Лекция «Бинарные отношения»

Поздняков Сергей Николаевич

запись конспекта: Кацер Евгений
дата лекции: 22 мая 2018 г.

00:39

1 Свойства бинарных отношений:

1.1 Рефлексивность

Определение. R — рефлексивно на множестве M, если, по определению, $\forall x \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ x$ (x находится в отношении с самим собой).

Пример.

1. Делимость — рефлексивное отношение, если рассматривается подмножество $\mathbb{Z}$, не содержащее 0. Например, на множестве $\mathbb{N}$.
2. Строгое сравнение — нерефлексивное отношение (на любом множестве).
3. Сравнение по модулю — рефлексивное отношение (на любом множестве).

Если рефлексивное отношение задано:

- Матрицей, то на главной диагонали будут стоять 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Графом, то он имеет петли. Граф, в котором могут быть петли, называется псевдографом.

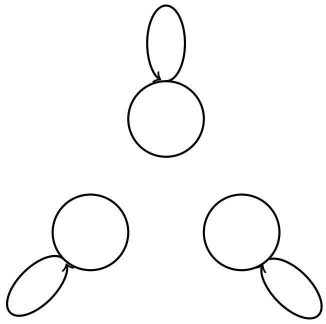


Рис. 1: Рефлексивность на графе

1.2 Антирефлексивность

05:39

Определение. R — <u>антирефлексивно</u> на множестве M, если, по определению, $\forall x \in M$, на котором это отношение определено, $x \not R\, x$ (x не находится в отношении с самим собой).

Пример 1.2.1. Взаимная простота — антирефлексивное отношение, например, на подмножестве $\mathbb{N}$, не содержащем 1.

Пример 1.2.2. Строго меньше — антирефлексивное отношение (на любом множестве).

Если антирефлексивное отношение задано:

- Матрицей, то на главной диагонали будут стоять 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- Графом, то у него не будет петель, будут только ребра.

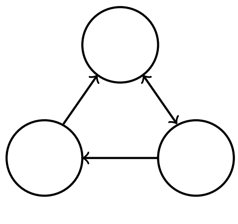


Рис. 2: Антирефлексивность на графе

Примечание. Отношение может быть и не рефлексивным (1.1), и не антирефлексивным (1.2). Если такое отношение задается матрицей, то на её главной диагонали должны стоять и 0, и 1.

1.3 Симметричность

08:50

Определение. R — <u>симметрично</u> на множестве M, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$ (если x находится в отношении с y, то y находится в отношении с x).

Пример 1.3.1. Взаимная простота — симметричное отношение, например, на подмножестве $\mathbb{N}$, не содержащем 1.

Пример 1.3.2. Равенство — симметричное отношение (на любом множестве).

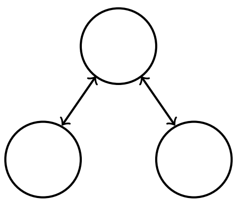
Пример 1.3.3. Сравнение по модулю — симметричное отношение (на любом множестве).

Если симметричное отношение задано:

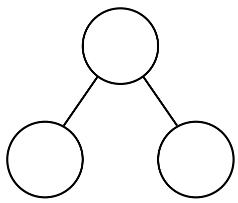
- Матрицей, то матрица симметричная.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

- Графом, то вместе с каждым ребром будет ему обратное. В этом случае стрелку «туда-обратно» заменяют отрезком или дугой без указания направления. Если в графе все стрелки парные, его называют <u>неориентированным</u>.



(a) Первый вариант изображения



(b) Второй вариант изображения

Рис. 3: Симметричность на графе

1.4 Антисимметричность

11:44

Определение. R — <u>антисимметрично</u> на множестве M, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y$ и $y\ R\ x$ $\Rightarrow x = y$ (если x находится в отношении с y, и y находится в отношении с x, то они совпадают).

Пример 1.4.1. Нестрогое сравнение — антисимметричное отношение (на любом множестве).

Пример 1.4.2. Равенство — антисимметричное отношение (на любом множестве).

Пример 1.4.3. Делимость — антисимметрично на множестве $\mathbb{N}$.

Если антисимметричное отношение задано:

- Матрицей, то если элемент матрицы $= 1$, то симметричный ему относительно главной диагонали — 0, если элемент $= 0$, то симметричный ему — любой и на главной диагонали могут стоять и 0, и 1. Например:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Графом, то у него не будет двойных стрелок «туда и обратно».

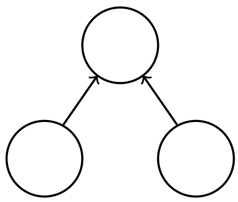


Рис. 4: Антисимметричность на графе

1.5 Асимметричность

16:59

Определение. R — асимметрично на множестве M, если, по определению, $\forall x, y \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y \Rightarrow y \not R\ x$ (если x находится в отношении с y, то y не находится в отношении с x).

Пример. Строгое сравнение — асимметричное отношение (на любом множестве).

Если асимметричное отношение задано:

- Матрицей, то если элемент матрицы $= 1$, то симметричный ему относительно главной диагонали — 0, если элемент $= 0$, то симметричный ему — любой и на главной диагонали стоят 0. Например:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Графом, то его стрелки направлены всегда в одну сторону.

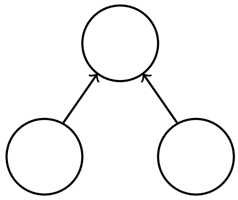


Рис. 5: Асимметричность на графе

Примечание 1. Если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно, и антисимметрично.

Примечание 2. Асимметричное отношение задает более жёсткие условия по сравнению с антисимметричным отношением.

1.6 Транзитивность

20:38

Определение. R — <u>транзитивно</u> на множестве M, если, по определению, $\forall x, y, z \in M$, на котором это отношение определено, $x\ R\ y$ и $y\ R\ z$ $\Rightarrow x\ R\ z$ (если x находится в отношении с y, и y находится в отношении с z, то x находится в отношении с z).

(a) Отношение будет транзитивно, если добавить ребро из x в z

(b) Отношение транзитивно

Рис. 6: Транзитивность на графах

Примечание. Добавляя ребро из x в z мы осущесвляем транзитивное замыкание.

26:57

§3 Отношение эквивалентности

Определение. Отношение R на множестве M называется отношением эквивалентности по определению, если оно обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность (1.1)

2. Симметричность (1.3)

3. Транзитивность (1.6)

Пример 1.6.1. Отношение подобия треугольников:

1. Рефлексивно, так как каждый треугольник подобен самому себе.

2. Симметрично, так как если первый треугольник подобен второму, то и второй треугольник подобен первому.

3. Транзитивно, так как если первый треугольник подобен второму, а второй подобен третьему, то первый треугольник подобен третьему.

Пример 1.6.2. Отношение сравнимости по модулю m ($x \; R \; y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}$ на множестве $M = \mathbb{Z}$):

1. $x \equiv x \pmod{m}$

2. $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow y \equiv x \pmod{m}$

3. $x \equiv y \pmod{m},\; y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$

Пример 1.6.3. Проверим то же самое по свойству сравнимости $x \equiv y \pmod{m} \Leftrightarrow (x-y) \,\vdots\, m$, тогда:

1. $x - x = 0 \Rightarrow (x-x) \,\vdots\, m$

2. $\begin{cases} (x-y) \,\vdots\, m \\ y - x = -(x-y) \end{cases} \Rightarrow (y-x) \,\vdots\, m$

3. Доказать, что $\begin{cases} (x-y) \,\vdots\, m \\ (y-z) \,\vdots\, m \end{cases} \Rightarrow (x-z) \,\vdots\, m$

   По свойству делимости, если $a \,\vdots\, m$ и $b \,\vdots\, m$, то и $(a+b) \,\vdots\, m \Rightarrow$
   $\Rightarrow \underbrace{((x-y)+(y-z))}_{(x-z)} \,\vdots\, m \Rightarrow (x-z) \,\vdots\, m$

Теорема (о классах эквивалентности)**.** *Если на множестве M задано отношение эквивалентности R, то все множество M разбивается на (непересекающиеся) классы, объединение которых есть M, так, что любые элементы из одного класса между собой эквивалентны (находятся в заданном отношении), а элементы из разных классов не эквивалентны.* 36:48

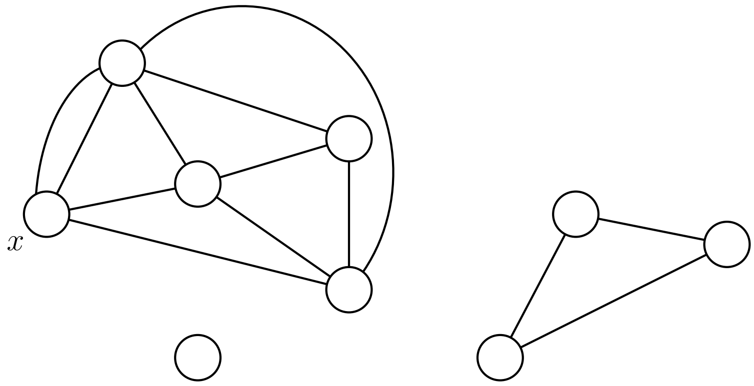


Рис. 7: Классы эквивалентности, если отношение задано на графах

Примечание. На Рисунке 7 граф неориентированный, петли в каждой вершине не нарисованы. Всего представлено 3 класса эквивалентности. Каждый из них является полным графом.

Доказательство. Обозначим за $M_x = \{y \in M \mid yRx\}$. Для доказательства достаточно доказать, что любые 2 класса такого вида либо совпадают, либо не пересекаются.

От противного: пусть нашлось два таких класса M_x и M_y, что они не совпадают и пересекаются.

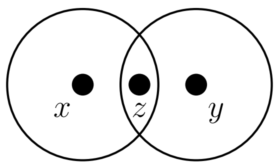


Рис. 8: Точки - множества подмножеств

Не умаляя общности, будем считать, что $x \notin M_y$ и $y \notin M_x$, а $\underbrace{z \in M_x}_{z\,R\,x}$ и $\underbrace{z \in M_y}_{z\,R\,y}$

$$z\ R\ x \Rightarrow x\ R\ z \text{ по симметричности} \Rightarrow \begin{cases} x\ R\ z \\ z\ R\ y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ [по транзитивности] $\Rightarrow x\ R\ y \Rightarrow x \in M_y$ — противоречие!!!

$\square$

50:14

Algorithm 1 Алгоритм построения классов эквивалентности на основе построения компонент связности

```
Инициализация:
for i от 1 до n do
    color(i) := 0
end for
C := 0                                    ▷ номер цвета

for i от 1 до n do
    if color(i) = 0 then
        C := C + 1
        PAINT(i, n, C)          ▷ Раскрасить в цвет C все элементы,
    находящиеся в отношении R с i номером и имеющие больший, либо
    равный номер.
    end if
end for

procedure PAINT(i, n, C)
    for j от i до n do
        if jRi then
            color(j) := C
        end if
    end for
end procedure
```

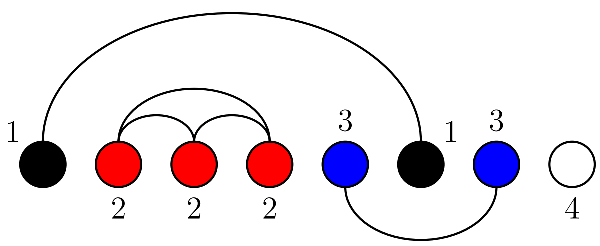


Рис. 9: Пример работы алгоритма

58:27

§4 Отношение порядка

Определение. R — отношение (нестрогого) порядка, если, по определению, R обладает свойствами:

1. Рефлексивность (1.1)
2. Антисимметричность (1.4)
3. Транзитивность (1.6)

Замечание. R — отношение строгого порядка, если оно обладает свойствами:

1. Антирефлексивность (1.2) — можно не писать, так как если отношение асимметрично, то оно и антирефлексивно
2. Асимметричность (1.5)
3. Транзитивность (1.6)

Пример 1.6.4. $x\ R\ y \Leftrightarrow x \vdots y$ на множестве $\mathbb{N}$. Проверим свойства:

1. $x \vdots x \quad \forall x \in \mathbb{N}$
2. $x \vdots y$ и $y \vdots x \Rightarrow x = y$
3. $x \vdots y$ и $y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$

Пример 1.6.5. $x\ R\ y \Leftrightarrow x \leqslant y$ на множестве $\mathbb{R}$. Проверим свойства:

1. $x \leqslant x$
2. $x \leqslant y$ и $y \leqslant x \Rightarrow x = y$
3. $x \leqslant y$ и $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$

65:02

Замечание. Существует свойство 4, которым обладает пример 1.6.5 и не обладает пример 1.6.4.
Свойство 4: $\forall x, y \in M$ верно $x\ R\ y$ или $y\ R\ x$.

Определение. Отношение порядка, удовлетворяющее свойству 4, называется отношением линейного порядка, иначе (если свойство 4 не выполняется для какой-либо пары элементов) отношением частичного порядка.

Пример.

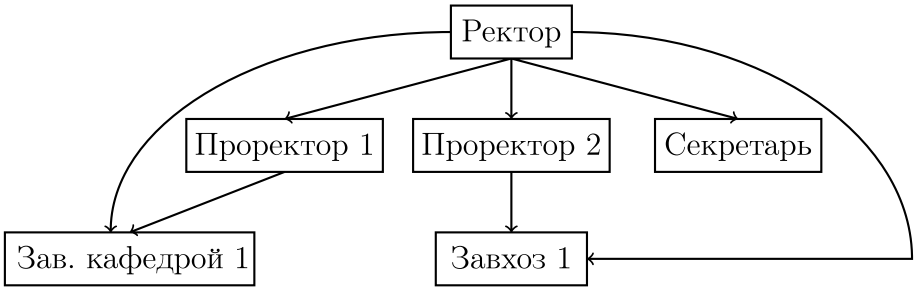


Рис. 10: Отношение частичного порядка

70:28

Идея топологической сортировки - добавить к частичному порядку новые связи, чтобы он стал линейным. Далее мы уточним это понятие.

Пример. Совершим топологическую сортировку в предыдущем примере (10).

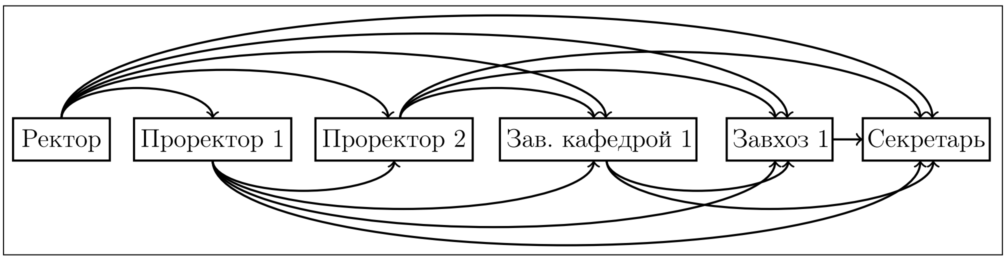


Рис. 11: Топологическая сортировка

73:16

Определение. L — согласовано с R, если, $\forall x, y \in M$: $x \; R \; y \Rightarrow x \; L \; y$.

Постановка задачи топологической сортировки. Построить отношение линейного порядка L, согласованное с заданным отношением частичного порядка R. 76:06

Algorithm 2 Алгоритм топологической сортировки

M — конечное множество
$L := R$

while $M \neq 0$ **do**
    Найти минимальный эл-т m множества M относительно R.
    Добавим к L пары (m, x) такие, что $x \in M$.
    Удалим m из M.
end while

Обоснуем алгоритм:

Определение. x — <u>минимальный элемент</u> в M относительно R, если не существует $m \in M$: $m\ R\ x$.

Лемма. *Если M — конечно, то минимальный элемент существует.*

Доказательство. От противного: пусть минимальный элемент не существует. Возьмем какой-нибудь элемент x_1. Для него найдется элемент меньше (x_2). Для x_2 найдется ещё меньший элемент — x_3, но, так как у нас конечное число элементов, где-то должен образоваться цикл. Пусть перед x_i стоит элемент x_j, то есть существует условие x_jRx_i (между повторением x_i все элементы разные).

$$\underbrace{x_i \dots x_jRx_i}_{\text{т.к. число эл-тов конечно}} \qquad \dots x_3Rx_2Rx_1$$

Проверим кусок элементов от x_i до x_j включительно:

$$x_iRx_k \dots Rx_j \Rightarrow [\text{по транзитивности}] \Rightarrow x_iRx_j$$

$$\begin{cases} x_iRx_j \\ x_jRx_i \end{cases} \Rightarrow [\text{в силу симметрии}] \Rightarrow x_i = x_j \text{ — противоречие!!!}$$

□

Пример.

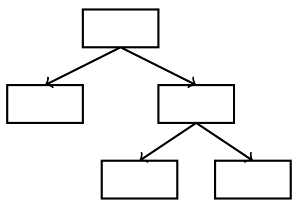


Рис. 12: У этого множества 3 минимальных элемента

Доказательство. Докажем, что алгоритм строит согласованное отношение линейного порядка.

1. Отношение согласованно, так как в процессе алгоритма мы только добавляем (все отношения. которые были, останутся).

2. Отношение линейного порядка. Сопоставим каждому элементу $m \in M$ номер, которым мы его удалили из M.

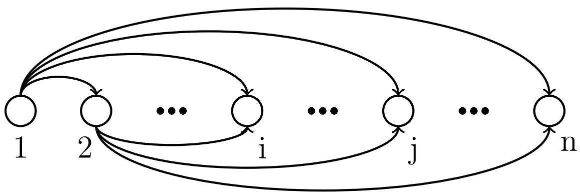


Рис. 13: Сопоставим элементам номера

Полученное отношение совпадает с отношением $\leqslant$ на множестве номеров. А про отношение $\leqslant$ мы знаем, что это отношение линейного порядка.

$\square$