Метод Рунге-Кутты для решения задачи Коши

Целью этого задания является практика в численном решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, разрешенного относительно старшей производной. Предполагается, что выполнены условия теоремы существования и единственности и решение имеет достаточное число непрерывных производных.

В варианте задания приведено точное решение задачи Коши что позволяет сравнить реальную ошибку вычисленного решения с теоретической оценкой погрешности метода расчета. Для выполнения задания надо построить алгоритм метода Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага, составить программу его реализации на вычислительной машине и провести расчет. При разработке алгоритма надо обращать внимание на ситуации, когда малые погрешности при вводе данных или при расчете могут вызывать большие погрешности вычисленного решения.

После выполнения задания требуется составить отчет по форме:

1. постановка задачи;
2. распечатка программы и результатов счета;
3. анализ погрешности результатов.

Подавляющее большинство методов и алгоритмов рассматривается для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Это объясняется тем, что дифференциальное уравнение любого порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно свести к эквивалентной системе ОДУ первого порядка.

Действительно, пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения p -ого порядка

$$u^{(p)} = f(x, u, u', u'', \ldots, u^{(p-1)}) \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

удовлетворяющее p краевым условиям

$$\begin{aligned} &g_k(a, u(a), u'(a), u''(a), \ldots, u^{(p-1)}(a)) = 0 \quad k = 1, \ldots, m \\ &g_k(b, u(b), u'(b), u''(b), \ldots, u^{(p-1)}(b)) = 0 \quad k = m+1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{2}$$

Например, если ввести вспомогательные функции

$$u_1(x) = u(x), u_2(x) = u'(x), u_3(x) = u''(x), \ldots, u_{p-1}(x) = u^{(p-1)}(x),$$

то (1)-(2) эквивалентна задаче для системы ОДУ первого порядка

$$
\begin{aligned}
&u_1' = u_2\\
&u_2' = u_3\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&u_{p-1}' = u_p\\
&u_p' = f(x, u_1, u_2, \dots, u_{p-1}),
\end{aligned}
$$

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&g_k(a, u_1(a), u_2(a), u_3(a), \dots, u_p(a)) = 0 \quad k = 1, \dots, m\\
&g_k(b, u_1(b), u_2(b), u_3(b), \dots, u_p(b)) = 0 \quad k = m+1, \dots, p.
\end{aligned}
$$

В векторной форме такую задачу можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}' = \overline{F}(x, \overline{u}),\\
&g_i(\bar{u}(a)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\\
&g_i(\bar{u}(b)) = 0, \quad i = m+1, \dots, p.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\overline{F}(x, \overline{u}) = (u_2, \dots, u_{p-1}, f(x, u_1, u_2, \dots, u_p))$, $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$, $\overline{u}' = (u_1', u_2', \dots, u_p')$ – p-мерные вектор–функции.

Аналогично задача для системы дифференциальных уравнений любого порядка сводится к эквивалентной задаче для системы уравнений первого порядка.

Задание Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.

Предлагается вычислить с точностью ε приближенное решение задачи Коши для уравнения

$$u^{(IV)} = f(x, u, u', u'', u''')$$

$$u(x_0) = \alpha_0, u'(x_0) = \alpha_1, u''(x_0) = \alpha_2, u'''(x_0) = \alpha_3, \quad x \in [a, b],\ x_0 = a.$$

1. Создайте процедуру-функцию для вычисления точного решение $u(x)$ этой задачи Коши, которое задано в варианте задания.
2. Приближенное с точностью ε решение $y(x)$ этой задачи Коши вычислите, используя вложенный метод Рунге-Кутты или Кутты-Фельдберга 4(5) с автоматическим выбором шага,
3. Оцените качество (погрешность и время расчета) выбранного метода.

Для выполнения этих заданий можно использовать любой язык программирования, удобно использовать математический пакет Maple. Оценивать погрешность методов расчета можно, изобразив на одном рисунке графики точного и рассчитанного решения.