1 Тема „Полиномиальная интерполяция “

Целью заданий по этой теме является, практика в построении интерполяционного многочлена $L_n(x)$ для функции $f(x)$, заданной значениями в некоторых точках (узлах интерполяции), в разработке алгоритма и написании программы вычисления $L_n(x)$ на известном Вам языке программирования.

В каждом варианте задания требуется самостоятельно выбрать узлы интерполяции $x_j \in [a, b]$, $j = 1, \ldots, N$ и вычислить таблицу значений $f(x_j)$ предложеной функции $f(x)$. С помощью этой таблицы построить интерполяционный многочлен $L_n(x)$, использующий $n \leqslant N$ узлов и заданную интерполяционную формулу.

Так как функция $f(x)$ известна, то появляется возможность вычислить точное значение погрешности $|f(x) - L_n(x)|$ в отличных от узлов точках $x \in [a, b]$. Чтобы увидеть как велика погрешность интерполяционного многочлена, можно изобразить на одном рисунке графики $f(x)$ и $L_n(x)$.

Варианты заданий отличаются друг от друга заданными функцией $f(x)$, отрезком $[a, b]$ и интерполяционной формулой.

Чтобы увидеть влияние неизбежных ошибок округления на результат расчета на современных ЭВМ, можно при составлении таблицы значений функции $f(x)$ внести малую случайную погрешность порядка $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ при вычислении $f(x_j)$ (ε —точность расчета). Для этого используется доступный датчик случайных величин.

При выполнении заданий можно использовать любой язык программирования. Удобно такие задания выполнять, используя математический пакет Maple или любой другой, в котором возможно проводить вычисления с ограниченным числом значащих цифр.

Задание 1 "Интерполяционный многочлен Лагранжа ".

1. Вычислите две таблицы значений функций

$$f(x) = \frac{1}{1 + \alpha\, x^2}\ , \quad x \in [-1,\ 1],$$

для $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ ($2 \leqslant \alpha_1 \leqslant 4$ и $\alpha_2 = 10\ \alpha_1$) в $N = n + 1$ равноотстоящих узлах $x_j = \pm j/N$, $j = 0, 1, \ldots, n/2$, n – четное число. Постройте многочлены Лагранжа $L_N(x)$ по этим узлам для каждой функции.

2. Изобразите на одном рисунке графики функции $f(x)$ и соответствующего ей интерполяционного многочлена $L_N(x)$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ для α_1 и α_2.

3. Объясните причину разной величины погрешности при α_1 и α_2

Задание 2 "Интерполяционный многочлен для неравноотстоящих узлов".

1. Выберите N неравноотстоящих узлов $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, N$.

2. Вычислите таблицу значений $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ для заданной функции $f(x)$.

3. Постройте интерполяционный многочлен по n узлам. При $n < N$ погрешность интерполяции будет меньше, если для каждого x строится многочлен по n ближайшим к x узлам.

4. Изобразите на одном рисунке графики функции $f(x)$ и соответствующего ей интерполяционного многочлена на отрезке $[a, b]$.

Пример варианта задания 2: $a = 0$, $b = 2$,

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x + 10 & \text{если } x \leqslant 0.6 \\ -3x + 2.92 & \text{если } 0.6 < x < 1.4 \\ 0.4x^2 - 2.4x + 1.624 & \text{если } 1.4 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

используйте интерполяционную формулу Ньютона с разделенными разностями

Задание 3 "Интерполяционные многочлены для равноотстоящих узлов".

1. Выберите равноотстоящие узлы $x_i = a + ih \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $h = (b - a)/N$.

2. Вычислите таблицу значений $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ для заданной функции.

3. Выберите $n < N$ узлов в начале таблицы и постройте интерполяционный многочлен Ньютона $L_n^{(1)}(x)$ для начала таблицы.

4. Выберите n узлов в конце таблицы и постройте интерполяционный многочлен Ньютона $L_n^{(2)}(x)$ для конца таблицы.

5. Изобразите на одном рисунке графики функции $f(x)$ и интерполяционных многочленов $L_n^{(1)}(x)$ и $L_n^{(2)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Задание 4 "Интерполяционные многочлены Гаусса для равноотстоящих узлов".

1. Выберите равноотстоящие узлы $x_i = a + ih \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $h = (b - a)/N$.

2. Вычислите таблицу значений $f(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ заданной функции.

2. Постройте первый $L_n^{(1)}(x)$ и второй $L_n^{(2)}(x)$ интерполяционные многочлен Гаусса по n узлам, выбранным в середине таблицы.

3. Изобразите на одном рисунке графики функции $f(x)$ и интерполяционных многочленов $L_n^{(1)}(x)$ и $L_n^{(2)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Задание 5 "Оптимальный выбор узлов интерполяции".

1. Постройте интерполяционные многочлены для функции Рунге

$$f(x) = \frac{1}{1 + \alpha\, x^2}\ , \quad \alpha \geqslant 25, \quad x \in [-1,\ 1].$$

2. Вычислите таблицу значений функции Рунге в $N = n + 1$ равноотстоящих узлах $x_j = \pm j/m$, $m = 0, 1, \ldots, n/2$, n – четное число. Постройте многочлен Лагранжа $L_N(x)$ по этим узлам.

3. Вычислите таблицу значений функции Рунге в $N = n+1$ узлах $x_j = \cos\dfrac{\pi(2j + 1)}{2(n + 1)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, которые являются корнями многочлена Чебышева. По этим узлам постройте интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{n+1}^{(2)}(x)$ для $f(x)$.

4. Изобразите на одном рисунке графики функции $f(x)$ и интерполяционных многочленов $L_N^{(1)}(x)$ и $L_N^{(2)}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Методические указания

Пусть известны значения $f(x_i)$ некоторой функции $f(x)$ в узлах $x_j \in [a, b]$, $j = 1, ..., n$. Постановка задачи полиномиальной интерполяции состоит в построении такого многочлена $L_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ x^{k-1}$, что $L_n(x_j) = f(x_j)$, $j = 1, ..., n$.

Такой многочлен единствен, его степень $(n-1)$. Многочисленные интерполяционные многочлены (формулы), построенные для одного выбранного набора узлов x_j, — различные формы записи одного и того же многочлена. Такие формулы удобны, а иногда и необходимы, при построении различных численных методов и алгоритмов, использующих интерполяцию.

Для неравноотстоящих узлов x_j $(x_j - x_{j-1} = h_j)$ обычно используются следующие формулы:

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) p_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

2. Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

$$L_n(x) = f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + f(x_1, x_2, x_3)(x - x_1)(x - x_2) + ...+$$

$$+f(x_1, ..., x_n)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1}),$$

здесь $f(x_i, x_{i+1}) = (f(x_{i+1}) - f(x_i))/(x_{i+1} - x_i)$ — разделенная разность первого порядка, а разность k -го порядка определяется выражением

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}.$$

В случае равноотстоящих узлов x_j $(x_j - x_{j-1} = h = const)$ их удобно записывать в виде $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, ..., n-1$ и использовать формулы:

1. Интерполяционный многочлен Ньютона для точки x, расположенной в начале таблицы

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+2)}{(n-1)!}\Delta^{n-1} y_0,$$

где $t = (x - x_0)/h$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ — конечная разность первого порядка, а конечная разность k-ого порядка $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$.

2. Интерполяционный многочлен Ньютона для точки x в конце таблицы

$$L_n(x_{n-1} + th) = y_{n-1} + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-2} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-3} + ... + \frac{t(t+1)...(t+n-2)}{(n-1)!}\Delta^{n-1} y_0,$$

где $t = (x - x_{n-1})/h$.

3. Первая формула Гаусса для значений x, находящихся в середине таблицы

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + ... + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-(m-1)^2)(t-m)}{(2m)!}\Delta^{2m} y_{-m},$$

где $t = (x - x_0)/h$.

4. Вторая формула Гаусса для значений x, находящихся в середине таблицы

$$L_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$
$$+\frac{t(t^2-1)(t+2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots(t^2-(m-1)^2)(t+m)}{(2m)!}\Delta^{2m} y_{-m}.$$

где $t = (x - x_0)/h$.

Оценка погрешности для всех этих интерполяционных многочленов имеет вид

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}\omega_n(x) \leqslant \frac{M_n}{n!}|\omega_n(x)|,$$

где $M_n = \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n)}(x)|$, $\omega_n = \prod\limits_j (x - x_j)$.

Обычно эта оценка используется при практическом счете в очень редких случаях, так как оценить $|f^{(n)}(x)|$ очень трудно или вообще невозможно. Тем не менее, она полезна для понимания внутренней природы возникающих ошибок. Например, рост погрешности при $n \to \infty$ в примере Рунге ($f(x) = 1/(1+25x^2)$) можно обьяснить быстрым ростом $|f^{(n)}(x)|$ для $|x| \geqslant 0.7$.

Если таблица состоит из большого числа N значений функции, а интерполяционный многочлен строится по $n \ll N$ узлам, то погрешность в точке можно уменьшить, выбирая узлы ближайшие к x (уменьшится значение $|\omega_n(x)|$). Если $a \leqslant x \leqslant b$, то наименьшее значение $|\omega_n(x)|$ отвечает узлам $x_j = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{\pi(2j+1)}{2n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, построенным по корням многочлена Чебышева.

Для заданного x можно с помощью таблицы разделенных или конечных разностей так выбрать число n ближайших к нему узлов, чтобы построенный интерполяционный многочлен хорошо приближал $f(x)$ в окрестности x. Дело в том, что, если бы в окрестности x функция $f(x)$ была многочленом степени n, то соответствующая ей разделенная (конечная) разность n - ого порядка была бы постоянной, а разделенная разность $n+1$ - ого порядка обращалась бы в нуль. Если разделенные разности $n+1$ - ого порядка, соответствующие узлам из окрестности x, начинают возрастать, то не имеет смысла строить многочлен степени больше n. Рост разделенных разностей может объясняться либо погрешностью входных данных, либо существенным отличием $f(x)$

от многочлена степени $n+1$ и выше в окрестности точки x. На рисунке представлена таблица разделенных разностей для кусочно полиномиальной функции

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2+2x+10 & \text{если } x \leqslant 0.6 \\ -3x+2.92 & \text{если } 0.6 < x < 1.4 \\ 0.4x^2-2.4x+1.624 & \text{если } 1.4 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

из которой видно, как выбирать наилучшим образом значение n вне окрестности угловых точек.

Рис. 1: Таблица разделенных разностей для кусочно полиномиальной функции $f(x)$

Список литературы

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. -М.:Наука,1973.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. -М.:Наука,1989г.

[3] Калиткин Н.Н. Численные методы. -М.:Наука,1978

[4] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. -М.:Наука,1989.

[5] Вержбицкий В.М. Основы численных методов.- М.:Высш.шк.,2002.

[6] Дж. Ортега, У. Пул Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.