Relat?rio-Copy2

December 14, 2018

In [1]:
```
%%javascript
MathJax.Hub.Config({
    TeX: { equationNumbers: { autoNumber: "AMS" } },
    tex2jax: {
        inlineMath: [ ['$','$'], ["\\(","\\)"] ],
        displayMath: [ ['$$','$$'], ["\\[","\\]"] ],
        processEscapes: true,
        processEnvironments: true
    },
    displayAlign: 'center', // Change this to 'center' to center equations.
    "HTML-CSS": {
        styles: {'.MathJax_Display': {"margin": 500}}
    }
});
```

```
<IPython.core.display.Javascript object>
```

In [2]:
```
import matplotlib
import numpy as np

%matplotlib
```

```
Using matplotlib backend: TkAgg
```

0.0.1 Primeira Questão

a) Modelo matemático Faremos então a dedução do primeiro problema tomando as seguintes variáveis

Q - concentração
Z - vazão
V - volume
S - quantidade de sal

Para determinar a concentração $Q(t)$ em um dado momento qualquer, faremos

$$Q(t) = \frac{S(t)}{V(t)} \tag{1}$$

onde:

$$V(t) = V_0 + (Z_{in} - Z_{out})t \tag{2}$$

Sabemos que a variação da quantidade de sal $dS(t)$ é dada pela diferença entre a entrada e a saída de sal em um dado instante t, isto é

$$dS(t) = S_{in} - S_{out}$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{dS_{in}}{dt} - \frac{dS_{out}}{dt}$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d(Q_{in}(t) \cdot V_{in}(t))}{dt} - \frac{d(Q_{out}(t) \cdot V_{out}(t))}{dt}$$

$$S'(t) = (Q'_{in}(t) \cdot V_{in}(t) + Q_{in}(t) \cdot V'_{in}(t)) - (Q'_{out}(t) \cdot V_{out}(t) + Q_{out}(t) \cdot V'_{out}(t))$$

Assumindo que a água que entra no tanque é pura, a concentração de entrada Q_{in} é zero, então

$$S'(t) = -(Q'_{out}(t) \cdot V_{out}(t) + Q_{out}(t) \cdot V'_{out}(t))$$

Uma vez que a massa de água que sai em um instante estacionário é nula, podemos assumir que o termo $Q'_{out}(t) \cdot V_{out}(t) = 0$, que nos deixa com o seguinte resultado

$$S'(t) = -Q_{out}(t) \cdot V'_{out}(t)$$

Contudo, sabemos que a vazão é dada por meio de:

$$Z(t) = V'(t) \tag{3}$$

Assim, assumimos por meio de (3) que $S'(t)$ é dada pela concentração de sal no tanque $S(t)$ multiplicado pela vazão de saída do tanque V_{out}

$$S'(t) = -Q(t) \cdot Z_{out} \tag{4}$$

Substituindo (1) e (2) em (4), teremos:

$$S'(t) = -\frac{S(t)}{V(t)} \cdot Z_{out} \tag{5}$$

Assim, nossa EDO será:

$$S'(t) + \frac{Z_{out}}{V_0 + (Z_{in} - Z_{out})t} \cdot S(t) = 0 \tag{6}$$

Com a substituição dos valores dados na questão em (6), teremos:

$$S'(t) + \frac{4}{100 + 2t} \cdot S(t) = 0 \tag{7}$$

Em posse dessa equação diferencial podemos realizar os procedimentos para determinar qual sua solução exata para a quantidade de sal no tanque $S(t)$ em um dado instante t. Para isto podemos resolver como uma equação diferencial trivial:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{4}{100+2t} \cdot S(t) \therefore \frac{dS(t)}{S(t)} = -\frac{4dt}{100+2t}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \int \frac{dS(t)}{S(t)} &= -\int \frac{4dt}{100+2t} \\ \ln(S(t)) &= -4 \int \frac{dt}{100+2t} \end{aligned} \tag{8}$$

A integral $\int \frac{4dt}{100+2t}$ pode ser resolvida por substituição fazendo:

$$u = 100 + 2t \therefore du = 2dt \therefore dt = \frac{du}{2}$$

Realizando a substituição em (8)

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) &= -4 \int \frac{du}{2u} \\ \ln(S(t)) &= -2 \ln u \\ \ln(S(t)) &= -2 \cdot \ln(100 + 2t) + C \end{aligned}$$

Removendo o logarítmo, concluimos então que $S(t) = e^C \cdot (100 + 2t)^{-2}$
Que pode ser reescrito como:

$$S(t) = \frac{C}{(100+2t)^2}, \text{ onde C é uma constante arbitrária} \tag{9}$$

Como a quantidade de sal inicial no tanque de água é dada por $S(0) = 30$, podemos concluir que para esse PVI(Problema de valor Inicial) a constante C será descrita por:

$$\begin{aligned} 30 &= \frac{C}{(100 + 2 \cdot 0)^2} \\ C &= 30 \cdot 100^2 \\ C &= 3 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

O que nos deixa com a equação

$$S(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}, \text{ onde C é uma constante arbitrária} \tag{10}$$

Concentração de sal em 50 minutos E podemos aplicar essa equação para determinar o valor $S(50)$:

$$S(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2 \cdot 50)^2}$$

$$S(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^4}$$

$$S(t) = 7.5g$$

---

c) Limite no infinito para esse problema Aplicamos o limite no infinito sobre (10) para estudar o comportamento assintótico da função sobre o infinito, que resulta em:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2t)^2}$$

Que é um limite polinomial clássico e que nos dá como resultado que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{3 \cdot 10^5}{(100 + 2t)^2} = 0$$

Essa solução nos permite interpretar que em um longo período de tempo o sistema tende a alcançar o equilíbrio com a concentração de sal que estava presente na água que entra, isto é, o sistema tende assintóticamente a se tornar um sistema com água pura.

0.0.2 Segunda Questão

Resolvendo a EDO Segundo a Lei de Resfriamento de Newton,

$$T' = -k \cdot (T - T_a) \tag{11}$$

Onde,
T - temperatura do corpo no instante t
T_a - temperatura constante do ambiente
t - tempo
k - constante

Resolvendo a EDO, teremos:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_a)$$

$$\frac{1}{T - T_a} \cdot dT = -k \cdot dt$$

Integrando os dois lados

$$\int \frac{1}{T - T_a} \cdot dT = -\int k \cdot dt$$

$$\ln(T - T_a) = -kt + C_2 - C_1$$

Para tirar o $\ln(T - T_a)$, faremos

$$e^{ln(T-T_a)} = e^{-kt+c}$$

Logo,

$$T - T_a = e^{-kt} \cdot e^c$$

$$T - T_a = e^{-kt} \cdot C \tag{12}$$

---

a) Determinando o tempo da morte Para encontrar o valor da constante C, usaremos a informação dada de que $T(0) = 30°C$ e $T_a = 20°C$, ou seja

$$30 - 20 = e^{-k \cdot 0} \cdot C$$

$$C = 10 \tag{13}$$

Substituindo (13) em (12),

$$T - T_a = e^{-kt} \cdot 10 \tag{14}$$

A outra informação dada no problema nos permitirá encontrar a constante k:
Sabendo que em $T(2) = 23°C$,

$$23 - 20 = e^{-2k} \cdot 10$$

$$\frac{3}{10} = e^{-2k}$$

Aplicando ln nos dois lados,

$$\ln(\frac{3}{10}) = \ln(e^{-2k})$$

$$\ln(\frac{3}{10}) = -2k$$

Achamos k:

$$k = -\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{10})$$

$$k = \frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3}) \tag{15}$$

Agora em posse dessas informações poderemos substituir a constante k encontrada em (14), deduzindo assim a equação final

$$T - T_a = 10e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3})t} \tag{16}$$

Agora que possuimos as constantes, poderemos determinar a hora aproximada do crime substituindo os valores dados em (16):

$$37-20=10e^{-\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3})t}$$

$$17=10e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3})t}$$

$$\frac{17}{10}=e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3})t}$$

Aplicando ln:

$$\ln(\frac{17}{10})=\frac{1}{2}\ln(\frac{10}{3})t$$

$$2\ln(\frac{17}{10})=\ln(\frac{10}{3})t$$

$$2\ln(1.7)=\ln(10)-\ln(3)t$$

Encontramos t:

$$t=2\frac{\ln(1.7)}{\ln(10)-\ln(3)}$$

Sabemos que $ln(1.7)\simeq 0.53$, $ln(10)\simeq 2.3$ e $ln(3)=1.1$,

$$t=2\cdot\frac{0.53}{1.2}$$

$$t\simeq 0.88 \text{ horas}$$

Em minutos, $t_{min}=t\cdot 60$, ou seja,

$$t_{min}\simeq 53 \text{ minutos}$$

Sabemos que o corpo levou cerca de 53 minutos para sair de $37°C$ para a temperatura de $30°C$, ou seja, a morte ocorreu por volta de 53 minutos antes dele ter sido encontrado.

---

b) De $100°$ **a** $30°$ Consideramos esses valores para deduzir as questões conforme a solução anterior:
$T_a=20°C$
$T(0)=100°C$
$T(20)=60°C$

Conforme o procedimento realizado anteriormente encontraremos o C substituindo os valores de $T(0)$ e T_a acima em (12)

$$100-20=e^{-k\cdot 0}\cdot C$$

$$C=80 \tag{17}$$

Agora encontraremos k substituindo os valores de e^c, $T(20)$ e T_a acima em (12)

$$60 - 20 = 80e^{-20k}$$

$$1/2 = e^{-20k}$$

Aplicando ln nos dois lados da equação:

$$\ln(1/2) = -20k$$

Achamos o valor da constante k:

$$k = -\frac{1}{20}\ln(1/2)$$

$$k = \frac{1}{20}\ln(2) \tag{18}$$

Substituindo os valores encontrados de T_a, k e C em (12), obtemos a equação do corpo abaixo

$$T - 20 = 80e^{-\frac{1}{20}\ln(2)t} \tag{19}$$

O tempo necessário para a temperatura chegar 30C será dado por

$$30 - 20 = 80e^{-\frac{1}{20}\ln(2)t}$$

$$1/8 = e^{-\frac{1}{20}\ln(2)t}$$

Aplicando o ln

$$\ln(1/8) = -\frac{1}{20}\ln(2)t$$

$$t = -20 \cdot \frac{\ln(1/8)}{\ln(2)}$$

$$t = 20 \cdot \frac{\ln(8)}{\ln(2)}$$

$$t = 20 \cdot \frac{3 \cdot \ln(2)}{\ln(2)}$$

$$t = 60 \text{ minutos} \tag{20}$$

O que nos permite saber que o corpo leva cerca de 60 minutos para ir de $100°C$ até $30°C$

0.0.3 Terceira Questão

b) Resolvendo a EDO Analisando a EDO dada na questão:

$$V'(t) = \frac{2000 - 2V(t)}{200 - t} \tag{21}$$

Teremos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2000 - 2V(t)}{200 - t}$$

$$\frac{dV}{2000 - 2V} = \frac{dt}{200 - t}$$

Integrando os dois lados, teremos

$$\int \frac{1}{2000 - 2V} dV = \int \frac{1}{200 - t} dt$$

$$-\frac{1}{2} \ln(2000 - 2V) + C_1 = -\ln(200 - t) + C_2$$

$$\frac{1}{2} \ln(2000 - 2V) = \ln(200 - t) + c$$

$$e^{\frac{1}{2} \ln(2000 - 2V)} = e^{\ln(200 - t) + c}$$

$$e^{\ln((2000 - 2V)^{\frac{1}{2}})} = e^{\ln(200 - t)} e^{c}$$

$$(2000 - 2V)^{\frac{1}{2}} = (200 - t) \cdot e^{c}$$

Elevando os dois lados a 2 para retirar o $\frac{1}{2}$

$$((2000 - 2V)^{\frac{1}{2}})^2 = ((200 - t) \cdot e^{c})^2$$

$$2000 - 2V = e^{2c}(200 - t)^2$$

$$V = \frac{2000 - e^{2c}(200 - t)^2}{2}$$

Assumindo que $e^{ec} = C$

$$V = \frac{2000 - C(200 - t)^2}{2} \tag{22}$$

Sabendo que $V(0) = 0$, teremos

$$C(200)^2 = 2000$$

$$C = \frac{2000}{40000}$$

$$C = \frac{1}{20} \tag{23}$$

Substituindo (23) em (22)

$$V = \frac{2000 - \frac{1}{20} \cdot (200 - t)^2}{2} \tag{24}$$

Usaremos a (24) para calcular a velocidade exata para quando $t = 5$

$$V = \frac{2000 - \frac{1}{20} \cdot (200 - 5)^2}{2}$$

$$V = \frac{2000 - 1901.25}{2}$$

$$V = 49.375 \tag{25}$$