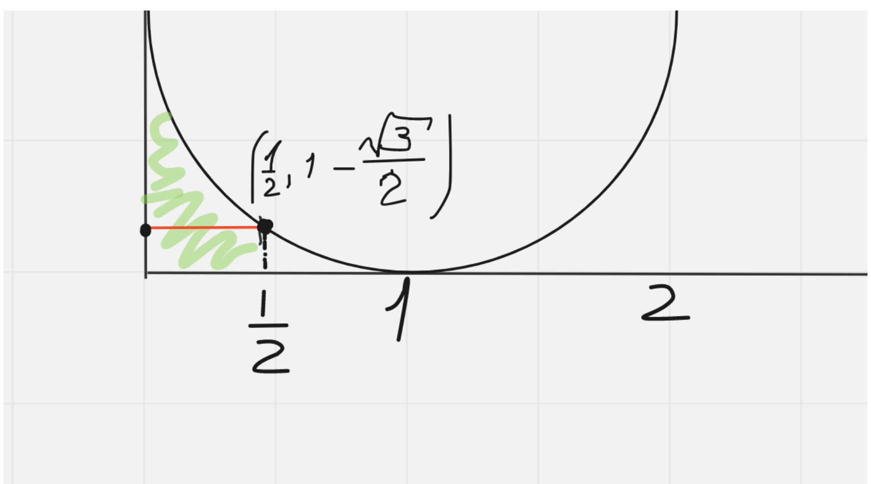
Найдем y при $x = \frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2} - 1)^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Выразим x, y из следующего выражения $(\frac{1}{2} - 1)^2 + (y-1)^2 = 1$

$x = -\sqrt{1-(y-1)^2} + 1$

$y = -\sqrt{1-(x-1)^2} + 1$



По картинке получаем:

Повторный интеграл по x

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_0^{-\sqrt{1-(x-1)^2}+1} f(x,y)dy \Big) dx$$

Повторный интеграл по y

$$\int\limits_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} (\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f(x,y)dx)dy + \int\limits_{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} (\int\limits_0^{-\sqrt{1-(y-1)^2}+1} f(x,y)dx)dy$$

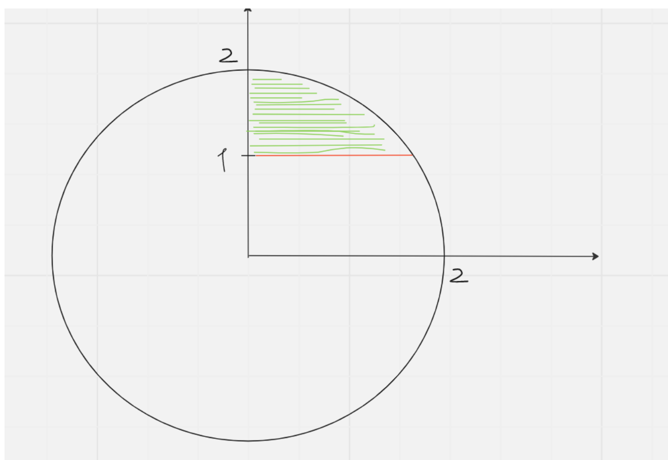
---

2. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{4-4y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

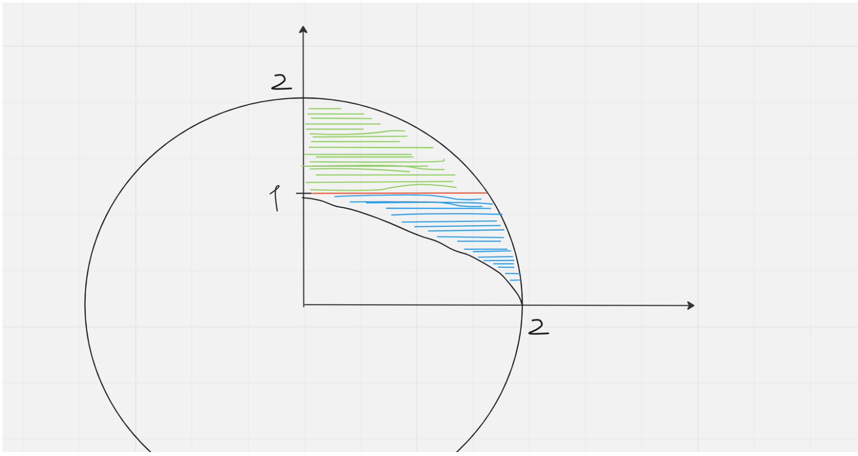
$x = \sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$, получаем круг радиусом 2 с центром $(0,0)$

Для второго слагаемого получаем следующую картину:



$x = \sqrt{4-4y} \Rightarrow x^2 = 4 - 4y \Rightarrow y = 1 - \frac{x^2}{4}$

Получаем след картину



Посчитаем повторный интеграл по x по получившейся картине

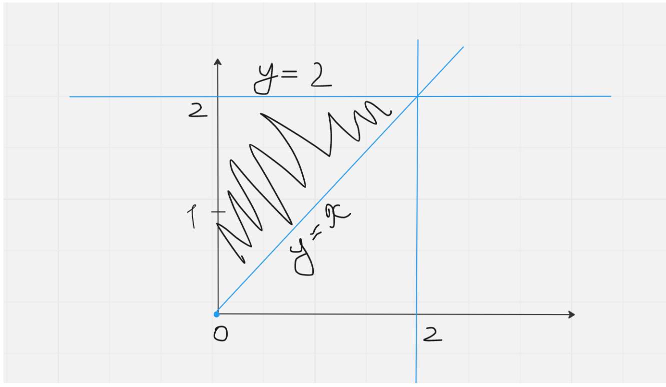
$$\int\limits_0^2 \Big(\int\limits_{1-\frac{x^2}{4}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy \Big) dx$$

---

3. Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_x^2 \ln(1+y^2)dy$$

$\int\limits_0^2 x^2 dx \int\limits_x^2 \ln(1+y^2)dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_x^2 x^2 \ln(1+y^2)dy = //f(x,y) = x^2 \ln(1+ y^2)dy// = \int\limits_0^2 \int\limits_x^2 f(x,y)dydx$



Далее нам нужно построить повторный интеграл по y. Получим

$$\int\limits_0^2 \int\limits_x^2 f(x,y)dydx = \int\limits_0^2 (\int\limits_0^y f(x,y)dx)dy = \int\limits_0^2 (\int\limits_0^y x^2 \ln(1+y^2)dx)dy =$$

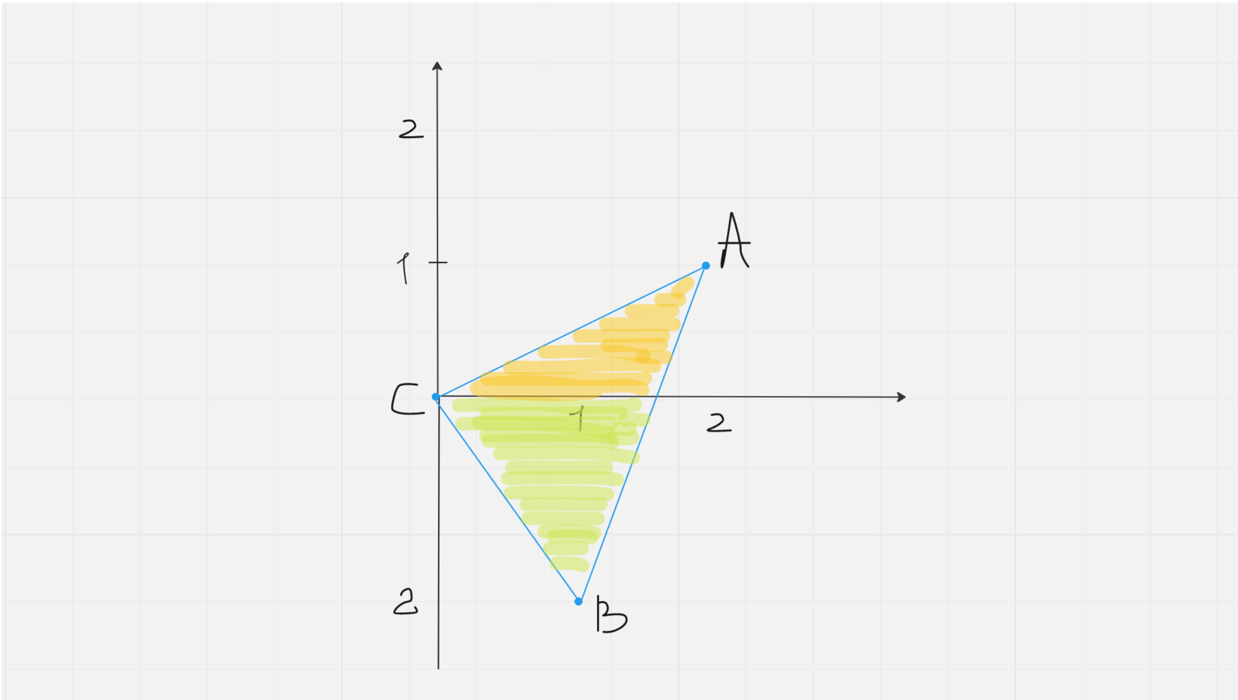
$$\int\limits_0^2 (\int\limits_0^y x^2 \ln(1+y^2)dx)dy = \int\limits_0^2 \ln(1+y^2)(\int\limits_0^y x^2 dx)dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \ln(1+y^2)y^3 dy =$$

$$\begin{cases} 1+y^2 = t \\ y^2 = t-1 \\ 2ydy = dt \\ dy = \frac{1}{2}dt \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6}\int\limits_1^5 \ln(t)(t-1)dt = \frac{1}{6}\int\limits_1^5 \ln(t)tdt - \frac{1}{6}\int\limits_1^5 \ln(t)dt = -\frac{1}{3} + \frac{5\ln 5}{4}$$

$$\int \ln(t)tdt = |u = \ln t, tdt = dv \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt, dv = tdt \Rightarrow v = \int tdt = \frac{t^2}{2}| \Rightarrow$$
$$\int udv = uv - \int vdu = \ln t \frac{t^2}{2} - \int \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t}dt = \ln t \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int tdt = \ln t \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{t^2}{2}(\ln t - \frac{1}{2})|_1^5 = \frac{25\ln 5}{2} - 6$$

---

4. Вычислить интеграл $\iint\limits_D x^2 y \, dxdy$, где D – замкнутый треугольник с вершинами $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,-2)$.



Для начала найдем пересечение отрезка AB с осью абсцисс

$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-2}{-2-1} \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow y = 0, x = \frac{5}{3}$

Также CB, CA нам нужно найти уравнение прямой:

Для $CB : y = 2x$

Для $CA : y = \frac{1}{2}x$

Искомый интеграл будет равен сумме интегралу от двух частей: желтой и зеленой

Следовательно, итоговый вид интеграла примент след вид и принимает значение

$$\iint\limits_D x^2ydxdy = \int\limits_{-2}^{0}(\int\limits_{-\frac{1}{2}y}^{\frac{y+5}{3}} x^2ydx)dy \ + \ \int\limits_{0}^{1}(\int\limits_{2y}^{\frac{y+5}{3}} x^2ydx)dy = \frac{193}{324} - \frac{82}{81} = -\frac{5}{12}$$

$$\int\limits_{-2}^{0}(\int\limits_{-\frac{1}{2}y}^{\frac{y+5}{3}} x^2ydx)dy = \int\limits_{-2}^{0}(\frac{(\frac{y+5}{3})^3y}{3} - \frac{(-\frac{1}{2}y)^3}{3})dy = -\frac{82}{81}$$

$$\int\limits_{0}^{1}(\int\limits_{2y}^{\frac{y+5}{3}} x^2ydx)dy = \int\limits_{0}^{1}(\frac{(\frac{y+5}{3})^3y}{3} - \frac{(2y)^3y}{3})dy = \frac{193}{324}$$

$$\int_{2y}^{\frac{y+5}{3}} x^2 y dx = \frac{x^3 y}{3} |_B^A = \frac{(\frac{y+5}{3})^3 y}{3} - \frac{(2y)^3 y}{3}$$