# Лекция "Бинарные отношения"

Поздняков Сергей Николаевич

запись конспекта: Кацер Евгений
дата лекции: 22 мая 2018 г.

00:39

# 1 Свойства бинарных отношений:

## 1.1 Рефлексивность

**Определение.** $R$ — рефлексивно на множестве $M$, если, по определению, $\forall x \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ x$ ($x$ находится в отношении с самим собой).

**Пример.**

1. Делимость — рефлексивное отношение, если рассматривается подмножество $\mathbb{Z}$, не содержащее 0. Например, на множестве $\mathbb{N}$.
2. Строгое сравнение — нерефлексивное отношение (на любом множестве).
3. Сравнение по модулю — рефлексивное отношение (на любом множестве).

Если рефлексивное отношение задано:

- Матрицей, то на главной диагонали будут стоять 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Графом, то он имеет петли. Граф, в котором могут быть петли, называется псевдографом.

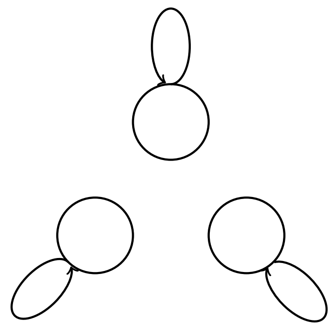


Рис. 1: Рефлексивность на графе

## 1.2 Антирефлексивность

05:39

**Определение.** $R$ — антирефлексивно на множестве $M$, если, по определению, $\forall x \in M$, на котором это отношение определено, $x \not R\, x$ ($x$ не находится в отношении с самим собой).

**Пример 1.2.1.** Взаимная простота — антирефлексивное отношение, например, на подмножестве $\mathbb{N}$, не содержащем 1.

**Пример 1.2.2.** Строго меньше — антирефлексивное отношение (на любом множестве).

Если антирефлексивное отношение задано:

- Матрицей, то на главной диагонали будут стоять 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Графом, то у него не будет петель, будут только ребра.

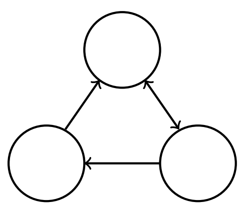


Рис. 2: Антирефлексивность на графе

*Примечание.* Отношение может быть и не рефлексивным (1.1), и не антирефлексивным (1.2). Если такое отношение задается матрицей, то на её главной диагонали должны стоять и 0, и 1.

## 1.3 Симметричность

08:50

**Определение.** $R$ — симметрично на множестве $M$, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$ (если $x$ находится в отношении с $y$, то $y$ находится в отношении с $x$).

**Пример 1.3.1.** Взаимная простота — симметричное отношение, например, на подмножестве $\mathbb{N}$, не содержащем 1.

**Пример 1.3.2.** Равенство — симметричное отношение (на любом множестве).

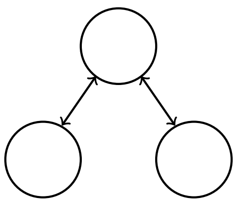
**Пример 1.3.3.** Сравнение по модулю — симметричное отношение (на любом множестве).

Если симметричное отношение задано:

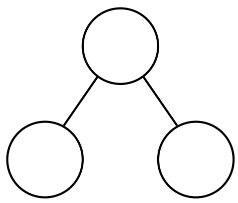
- Матрицей, то матрица симметричная.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

- Графом, то вместе с каждым ребром будет ему обратное. В этом случае стрелку «туда-обратно» заменяют отрезком или дугой без указания направления. Если в графе все стрелки парные, его называют неориентированным.



(a) Первый вариант изображения



(b) Второй вариант изображения

Рис. 3: Симметричность на графе

## 1.4 Антисимметричность

11:44

**Определение.** $R$ — антисимметрично на множестве $M$, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y$ и $y\ R\ x$ $\Rightarrow x = y$ (если $x$ находится в отношении с $y$, и $y$ находится в отношении с $x$, то они совпадают).

**Пример 1.4.1.** Нестрогое сравнение — антисимметричное отношение (на любом множестве).

**Пример 1.4.2.** Равенство — антисимметричное отношение (на любом множестве).

**Пример 1.4.3.** Делимость — антисимметрично на множестве $\mathbb{N}$.

Если антисимметричное отношение задано:

- Матрицей, то если элемент матрицы $= 1$, то симметричный ему относительно главной диагонали — 0, если элемент $= 0$, то симметричный ему — любой и на главной диагонали могут стоять и 0, и 1. Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Графом, то у него не будет двойных стрелок «туда и обратно».

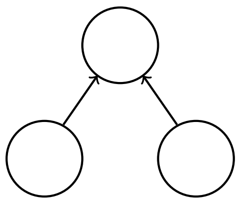


Рис. 4: Антисимметричность на графе

## 1.5 Асимметричность

16:59

**Определение.** $R$ — асимметрично на множестве $M$, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y \Rightarrow y \not R\ x$ (если $x$ находится в отношении с $y$, то $y$ не находится в отношении с $x$).

**Пример.** Строгое сравнение — асимметричное отношение (на любом множестве).

Если асимметричное отношение задано:

- Матрицей, то если элемент матрицы $= 1$, то симметричный ему относительно главной диагонали — 0, если элемент $= 0$, то симметричный ему — любой и на главной диагонали стоят 0. Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Графом, то его стрелки направлены всегда в одну сторону.

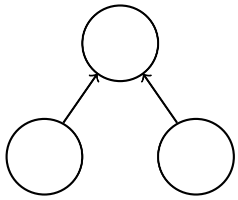


Рис. 5: Асимметричность на графе

*Примечание* 1. Если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно, и антисимметрично.

*Примечание* 2. Асимметричное отношение задает более жёсткие условия по сравнению с антисимметричным отношением.

## 1.6 Транзитивность 20:38

**Определение.** $R$ — транзитивно на множестве $M$, если, по определению, $\forall x, y, z \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y$ и $y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$ (если $x$ находится в отношении с $y$, и $y$ находится в отношении с $z$, то $x$ находится в отношении с $z$).


(a) Отношение будет транзитивно, если добавить ребро из $x$ в $z$

(b) Отношение транзитивно

Рис. 6: Транзитивность на графах

*Примечание.* Добавляя ребро из $x$ в $z$ мы осущесвляем транзитивное замыкание.

26:57

# §3 Отношение эквивалентности

**Определение.** Отношение $R$ на множестве $M$ называется отношением эквивалентности по определению, если оно обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность (1.1)
2. Симметричность (1.3)
3. Транзитивность (1.6)

**Пример 1.6.1.** Отношение подобия треугольников:

1. Рефлексивно, так как каждый треугольник подобен самому себе.
2. Симметрично, так как если первый треугольник подобен второму, то и второй треугольник подобен первому.
3. Транзитивно, так как если первый треугольник подобен второму, а второй подобен третьему, то первый треугольник подобен третьему.

**Пример 1.6.2.** Отношение сравнимости по модулю $m$ ($x \; R \; y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod m$ на множестве $M = \mathbb{Z}$):

1. $x \equiv x \pmod m$
2. $x \equiv y \pmod m \Rightarrow y \equiv x \pmod m$
3. $x \equiv y \pmod m,\ y \equiv z \pmod m \Rightarrow x \equiv z \pmod m$

**Пример 1.6.3.** Проверим то же самое по свойству сравнимости $x \equiv y \pmod m \Leftrightarrow (x - y) \,\vdots\, m$, тогда:

1. $x - x = 0 \Rightarrow (x - x) \,\vdots\, m$
2. $\begin{cases} (x-y) \,\vdots\, m \\ y - x = -(x-y) \end{cases} \Rightarrow (y - x) \,\vdots\, m$
3. Доказать, что $\begin{cases} (x-y) \,\vdots\, m \\ (y-z) \,\vdots\, m \end{cases} \Rightarrow (x - z) \,\vdots\, m$

   По свойству делимости, если $a \,\vdots\, m$ и $b \,\vdots\, m$, то и $(a + b) \,\vdots\, m \Rightarrow$
   $\Rightarrow \underbrace{((x-y) + (y-z))}_{(x-z)} \,\vdots\, m \Rightarrow (x - z) \,\vdots\, m$

36:48

**Теорема** (о классах эквивалентности)**.** *Если на множестве $M$ задано отношение эквивалентности $R$, то все множество $M$ разбивается на (непересекающиеся) классы, объединение которых есть $M$, так, что любые элементы из одного класса между собой эквивалентны (находятся в заданном отношении), а элементы из разных классов не эквивалентны.*

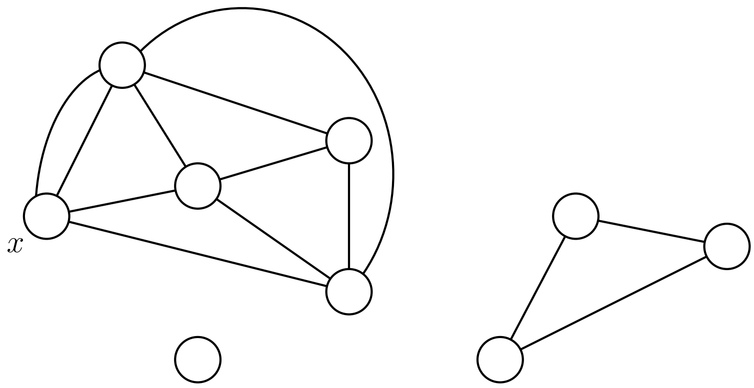



Рис. 7: Классы эквивалентности, если отношение задано на графах

*Примечание.* На Рисунке 7 граф неориентированный, петли в каждой вершине не нарисованы. Всего представлено 3 класса эквивалентности. Каждый из них является полным графом.

*Доказательство.* Обозначим за $M_x = \{y \in M \mid yRx\}$. Для доказательства достаточно доказать, что любые 2 класса такого вида либо совпадают, либо не пересекаются.

От противного: пусть нашлось два таких класса $M_x$ и $M_y$, что они не совпадают и пересекаются.

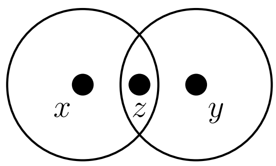



Рис. 8: Точки - множества подмножеств

Не умаляя общности, будем считать, что $x \notin M_y$ и $y \notin M_x$, а $\underbrace{z \in M_x}_{z\,R\,x}$ и $\underbrace{z \in M_y}_{z\,R\,y}$

$$z\ R\ x \Rightarrow x\ R\ z \text{ по симметричности} \Rightarrow \begin{cases} x\ R\ z \\ z\ R\ y \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\text{по транзитивности}] \Rightarrow x\ R\ y \Rightarrow x \in M_y \text{ — противоречие!!!}$$

$\square$

50:14

**Algorithm 1** Алгоритм построения классов эквивалентности на основе построения компонент связности

Инициализация:<br>
**for** $i$ от 1 до $n$ **do**<br>
    $color(i) := 0$<br>
**end for**<br>
$C := 0$ ▷ номер цвета

**for** $i$ от 1 до $n$ **do**<br>
    **if** $color(i) = 0$ **then**<br>
        $C := C + 1$<br>
        PAINT$(i, n, C)$ ▷ Раскрасить в цвет $C$ все элементы, находящиеся в отношении $R$ с $i$ номером и имеющие больший, либо равный номер.<br>
    **end if**<br>
**end for**

**procedure** PAINT$(i, n, C)$<br>
    **for** $j$ от $i$ до $n$ **do**<br>
        **if** $jRi$ **then**<br>
            $color(j) := C$<br>
        **end if**<br>
    **end for**<br>
**end procedure**

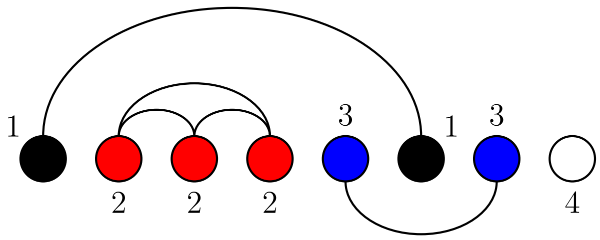



Рис. 9: Пример работы алгоритма

58:27

# §4 Отношение порядка

**Определение.** $R$ — отношение (нестрогого) порядка, если, по определению, $R$ обладает свойствами:

1. Рефлексивность (1.1)
2. Антисимметричность (1.4)
3. Транзитивность (1.6)

*Замечание.* $R$ — отношение строгого порядка, если оно обладает свойствами:

1. Антирефлексивность (1.2) — можно не писать, так как если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно
2. Асимметричность (1.5)
3. Транзитивность (1.6)

**Пример 1.6.4.** $x \; R \; y \Leftrightarrow x \vdots y$ на множестве $\mathbb{N}$. Проверим свойства:

1. $x \vdots x \quad \forall x \in \mathbb{N}$
2. $x \vdots y$ и $y \vdots x \Rightarrow x = y$
3. $x \vdots y$ и $y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$

**Пример 1.6.5.** $x \; R \; y \Leftrightarrow x \leqslant y$ на множестве $\mathbb{R}$. Проверим свойства:

1. $x \leqslant x$
2. $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow x = y$
3. $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

65:02

*Замечание.* Существует свойство 4, которым обладает пример 1.6.5 и не обладает пример 1.6.4.
**Свойство 4:** $\forall x, y \in M$ верно $x \; R \; y$ или $y \; R \; x$.

**Определение.** Отношение порядка, удовлетворяющее свойству 4, называется отношением линейного порядка, иначе (если свойство 4 не выполняется для какой-либо пары элементов) отношением частичного порядка.

**Пример.**

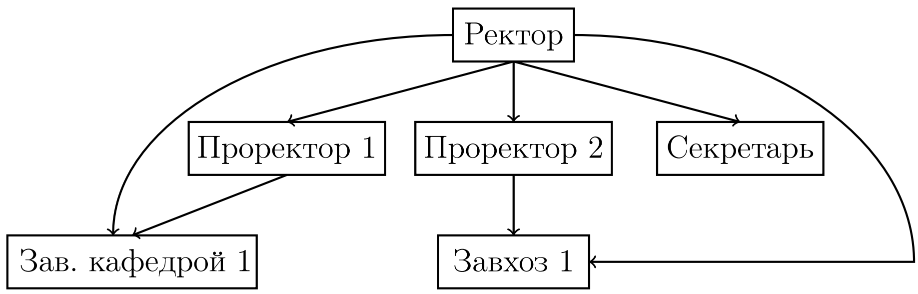



Рис. 10: Отношение частичного порядка

70:28

Идея <u>топологической сортировки</u> - добавить к частичному порядку новые связи, чтобы он стал линейным. Далее мы уточним это понятие.

**Пример.** Совершим топологическую сортировку в предыдущем примере (10).

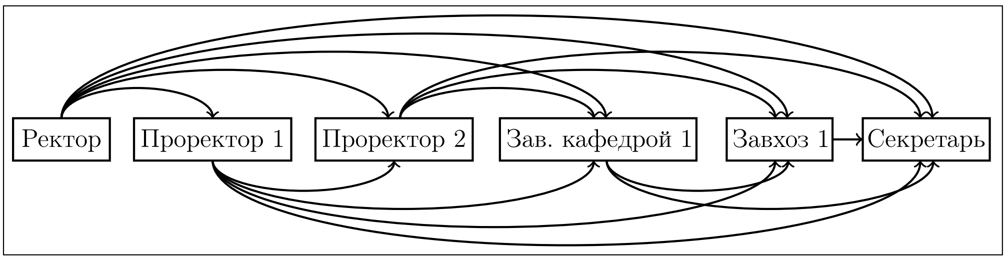



Рис. 11: Топологическая сортировка

73:16

**Определение.** $L$ — <u>согласовано</u> с $R$, если, $\forall x, y \in M$: $x\ R\ y \Rightarrow x\ L\ y$.

**Постановка задачи топологической сортировки.** Построить отношение линейного порядка $L$, согласованное с заданным отношением частичного порядка $R$. 76:06

---

**Algorithm 2** Алгоритм топологической сортировки

---

$M$ — конечное множество
$L := R$

**while** $M \neq 0$ **do**
    Найти минимальный эл-т $m$ множества $M$ относительно $R$.
    Добавим к $L$ пары $(m, x)$ такие, что $x \in M$.
    Удалим $m$ из $M$.
**end while**

---

Обоснуем алгоритм:

**Определение.** $x$ — <u>минимальный элемент</u> в $M$ относительно $R$, если не существует $m \in M$: $m\ R\ x$.

**Лемма.** *Если $M$ — конечно, то минимальный элемент существует.*

*Доказательство.* От противного: пусть минимальный элемент не существует. Возьмем какой-нибудь элемент $x_1$. Для него найдется элемент меньше ($x_2$). Для $x_2$ найдется ещё меньший элемент — $x_3$, но, так как у нас конечное число элементов, где-то должен образоваться цикл. Пусть перед $x_i$ стоит элемент $x_j$, то есть существует условие $x_j R x_i$ (между повторением $x_i$ все элементы разные).

$$\underbrace{x_i \dots x_j R x_i}_{\text{т.к. число эл-тов конечно}} \qquad \dots x_3 R x_2 R x_1$$

Проверим кусок элементов от $x_i$ до $x_j$ включительно:

$$x_i R x_k \dots R x_j \Rightarrow [\text{по транзитивности}] \Rightarrow x_i R x_j$$

$$\begin{cases} x_i R x_j \\ x_j R x_i \end{cases} \Rightarrow [\text{в силу симметрии}] \Rightarrow x_i = x_j \text{ — противоречие!!!}$$

□

**Пример.**

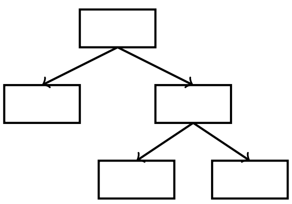


Рис. 12: У этого множества 3 минимальных элемента

*Доказательство.* Докажем, что алгоритм строит согласованное отношение линейного порядка.

1. Отношение согласованно, так как в процессе алгоритма мы только добавляем (все отношения. которые были, останутся).

2. Отношение линейного порядка. Сопоставим каждому элементу $m \in M$ номер, которым мы его удалили из $M$.

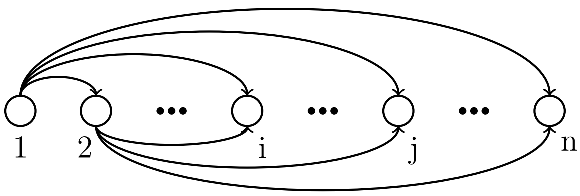



Рис. 13: Сопоставим элементам номера

Полученное отношение совпадает с отношением $\leqslant$ на множестве номеров. А про отношение $\leqslant$ мы знаем, что это отношение линейного порядка.

$\square$