Интерполяция сплайнами

При большом числе узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционного многочлена, и растет погрешность. Этого можно избежать, если разбить отрезок на части, и на каждом отрезке строить интерполяционный многочлен. Однако в этом случае на точках стыка будет разрывна первая производная. В этом случае удобно пользоваться интерполяцией сплайнами (spline — рейка). Суть этого подхода заключается в следующем.

Определение. *Функция $S_m(x)$ называется интерполяционным сплайном порядка m для $f(x)$, заданной таблицей* $\begin{array}{c|ccc} x_i & x_0 & \dots & x_n \\ \hline y_i & y_0 & \dots & y_n \end{array}$, *если 1) на $[x_i, x_{i+1}]$ $S(x)$ — многочлен степени m; 2) $S(x)$ и $S'(x), \dots, S^{(m-1)}(x)$ непрерывны на $[x_0, x_n]$; 3) $S(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots n$.*

Рассмотрим аппроксимацию кубическими сплайнами. Его можно представить в виде:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x), & [x_0, x_1] \\ P_2(x), & [x_1, x_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ P_n(x), & [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$P_i(x)$ — многочлен третьей степени ($m = 3$).
$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$; $P_i(x_i) = a_i = y_i$ — известны.
Условие непрерывности:
$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_i - x_{i+1})^3$, обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$.

$$\begin{aligned} & y_{i-1} = y_i - b_i h_i + c_i h_i^2 - d_{i+1} h_i^3, \quad P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i) \\ & y_i - y_{i+1} = b_i h_i - c_i h_i^2 + d_i h_i^3, \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$\begin{aligned} & P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ & P_i'(x_i) = b_i; \quad P_{i+1}'(x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(-h_{i+1}) + d_{i+1} 3 h_{i+1^2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow b_{i-1} - b_i + 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} & P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i), \\ & 2c_i = 2c_{i+1} + d_{i+1} 6(-h_{i+1}), \\ & c_{i-1} - c_i + 3d_i h_i = 0, \end{aligned} \tag{0.3}$$

Итак, получили систему

$$\begin{cases} b_i h_i - c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1}; \quad i = 1, \dots, n \\ b_{i-1} - b_i + 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0; \quad i = 2, \dots, n \\ c_{i-1} - c_i + 3d_i h_i = 0; \quad i = 2, \dots, n \end{cases} \tag{0.4}$$

$n + 2(n - 2) = 3n - 2$ — уравнений и $3n$ неизвестных b_i, c_i, d_i, $i = 1, \dots, n$. Для однозначной разрешимости ее следует доопределить. Наиболее распространенный способ — потребовать гладкости второй производной сплайна $S(x)$ в точках x_0 и x_n:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$$

Это дает нам два уравнения:

$$-c_1 + 3h_i d_i = 0, \quad c_n = 0. \tag{0.5}$$

Теперь можно решать систему (0.4)-(0.5). Будем решать так: исключим из нее b_i:

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + c_i h_i - d_i h_i^2, \quad \text{тогда}$$
$$b_{i-1} = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} + c_{i-1}h_{i-1} - d_{i-1}h_{i-1}^2;$$
$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} = c_{i-1}h_{i-1} + d_{i-1}h_{i-1}^2 - c_i h_i + d_i h_i^2;$$
$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i}; \quad d_{i-1} = \frac{c_{i-1} - c_{i-2}}{3h_{i-1}};$$
$$\frac{c_i - c_{i-1}}{3}h_i + \frac{c_{i-1} - c_{i-2}}{3}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1} - c_i h_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}};$$
$$h_{i+1}c_{i+1} + 2(h_i + h_{i-1})c\ldots$$
$$A_i c_{i+1} + 2B_i c_i + D_i c_{i-1} = F_i \quad \text{трехдиагональная система! Метод прогонки}$$

Сплайн-интерполяция

Кубические сплайн-функции — сравнительно недавнее математическое изобретение, но они моделируют очень старое механическое устройство. Чертежники издавна пользовались гибкими рейками — механическими сплайнами. Его закрепляют, подвешивая грузила в точках интерполяции — узлах. Сплайн принимает форму, минимизирующую его потенциальную энергию $\approx \mathcal{P} \equiv \int\limits_{x_0}^{x_n} (S''(x))^2\,dx$, если сплайн представить функцией $S(x)$. Эта функция должна удовлетворять условиям: $S(x_i) = y_i$, а интеграл $\mathcal{P} = \min$. Поскольку механический сплайн не разрушается, то следует считать, что S и S' непрерывны на $[x_0, x_n]$. Далее в теории балок показано, что функция $S(x)$ является кубическим полиномом между соседними узлами, и что соседние полиномы непрерывны, а также и их первые и вторые производные.

Кубическая сплайн-функция, удовлетворяющая условиям $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, называется <u>естественным кубическим сплайном</u>. С математической точки зрения доказано (Алберг, 1967), что она является единственной функцией, обладающей свойством <u>min</u> кривизны среди всех интерполирующих функций и имеющих $S''(x) \in L_2$.

Иногда вместо естественных граничных условий накладывают другие, два условия, например, задают $S'(x_0)$ и $S'(x_n)$. Построение кубического сплайна — простой и численно устойчивый процесс. В результате приходим к решению системы СЛАУ, квадратной, с симметричной, положительно определенной трехдиагональной матрицей, имеющей диагональное преобладание. Такая система имеет единственное решение, которое можно найти <u>методом прогонки</u>.

Выражение для $P_i(x)$ можно записать в виде

$$P_i(x) = y_i + y_i'(x - x_i) + \frac{y_i''(x - x_i)^2}{2} + (y_{i+1}'' - y_i'')\frac{(x - x_i)^3}{6h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Заметим, что если нужно вычислить $S(x)$ при $x = \bar{x}$, то сначала нужно найти отрезок, на котором находится $\bar{x}$, а потом воспользоваться выражением для $P_i(x)$ (Пул., стр. 149-150).

Пример 1. Пусть функция $y(x)$ задана таблицей

x_i	0	1/4	1/2	3/4	1
y_i	1	2	1	0	1

, $n = 5$, $h_i = 1/4$. В результате вычислений получим $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} P_1(x) = 1 + 6x - 32x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4 \\ P_2(x) = 2 - 24(x - 1/4)^2 + 32(x - 1/4)^3, \quad 1/4 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ P_3(x) = 1 - 6(x - 1/2) + 32(x - 1/2)^3, \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 3/4 \\ P_4(x) = 24(x - 3/4)^2 - 32(x - 3/4)^3, \quad 3/4 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Если нужно вычислить значение $S(x)$ в точке $\bar{x} = 0,35 > 1/4$, то нужно найти $P_2(0,35) = 1,792$.

Пример 2. (стр. 226 Ханкр.) Дана таблица $f(x_i) = y_i$

x_i	-1	0	1	2
y_i	1/2	1	2	4

($f(x) = 2^x$), найти $S(0,3)$; $S''(-1) = S''(2) = 0$.

Учитывая, что $c_0 = c_3 = 0$, систему сведем к двум уравнениям $4c_1 + c_2 = 3/2$; $c_1 + 4c_2 = 3$ $\Rightarrow c_1 = 1/5$; $c_2 = 7/10$, далее $d_1 = 1/15$, $d_2 = 1/6$, $d_3 = 67/30$. Сплайн построен и имеет вид

$$P_1(x) = 1 + \frac{19}{30}x + \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{15}x^3, \quad x \in [-1, 0]$$
$$P_2(x) = 2 + \frac{23}{15}(x - 1) + \frac{7}{10}(x - 1)^2 + \frac{1}{6}(x - 1)^3,$$
$$P_3(x) = 4 + \frac{67}{30}(x - 2) - \frac{7}{30}(x - 2)^3, \quad x \in [1, 2]$$

В пакетах MathCad, Maple, Matlab имеются встроенные функции для полиномиальной аппроксимации и построения кубического сплайна. Имеются chebyshev(ex, var, eps), пакет numapprox, with(nu ...). В системе Matlab есть команда interp(X, Y, y_i, 'method'); method: linear, cubic, spline.

Задание 1. Приближение функций

Функция $y = f(x)$ задана таблично $\begin{array}{c|ccccc} x & x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \hline y & y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{array}$. Требуется вычислить значения функции в заданных точках c_1, c_2, c_3 следующими способами:

1. Составить <u>формулу интерполяционного многочлена Лагранжа</u> по заданным узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$ и найти значение функции в заданной точке c.
   Формула $L_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i \prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Нарисовать график исходной функции $y(x)$ и функции $L_n(x)$. Оценить погрешность в данной точке c.

2. Для заданного набора узлов x_0, x_1, x_2, x_3 составить <u>формулу кубического сплайна</u>. Построить график кубического сплайна. Вычислить значение функции в заданной точке c, сравнить с предыдущим случаем, взяв в нем $n = 3$.

3. По заданной таблице $\{x_i, y_i\}$ построить <u>методом наименьших квадратов</u> две различные эмпирические формулы. С помощью этих формул найти приближенное значение функции в заданной точке c, сравнить полученные результаты.

Пояснения к выполнению задания.

1. В этом случае взять $n = 3$, чтобы многочлен Лагранжа был кубическим; это значит, что нужно выбрать $n = 3$ узлов, ближайших к точке c, и по ним строить многочлен Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ известна, то можно вычислить точную погрешность и сделать оценку.

2. Здесь нужно построить кубический сплайн $S(x)$ для некоторой функции, заданной таблично с заданным шагом h. Для этого нужно воспользоваться методическим материалом, приведенным ниже. При построении кубического сплайна нужно составить процедуру метода прогонки для решения трехдиагональных систем.

3. При выполнении задания 3 по заданной таблице нужно построить по точкам график функции, с помощью которого выбираются приближающие функции. После выбора таких функций следует приступить к реализации метода наименьших квадратов.

<u>**Замечание.**</u> В каждом из заданий следует воспользоваться инструментальными средствами приближения функций — MathCad, Maple, Matlab и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланчин М. П., Рагулина М. И., Хеннер Е. К. Численные методы, гл. 4, стр. 193-269.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики.
3. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом моделировании.