Operacje arytmetyczne

Twierdzenie o błędzie obliczeń

Jeśli $|\alpha_j|\le u$ i $\rho_j=\pm1$ dla $j=1,2,...,n$ oraz $nu<1$, to zachodzi: $\prod_{j=1}^n(1+\alpha_j)^{\rho_j}=1+\theta_n$ gdzie: $|\theta_n|\le\gamma_n=\frac{nu}{1-nu}\approx nu$.

Twierdzenie o błędzie obliczeń 2

Jeśli $|\alpha_j|\le u$ dla $j=1,2,...,n$ oraz $nu<10^{-k}$, gdzie $k\in\mathbf{N}_+$ to zachodzi: $\prod_{j=1}^n(1+\alpha_j)=1+\eta_n$ gdzie $|\eta_n|\le(1+10^{-k})nu$ Niech $X_{fl}:=\{rd(x):x\in X\}$. $u=\frac{1}{2}2^{-t}$ i jest to precyzja arytmetyki.

Uwarunkowanie zadania

Jeśli niewielkie względne zmiany danych zadania powodują duże względne zmiany jego rozwiązania, to zadanie jest **źle uwarunkowanym.** Wielkości charakteryzujące wpływ zaburzeń danych na odkształcenia rozwiązania nazywamy **wskaźnikiem uwarunkowania** zadania.

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}\right|\approx\left|\frac{hf'(x)}{f(x)}\right|$$
$$=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\left|\frac{h}{x}\right|=C_f(x)\cdot\left|\frac{h}{x}\right|$$

$C_f(x)$ jest *wskaźnik uwarunkowania*.

Poprawność numeryczna

Niech $\overline{y}=Alg(x)$ tzn. $\overline{y}$ jest wynikiem działania pewnego algorytmu wtedy, jeśli dla pewnego $\Delta x,\Delta y$ zachodzi $\overline{y}+\Delta y=f(x+\Delta x)$ tzn. **wynik jest lekko zaburzony dla lekko zaburzonych danych** to algorytm jest **numerycznie poprawny**.

Jeśli $\Delta y=0$ to algorytm jest **numerycznie "bardzo" poprawny** i to oznacza że algorytm daje **wynik dla lekko zaburzonych danych.**

Równania nieliniowe

Zera wielokrotne

Twierdzenie: Jeśli $f\in C^m[a,b]$ oraz $a<\alpha<b$ i zachodzi:
$$f(\alpha)=f'(\alpha)=...=f^{(m-1)}(\alpha)=0$$
oraz $f^{(m)}(\alpha)\neq0$ to α jest **m-krotnym zerem funkcji f.**

Analiza zbieżności

Niech ciąg $\{a_k\}$ będzie zbieżny do g. Jeśli istnieją takie liczby rzeczywiste p oraz $C,(C>0)$, że
$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}-g}{(a_n-g)^p}\right|=C$$
to p nazywamy **wykładnikiem zbieżności ciągu,** a C - **stałą asymptotyczną błędu**.

Metoda Newtona

Algorytm

Niech $f\in C[a,b]$, wtedy budujemy ciąg x_n, taki że: $x_{n+1}=x_n+h_n$, gdzie $h_n:=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dla $n\in\mathbf{N}$.

Zbieżność

Niech $e_n:=x_n-\alpha$, $F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, oraz $e_{n+1}=\frac{1}{2}F''(\eta_n)e_n^2$ gdzie $\eta_n\in interv(x_n,\alpha)$.

Twierdzenie: Jeśli przybliżenie x_0 jest dostatecznie bliskie pojedynczego zera α równania $f(x)=0$ to metoda Newtona jest zbieżna kwadratowo do α. **Twierdzenie:** Jeśli $sgn(f'(x))=sgn(f''(x))\neq0$ dla $x\in\mathbf{R}$, oraz α jest pojedynczym pierwiastkiem równania $f(x)=0$. Wówczas α jest jedynym pierwiastkiem tego równania i Metoda Newtona zbiega dla dowolnego początkowego x_0. **Twierdzenie:** Jeśli $f\in C^2[a,b]$, $f'(x)f''(x)\neq0$ dla dowolnego $x\in[a,b]$ i że $f(a)f(b)<0$ oraz $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|<b-a$, $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|<b-a$ to metoda Newotna jest zbieżna dla dowolnego $x_0\in[a,b]$.

Dla r-krotnego pierwiastka

$x_{n+1}=x_n+r_nh_n$, gdzie $h_n:=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $r_n:=\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2x_{n-1}-x_n-x_{n-2}}$

Metoda siecznych

Jest ona podobna do metody Newtony, tylko że w miejscu $f'(x_n)$ używamy **ilorazu różnicowego.**
$$f[x_{n-1},x_n]:=\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$$

Pierwiastki wielomianów

Twierdzenie: - Wszystkie pierwiastki wielomianu leżą w kole otwartym o środku w punkcie 0 płaszczyzny zespolonej i promieniu $R:=1+\frac{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k|}{|a_0|}$

Metoda Leguerre'a

$z_{k+1}=z_k-\frac{nw(z_k)}{w'(z_k)\pm\sqrt{H(z_k)}}$ $H(x):=(n-1)[(n-1)w'^2(x)-nw(x)w''(x)]$

Znak $\pm$ należy wybrać by $|z_{k+1}-z_k|$ było jak najmniejsze. Algorytm ten jest zbieżny **sześciennie** do pierwiastków pojedynczych rzeczywistych bądź zespolonych. Metoda ta jest zbieżna **globalnie** gdy wielomian ma tylko pierwiastki rzeczywiste.

Interpolacja

Mając dane: $[x_0,x_1,...,x_n]$ oraz $[y_0,y_1,...,y_n]$, znaleźć taki wielomian $L_n(x)$ stopnia conajwyżej n o własnościach: $L_n(x_i)=y_i$, $i=0,1,...,n$

Postać Lagrange'a

$L_n(x)=\sum_{k=0}^n y_k\lambda_k(x)$, gdzie:
$\lambda_k(x)=\prod_{j=0,j\neq k}^n\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$
Wielomian ten jest, wielomianem najniższego stopnia interpolującym zadane punkty.

Postać barycentryczna

Niech $\sigma_k=\prod_{j=0,j\neq k}^n\frac{1}{x_k-x_j}$, wtedy:
$$L_n(x)=\begin{cases}\frac{\sum_{k=0}^n\frac{\sigma_k}{x-x_k}y_k}{\sum_{k=0}^n\frac{\sigma_k}{x-x_k}}, & \text{gdy } x\notin X\\ y_k, & \text{wpp.}\end{cases}$$
gdzie $X=\{x_0,x_1,...,x_n\}$.

wariant wzoru Lagrange'a

Ponieważ $\sigma_k=\frac{1}{p'_{n+1}(x_k)}$ to $L_n(x)=p_{n+1}(x)\sum_{k=0}^n y_k\frac{\sigma_k}{x-x_k}$

Twierdzenia

Niech wielomian $L_n(x)$ postaci Langrange interpoluje funkcje f w $n+1$ węzłach wtedy następujące równości są prawdziwe: $\sum_{k=0}^n\lambda_k(x)=1$
$$\sum_{k=0}^n\lambda_k(0)x_k^j=\begin{cases}1 & j=0,\\ 0 & j\in\mathbf{N_{\le n}}.\end{cases}$$

Postać Newtona

Niech $p_0(x)=1, p_k=\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)$ gdy $k=1,2,...,n+1$ oraz $b_k=\sum_{i=0}^k\frac{y_i}{p'_{k+1}(x_i)}=\sum_{i=0}^k\frac{y_i}{\prod_{j=0,j\neq i}^k(x_i-x_j)}$ gdy $k=0,1,...,n$.

Wtedy $L_n(x)=\sum_{k=0}^n b_kp_k(x)$

Twierdzenie błędu interpolacji

Jeśli $f\in C^{n+1}[a,b]$, a wielomian $L_n\in\Pi_n$ jest wielomianem interpolującym f w $n+1$ węzłach w przedziale $[a,b]$, to dla każdego $x\in[a,b]$ zachodzi równość $f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)(\xi_x)}}{(n+1)!}p_{n+1}(x)$ gdzie ξ_x jest pewną liczbą zależną od x z przedział $[a,b]$

Maksymalny błąd interpolacji

Jeśli $f\in C^{n+1}[-1,1]$ to $||f(x)-L_n(x)||_\infty^{[-1,1]}\le\frac{M_{n+1}P_{n+1}}{(n+1)!}$, gdzie $M_{n+1}=||f^{(n+1)}(x)||_\infty^{[-1,1]}$, a $P_{n+1}=||p_{n+1}(x)||_\infty^{[-1,1]}$.

Iloraz różnicowy

$$p[x_0,x_1,...,x_n]\overset{def}{=}\sum_{i=0}^n\frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n(x_i-x_j)}$$
$$p[x_0,...,x_n]\overset{def}{=}\frac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$
$$p[\overset{\text{r razy}}{x_0,...,x_0}]\overset{def}{=}\frac{1}{(r-1)!}f^{(r-1)}(x_0)$$

Wielomiany Czybyszewa

Definicja

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,$$
$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$$
$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$$

Ekstrema i miejsca zerowe

Dla zadanego $T_k(x)$ punkty ekstremalne to $u_{kj}=\cos(\frac{j\pi}{k})$ dla $j=0...k$ natomiast miejsca zerowe to $t_{kj}=\cos\frac{(2j+1)\pi}{2k}$ dla $j=0...(k-1)$

Twierdzenie

Każdy wielomian $w\in\Pi_n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $w(x)=\sum_{k=0}^n{}'c_kT_k(x)$

Twierdzenie 2

Wielomian $\tilde{T}_n(x):=2^{(1-n)}T_n(x)$ ma najmniejszą normę w przedziale $[-1,1]$ spośród wszystkich wielomianów stopnia $\le n$, o współczynniku wiodącym 1.

Interpolacja

Wielomian $I_n\in\Pi_n$ interpolujący funkcje f w węzłach $t_j=t_{n+1,j}=\cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi$ można zapisać w postaci $\sum_{k=0}^n{}'\alpha_kT_k(x)$, gdzie $a_k=\frac{2}{n+1}\sum_{j=0}^n f(t_j)T_k(t_j)$. Wielomian $J_n\in\Pi_n$ interpolujący funkcje f w węzłach $u_j=u_{n,j}=\cos\frac{\pi j}{n}$ można zapisać wzorem $\sum_{k=0}^n{}''\beta_kT_k(x)$ gdzie $\beta_k=\frac{2}{n}\sum_{j=0}^n{}''f(u_j)T_k(u_j)$

Twierdzenia

Fabera

Dla każdej tablicy węzłów $\{x_{nk}\}$ istnieje taka funkcja ciągła w przedzialie $[a,b]$, do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest zbieżny jednostajnie (tj. taka, że $\max_{a\le x\le b}|f(x)-L_n(x)|\nrightarrow 0$).

Kryłow

Niech dana będzie funkcja $f\in C^1[-1,1]$ i niech $\{L_n\}$ będzie ciągiem wielomianów interpolujących funkcję f w węzłach Czybyszewa. Wówczas dla $\forall x\in[-1,1]$ jest $\lim_{n\to\infty}L_n(x)=f(x)$.

Funkcje sklejane

Typy funkcji

naturalna - $s''(a)=s''(b)=0$
zupełna - $s'(a)=f'(a)$ i $s'(b)=f'(b)$
okresowa - $s'(a)=s'(b)$ oraz $s''(a)=s''(b)$ jeśli f jest okresowa z okresem $b-a$

Wzór dla naturalnej

Definiujemy następujące wartości $h_k=x_k-x_{k-1}$, $\lambda_k=\frac{h_k}{h_k+h_{k+1}}$, $M_0=M_n=0$, $\lambda_kM_{k-1}+2M_k+(1-\lambda_k)M_k+1=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}]$ wtedy dla każdego przedziału $[x_{k-1},x_k]$ $s(x)=h_k^{-1}[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k-x)^3+\frac{1}{6}M_k(x-x_{k-1})^3+(f(x_{k-1})-\frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k-x)+(f(x_k)-\frac{1}{6}M_kh_k^2)(x-x_{k-1})]$

Twierdzenie Holladay-a

W klasie funkcji $F \in C^2[a,b]$ oraz spełniających $F(x_k)=y_k$ najmniejsza wartość całki $\int_a^b [F''(x)]^2dx$ ma funkcja naturalna funkcja sklejana III-stopnia s. Przy tym $\int_a^b [s''(x)]^2dx = \sum_{k=1}^{n-1}(f[x_k,x_{k+1}]-f[x_{k-1},x_k])M_k$.

Obliczanie M_k

Algorytm $q_0=u_0=0, p_k=\lambda_k q_{k-1}+2, q_k=\frac{(\lambda_k-1)}{p_k}, u_k=\frac{d_k-\lambda_k u_{k-1}}{p_k}, d_k=6f[x_{k-1},x_k,x_{k+1}], M_{n-1}=u_{n-1}, M_k=u_k+q_kM_{k+1}$

Aproksymacja

Norma

Wzór $\langle f,g\rangle := \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$ definiuje **iloczyn skalarny** funkcji $f,g\in C_p[a,b]$.
Norma średniokwadratowa $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)dx}$. **Norma jednostajna** $||f||_\infty^T = \sup_T|f(x)|$

Ortogonalizacja

Gram-Schmidt

$$\begin{cases} g_1 := f_1 \\ g_k := f_k - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle f_k,g_i\rangle}{\langle g_i,g_i\rangle}g_i \quad (k=2,3,...,m)\end{cases}$$

Wielomiany Ortogonalne

$\overline{P_0}(x)=1$, $\overline{P_1}(x)=x-c_1$, $\overline{P_k}(x)=(x-c_k)\overline{P_{k-1}}(x)-d_k\overline{P_{k-2}}(x)$, $c_k=\frac{\langle x\overline{P_{k-1}},\overline{P_{k-1}}\rangle}{\langle \overline{P_{k-1}},\overline{P_{k-1}}\rangle}$ $d_k=\frac{\langle\overline{P_{k-1}},\overline{P_{k-1}}\rangle}{\langle\overline{P_{k-2}},\overline{P_{k-2}}\rangle}$,jeśli $p(x)$ jest funkcją parzystą na przedziale $[-a,a]$ to $\forall_k c_k=0$, oraz $\overline{P_{2m}}(x)$ jest funkcją parzystą, a $\overline{P_{2m+1}}(x)$ jest nieparzystą dla każdego $m\in\mathbf{N}$

Wielomian optymalny

$w_n^*=\sum_{k=0}^n \frac{\langle f,P_k\rangle}{\langle P_k,P_k\rangle}P_k$, natomiast n-ty błąd aproksymacji jest równy $||f-w_n^*||_2=\sqrt{||f||_2^2-\sum_{k=0}^n\frac{\langle f,P_k\rangle^2}{\langle P_k,P_k\rangle}}$

Algorytm Clenshawa

Niech $s_n=\sum_{k=0}^n a_kP_k$ oraz niech $P_0=\alpha_0$, $P_1=(\alpha_1x-\beta_1)P_0$, $P_k=(\alpha_kx-\beta_k)P_{k-1}-\gamma_kP_{k-2}$, wtedy $a_k=V_k-(\alpha_{k+1}x-\beta_{k+1})V_{k+1}+\gamma_{k+2}V_{k+2}$, gdzie $V_{n+1}=V_{n+2}=0$. Wynikiem tego algoytmu jest $s_n(x)=\alpha_0V_0$.

Twierdzenie o alternansie

Niech T będzie dowolnym podzbiorem domkniętym przedziału $[a,b]$. Na to, by wielomian w_n był n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f\in\mathbf{C}(T)$ potrzeba i wystarczy, żeby istniały takie punkty $x_0,x_2,...,x_{n+1}\in T$, że dla $e_n:=f-w_n$ jest $e_n(x_k)=-e_n(x_{k-1})$ oraz $|e_n(x_j)|=||e_n|_\infty^T$. Zbiór punktów $x_0,x_1,...,x_{n+1}$, w których $||e_n||_\infty^T=\max_{x\in T}|e_n(x)|$ z naprzemiennymi znakami nazywamy n-tym alternansem funkcji f.

Kwadratura

Metoda punkta środkowego

$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

Metoda trapezów

$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$, złożony wzór $T_n(f):=h\sum_{k=0}^n{}''f(t_k)$, $R_n^T(f)=-(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi)$, gdzie $\xi\in(a,b)$

Metoda Simpsona

$\int_a^b f(x)dx\approx\frac16(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$, złożony wzór Simpsona $S_n(f):=\frac{h}{3}(2\sum_{k=0}^m{}''f(t_{2k})+4\sum_{k=1}^m f(t_{2k-1}))=\frac13(4T_n-T_m)$ gdzie $n=2m$, $R_n^S(f)=-(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\eta)$, gdzie $\eta\in(a,b)$.

Metoda Romberga

$T_{0,j}=T_j$ (Metoda trapezów), $T_{i,j+1}=\frac{4^{j+1}T_{i,j}-T_{i-1,j}}{4^{j+1}-1}$

Rząd metody

Niech $Q(f)=\sum_{k=0}^n A_kf(x_k)$, wtedy $R_n(f)=I_p(f)-Q(f)$ wtedy Q_n jest rzędu r, jeśli $\forall_{f\in\Pi_{r-1}}R_n(f)=0$ oraz $\exists_{w\in\Pi_r/\Pi_{r-1}}R_n(w)\neq0$. **Twierdzenie** Rząd $Q_n\le 2n+2$.

Kwadratury interpolacyjne

$Q_n(f)=\sum_{k=0}^nA_kf(x_k)\approx\int_a^bp(x)f(x)dx$, $A_k=\int_a^bp(x)\lambda_k(x)dx$, **Twierdzenie** Jeśli rząd $Q_n\le n+1$ to Q_n jest kw. interpolacyjną. **Twierdzenie Jacobego** Rząd $Q_n\le n+1+m$ gdzie $1\le m\le n+1$ wtw gdy spełnione są następujące warunki: Q_n jest interpolacyjny oraz $\forall_{u\in\Pi_{m-1}}I_p(w*u)=0$ gdzie $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$ **Twierdzenie** Aby rząd był $2n+2$, x_n muszą być zeremi $(n+1)$-ego wielomianu optymalnego.

Kwadratura Gaussa

$Q_n(f):=\sum_{k=0}^n A_k^{(n)}f(x_k^{(n)})$, $A_k^{(n)}=\int_a^bp(x)\lambda_k(x)dx$, $\lambda_k(x)=\frac{w(x)}{w'(x_k)(x-x_k)}$, $w(x)=\overline{P}_{n+1}(x)$. **Lemat** $A_k^{(n)}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{||P_n||^2}{P'_{n+1}(x_k)P_n(x_k)}$. **Lemat** $A_k^{(n)}>0$. **Lemat** $R_n(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!a_{n+1}^2}\int_a^bp(x)[P_{n+1}(x)]^2dx$, **Lemat** Jeśli $f\in\mathbf{C}[a,b]$ to $\lim_{n\to\infty}Q_n=I_p(f)$

Gauss-Czybyszew

$I_p(f)=\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx$, $Q_n^{GC}:=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}I_n(x)dx$, $I_n(t_k)=f(t_k)$, $t_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi$, $I_n(x)=\sum_{i=0}^n{}'\alpha_iT_i(x)$, $\alpha_i:=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^nf(t_k)T_i(t_k)$, $Q_n^{GC}:=\sum_{k=0}^nA_kf(t_k)$, $A_k=\frac{\pi}{n+1}$

Kwadratura Lobatto

$I_p(f)=\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx$, $Q_n^L=\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}J_n(x)dx$, $J_n(u_k)=f(u_k)$, $u_k=\cos\frac{k}{n}\pi$, $J_n(x)=\sum_{j=0}^n{}''\beta_jT_j(x)$, $\beta_j=\frac2n\sum_{k=0}^n{}''f(u_k)T_j(u_k)$, $Q_n^L(f)=\sum_{k=0}^n{}''A_kf(u_k)$,$A_k=\frac{\pi}{n}$, **Rząd** $2n$.

Clenshaw-Curtis

$I(f)=\int_{-1}^1f(x)dx$, $Q_n^{CC}(f)=\sum_{k=0}^n{}''A_k^{(n)}f(u_k)$, $A_k^{(n)}:=\frac4n\sum_{j=0}^{\frac n2}{}''\frac{T_{2j}(u_k)}{1-4j^2}$, jeśli n jest nieparzyste to powinien być jeden ' w wzorze na A_k

Algebra

Normy wektorowe

$||x||_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$, $||x||_2=\sqrt{\sum_{i=1}^nx_i^2}$, $||x||_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$

Norma macierzowa

DefinicjaMusi ona spełnić te same własności co norma oraz *podmultiplikatywność* tzn. $||AB||\le||A||\cdot||B||$ **Normy indukowane** $||A||:=\sup_{x\neq0}\frac{||Ax||}{||x||}:=\max_{||x||=1}||Ax||$. Przykłady $||A||_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|$, $||A||_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$, $||A||_2=\sqrt{\rho(A^TA)}$, ρ - największa wartość własna. $||A||_2$ nazywana jest również *normą spektralną*.**Normy zgodne** $\forall_{A\in R^{n\times n}}\forall_{x\in R^n}||Ax||\le||A||\cdot||x||$

Rozkład LU

Niech $A=[a_{i,j}]\in R^{n\times n}$ oraz nie jest ona osobliwa to istnieje dokładnie jedna para macierzy $L\in\mathbb{L}_n^{(1)}$ oraz $U\in\mathbb{U}_n^{(1)}$ taka że $LU=A$, oraz $det(A)=u_{11}u_{22}...u_{nn}$. **Rozkład:** dla $i=1,2,...,n$ $u_{i,j}=a_{i,j}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{i,k}u_{k,j}$, $j=i,i+1,...,n$, $l_{j,i}=\frac{1}{u_{i,i}}\left(a_{j,i}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{j,k}u_{k,i}\right)$ **Rozwiązanie** Jeśli $Ax=b$ to można rozwiązać układ $Ly=b$, $Ux=y$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy $Ax=b$, niech $A^{(1)}=[a_{i,j}^{(1)}]:=A$, $b^{(1)}=[b_1^{(1)},...,b_n^{(1)}]^T:=b$ wtedy $\sum_{j=k}^na_{k,j}^{(k)}x_j=b_k^{(k)}$, gdzie $a_k^{(k)}\neq0$ oraz $a_{i,j}^{(k)}=a_{i,j}^{(k-1)}+m_{i,k-1}a_{k-1,j}^{(k-1)}$, $b_i^{(k)}=b_i^{(k-1)}+m_{i,k-1}b_{k-1}^{(k-1)}$, $m_{i,k-1}=-\frac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}}$

Element główny $a_{k,k}^{(k)}$, dla $k=1,2,...,n$

Współczynnik wzrostu $g_n:=\frac{\max_{1\le i,j,r\le n}|a_{i,j}^{(r)}|}{\max_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|}$. Dla eliminacji z częściowym wyborem elementu głównego zachodzi $g_m\le2^{n-1}$. Dla pełnego wyboru ele. głównego zachodzi $g_n\le\phi(n)=\sqrt{n}\sqrt{2^13^{\frac12}...n^{\frac{1}{n-1}}}<1.8n^{\frac12+\log\frac n4}$ **Twierdzenie**: Niech $\overline{x}$ oznacz rozwiązanie układu $Ax=b$ w t-cyfrowej arytmetyce fl za pomocą metody eliminacji z wyborem. Wówczas istnieje macierz $\delta A\in R^{n\times n}$ spełniająca $||\delta A||_\infty\le Cn^3g_n2^{-t}||A||_\infty$ i taka, że $(A+\delta A)\overline{x}=b$.

Twierdzenie

Rozważmy $Ax=b$ oraz $(A+\delta A)(x+\delta x)=b+\delta b$, gdzie δAi δb są zaburzeniami macierzy A i wektora b. Załóżmy, że $\eta=||\delta A||\cdot||A^{-1}||=\text{cond}(A)\frac{||\delta A||}{||A||}<1$. Wówczas dla dowolnej pary norm zgodnych zachodzi $\frac{||\delta x||}{||x||}\le\frac{\text{cond}(A)}{1-\eta}\left(\frac{||\delta b||}{||b||}+\frac{||\delta A||}{||A||}\right)$, gdzie $\text{cond}(A)=||A||\cdot||A^{-1}||$

Metoda Richardsona

Definicja: $x^{(k+1)}=B_\tau x^{(k)}+c$ gdzie $B_\tau:=I-\tau A$, $c:=\tau b$, $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\tau\left(b_i-\sum_{j=1}^na_{i,j}x_j^{(k)}\right)$

Metoda Jacobiego

$B=B_J:=-D^{-1}(L+U)$, wersję skalarną opisuje wzór $x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{i,i}}(b_i-\sum_{j=1,j\neq i}^na_{i,j}x_j^{(k)}=x_i^{(k)}+\frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i-\sum_{j=1}^na_{i,j}x_j^{(k)}\right)$. Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną to $||B_J||_\infty<1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

Metoda Gaussa-Seidela

$B_S:=-(D+L)^{-1}U$, $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{i,j}x_j^{(k+1)}-\sum_{i=1}^na_{i,j}x_j^{(k)}\right)$

Metoda relaksacyjna

$B_\omega:=(I-\omega M)^{-1}(\omega N+(1-\omega)I)$, gdzie $M:=-D^{-1}L$, $N:=-D^{-1}U$. $x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{i,i}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{i,j}x_j^{(k+1)}-\sum_{i=1}^na_{i,j}x_j^{(k)}\right)$. Dla dowolnej nieosobliwej macierz A zachodzi $\rho(B_\omega)\ge|\omega-1|$. Jeśli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona to metoda relaksacyjna jest zbieżna dla każdego $\omega\in(0,2)$. Jeśli A jest macierzą symetryczną, dodatnio określoną i niech ma postać blokowo-trójprzekątniową to $\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(B_S)}}$. Optymalną wartością $\rho(B_\omega)=\omega_{opt}-1$