# Homework 6

## Algorithm Design

- 8-1

  (a) 成立。区间调度是一个NP问题，然后所有NP问题都可以reduce成为一个顶点覆盖问题。所以成立。

  (b)这个等同于P是否等于NP。如果P=NP时，独立集可以在线性时间被解决，所以独立集$\leq_P$区间调度。相反，如果独立集$\leq_P$区间调度，那么因为区间调度可以线性时间解决，所以独立集业能在线性时间解决。但是独立集是NP完全的，所以解决它相当是P=NP。

- 8-21

  我们可以在多项式时间内得到该问题的一个解，随机获取A1，A2，A3的一组值，若恰好是{Linux, emacs, rmail}，则正好得到一个解，所以该问题至少为NP问题。

  接着，我们证明$3-SAT \leq_p Fully\ Compatible\ Configuration$。首先，为每个自居创建一个选项集，每个选项集有三个选项，选项与配置中的选项相对应。如果与这两个配置相对应的变量与变量及其取反相对应，则$A_i$中的一个选项与$A_j$中的一个选项不相容。如果对于该$3-SAT$实例有完全分配，那么可以从每个子句中选择一项，使我们永不会选择同一个变量和它的否定。因此，选项的选择将不存在不相容性。所以我们可以设置所有变量，以满足$3-SAT$。

  因此对于所有3SAT问题，我们都可以转化成为Fully Compatible Configuration问题。因此，得证，该问题为NPC问题。

- 8-27

  该问题是NP问题，因为在多项式时间内可以把数字划分成集合，然后使得这些集合的和的平方相加起来。

  因为我们知道$Partition\ Problem$是一个NPC问题，它可以reduce成为该题。所以我们只需要验证给出一组数$x_1, x_2 ... x_n$能否被分成两个相同和的集合。我们用k = 2， B =$\frac{1}{2}S^2$ ,$S = \sum_{i=1}^{n} x_i$创建该问题的一个实例。

  当存在上述情况时，把求和平方得到 $(\frac{S}{2})^2 = \frac{1}{4}S^2$，两者相加得到$\frac{1}{2}S^2 = B$ 。相反我们得到两个求和分别为$S_1$和$S_2$,因为有$S_1 + S_2 = S$并且$S_1^2 + S_2^2 = \frac{1}{2}S$所以这两个集合形成$Partition\ Problem$的答案。

- 8-28

  该问题是NP问题，因为在多项式时间内我们可以选出一个k个节点的集合，并查集合中所有组合至少距离为3(三条边)。

  接着，证明Independent Set $\leq_p$ Strongly Independent Set. 将独立集规约到强独立集就证明了该问题是NPC问题

  假设图G和一个数k，在G中有大小为k的独立集。构建一个新的G‘，在G'中我们在G的基础上为每两个顶点之间加入一个新的顶点，用来构成图G'。因此，我们可以发现原本在G中大小为k的独立集在新图G'中两两距离至少为3，即为一个强独立集。因此只需要在秋节Independent Set问题的时候构建一个图G'，然后求解其中的Strongly Indepent Set问题。

  因此，就能得到Independent Set $\leq_p$ Strongly Independent Set，所以该问题为NPC

- 8-31

  该问题是NP问题，因为我们可以使用深度优先搜索(多项式时间)去判断G-X是否无环。

接着证明：顶点覆盖问题$\leq_p$无向反馈集

在图G中每条边上插入两个节点，即$\forall(u,v)\in E$插入$w_1,w_2$使得$(u,w_1),(w_1,v),(u,w_2),(w_2,v)\in E_1$构成新图$G_1(V_1,E_1)$。图G中大小为k的顶点覆盖$X_1$对新构成边之外的边，图$G_1-X_1$必定无环。对新构成的环（4条边），其中心有一条的顶点在$X_1$中放置也无法成环。$G_1-X_1$无环，所以$X_1$是无向反馈集。若$X_2$为$G_1$中大小为k的无向反馈集。由$G_1$性纸可知，每个环都有至少1个点在$X_2$中，由于$G_1$中每个最小环都由G中边对应而成，所以$X_2$为G中的顶点覆盖，即为顶点覆盖问题$\leq_p$无向反馈集，得证