MA_7

Бабаев Минходж Зафарович

1. Найти множество сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}x^n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}x^n \Rightarrow x_0 = 0, a_n = \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}$

Воспользуемся формулой Коши Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{3(n^3+2)^{\frac{1}{2n}}} =$
$\frac{4}{3}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n^3+2)^{\frac{1}{2n}}} \underset{*}{=} \frac{4}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{4}$

$* \lim\limits_{n\to\infty} [(n^3+2)^{\frac{1}{2n}} = e^{\ln(n^3+2)^{\frac{1}{2n}}} = e^{\frac{1}{2n}\ln(n^3+2)}] = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}\ln n^3} = 1$

Проверим граничные точки: $x = \frac{3}{4}, x = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{4}: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}(\frac{3}{4})^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$ сходится.

$x = -\frac{3}{4}: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}(-\frac{3}{4})^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+2}}$ сходится по признаку Лейбница

Ответ: $[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$

2. Найти множество сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(x-1)^{5n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(x-1)^{5n} \Rightarrow x_0 = 1, a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$

$\lim\limits_{n\to\infty}[|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{3n!} = (3n+1)(3n+2)(3n+3) \cdot \frac{1}{(n+1)^3} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}] = \text{ПроЛопиталим} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9(2n+1)}{2(n+1)} = 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot 2 = 27 \Rightarrow R = \frac{1}{27}$

Мы нашли R для $t = (x-1)^{5n}$

Найдем радиус сходимости для x

$-\frac{1}{27} \le (x-1)^{5n} \le \frac{1}{27}$

$-\frac{1}{\sqrt[5]{27}} \le x - 1 \le \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$

$1 - \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \le x \le 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{27}}$

Проверим степенной ряд на сходимость на границах

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{27}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(-\frac{1}{27})^{5n}$

Вспомним формулу Стирлинга:

$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n, (3n)! = \sqrt{6\pi n}(\frac{3n}{e})^{3n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(-\frac{1}{27})^{5n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6\pi n}(\frac{3n}{e})^{3n}}{(\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)^3}(-\frac{1}{27})^{5n} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[2]{2^3}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{5n}}{\pi n \cdot 27^{4n}}$ - сходится по признаку Лейбница

$x = 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{27}} : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(\frac{1}{27})^{5n} \sim \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[2]{2^3}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n \cdot 27^{4n}} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x = \frac{26}{27} :$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(\frac{1}{27})^{5n} \sim \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[2]{2^3}} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n \cdot 27^{4n}} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}(\frac{1}{27})^{5n}$ расходится

Ответ: $[1 - \frac{1}{\sqrt[5]{27}}, 1 + \frac{1}{\sqrt[5]{27}})$

---

5) $\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cdot t^n}{n}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, t^{n-1}}{n}\,dt =$

$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-t)^{n-1}}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^x (-t)^{n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot \left(\frac{-(-t)^n}{n}\right)\Big|_0^x =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot \frac{-(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-x)^n}{n^2}$