MA_1

Бабаев Минходж Зафарович

---

1. Вычислить сумму ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{(2n-1)^2} + \frac{C}{2n+1} + \frac{D}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8(2n-1)^2} - \frac{1}{8(2n+1)^2}$$

$$n = A(2n-1)(2n+1)^2 + B(2n+1)^2 + (2n-1)^2(2n+1)C + (2n-1)^2D$$

$$n = (8A+8C)n^3 + (4A+4B-4C+4D)n^2 + (-2A+4B-2C-4D)n + (-A+B+C+D)$$

$$\begin{cases} 0 = -A+B+C+D \\ 1 = -2A+4B-2C-4D \\ 0 = 4A+4B-4C+4D \\ 0 = 8A+8C \end{cases} \Rightarrow (A,B,C,D) = (0, \frac{1}{8}, 0, -\frac{1}{8})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + ... + \frac{1}{(2n-3)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{}{(2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}) = \frac{1}{8}$$

Необходимое условие сходимости ряда: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

---

2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{1}{n}+o(-\frac{1}{n}))} = e^{-1+o(-1)} = e^{-1} \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

3. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n+1}{n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(\frac{n+1}{n^2+2}) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{n+1}{n^2+2} + o(\frac{n+1}{n^2+2})) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{расходится}$$

Критерий Коши: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N,\ p \geq 1 \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

4. Исследовать ряд на сходимость: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}$

Воспользуемся критерием Коши:

$$[\ln n] = k$$
$$k \leq \ln n < k+1$$
$$e^k \leq n < e^{k+1}$$
$$\sum_{n=e^k}^{e^{k+1}-1} \frac{(-1)^{\ln n}}{2n+1} = \sum_{n=e^k}^{e^{k+1}-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{e^{k+1}-1-e^k+1}{2e^{k+1}+1} = \frac{e^{k+1}-e^k}{2e^{k+1}+1} = \frac{e^{k+1}(1-\frac{1}{e})}{e^{k+1}(2+\frac{1}{e^{k+1}})} \geq \frac{1-\frac{1}{e}}{2} \Rightarrow$$

Расходится по критерию Коши