Funkcje całkowitoliczbowe
$\lfloor x\rfloor=n \iff n\leq x<n+1$, $\lceil x\rceil=n \iff n-1<x\leq n$, $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$, $\lfloor -x\rfloor=-\lceil x\rceil$, $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$, $\lceil x+n\rceil=\lceil x\rceil+n$, $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+\lceil \frac{n}{2}\rceil=n$

Symbole asymptotyczne
$f(n)=O(g(n)) \iff \exists_{c>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}|f(n)|\leq c\cdot|g(n)|$, $f(n)=\Omega(g(n)) \iff \exists_{c>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}|f(n)|\geq c\cdot|g(n)|$, $(n)=\Theta(g(n)) \iff \exists_{c,d>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}d\cdot|g(n)|\leq|f(n)|\leq c\cdot|g(n)|$, $f(n)\sim g(n) \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$, $f(n)=o(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$, $1\prec\log(\log(n))\prec a\cdot\log(n)\prec n\prec n^a\prec a^n\prec n!$

Fibonacci
$F_{n+m+}=F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m$, $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Algorytm Karatsuby
$M_0=A_0\cdot B_0, M_1=A_1\cdot B_1, M_2=(A_1+A_0)\cdot(B_1+B_0), M=2^nM_1+2^{\frac{n}{2}}(M_2-M_1-M_0)+M_0$, Czas: $O(n^{\log 3})$

Liczby pierwsze
Tw. Czybyszewa: $\Pi(n)=\Theta(\frac{n}{\log(n)})$

Chińskie tw. o resztach
Niech $x\equiv a_1 \mod m_1, x\equiv a_2 \mod m_2,\ldots,x\equiv a_k \mod m_k$ oraz $m=\prod_{i=1}^k m_i$, wtedy $x=\sum_{i=1}^k a_i\left((\frac{m}{m_i})^{-1} \mod m_i\right)\frac{m}{m_i}$

Funkcja Eulera
$n=p \implies \varphi(n)=p-1$, $n=p^k \implies \varphi(n)=p^{k-1}(p-1)$, $\varphi(n)=\prod_{i=1}^s p_i^{k_i}(1-\frac{1}{p_i})$, Tw. Eulera: $a\perp n \implies a^{\varphi(n)} \mod n=1$.

Zasada szufladkowa
Jeśli jest $k\cdot n+1$ kulek to w pewnej szufladce jest $k+1$ kulek.

Znak Newtona
$n^{\underline{k}}=\prod_{i=n-k+1}^n i=\frac{n!}{(n-k)!}$, $\binom{n}{k}=\frac{n^{\underline{k}}}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{n_1 n_2\ldots n_k}=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, $(a+b)^n=\sum_k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, $\sum_k\binom{n}{k}=2^n$, $\sum_k\binom{n}{k}2^k=\binom{n}{k}1^{n-k}2^k=3^n$, Tw. $\binom{m}{k}=\binom{m-1}{k}+\binom{m-1}{k-1}$

Zasada włączeń i wyłączeń
$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k|=\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq\ldots\leq i_s\leq k}(-1)^{s+1}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_s}|$

Grupy
Niech H będzie podgrupą G wtedy $gH=\{g\cdot h: h\in H\}$, $Hg=\{h\cdot g: h\in H\}$, Lemat: $g_1,g_2\in G \implies g_1H$ i g_2H są albo rozłączne albo $g_1H=g_2H$. Tw. Langrange'a $|G|=[G:H]\cdot|H|$, $[G:H]$ - liczba warstw wyznaczana przez H na G. $|H|\mid|G|$, $G_x=\{g:g(x)=x\}$ - stabilizator x, $O_x=\{y:\exists_g g(x)=y\}$ - orbita x. $|G|=|O_x|\cdot|G_x|$, $\#orbit=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)|$, gdzie $Fix(g)=\{x: g(x)=x\}$

Równiani rekurencyjne
Niech $p_ka_{n+k}+p_{k-1}a_{n+k-1}+\ldots+p_0a_n=f(n)$, jeśli $f(n)=0$ to jest jednorodne.

Eliminatory
$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ wtedy $(E-2)(E-3)<a_n>=0$, zatem wszystkie rozw. rówaniania $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ są postaci $A2^n+B3^n$. Jeśli np. $(E-1)^4<s_n>=0$ to ma to rozw. $1^n, n1^n, n^21^n, n^31^n$, wtedy $s_n=An^3+Bn^2+Cn+D$.

Funkcje tworzące
Dany jest nieskończony ciąg $\{a_n\}$ wtedy $A(x)=\sum_{n=0}^\infty a_ix^i$, Jeśli $a_n=1$ to $A(x)=\frac{1}{1-x}$, $b_n=q^n$ to $B(x)=\frac{1}{1-qx}$, $c_n=\frac{1}{n!}$ to $C(x)=\sum_{i=0}^\infty\frac{x^n}{n!}=e^x$, Wykładnicza funkca tworząca $\overline{A}(x)=A_e(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_nx^n}{n!}$. Iloczyn szeregów potęgowych $A(x)B(x)=\left(\sum_{i=0}^\infty a_ix^i\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^\infty b_kx^k\right)=\sum_{i,k}^\infty a_ib_kx^{i+k}=\sum_{i=0}^\infty\left(\sum_{k=0}^i a_kb_{i-k}\right)x^i$

Liczby Catalana
$c_0=1, c_n=\sum_{i=0}^{n-1}c_{n-i}c_i$, $C(x)=\sum c_nx^n=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$ $(C(x))^2=\frac{C(x)-1}{x}$, c_n opisuje: liczbe drzewech binarnych o $n+1$ liściach; liczbę ciągów z n-zer i n-jedynek gdzie każdy prefiks ma conajmniej tyle samo zer co jedynek.

Problem wydawania reszty
Gdy mamy skończenie wiele monet i skończoną ich ilość wtedy niech ciąg $\{c_n\}$ opisuje nominały, a ciąg $\{b_n\}$ ilość nominału o indeksie n, gdy a_i - liczba sposobów wypłacenia i to $A(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=\sum_{0\leq s_1\leq b_1,\ldots,0\leq s_n\leq b_n}x^{s_1\cdot c_1+\ldots+s_n\cdot c_n}=\sum_{s_1,\ldots,s_n}x^{s_1\cdot c_1}\ldots x^{s_n\cdot c_n}=\frac{1-x^{(b_1+1)\cdot c_1}}{1-x^{c_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1-x^{(b_n+1)\cdot c_n}}{1-x^{c_n}}$, gdy mamy ∞ ilość i skończony zbiór nominałów wtedy $A(x)=\frac{1}{1-x^{c_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^{c_n}}$, gdy mamy ∞ ilość oraz każdy nominał naturalny to $A(x)=\prod_{n=1}^\infty\frac{1}{1-x^n}$.

Graf
Graf prosty nie ma pętli oraz nie ma krawędzi wielokrotnych. $V(G)$ - zbiór wierzchołków grafu G, $E(G)$ - zbiór krawędzi grafu G. $deg(v)$ - liczba krawędzi incydentnych z wierzhołkiem v. Lemat o uścisku dłoni $\sum_{v\in V}deg(v)=2|E|=2m$. $n=|V|, m=|E|$. Graf dwudzielny graf który $V(G)=V(A)\cup V(B)$, gdzie $A\cap B=0$, $E(G)\subseteq A\times B$. Dwudzielny pełny $E(G)=A\times B$, oznaczenie np. $K_{3,3}$, $K_{3,4}$

Graf 2
Graf spójny wtw dla dowolnego podziału V na rozłączne zbiory V_1, V_2 istnieje krawędź między V_1, V_2. Dowolny graf idzie przedstawić jako sumę spójnych składowych. Dł. marszruty (trasa) $\equiv$ liczba krawędzi w ciągu krawędzi. $d(m,v)$ - dł. nakrótszej trasy między m, a v. Tw. G jest spójny wtw G jest spójny drogowo tzn. istnieje droga między dowolnymi dwoma wierzchołkami

Graf 3
Tw. G jest dwudzielny wtw każdy cykl w G ma dł. parzystą. Każdy cykl w G ma dł. parzystą $\implies$ każda trasa zamknięta w G ma dł. parzystą. Drzewem nazywamy graf prosty spójny bez cykli. Tw. niech T będzie grafem prostym o n-wierzchołkach wtedy następująca zdania są równoważne : T jest drzewem. T nie ma cyklu i ma $n-1$ krawędzi. T jest spójny i ma $n-1$ krawędzi. T jest spójny i każda krawędź jest mostem. Dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie 1 droga. T nie ma cyklu ale dodanie krawędzi zawsze tworzy cykl.

Graf 4
Lemat: Dowolne drzewo o conajmniej 2 wierczhołkach ma conajmniej 2 liście. Las- graf, którego każda spójna składowa jest drzewem. Drzewo spinające G, gdzie G to graf spójny, jest takim drzewem T, że $V(G)=V(T)$ i $E(G)\geq E(T)$. Podobnie def. dla lasu spinającego. Tw. Cayley'a liczba drzew o zb. wierzchołków $\{1,2,\ldots,n\}$ wynosi n^{n-2}.

Graf 5
Kod Prufera: Powtarzamy n-2 razy: 1) usuń liść o najmniejszym numerze. 2) Dopisz numer sąsiada tego liścia do kodu Prufera. Droga Eulera - marszruta przechodząca przez wszystkie krawędzie dokładnie raz. Cykl Eulera zamknięta droga Eulera. Tw. Graf G jest eulerowski wtw $\forall_{v\in V}2|deg(v)$ i wszystkie krawędzie są w jednej spójnej składowej. Fakt G ma drogę eulerowską jeśli G ma conajwyżej 2 wierzchołki których $2\nmid deg(v)$

Graf 6
Tw. Graf G jest półeulerowski wtw G ma conajwyżej 2 wierzchołki których $2\nmid deg(v)$ oraz wszystkie krawędzie są w jednej spójnej składowej. Droga Hamiltona - droga przechodząca przez każdy wierzchołek w grafie G dokładnie raz. Cykl Hamiltona - cykl przez każdy wierzchołek w grafie G dokładnie raz. Tw Ore Jeżeli G jest prosty $n(G)\geq 3$ i dla dowolnych nie sąsiednich wierzchołków u,w $deg(u)+deg(v)\geq n$ to G ma cykl Hamiltona.

Graf 7
Tw Diraca: Jeśli G jesdt prosty i $n(G)\geq 3$ oraz $\forall_{v\in V}deg(v)\geq\frac{n}{2}$ to G ma cykl Hamiltona. Problem najkrótszego drzewa rozpinającego: ogólny schemat algorytmu: wykonaj serię kroków, w każdym z nich dodaj najkrótszą krawędź między dotychaczas niepołączonymi wierzchołkami do T, by nie był cyklu. Przepływ w sieciach: przepływ to funkcja $E\to\mathbb{R}_{\geq 0}$

Graf 8
Prawo Kirchhoffa: $\sum_{(u,v)}f(u,v)=\sum_{(v,w)}f(v,w)$. Przepustowść krawędzi: $c(u,v)$. Przekrój to para S,T, $S\cup T=V, S\cap T=\emptyset$. Pojemność przekroju to $c(s,t)=\sum_{v\in S,u\in T}c(u,v)$. Przepływ netto z S do T $f(S,T)=\sum_{v\in S,u\in T}f(v,u)-\sum_{v\in S,u\in T}f(u,v)$. Lemat: $f(S,T)=\sum_{u\in V}f(s,u)=|f|$. Fakt $c(S,T)\geq f(S,T)$.

Graf 9

Ścieżka powiększająca przepływ składa sie z 2 rodz. krawędzi: 1) $(u,v) t.że f(u,v) < c(u,v)$ 2) (v,u) t. że $f(u,v) > 0$ i łączy s z t. Tw. Jeśli dla danego przepływu nie istnieje ścieżka powiększająca to przepływ jest największy. Twierdzenie Konig-Egervary: G jest grafem dwudzielnym największe skojarzenie ma moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego.

Graf 10

Skojarzenie - zbiór krawędzi, z którch żadne 2 nie mają wspólnego końca. Pokrycie wierzchołkowe - zbiór wierzchołków takich że każda krawędź ma jeden z końców w tym zbiorze. Graf planarny - graf który da się narysować na płaszczyźnie bez przecięć. Graf płaski - graf, który da się narysować bez przecięć. Tw. Graf zawierający podgraf $K_{3,3}$ bądź K_5 nie jest planarny.

Graf 11

Wzór Eulera: Niech m-liczba krawędzi, n-liczba wierzchołków, f-liczba ścian, $n-m+f=2$. Jeśli graf planarny, prosty i spójny i $n>2$ to $m \leq 3n-6$. Lemat każdy graf planarny ma wierzchołek stopnia mniejszego niż 6. Tw. Wierzchołek grafu planarnego można pokolorować na 5 kolorów.

Graf 12

Kolorowanie grafu - przyporządkowanie kolorów tak wierzchołkom by żadne 2 sąsiednie nie miały takiego samego koloru. Graf jest k kolorowalny wtw gdy można go pokolorować K kolorami. $\chi(G)$ to minimalna liczba kolorów potrzebna do pokolorawnia G. Fakty:$\chi(G)1 \iff G = N_n$,$\chi(G)=2 \iff G$ dwudzielny i nie N_n

---

Graf 13

Zbiór niezależny w $G=$ zbiór wierzchołków wzajemnie niepołączonych krawędziami. Lemat jeżeli k jest moc największego zbioru niezależnego w G, to $\chi(G) \geq \frac{n}{k}$. Twierdzenie: $\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1$. Tw. (Brooksa) Jeśli spójny graf G nie jest kliką lub cyklem nieparzystym to $\chi(G) \leq deg(G)$. Tw Halla: W G dla problemu małżeństw istnieje pełne skojarzenie wtw każdy zbiór k dziewcząt dla dowolnego k zna w sumie conajmniej k chłopaków.
