Algebra

Ciało: Przykłady ciał w algebrze : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (reszta modulo p gdzie p jest liczbą pierwszą)

W ciele są zdefiniowane dwie operacje : mnożenie i dodawanie. Są one przemienne. W ciele są również ~~złe~~ wyróżnione dwa elementy $0, 1$. Własności wyróżnionych elementów $1 \cdot \alpha = \alpha$, oraz $0 + \alpha = \alpha$ gdzie $\alpha \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ - ogólny znak na ciało).
W ciele przez $-\alpha$ rozumiemy taki element, że $\alpha + (-\alpha) = 0$, a przez α^{-1} gdzie $\alpha \neq 0$ rozumiem element spełniający następne równanie $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$.

Przestrzeń liniowa: Definicja : Zbiór $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$ jeśli :

1. W $\mathbb{V}$ jest zdefiniowane dodawanie (mówimy też o elementach $\mathbb{V}$, gdzie przez element rozumiemy wektory)
$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$
2. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest przemienne tzn.
$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V} \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$
3. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest łączne :
$$\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in \mathbb{V} \quad \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$$
Przez co dodawanie wektorów można zapisywać bez nawiasów
4. W $\mathbb{V}$ istnieje wyróżniony wektor $\vec{0}$ taki że :
$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
5. Dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$ istnieje element przeciwny $-\vec{v}$, że
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$
6. Zdefiniowane jest mnożenie (lewostronne) elementów przez elementy z $\mathbb{F}$ (nazywamy to mnożenie przez skalar)
$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$
zazwyczaj skalary oznacza się literami alfabetu greckiego

Przestrzeń liniowa:

7. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (skalarów):

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad (\alpha+\beta)\cdot\vec{v} = \alpha\cdot\vec{v} + \beta\cdot\vec{v}.$$

8. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (wektorów):

$$\forall \alpha \in \mathbb{F}\ \forall \vec{v},\vec{w} \in \mathbb{V} \quad \alpha\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\cdot\vec{v} + \alpha\cdot\vec{w}$$

9. Mnożenie jest łączne:

$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad \alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v}$$

10. Mnożenie przez ~~element~~ ~~wyróżniony~~ "jedynkę" z ciała zachowuje wektor:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad 1\cdot\vec{v} = \vec{v}$$

Przykłady przestrzeni liniowych: $\mathbb{R}^n$ nad ciałem $\mathbb{R}$; zbiory funkcji np. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$, zbiory ciągów skończonych o wartościach w $\mathbb{Z}_p$...; zbiory wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$; punkty spełniające równanie $2x+y=0$ (punkty w $\mathbb{R}^2$).

Fakty:

1. $\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad 0\cdot\forall\vec{v} = \vec{0}$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha\cdot\vec{0} = \vec{0}$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{F}\ \forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad \alpha\cdot\vec{v} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$
4. $\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \quad (-1)\vec{v} = -\vec{v}$ gdzie $-1 \in \mathbb{F} \wedge -1+1=0$

   element przeciwny do 1
5. wektor przeciwny jest dokładnie jeden
6. wektor zerowy jest dokładnie jeden

Podprzestrzeń liniowa:

Definicja: Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jej podzbiór $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy gdy:

1. $\mathbb{W}$ jest przestrzenią liniową nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$ co $\mathbb{V}$
2. Działania w $\mathbb{W}$ są tak samo zdefiniowane jak w $\mathbb{V}$

Zapisujemy wtedy $\mathbb{W} \leqslant \mathbb{V}$. Zbiór $\mathbb{W} \neq \emptyset$, ale może być $\mathbb{W} = \{\vec{0}\}$

Podprzestrzeń liniowa:

Fakty:

1. cała przestrzeń $\mathbb{V}$ jest swoją podprzestrzenią
2. $\{\vec{0}\}$ jest podprzestrzenią
3. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów mających 0 na określonej pozycji współrzędnych
4. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów których suma współrzędnych jest równa 0

$$\Sigma x_i = 0$$

5. dla zbioru wszystkich wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{F}$, zbiór wielomianów o st. najwyżej k

Ważny lemat. Niepusty podzbiór przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią liniową wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary

Podprzestrzenie można generować używając pewnych standardowych operacji: sumy, przecięcia, iloczynu kartezjańskiego

~~Dla sumy:~~

Niech $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leqslant \mathbb{V}$:

wtedy ~~dla~~ ich suma:

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}' = \{\vec{\omega} + \vec{\omega}' : \vec{\omega} \in \mathbb{W}, \vec{\omega}' \in \mathbb{W}'\}$$

Dla dowolnego zbioru podprzestrzeni liniowych $\{W_i\}_{i \in I}$ gdzie ~~$\forall_{i \in I} W_i \leqslant \mathbb{V}$~~ $\forall_{i \in I}\ W_i \leqslant \mathbb{V}$, przecięcie jest zdefiniowane naturalnie jako $\bigcap_{i \in I} W_i$ (jako zbiór)

Dla dowolnego zbioru ~~podprzestrzeni~~ przestrzeni liniowych $\{\mathbb{V}_i\}_{i \in I}$ nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$ produkt kartezjański jest zdefiniowany naturalnie $\prod_{i \in I} \mathbb{V}_i$. Działania są zdefiniowane po współrzędnych

Kombinacja liniowa wektorów

Definicja: dla pewnego zbioru wektorów $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ oraz $\exists k \in I\ \forall_{i \in I}\ i \leq k$ ich kombinacją liniową to dowolny wektor postaci

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$$

gdzie $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ jest ciągiem skalarów z $\mathbb{F}$. Kombinacja liniowa jest z definicji skończona

Otoczka liniowa:

Definicja: Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$.
Dla dowolnego zbioru wektorów (skończonego bądź nie) $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$ jego otoczkę liniową oznaczamy ~~jako~~ jako LIN $(\mathcal{U})$, to zbiór kombinacji liniowych wektorów ze zbioru $\mathcal{U}$.

$$LIN(\mathcal{U}) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i} \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}, \vec{v_1} \dots \vec{v_k} \in \mathcal{U} \right\}$$

LIN$(\mathcal{U})$ nazywana jest również jako ~~podprzestrzeń liniowa~~ podprzestrzeń rozpięta przez $\mathcal{U}$ lub domknięcie liniowe $\mathcal{U}$

Uwaga: Można założyć, że wektory $\vec{v_1} \dots \vec{v_k}$ są różne, jeśli jest to „wygodne" bez straty na ogólności.
Czasami można spotkać się z oznaczeniem LIN $(\vec{v_1} \dots \vec{v_k})$ ~~ale~~ ale jest równoważny LIN $(\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\})$

Fakty:

1. Dla dowolnego zbioru wektorów $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ otoczka liniowa LIN$(\mathcal{U})$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{V}$. Jest to również najmniejsza przestrzeń liniowa ~~zawierająca~~ zawierająca $\mathcal{U}$.
2. Jeśli $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$ gdzie $\mathbb{V}$ to przestrzeń liniowa, to $LIN(\mathcal{U}') \leq LIN(\mathcal{U})$
3. Jeśli $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$ i $\mathbb{V}$ to przestrzeń liniowa to
$$LIN(\mathcal{U}) = LIN(LIN(\mathcal{U}))$$
4. Jeśli $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{V}$ oraz $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową i jeśli zachodzi $\mathcal{U} \subseteq LIN(\mathcal{U}')$ oraz $\mathcal{U}' \subseteq LIN(\mathcal{U})$ to $LIN(\mathcal{U}) = LIN(\mathcal{U}')$
5. Otoczka liniowa jest niezmiennicza na kombinacje liniowe
~~6. LIN $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k})$~~
6. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $\vec{v_1} \dots \vec{v_k} \in \mathbb{V}$. Jeśli skalary $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ i żaden z nich nie jest 0 wtedy $LIN(\vec{v_1} \dots \vec{v_k}) = LIN(\alpha_1 \vec{v_1}, \dots, \alpha_k \vec{v_k})$

Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$: $LIN(\vec{v_1} \dots \vec{v_k}) = LIN(\vec{v_1} \dots \vec{v_i} + \alpha \vec{v_j}, \vec{v_{i+1}} \dots \vec{v_k})$

dowolna liniowo:

7. Niech $\mathbb{V}$ jest jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$,
$\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}\} \subseteq \mathbb{V}$: zbiór wektorów z $\mathbb{V}$,
zaś $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathbb{F}$ gdzie $\alpha_1 \neq 0$ wtedy

$$LIN\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i}, \vec{v_2} \dots \vec{v_k}\right\}\right) = LIN(\vec{v_1}, \vec{v_2} \dots \vec{v_k})$$

Liniowa niezależność wektorów

Definicja: Układ wektorów U jest liniowo niezależny gdy dla dowolnego $k \geqslant 1$, dowolnych różnych $\vec{v_1}, \dots \vec{v_k} \in U$ oraz ciągu współczynników $\alpha_1 \dots \alpha_k \in F$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Uwaga: U traktujemy jako multizbiór. Jeśli zawiera jakiś element m razy to możemy go użyć m razy, ale wtedy U jest liniowo zależny.

Fakty:

1. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy jeden z nich można przedstawić jako liniową kombinację pozostałych.
Równoważne sformułowanie: Układ wektorów $U \subseteq$ ~~V~~ $\mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtw gdy $\exists \vec{u} \in U \ \vec{u} \in LIN(U \setminus \{\vec{u}\})$.
2. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. ~~$U \subseteq \mathbb{V}$ je~~ Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ jest liniowo zależny wtw gdy $\exists \vec{u} \in U \ LIN(U) = LIN(U \setminus \{\vec{u}\})$
3. Niech $U = \{\vec{u_1}, \dots \vec{u_k}\}$ będzie układem wektorów rozpatrzmy następujące układy
$U' = \{\vec{v_1} \dots \vec{v_{i-1}}, \alpha \vec{v_i}, \vec{v_{i+1}} \dots v_k\}$ dla $\alpha \neq 0, 1 \leq i \leq k$
$U'' = (\vec{v_1} \dots \vec{v_{i-1}}, \vec{v_i} + \alpha \vec{v_j}, \vec{v_{i+1}} \dots v_k)$ dla $i \neq j$
Wtedy U jest liniowo zależny gdy wtw gdy U' jest liniowo zależny i wtylko wtedy gdy U'' jest liniowo zależny

Liniowa niezależność wektorów	4. Następujące zdania są równoważne (dla $B = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$) :

I. Zbiór B jest liniowo niezależny.

II Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B

III Pewien wektor z LIN(B) ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B

IV Każdy wektor z LIN (B) ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B

Metoda eliminacji Gaussa

Idea: Chcę znalezienie dla dowolnego zbioru wektorów $U \subseteq F^n$ jego maksymalnego pod względem zawierania podzbioru niezależnego, po przez uogólnienie następujących obserwacji:

1. Jeśli każdy wektor ma współrzędną gdzie tylko on jest niezerowy to zbiór jest liniowo niezależny
1. układ zawierający $\vec{0}$ jest zależny
3. korzystając z Faktu 3 z liniowej niezależności wektorów można „upraszczać układ"

Definicja Postaci schodkowej:

układ wektorów $\vec{v}_1 \dots \vec{v}_m \in F^n$ jest ~~liniowo~~ w postaci schodkowej jeśli istnieje ciąg pozycji $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m$, że dla każdego $j = 1, \dots, m$

- wektor $\vec{v}_j$ ma na i_j elemencie niezerową ~~elem~~ wartość
- —||————— pozycjach $< i_j$ same 0

Fakt na temat postaci schodkowej: Jeśli układ wektorów F^n jest postaci schodkowej to jest niezależny.

Fakty: Po metodzie Gaussa

1. Otrzymany układ wektorów zawiera układ wektorów liniowo niezależnych oraz same wektory zerowe
2. Oryginalny zbiór jest niezależny gdy otrzymany układ nie ma żadnego $\vec{0}$
3. Nie zerowe wektory otrzymanego układu to odpowiadające im

Metoda eliminacji Gaussa

... wektory początkowe tworzą bazę przestrzeni rozpiętej przez wszystkie wektory.

Baza przestrzeni liniowej

Definicja: B jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ gdy $LIN(B) = \mathbb{V}$ oraz B jest liniowo niezależny.

Alternatywnie, mówimy, że B jest minimalnym zbiorem rozpinającym $\mathbb{V}$

W przestrzeni $\mathbb{F}^n$ wektory: $\vec{E}_1 = (1,0 \dots 0)$, $\vec{E}_2 = (0,1,0 \dots 0)$ ... $\vec{E}_{n-1} = (0,0,\dots,1,0)$, $\vec{E}_n = (0,\dots,0,1)$ nazywamy bazą standardową

W przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$: wielomiany $\{x^i\}_{i=0}^{n}$ nazywamy bazą standardową

W przestrzeni ciągów o wyrazach w F, które mają ~~skończoną bazę~~ skończenie wiele niezerowych wyrazów: $\{\vec{e}_i\}$, gdzie jest nazywany bazą standardową, gdzie e_i ma 1 na i-tej pozycji i 0 na reszcie. Ta baza jest nieskończona.

Definicja przestrzeni skończenie wymiarowej:

Przestrzeń jest skończenie wymiarowa wtw gdy ma skończony zbiór rozpinający

Definicja wyrażenia wektora w bazie:

Jeśli $B = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ to wyrażeniem wektora $\vec{v}$ w bazie B nazywamy reprezentację $\vec{v}$ jako

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$$

Fakt: Każdy wektor ma jednoznaczne przedstawienie w bazie

Notacja: Jeśli $B = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ to

$$(\vec{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

gdzie $\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$. Liczby α_i to współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie B.

Baza przestrzeni liniowej

Definicja izomorfizmu przestrzeni liniowych:

Mówimy, że dwie przestrzenie $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ są izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\phi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ takie, że $\varphi(\vec{v} +_{\mathbb{V}} \vec{v}') = \varphi(\vec{v}) +_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v}')$ oraz $\varphi(\alpha \cdot_{\mathbb{V}} \vec{v}) = \alpha \cdot_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v})$ i analogicznie dla ϕ.

Fakty na temat izomorfizmu:

1. Dla ustalonej przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ i jej skończonej bazy B, wyrażenie wektora w bazie B jest izomorfizmem $\mathbb{V}$ i $\mathbb{F}^{|B|}$
2. Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie izomorfizmem. Wtedy układ $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ jest liniowo niezależny wtw, gdy układ $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ jest liniowo niezależny
3. Niech $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ ma bazę n elementową. Wtedy $\mathbb{V}$ jest izomorficzna z $\mathbb{F}^n$.
4. Dowolne dwie przestrzenie liniowe nad $\mathbb{F}$ mające bazy n elementowe są izomorficzne

Lemat Steinitza o wymianie:

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $A \subseteq \mathbb{V}$ liniowo niezależnym zbiorem wektorów, zaś B zbiorem rozpinającym $\mathbb{V}$. Wtedy albo A jest bazą, ~~albo~~ albo istnieje $\vec{v} \in B$ taki, że $A \cup \{\vec{v}\}$ jest liniowo niezależny.

Twierdzenie:

Każda przestrzeń (skończenie wymiarowa) $\mathbb{V}$ ma bazę.
Każda baza przestrzeni (skończenie wymiarowej) $\mathbb{V}$ ma taką samą moc.

Wnioski z lematu Steinitza:

1. Każdy zbiór niezależny skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ można rozszerzyć do bazy

Baza przestrzeni liniowej

2. Jeśli $\mathbb{V}$ jest przestrzenią skończenie wymiarową, to z każdego układu wektorów $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{V}$ można wybrać bazę przestrzeni $LIN(\mathbb{A})$

Wymiar przestrzeni liniowej

Definicja:

Dla przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{V}$ jej wymiar to moc jej bazy. Oznaczamy go jako $\dim(\mathbb{V})$.

Dla przestrzeni $\mathbb{V} = \{\vec{0}\}$ przyjmujemy że jej wymiar to 0

Ważny lemat:

Jeśli $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leqslant \mathbb{V}$ są przestrzeniami skończenie wymiarowymi, to

$$\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim(\mathbb{V}_1) + \dim(\mathbb{V}_2) - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2)$$

Fakt:

Jeśli B_1, B_2 są bazami dla $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leqslant \mathbb{V}$ to

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = LIN(B_1 \cup B_2)$$

Twierdzenie:

Eliminacja Gaussa zastosowana do układu wektorów U zwraca bazę $LIN(U)$ (oraz wektory zerowe)

Warstwy

Definicja:

Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ i jej podprzestrzeni liniowej $\mathbb{W}$ zbiór U jest warstwą $\mathbb{W}$ w $\mathbb{V}$, jeśli jest postaci

$$U = \{\vec{u}\} + \mathbb{W} = \{\vec{u} + \vec{w} : \vec{w} \in \mathbb{W}\}$$

Fakt: Operacja dodawania zbiorów

$$U + U' = \{\vec{u} + \vec{u}' : \vec{u} \in U, \vec{u}' \in U'\}$$

jest łączne i przemienne. Ponadto, jeśli $\mathbb{W} \leqslant \mathbb{V}$ to

$$\mathbb{W} + \mathbb{W} = \mathbb{W}$$

Warstwy **Lemat 1:**

Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będą przestrzeniami liniowymi, zaś $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$.

Następujące warunki są równoważne:

1. $\exists \vec{u} \in \mathbb{V} : \mathcal{U} = \vec{u} + \mathbb{W}$
2. $\exists \vec{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{U} = \vec{u} + \mathbb{W}$
3. $\forall \vec{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{U} = \vec{u} + \mathbb{W}$

Ponadto następujące warunki są równoważne:

1. $\exists \vec{u} \in \mathbb{V} : \mathcal{U} - \vec{u}$ jest przestrzenią liniową
2. $\exists \vec{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{U} - \vec{u}$ -||———
3. $\forall \vec{u} \in \mathcal{U} : \mathcal{U} - \vec{u}$ -||———

Lemat 2:

Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ jej warstwami.

Wtedy

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \quad \vee \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$$

Lemat 3:

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ warstwami jakichś podprzestrzeni $\mathbb{V}$. Wtedy przecięcie $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ jest puste lub jest warstwą.

Lemat 4:

Wypukłość warstw. Załóżmy, że ciało $\mathbb{F}$ spełnia $1+1 \neq 0$

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, zaś $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{V}$.

Wtedy następujące warunki są równoważne

1. $\mathcal{U}$ jest warstwą
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F} \ \forall \vec{v}, \vec{u} \in \mathcal{U} \quad \alpha\vec{v} + (1-\alpha)\vec{u} = \vec{u} + \alpha(\vec{v} - \vec{u}) \in \mathcal{U}$

Przekształcenie liniowe (homomorfizm) **Definicja:**

Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$. Funkcja $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest przekształceniem liniowym, jeśli spełnia następujące warunki:

1. $\forall \vec{v} \in \mathbb{V} \ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad F(\alpha\vec{v}) = \alpha F(\vec{v})$
2. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V} \quad F(\vec{v} +_{\mathbb{V}} \vec{w}) = F(\vec{v}) +_{\mathbb{W}} F(\vec{w})$

Przekształcenie liniowe

Lemat:

Zbiór przekształceń liniowych jest przestrzenią liniową

Fakt:

~~Zło~~
Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym

Lemat 2:

Każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie zadane poprzez swoje wartości na bazie. Każde takie określenie jest poprawne

---

Jądro i obraz przekształcenia liniowego

Definicja:

Niech $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi, $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ przekształceniem liniowym.

Jądro przekształcenia to zbiór wektorów przekształcanych na $\vec{0}$:

$$\ker(F) = \{\vec{v} : F(\vec{v}) = \vec{0}\}$$

Obraz przekształcenia to zbiór wektorów, które są wartościami F:

$$\Im(F) = \{\vec{u} : \exists \vec{v} \; F(\vec{v}) = \vec{u}\}$$

Lemat:

Jądro i obraz są przestrzeniami liniowymi

Fakt:

Jeśli $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest przekształceniem liniowym oraz $LIN(\vec{v_1} \dots \vec{v_k}) = \mathbb{V}$ to $\Im(F) = LIN(F(\vec{v_1}), \dots, F(\vec{v_k}))$

Twierdzenie:

Niech $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym, gdzie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$: skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe. Wtedy

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\Im(F)) + \dim(\ker(F))$$

Definicja: Rząd przekształcenia ~~nazywamy~~ liniowego F to $rk(F) = \dim(\Im(F$

Fakty: 1. Jeśli $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ to $rk(F) \leq \min(\dim(\mathbb{V}), \dim(\mathbb{W}))$

2. Jeśli $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $F': \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ są przekształceniami liniowymi to $rk(FF') \leq \min(rk(F), rk(F'))$

Macierz **Definicja:**

Macierzą M ~~nazywamy~~ rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy funkcję M:
$\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \to \mathbb{F}$

Zbiór wszystkich macierzy rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $M_{m,n}(\mathbb{F})$

Zwykle macierz rozmiaru $m \times n$ oznaczamy jako tablicę / tabelę:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & & a_{m,n} \end{vmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Ważne macierze:

1. Macierz zerowa
2. Macierz $1_{i,j}$ - macierz mająca jedynie 1 ~~na poz~~ w wierszu i, kolumnie j, reszta pozycji to 0
3. Macierz kwadratowa
4. Macierz przekątniowa
5. Macierz identycznościowa - Id_n
6. Macierz górnotrójkątna
7. Macierz dolnotrójkątna
8. Macierz trójkątna

Zestawienie macierzy:

Mając macierze M, M' (nad tym samym ciałem) o rozmiarach $m \times n$, $m \times n'$ to będziemy pisać

$$[M \mid M']$$

wtedy wyjściowa macierz jest rozmiaru $m \times (n + n')$

Tą konwencję można rozszerzyć dla dowolnej ilości macierzy, można ją również stosować do ~~kolumn~~ wierszy wtedy notacja jest $\left[\frac{M}{M'}\right]$, ale wtedy warunek to $m' \times n$, $m' \times n$ dla rozmiarów.

Macierze | ~~Definicje dodawania~~ z macierzy

Definicje podstawowych operacji na macierzach

Dodawanie macierzy jest określone po współrzędnych tzn. dodawanie $A+B$ jest określone wtw gdy A, B mają te same rozmiary. $(A+B)_{ij} = (A_{ij})_{ij} + (B)_{ij}$

Mnożenie przez skalar również jest określone po współrzędnych tzn. dla macierzy $A = (a_{ij})$ nad ciałem $\mathbb{F}$ $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$

Tym samym macierze stanowią przestrzeń liniową (nad odpowiednim ciałem)

Mnożenie macierzy

Dla macierzy $1\times n$ oraz $n \times 1$

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

Wynik w zależności można traktować jako macierz 1×1 lub skalar.

Dla macierzy $n \times 1$ oraz $1\times n$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \cdot [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] = \begin{bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & \dots & b_1 a_n \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & \dots & b_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n a_1 & b_n a_2 & \dots & b_n a_n \end{bmatrix}$$

~~Na~~ Dla macierzy rozmiaru $m\times k$ i $k \times n$ (wynik będzie macierzą rozmiaru $m\times n$)
~~Mnożenie~~ Mnożenie definiujemy tak, że dzielimy lewą macierz na wiersze, a prawą na kolumny i mnożymy jak dwa wektory (odpowiednio: wierszy i kolumn), przy czym pojedyncze mnożenie wiersza i kolumny wykonujemy jak mnożenie wektorów.

Macierz

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \cdot [C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_n] = \begin{bmatrix} R_1C_1 & R_1C_2 & \dots & R_1C_n \\ R_2C_1 & R_2C_2 & \dots & R_2C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_mC_1 & R_mC_2 & \dots & R_mC_n \end{bmatrix}$$

Fakty:

1. Mnożenie jest łączne
2. Niech A, B, C będą macierzami nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, Id_n macierzą identycznościową $n \times n$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

I. $Id_n A = A$, $B\, Id_n = B$

II. $A(B+C) = AB + AC$

III. $(B+C)A = BA + CA$

IV. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

V. $A[B \mid C] = [AB \mid AC]$

VI. $\left[\frac{B}{C}\right] A = \left[\frac{BA}{CA}\right]$

Definicja transpozycji:

Dla macierzy $M = (m_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ macierz M^T zdefiniowana jest jako

$$M^T = (m_{ji})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

Lematy:

1. $(M+N)^T = M^T + N^T$
2. $(MN)^T = N^T M^T$
3. $(M^T)^T = M$

Lemat na temat ~~macierz~~ mnożenia macierzy i bazę standardową

$$M = [M\vec{E}_1 \mid M\vec{E}_2 \mid \dots \mid M\vec{E}_n]$$

$$\underset{M_1}{\uparrow} \qquad \underset{M_2}{\uparrow} \qquad \underset{M_n}{\uparrow}$$

gdzie $\vec{E}_i$ to wektor mający 1 na i-tej pozycji i 0 wszędzie poza.

Macierz

Definicja operacje elementarne

(operacje elementarne (kolumnowe)) to:

1. zmiana kolumn
2. dodanie do jednej z kolumn wielokrotności innej
3. przemnożenie ~~jednej~~ kolumny przez niezerowy skalar

Analogicznie zdefiniowane są operacje elementarne na wierszach

Operacje elementarne można wyrazić jako macierze:

Zamiana kolumn: zamiana i-tej kolumny z j-tą

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & & 1_{ij} & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & 1_{ji} & & & 0 & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad A \cdot T_{ij}$$

Dodanie wielokrotności kolumny: $Id_n + \alpha 1_{ij}$ $\quad A(Id_n + \alpha 1_{ij})$

Przemnożenie kolumny przez skalar: $D_{i\alpha}$ to macierz przekątniowa gdzie na i-tym miejscu na przekątnej zamiast $\alpha \neq 0$, a na pozostałych miejscach na przekątnej 1.

Lematy:

1. $M \cdot T_{ij}$ to macierz powstała poprzez zamienienie i-tej ~~kolumny~~ oraz j-tej kolumny
2. $M \cdot (Id_n + \alpha 1_{ij})$ to macierz powstała poprzez dodanie do j-tej kolumny α razy i-tej kolumny
3. $M \cdot D_{i\alpha}$ to macierz ~~pomnoże~~ powstała poprzez pomnożenie i-tej kolumny przez α
4. $T_{ij} \cdot T_{ij} = Id_n$
5. $(Id_n + \alpha 1_{ij})(Id_n - \alpha 1_{ij}) = Id_n$
6. $D_{1\alpha} D_{1\frac{1}{\alpha}} = Id_n$

Macierz

7. $T_{ij} M$ jest macierzą powstałą z M przez zamianę i-tego oraz j-tego ~~kolumny~~ wiersza

8. $(Id_n + \alpha 1_{ij})M$ jest macierzą powstałą z M poprzez dodanie do i-tego wiersza α razy j tego wiersza

9. $D_{i\alpha} M$ to macierz powstała poprzez pomnożenie i-tego wiersza M przez α.

Definicja macierzy elementarnych:

Macierze odpowiadające operacjom elementarnym tj. T_{ij} dla $i \neq j$, $(Id_n + \alpha 1_{ij})$ dla $i \neq j$ oraz $D_{i\alpha}$ dla $\alpha \neq 0$ nazywamy macierzami elementarnymi

Fakt:

Eliminację Gaußa można zinterpretować jako mnożenie macierzy powstałej przez zestawienie wektorów (w wiersze / kolumny) z układu ~~po~~ wejściowego przez macierze elementarne.

Przekształcenie liniowe dla macierzy

Wektory będą zapisywane w pionie i będą identyfikowane z macierzą $n \times 1$.

Definicja:

Dla macierzy M rozmiaru $m \times n$ możemy zadać przekształcenie liniowe $F_M : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ przez $F_M(\vec{v}) = M\vec{v}$

Liniowość wynika z liniowości mnożenia macierzy.

Takie przekształcenie będziemy nazywać przekształceniem indukowanym przez macierz M

Twierdzenie:

Przyporządkowanie $M \mapsto F_M$ jest izomorfizmem (przestrzeni liniowych) zbioru macierzy $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ i zbioru przekształceń liniowych z $\{F : F$ jest przekształceniem liniowym $, F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m\}$.

Twierdzenie:

Dla macierzy odpowiednich rozmiarów ~~macierzy~~ mamy $F_{M'M} = F_{M'} F_M$

Rząd macierzy

Definicja:

Rząd macierzy to wymiar przestrzeni generowanej przez kolumny tej macierzy (traktowanych jako wektory w F^n). Oznaczamy go przez $rk(M)$. Tj. jeśli $M = [\vec{M_1} | \vec{M_2} | \ldots | \vec{M_n}]$ to:

$$rk(M) = \dim L\,\underset{N}{\cancel{\ }}\,(\vec{M_1} \ldots \vec{M_n})$$

Lematy:

1. Niech M będzie macierzą a F_M indukowanym przez nią przekształceniem liniowym. Wtedy:

$$rk(M) = rk(F_M)$$

2. Dla macierzy M, N odpowiednich rozmiarów mamy

$$rk(M,N) \leq \min(rk(M), rk(N))$$
$$\shortparallel$$
$$rk(F_{MN}) \leq \min(rk(F_M), rk(F_N))$$

3. Rząd ~~kolumny~~ kolumnowy i wierszowy ~~w~~ dowolnej macierzy M są sobie równe. W szczególności $rk(M) = rk(M^T)$
4. Operacje elementarne (wierszowe / kolumnowe) na macierzach nie zmieniają rzędu wierszowego i kolumnowego macierzy.
5. Dla macierzy w wierszowej postaci schodkowej ~~rzędu~~ rząd wierszowy i kolumnowy macierzy jest taki sam.

Baza jądra przekształcenia

Baza jądra przekształcenia = jądro macierzy

Proces: Mając macierz M doprowadź ją do postaci schodkowej (kolumnowej), następnie przeprowadź to samo na Id. Wtedy wektory, które ~~przeszły na $\vec{0}$ w oryginalnej~~ ~~macierzy~~ z odpowiadają wektorom $\vec{0}$ w oryginalnej macierzy to baza jądra

Macierz odwrotna

Definicja:

Macierz kwadratowa, dla której istnieje macierz M' taka, że

$$M \cdot M' = M' \cdot M = Id_n$$

nazywamy macierzą odwracalną lub macierzą nieosobliwą.
Macierz M' o własnościach jak wyżej nazywamy ~~to~~ macierzą odwrotną do M i oznaczamy przez M^{-1}.

Lematy:

1. Macierz M jest odwracalna $\Leftrightarrow$ przekształcenie F_M jest odwracalne. Co więcej $F_{M^{-1}} = F_M^{-1}$
2. Macierz ~~M~~ A wymiaru $n \times n$ jest odwracalna $\Leftrightarrow$ $rk(A) = n$
3. Jeśli A jest macierzą kwadratową $n \times n$ to macierz kwadratowa B jest jej odwrotnością, jeśli $AB = Id \vee BA = Id$
4. Jeśli MN jest odwracalne, a M, N są kwadratowe, to również M, N są odwracalne

   Niech M, N ~~są~~ będą odwracalne, wtedy:

   I. $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

   II. $(M^{-1})^{-1} = M$

   III. $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$
5. Jeśli A jest macierzą odwracalną, a B, C są odpowiednich rozmiarów to

$$rk(AB) = rk(B) \vee rk(CA) = rk(C)$$

6. Jeśli macierz M jest odwracalna to przy użyciu eliminacji Gaussa można doprowadzić ją do macierzy przekątniowej (bez zer na przekątnej)
7. Każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej macierze $D_{i,\alpha}$ mogą być pierwsze lub ostatnie

Macierz odwrotna

Obliczanie macierzy odwrotnej:

Zaczynamy od równania

$$A^{-1} A = Id$$

~~na~~ następnie zdiagonalizujemy macierz A używając metody eliminacji (kolumnowej). Po przemnożeniu z prawej strony przez odpowiednią macierz elementarną.

~~W~~ Potem mamy równanie:

$$A^{-1} A' = B$$

B to macierz Id na którą te same macierze co A by uzyskać A'

~~Następnie doprowadź A' do Id~~

Następnie mając A' jako dolnotrójkątną (nie mającą wektora $\vec{0}$), zdiagonalizuj rób te same operacje na B. ~~A po~~

Potem przemnóż kolumny przez skalary i tak samo B.

Finalnie uzyskasz

$$A^{-1} \cdot Id = \underset{A^{-1}}{\underset{\parallel}{B}}$$

Wyrażenie przekształcenia liniowego w bazie

Definicja: (Macierz przekształcenia w bazie)

Dla przestrzeni ~~liniowej~~ liniowych $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, przekształcenia liniowego $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $B_{\mathbb{V}}$, $B_{\mathbb{W}}$: baz odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$ gdzie $B_{\mathbb{V}} = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$ oraz $B_{\mathbb{W}} = \{\vec{w}_1 \dots \vec{w}_m\}$ macierz $M_{B_{\mathbb{V}} B_{\mathbb{W}}}(F)$ (macierz przekształcenia F wyrażona w bazach ~~B~~ $B_{\mathbb{V}}$ i $B_{\mathbb{W}}$) to macierz zadana jako

$$[\,(F(\vec{v}_1))_{B_W} \mid (F(\vec{v}_2))_{B_W} \mid \dots \mid (F(\vec{v}_n))_{B_W}\,]$$

Wynik to macierz $m \times n$.

Wyrażenie przekształcenia liniowego w bazie	**Lematy:**

1. Niech $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$: przekształcenie oraz $B_{\mathbb{V}}, B_{\mathbb{W}}$ będą bazami odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$, gdzie $B_{\mathbb{V}} = \{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n\}$. Wtedy dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$:

$$M_{B_{\mathbb{V}} B_{\mathbb{W}}}(F)(\vec{v})_{B_{\mathbb{V}}} = (F\vec{v})_{B_{\mathbb{W}}}$$

Rozumowanie to przenosi się na macierze oraz na iloczyn macierzy, które odpowiada złożeniu przekształceń liniowych.

2. Niech $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$ będą przestrzeniami liniowymi o bazach B, B', B'' zaś $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $F': V' \to V''$ przekształceniami liniowymi. Wtedy:

$$M_{BB''}(F'F) = M_{B'B''}(F') \cdot M_{BB'}(F)$$

3. Niech $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym zaś $B_{\mathbb{V}}, B_{\mathbb{W}}$ dowolnymi bazami $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$. Wtedy

$$rk(F) = rk(M_{B_{\mathbb{V}} B_{\mathbb{W}}}(F))$$

Macierz zmiany bazy	**Definicja:**

(Macierz zmiany bazy). Dla baz B, B' przestrzeni wektorowej V zmiany bazy między B a B', $M_{BB'}$ to macierz $M_{BB'}(Id)$

Lematy:

1. Dla baz B' oraz $B = \{\vec{v}_1, \dots \vec{v}_n\}$ macierz zmiany bazy zadana jest jako:

$$M_{BB'} = [\,(\vec{v}_1)_{B'} \mid (\vec{v}_2)_{B'} \mid \dots \mid (\vec{v}_n)_{B'}\,]$$

2. Niech B, B' będą bazami $\mathbb{V}$. wtedy

$$M_{BB'} \; M_{B'B} = Id$$

3. Niech $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym, $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ bazami $\mathbb{V}$ zaś $B_{\mathbb{W}}, B'_{\mathbb{W}}$ bazami $\mathbb{W}$. Wtedy:

$$M_{B_{\mathbb{V}} B_{\mathbb{W}}}(F) = M_{B'_{\mathbb{W}} B_{\mathbb{W}}} \, M_{B'_{\mathbb{V}} B'_{\mathbb{W}}}(F) \, M_{B_{\mathbb{V}} B'_{\mathbb{V}}}$$

Wyznacznik

Wyznacznik - funkcja na macierzy, uogólnienie objętości (ale ze znakiem)

Jakie własności powinna mieć ta funkcja:

I. Liniowość:

$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_{i-1}, \alpha \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_n) =$
$= \alpha \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1} \ldots \vec{v}_n)$

$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots \vec{v}_n) =$
$= \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, \vec{v}_{i+1} \ldots \vec{v}_n) +$
$+ \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i', \vec{v}_{i+1}, \ldots \vec{v}_n)$

W szczególności:
$\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_{i-1}, \vec{0}, \vec{v}_{i+1}, \ldots \vec{v}_n) = 0$

II zastąpienie $\vec{v}_i$ przez $\vec{v}_i + \Sigma_{j \neq i} \alpha_j \vec{v}_j$ nie powinno zmieniać wartości

III zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia znak

IV $\det(Id) = 1$

Lemat: Jest ~~dokładnie~~ dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki I - IV

Definicja:
~~A~~ Wyznacznik macierzy kwadratowej A to jedyna funkcja spełniająca warunki I - IV. Oznaczamy ją przez $\det(A)$ oraz $|A|$

Fakty na temat wyznacznika:

1. Jeśli $\vec{v}_i = \vec{v}_j$ to $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n) = 0$
2. Dla macierzy trójkątnej jest to iloczyn elementów na przekątnej
3. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rk(A) = n$

Definicja (minor macierzy):
Minorem macierzy M nazywamy każdą macierz uzyskaną poprzez usunięcie z M pewnego zbioru wierszy i kolumn
Zazwyczaj A_{ij} to macierz powstała z A poprzez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tego kolumny

Wyznacznik

Definicja dopełnienia algebraicznego:

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} to $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

Rozwinięcie Laplace'a:

Dla macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mamy:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Fakty:

1. $\det(A) = \det(A^T)$
2. wyznacznik ~~jest~~ macierzy z zerowym wektorem jest 0
3. $\cancel{\det(M)}\ \det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$
4. Macierz odwrotna do macierzy A jest równa
$$\frac{1}{\det(A)} C^T \quad \text{gdzie } c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$
5. Niech $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym, zaś M, M' będą macierzami dla tego przekształcenia wyrażonymi w różnych bazach. Wtedy
$$|M| = |M'|$$

Definicja wyznacznika przekształcenia:

Dla przekształcenia liniowego $\mathbb{F}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jego wyznacznik $\det(F)$ to $\det(M)$ gdzie M jest macierzą tego przekształcenia wyrażoną w dowolnej bazie $\mathbb{V}$.

Układ równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Będziemy zapisywać równanie w postaci

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

Układ równań liniowych

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Interpretacja „pionowa":

Zauważmy, że układ ten można zinterpretować jako

$$A = [\ \vec{A}_1 \mid \vec{A}_2 \mid \dots \mid \vec{A}_n\ ]$$

$$A \cdot \vec{X} = A \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A \cdot E_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{A}_i$$

$$\mathrm{LIN}(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n) \overset{?}{\to} \vec{B}$$

Czyli jaką kombinację liniową wektorów $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_n$ należy wziąć, by dostać wektor $\vec{B}$

Interpretacja „poziome":

Każde równanie z osobna wyznacza warstwę względem ~~przestrz~~ przestrzeni n-wymiarowej (wszystkich możliwych wektorów $\vec{X}$.)

Twierdzenie (Wzory ~~Cramera~~ Cramera):

Jeśli w równaniu (*) macierz A jest kwadratowa i odwracalna, to jedyne rozwiązanie jest postaci $x_i = \dfrac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, gdzie macierz A_{x_i} powstaje poprzez zastąpienie i-tej kolumny A przez $\vec{B}$.

Lemat o układzie jednorodnym:

Zbiór wszystkich rozwiązań równania $A\vec{X} = \vec{O}$ jest przestrzenią liniową, jest to $\ker(A)$, gdy A traktujemy jako przekształcenie liniowe z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$. Wymiar tej przestrzeni to $n - rk(A)$

Lemat o układzie niejednorodnym:

$$A\vec{X} = \vec{B} \text{ ma rozwiązanie} \iff \vec{B} \in \mathrm{Im}(A)$$

Jeśli równanie $A\vec{X} = \vec{B}$ ma rozwiązanie to zbiór wszystkich jego rozwiązań jest warstwą względem $\ker(A)$

Układ równań liniowych

Jeśli ciało $\mathbb{F}$ jest nieskończone to w tym przypadku (układ niejednorodny) jest nieskończenie wiele rozwiązań. W innym przypadku (układ niejednorodny) jest to $|\mathbb{F}|^k$, gdzie k jest wymiarem jądra

Twierdzenie Kroneckera - Capelli:

Układ $A\vec{X} = \vec{B}$ ma rozwiązanie $\Leftrightarrow$ $rk(A|\vec{B}) = rk(A)$

Macierz $[A|B]$ nazywana jest czasem macierzą rozszerzoną układu $A\vec{X} = \vec{B}$

Metoda eliminacji Gaussa:

Definicja układ równoważne:

Układ równań $A\vec{X} = \vec{B}$ oraz $A'\vec{X} = \vec{B}'$ są równoważne, jeśli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Lemat:

Rozważmy układ równań $A\vec{X} = \vec{B}$. Układ uzyskany przez następujący operacje przeprowadzone na macierzy rozszerzonej układu:

I. zamianę i-tego oraz j-tego równania
II. dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego
III. przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$
IV. usunięcie równania $0\vec{X} = 0$

} eliminacja Gaussa na wierszach

daje układ równoważny wejściowemu.

Oznacza to, że możemy stosować metodę eliminacji (wierszowej) na równaniu. Na końcu otrzymamy macierz w postaci schodkowej (wierszowej)

Wtedy

I. układ jest sprzeczny: Jeśli istnieje wiersz z zerami gdzie wektor $\vec{B}$ w tym samym wierszu ma różną od wartość 0

II. układ ~~jest~~ ~~je~~ ma jedno rozwiązanie: Jeśli układ wyjściowy A' ~~m~~ jest ~~dot~~ trójkątną macierzą i nie ma 0 na diagonali.

III. wpw. ~~ma~~ ~~je~~ ma nieskończenie wiele rozwiązań (patrz na ~~to~~ układ niejednorodny)

Wartości własne, wektory własne

Definicja:

λ jest wartością własną macierzy M (dla wektora $\vec{V} \neq 0$), gdy $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$, $\vec{V}$ jest wektorem własnym tej macierzy.

λ jest wartością własną przekształcenia liniowego F, jeśli $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ dla pewnego $\vec{v} \neq \vec{0}$. Taki wektor $\vec{v}$ jest wektorem własnym F (dla wartości własnej λ)

Fakt:

λ jest wartością własną przekształcenia F wtw gdy λ jest wartością własną $M_{BB}(F)$, dla dowolnej bazy B.

$\vec{V}$ jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ wtw, gdy $[\vec{v}]_B$ jest wektorem macierzy $M_{BB}(F)$ dla wartości własnej λ, dla dowolnej bazy B.

Macierze podobne

Definicja:

Macierze kwadratowe A, B są podobne, jeśli istnieje macierz odwracalna C, taka że

$$A = C^{-1} B C$$

Oznaczamy to jako $A \sim B$.

Lemat:

Rozpatrzmy macierz odwracalną $A = [\overset{\text{niezależne}}{A_1 | A_2 | \ldots | A_n}]$. Jest to macierz zmiany bazy między bazą $B = \vec{A_1}, \ldots, \vec{A_n}$ oraz bazą standardową E:

$$A = M_{BE}$$

W szczególności, dla macierzy kwadratowej M oraz jej macierzy podobnej $M' = A^{-1} M A$ mamy

$$M' = M_{EB}\, M\, M_{BE}$$

Oznacza to, że dla przekształcenia liniowego F_M indukowanego przez M macierz M' jest macierzą tego przekształcenia w bazie B.

$$M' = M_{EB}\,(M_{EE}(F))\,M_{BE} = M_{BB}(F_M)$$

Fakt:

Macierze podobne mają te same wartości własne.

Wielomian charakterystyczny

Lemat:

λ jest wartością własną macierzy $M \iff \det(M - \lambda Id) = 0$

Definicja:

Wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej to:

$$\varphi_M(x) = \det(A - x\,Id)$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego $F: V \to V$ to

$$\varphi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - \lambda Id),$$

dla dowolnej bazy B przestrzeni V

Lematy:

1. Wielomian charakterystyczny dla macierzy $n \times n$ jest wielomianem stopnia n.
2. λ jest wartością własną macierzy M wtw gdy jest pierwiastkiem φ_M
3. Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego jest dobrze zdefiniowany

---

Krotności algebraiczne ~~oraz~~ oraz geometryczne

Lemat:

Jeśli λ jest wartością własną dla M, to zbiór wektorów własnych dla M to $\ker(M - \lambda Id)$. W szczególności jest to przestrzeń liniowa

Uwaga: Formalnie wektor $\vec{0}$ nie jest wektorem własnym, ale wygodniej jest go zaliczyć tu do wektorów własnych, żeby wyszła podprzestrzeń.

Definicja:

Dla wartości własnej λ krotność geometryczna to wymiar przestrzeni wektorów własnych dla λ, zaś krotność algebraiczna to krotność pierwiastka λ w wielomianie charakterystycznym.

Fakt:

Krotność geometryczna λ dla M to wymiar $\ker(M - \lambda Id)$.

Lemat:

Krotność algebraiczna jest większa równa krotności geometrycznej

Uwaga: Jeśli krotność algebraiczna wynosi 1, to geometryczna też wynosi 1

Krotności algebraiczne oraz geometryczne	**Lemat:** Niech $\lambda_1 \dots \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy M. Wtedy suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1} \dots \mathbb{V}_{\lambda_n}$ jest zbiorem liniowo niezależnym **Definicja przestrzeni niezmienniczej** Podprzestrzeń $\mathbb{V}' \leq \mathbb{V}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest przestrzenią niezmienniczą dla $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, jeśli $F(\mathbb{V}') \subseteq \mathbb{V}'$
Macierze diagonalizowalne	**Definicja:** Macierz M jest diagonalizowalna $\Leftrightarrow$ jest podobna do macierzy przekątniowej. Przekształcenie liniowe jest diagonalne, jeśli jest jego macierz (w jakiejś bazie) jest diagonalizowalna. **Twierdzenie:** Następujące warunki są równoważne dla macierzy kwadratowej M o rozmiarach $n \times n$: 1. M jest diagonalizowalna 2. M ma n niezależnych wektorów własnych 3. Suma wymiarów przestrzeni wartości własnych $\mathbb{V}_\lambda$ macierzy M wynosi n.
Macierz Jordana — Klatka Jordana	**Definicja:** Klatką Jordana nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

λ:

kr. alg. $= k$

kr. geo $= 1$

Macierz Jordana

Macierzą Jordana nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

gdzie $J_1, J_2 \dots J_k$ to klatki Jordana
Ważne $\lambda \in \mathbb{C}$

Fakt:

Klatka Jordana J rozmiaru $k \times k$ ma jedną wartość własną: λ, o kr. alg. k oraz kr. geo. 1

Twierdzenie:

(Rozkład Jordana). Każdą macierz M o wart. w $\mathbb{C}$ można przedstawić w postaci

$$M = A J A^{-1}$$

gdzie J jest macierzą Jordana, a A jest odwracalne (o wart. w $\mathbb{C}$)

Macierz symetryczne

Definicja:

Macierz jest symetryczna, jeśli $M = M^T$

Twierdzenie:

Macierz symetryczna z $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ma n niezależnych wektorów własnych (nad $\mathbb{R}$) (jest diagonalizowalna).

Page Rank

Definicja macierzy sąsiedztwa

Dla grafu G o wierzchołkach $1, 2, \dots n$ niech $d_{i,j}$ oznacza liczbę krawędzi z j do i (może to być 0), zaś m_j liczbę krawędzi wychodzących z j $(= \sum_i d_{ij})$

Znormalizowana macierz sąsiedztwa $M(G)$ to macierz $(m_{i,j})_{i,j=1\dots n}$

gdzie $m_{ij} = \frac{d_{ij}}{m_j}$

Page Rank

Definicja:

Wektor jest stochastyczny, jeśli jego współrzędne są nieujemne i sumują się do 1

Macierz jest stochastyczna (kolumnowo) jeśli każda jej kolumna jest wektorem stochastycznym.

Fakty:

1. Iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną
2. Jeśli $M_1, \dots, M_k$ są macierzami stochastycznymi i ciąg $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest nieujemny oraz sumuje się do 1 to:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i \text{ - też macierz stochastyczna}$$

Lemat:

Niech M to ~~macierz~~ znormalizowana macierz sąsiedztw a $\vec{V}$ to wektor stochastyczny. Wtedy $M^k \vec{V}$ to rozkład prawdopodobieństwa procesu losowego:

krok 0: „Wybór" wierzchołka z prawdopodobieństwem wg. wektora $\vec{V}$

krok k: W każdym kolejnym kroku, jeśli jesteśmy w wierzchołku ~~…~~ v, wybieramy z takim samym prawdo. jedną z krawędzi wychodzącą z v.

Definicja rankingu

Ranking dla macierzy stochastycznej M to wektor $\vec{R}$ taki, że $M\vec{R} = \vec{R}$ oraz $\sum_i r_i = 1$

~~Lemat I~~

Lemat istnienia rankingu

Macierz stochastyczna ma wartość własną 1.

Page rank

Ważne:

M - znormalizowana macierz sąsiedztwa

m - liczba w zakresie od 0 do 1

$$M' = (1-m)M + m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Dla odpowiedniego m to Page Rank

Fakt:

M' jest macierzą stochastyczną

Definicja macierzy dodatniej

Macierz A jest dodatnia wtw gdy każdy jej elem. jest dodatni. Oznaczenie $A > 0$.

lemat:

Jeśli $A > 0$ i jest stochas. kolumn. oraz $A\vec{v} = \vec{v}$ to $\vec{v} > 0 \vee \vec{v} < 0$

~~lemat~~

Tw.

Dla stoch. macierzy dodatniej A mamy $\dim V_1 = 1$