블랙-숄즈 모형

이민형, 서울대학교

기초자산과 파생상품

파생상품 f(S,t)은 기초자산(S)의 영향을 받아 결정된다.

기초자산(S)의 예 -> 서울시 주거용 부동산의 평균가격

파생상품f(S,t)의 예 -> 서울시민 평균 주택담보대출금

옵션이란? – 콜옵션과 풀옵션

콜옵션 -> 미리 정해진 가격으로 살 수 있는 권리

풋옵션 -> 특정 가격으로 팔 수 있는 권리

옵션 buyer -> 현재 기초자산(S)의 가격이 $100이라고 하였을 때, 한 투자자가 6개월 뒤 기초자산을 $120에 살 수 있는 유럽형 콜옵션을 $C 에 샀다고 하자. 만약 6개월 뒤 기초자산의 가격이 $150이 되었 다면, 옵션을 행사하여 $120에 사고, 그 즉시 팔아 $30 −C 의 차익을 얻을 수 있다. 반대로 만기일의 기 초자산의 가격이 $90가 되었다면 옵션을 행사하지 않고 $C 만 잃으면 된다.

옵션 seller -> 옵션 판매자의 경우 만기일의 기초자산의 가격이 $120보다 낮으면 옵션구매자가 옵션 을 행사하지 않아 이익이 $C 이고, $120보다 높은 $150이면 옵션구매자가 옵션을 행사하여 $(30) −C 의 손해를 보게 된다.

옵션이란? – 합리적 옵션 가격

옵션의 가격은 기초자산(S)의 영향을 받아 결정되기 때문에 파생상품의 한 종류이다.

옵션판매자는 옵션의 가격이 낮아져야 많은 이익을 취할 수 있고, 옵션 구매자는 옵션의 가격이 높아져야 많은 이익을 취할 수 있다.

위의 예에서 알 수 있듯이, 옵션 판매자와 구매자 모두가 동의할 수 있는 옵션에 대한 가격이 결정되어야 한다는 것이다. 그렇지 않으면 한 쪽에게 손해를 가져다 줄 가능성 이 커져 공정하지 않은 가격이 된다. 옵션가격결정에 대한 문제는 1973년도에 Black과 Scholes에 의해 개발된 Black-Scholes equation에 의해 해결되었다.

옵션의 가격결정 과정

1 단계 : 편미분 방정식 만들기 **-> 이때 이 편미분 방정식을 블랙-숄즈 방정식이라고 부름**

2 단계 : 물리학의 열 확산 방정식으로 변환하기 **-> 방정식을 풀기 위한 방법론**

3 단계 : 열 확산 방정식의 해 구하기 **-> 옵션가격 공식을 만들때 필요**

4 단계 : 열 확산 방정식의 해를 변형하여 옵션가격 공식 만들기 **-> 이 공식이 블랙-숄즈 모형**

5 단계 : 블랙-숄즈 모형에 변수를 대입하여 옵션가격 결정

즉, 블랙-숄즈 방정식의 해를 구하고, 변형하면 결과적으로 옵션 가격을 결정하는 블랙-숄즈 모형을 만들 수 있다.

1~4단계는 블랙-숄즈 모형을 유도하는 과정이고, 실제로 옵션가격을 결정할 때에는 이미 만들어진 블랙-숄즈 모형에 숫자만 대입하면 된다.

블랙-숄즈 방정식이란?

옵션의 가격을 합리적으로 정하기 위한 수학모형인 블랙-숄즈 모형을 만들기 위한 편미분 방정식

옵션 가격은 주가(S), 행사가격(K), 무위험이자율(r), 변동성(σ), 만기(T) 에 의해 결정된다.
즉, 옵션 = f(S,K,r,σ,T)로 정의할 수 있다.

옵션 = f(S,K,r,σ,T)에서 K,r,σ은 상수이므로 f(S,T)로 정의할 수 있다.

블랙-숄즈 방정식을 풀어 해를 구하면 f(S,t)를 알 수 있다.

블랙-숄즈 방정식의 풀이는 고전적인 편미분 풀이법인 PDE (Partial Differential Equation)이 있고 현대적 풀이 과정인 SDE (Stochastic Differential Equation) 방법이 있다.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} = rF$$

▶ 블랙-숄즈 방정식의 기본형

$$\boxed{f(S,t) = S\,N\left[\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right] - Xe^{-rx}N\left[\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right]}$$

$$\begin{cases} x = T - t \\ u = \ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \end{cases}$$

▶ PDE로 블랙-숄즈 방정식의 해를 구함. (해를 구하는 과정은 매우 복잡하므로 별도 링크로 첨부)

$$C = S\,N[d_1] - Xe^{-r(T-t)}N[d_2]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

▶ 블랙-숄즈 방정식의 해로부터 블랙-숄즈 모형을 유도할 수 있다.

블랙-숄즈 모형

$$C = S \cdot N(d_1) - PV(K) \cdot N(d_2)$$

$$P = PV(K) \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

단, $PV(K) = Ke^{-rT}$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

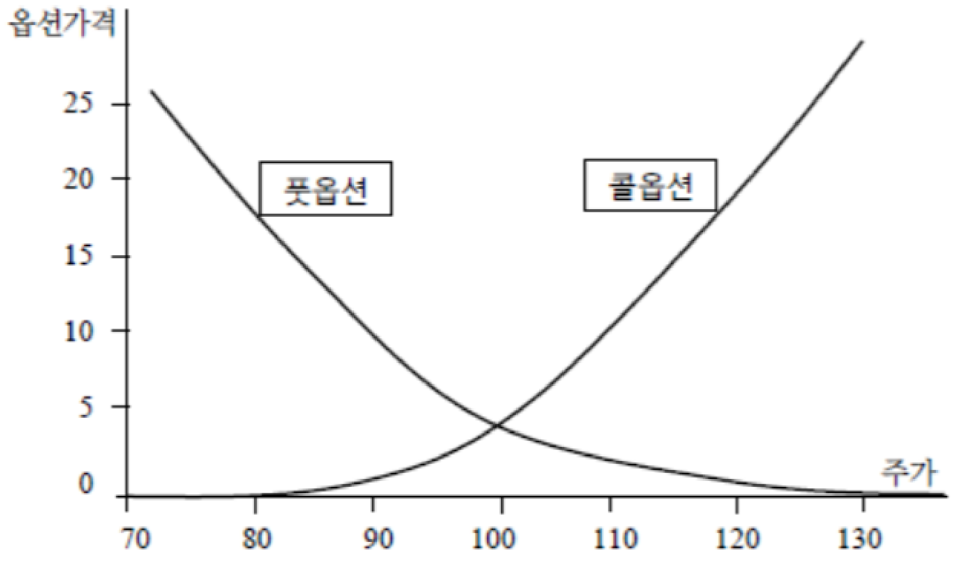
C -> 콜옵션 가격
P -> 풋옵션 가격

여기서, d1,d2 및 이들을 대입해 C,P를 구하는 전 과정을 블랙-숄즈 모형으로 정의한다.

주가(S), 행사가격(K), 무위험이자율(r), 변동성(σ), 만기(T)

블랙-숄즈 모형의 해석

콜옵션의 가격 “C=SN(d1)–PV(K)N(d2)”의 해석
-> 콜옵션 가치 = 옵션행사시 수령할 것으로 기대되는 금액의 현재가치 – 옵션행사시 지급할 것으로 기대되는 금액의 현재가치

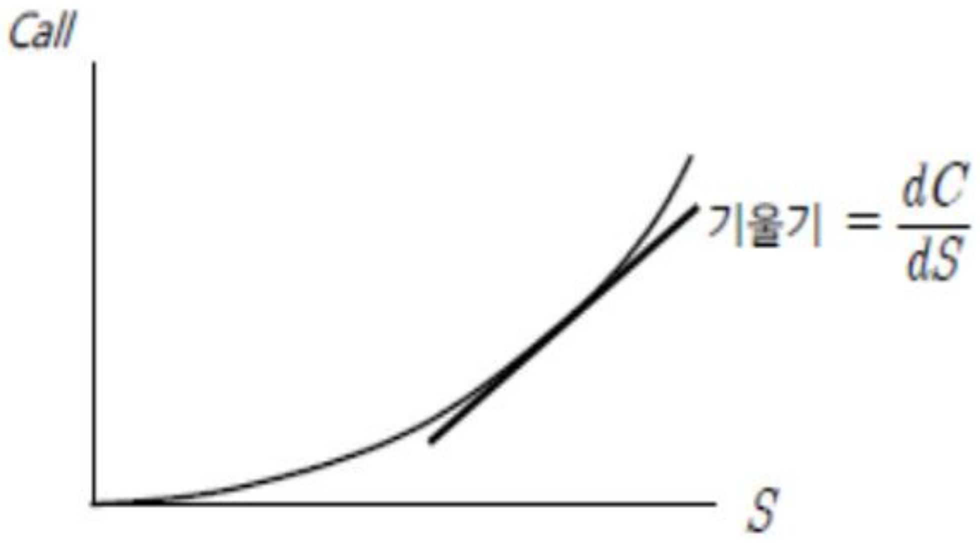


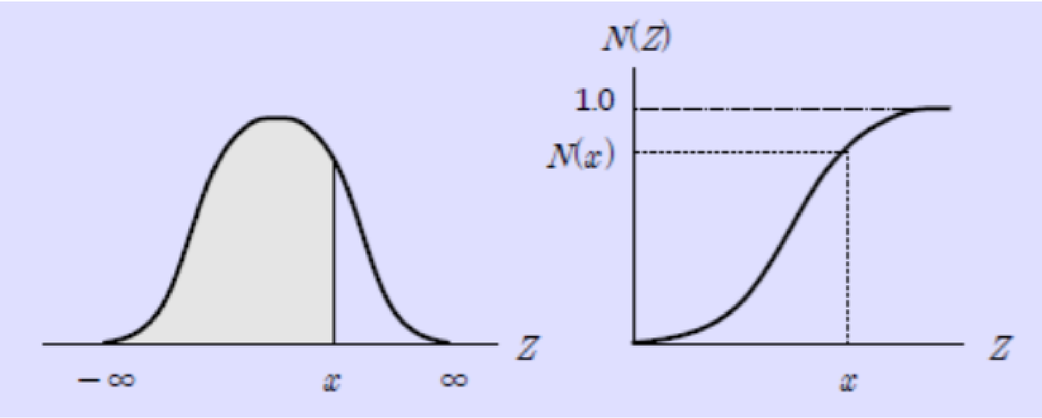
주가에 따른 콜옵션과 풋옵션 가격변화(K=100, T=0.5, σ=0.2, r=0.05)

N(x)의 의미
-> 표준정규분포를 따르는 변수 z가 x보다 작을 확률

N(d1)의 의미
-> 콜옵션의 델타로서 무위험포트폴리오를 구성하기 위하여 매도한 콜옵션 1개당 매입해야 할 주식의 수

N(d2)의 의미
-> 만기일의 주가가 행사가격보다 높을 가능성





$$\Delta_{call} = \frac{dC}{dS} = N(d_1)$$

$$\Delta_{put} = \frac{dP}{dS} = -N(-d_1) = N(d_1) - 1$$

블랙-숄즈 모형의 예시

무배당 주식 가격 10,000원, 무위험이자율 10%, 변동성 50% 행사가격 9,500원, 만기 3개월인 유로피언 콜옵션과 풋옵션 가격은?

S=10,000, K=9,500, r=0.1, T=0.25, σ=0.5이고, d1=0.4302와 d2=0.1802이다.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{10,000}{9,500}\right) + \left(0.1 + \frac{0.5^2}{2}\right) \times 0.25}{0.5\sqrt{0.25}} = 0.4302$$

$$d_2 = 0.4302 - 0.5\sqrt{0.25} = 0.1802$$

$$N(0.4302) = 0.6664 + 0.02(0.6700 - 0.6664) = 0.6665$$

$$N(0.1802) = 0.5714 + 0.02(0.5753 - 0.5714) = 0.5715$$

▶ 누적정규분포표로부터
N(d1)=0.6665 N(d2)=0.5715

$$C = 10,000 \times 0.6665 - 9,500e^{-0.1 \times 0.25} \times 0.5715 = 1,370$$

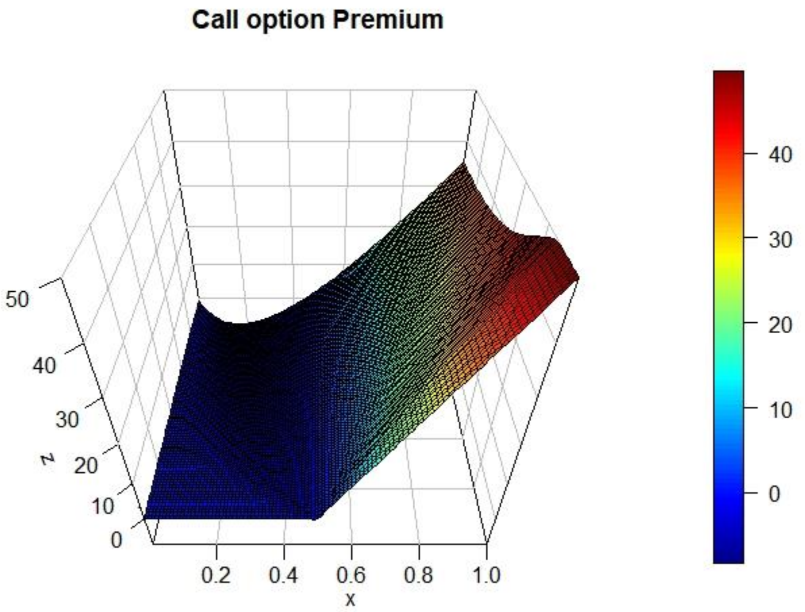
▶ 콜옵션의 가격 = 1,370원

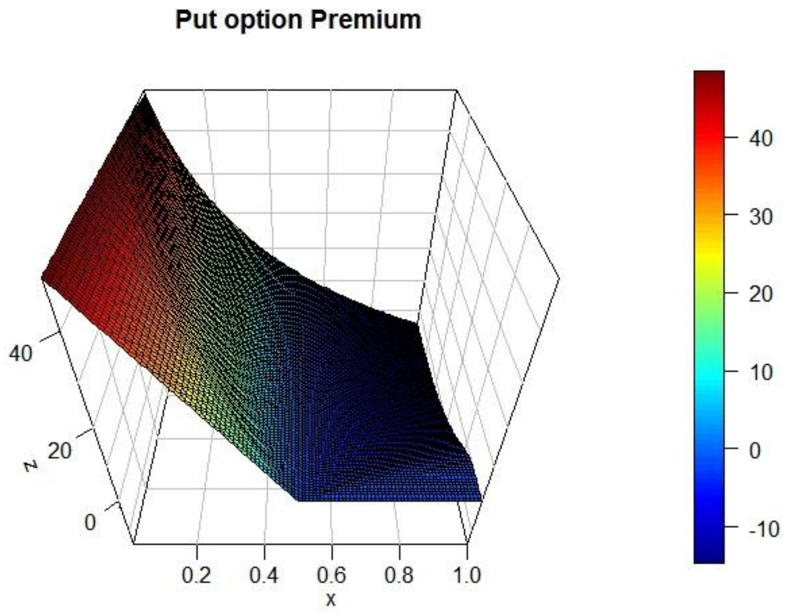
$$P = 9,500e^{-0.1 \times 0.25} \times 0.4285 - 10,000 \times 0.3335 = 635$$

▶ 누적정규분포표로부터
N(-d1)= 0.3335 N(-d2)= 0.4285

▶ 풋옵션의 가격 = 635원

블랙-숄즈 모형 구현 in R





변동성과 주가에 따른 옵션가격분포
(X= σ, Y=주가, Z=옵션가격)

사용된 R 코드는 Github에서 다운로드 가능, https://github.com/Minhyeong-1022/Black-Scholes-mode.git

별도 첨부

PDE, SDE를 통한 블랙-숄즈 방정식 풀이에 대해 자세히 서술되어 있다.

https://m.blog.naver.com/chunjein/100153361796

https://m.blog.naver.com/chunjein/100153505183

https://m.blog.naver.com/chunjein/100153724434

https://m.blog.naver.com/chunjein/100153896491

Thank you

Written by 이민형