MA_6

Бабаев Минходж Зафарович

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве D:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2},\ D=\mathbb{R}$$

Заметим, что все члены нашего ряда положительные.
$\frac{x}{1+n^4x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x}+n^4x} \leq \frac{1}{n^4}$. Ряд $\sum \frac{1}{n^4}$ сходится $\Rightarrow$ исходный функ ряд сходится по признаку Вейерштрасса

$$2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}},\ D=(-1,1)$$

$\begin{cases} \frac{x^n}{1+x^{2n}} \text{ непрерывна на } D \\ x=1: \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{1+1^{2n}} \text{ расходится} \end{cases}$ $\Rightarrow$ нет равномерной сходимости по методу граничной точки

$$3.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin x \cos(nx)}{\ln(n+x^2)},\ D=\mathbb{R}$$

Воспользуемся признаком Дирихле:

$a_n = \sin x \cos(nx)$

$b_n = \frac{1}{\ln(n+x^2)}$

1) $\sum\limits_{n=1}^{N} |\sin x \cos(nx)| \leq \frac{|\sin x|}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2|\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}|}{\cos\frac{x}{2}} = 2|\sin\frac{x}{2}| \leq 2$

2) b_n очевидно монотонна

3) Проверим b_n на равномерную сходимость

$\frac{1}{\ln(n+x^2)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x) = 0$

Рассмотрим:

$\sup\limits_{R} |\frac{1}{\ln(n+x^2)} - 0| = \frac{1}{\ln n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ есть равномерная сходимость

Следовательно, по признаку Дирихле исходный функ ряд сходится равномерно

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{x}},\ D = [0, +\infty)$$

Воспользуемся признаком Дирихле:

1) $\sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^n < 2$

2) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ монотонна по n

3) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{x}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

$\sup\limits_{[0,\infty)} |\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{x}} - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \Rightarrow$ есть равном сходимость

Следовательно по пр Дирихле исх функц ряд равномерно сходится.

$$5.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2},\ D = \mathbb{R}$$

Воспользуемся признаком Коши:

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{1+(x-n)^2}\right| \underset{p=1, x=n}{=} \left|\frac{1}{1}\right| \geq 1 = \epsilon \Rightarrow$ не сходится равномерно