

# ТВaMS\_4

Бабаев Минходж Зафарович

---

**Задача 8 (ДЗ).** Случайные величины  $X_1, \dots, X_n$  независимы и

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = 1/4, \quad P(X_k = 0) = 1/2, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Пусть  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Найдите  $\mathbb{E}S_n$ ,  $\mathbb{D}S_n$  и  $\mathbb{E}2^{S_n}$ .

---

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E} \sum_{i=1}^n X_i \stackrel{\text{события независимые}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = 0, \text{ т.к.}$$

$$\mathbb{E}X_i = 1 \cdot P(X_i = 1) + (-1) \cdot P(X_i = -1) + 0 \cdot P(X_k = 0) = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\mathbb{D}S_n = \mathbb{D} \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}X_i = \frac{n}{2}, \text{ т.к.}$$

$$\mathbb{D}X_i = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1^2 \cdot P(X_i = 1) + (-1)^2 \cdot P(X_i = -1) + 0^2 \cdot P(X_k = 0) - 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}2^{S_n} = \mathbb{E}2^{\sum_{i=1}^n X_i} = \mathbb{E} \prod_{i=1}^n 2^{X_i} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}2^{X_i} = \left(\frac{9}{8}\right)^n, \text{ т.к.}$$

$$\mathbb{E}2^{X_i} = 2^1 \cdot P(X_i = 1) + 2^{(-1)} \cdot P(X_i = -1) + 2^0 \cdot P(X_k = 0) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

**Задача 9 (ДЗ).** По кругу сидят  $n$  человек. Каждый из них независимо от остальных бросает игральную кость. Пусть случайная величина  $X$  равна количеству людей, у которых у хотя бы одного соседа выпало то же число, что и у него самого. Найдите  $\mathbb{E}X$ .

---

Рассмотрим человека с номером  $i$  и его соседей с номерами  $i - 1$  и  $i + 1$

Пусть у человека с номером  $i$  выпало число  $k$ . Тогда вероятность выпадения числа у  $i - 1$  отличающегося от  $k$  равна  $\frac{5}{6}$ , также вероятность выпадения числа у  $i + 1$  отличающегося от  $k$  равна  $\frac{5}{6}$ . Тогда вероятность что число выпавшее у соседей одновременно не равно  $k$  равно  $\frac{25}{36}$ .

Пусть  $X_i$  = хотя бы у одного соседа выпало то же число что у него самого. Тогда  $P(X_i) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

$X_i$  принимает значения 0 или 1.

$$EX_i = 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{11}{36} \Rightarrow EX = E \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n EX_i = n \cdot \frac{11}{36}$$

---

**Задача 10 (ДЗ).** а) Предположим, что дискретная случайная величина  $X$  имеет симметричное распределение (т.е.  $P(X = x) = P(X = -x)$ ), а случайная величина  $Y$  принимает значения 1 и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ . Докажите, что случайные величины  $X$  и  $X \cdot Y$  имеют одинаковое распределение.

б) Случайные величины  $X, Y, Z, W$  независимы в совокупности и одинаково распределены: каждая принимает значения 1 и  $-1$  с вероятностью  $1/2$ . Являются ли независимыми в совокупности случайные величины  $XYZ, XYW, XW$ ?