Homework 7

- 9-1

  这个问题可以在多项式时间内解决。

  设A是下标为奇数的变量的集合，B是下标为偶数的变量的集合。

  如果所有子句中都含有一个A中的变量，那么给A中所有变量都赋值为1，最后结果必定也为1。反之，如果子句中不包含A中的变量，那么这个子句中必然3个变量都是B中的变量，那么只要将B的3个变量赋值为0，那么该命题就是0

  所以，我们可以将该问题reduce为一个普通的可解问题，所以这个问题是可以在多项式时间内解决。

- 9-2

  该问题是PSPACE完全的。

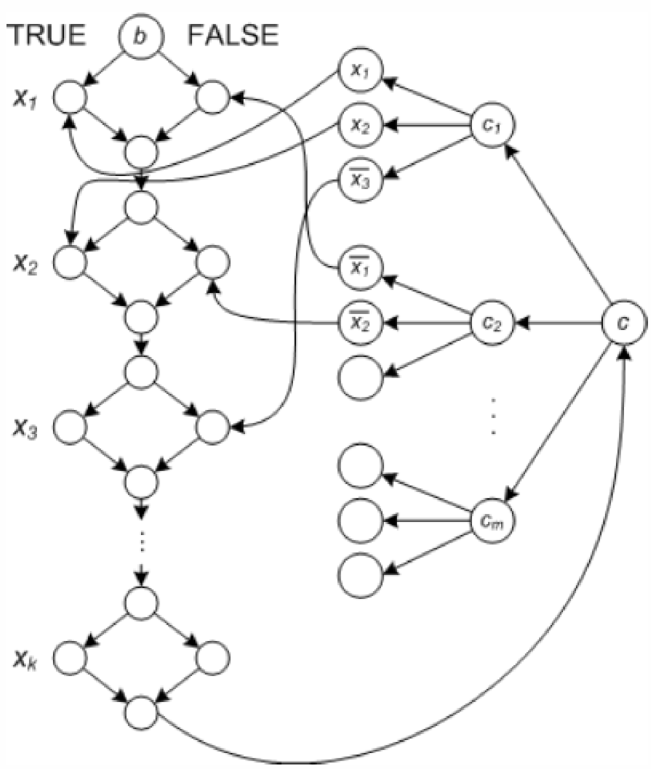
  先验证PSCAECE时间内可验证，现有一个算法：

  设M = “对输入<G,s> , G是一个有向图，s是G上的节点：

  1. 若s出度为0，则拒绝，因为第一个人会输
  2. 删去节点b以及关联的箭头，从而得到新图G_1
  3. 对于b原先指向的每个节点$b_1, b_2, ..., b_k$ 在<G_1, b_i>使用递归调用M
  4. 若所有调用都能接受的话，则说明第二个人有必胜策略，所以拒绝。否则，第二个人没有必胜策略，所以第一个人有必胜策略，所以接受。

  因为该算法可以在线性空间内运行，空间复杂度为$O(n)$。

  接着证明QSAT问题可以在多项式时间可归约到该问题上。将 $\phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots \mathrm{Q} x_k[\psi]$ 映射到该问题中的一个$< G, s >$。其中第一个人掌控QSAT中的奇数集，第二个人掌控偶数集。



游戏从s开始，第一个人选择左边，则x_1为true，选择右边为false。此时该第二个人选择，因为只有一条出边，所以这一步没有选择，同理，第一个人的下一步也没有选择。游戏到达第二个钻石顶部时，此时由第二个人选择。随着游戏以这种方式进行，第一个人和第二个人通过选择左或右的路径通过每一个钻石路径。当到达路径末尾时，且轮到第一s个人走，走到c后，b走。此时，QSAT的游戏已经完成，通过给钻石的路径就可以给ψ赋值,如果为true，则QSAT为true。

在右边的部分中（节点c开始的部分），第二个人可以选择对应于QSAT中某个子句的一个节点，然后第一个人再在其中选择对应该子句中某个x的节点，下一步选择和钻石中的很类似，如上图，TRUE则左，FALSE则右。如果这时候ψ为false，则第二个人可以选择性的获胜，因为可以选择不满足的子句，第一个人这时候就发现之前已经走过了，所以第一个人输了。如果ψ为true，则说明第二个人选择的所有子句都true，最后第二个人会无路可走输掉。

通过上述步骤就可以将QSAT归约在该问题中，得证。

参考文献：https://www.doc88.com/p-2748104693410.html

- 9-3

通过拓扑排序和动态规划来解决这个问题。

先将整个图用拓扑排序来标号，并定义Win(i)为：下标为i的节点，从这个节点出发第一个人是否必胜（A必胜则为1，B必胜则为0）。先将所有出度为0的点标记为0。

假设有n个节点，从第n个节点开始降序遍历所有节点，其中第n个节点必定Win(n) = 0。遍历过程中，设当前节点下标为j，如果存在一个边为(v_j, v_k)，且Win(k) = 0，则Win(j) = 1；反之Win(j) = 0。通过动态规划不断遍历到第一个点，就完成了。

该算法时间复杂度为$O(n^2)$