Метод Рунге-Кутты для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения уравнения

Целью этого задания является практика в численном решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Предполагается, что выполнены условия теоремы существования и единственности и решение имеет достаточное число непрерывных производных.

Требуется выполнить одно из предложенных заданий. В каждом задании решение задачи Коши можно вычислить аналитически, что позволяет сравнить реальную ошибку вычисленного решения с теоретической оценкой погрешности метода расчета. Для выполнения задания надо построить алгоритм метода Рунге-Кутты с автоматическим выбором шага, составить программу его реализации на вычислительной машине и провести расчет. При разработке алгоритма надо обращать внимание на ситуации, когда малые погрешности при вводе данных или при расчете могут вызывать большие погрешности вычисленного решения.

После выполнения задания требуется составить отчет по форме:

1. постановка задачи;
2. распечатка программы и результатов счета;
3. анализ погрешности результатов.

Задание 1.

Предлагается вычислить с точностью ε приближенное решение задачи Коши для уравнения с параметром p

$$u' = f(x, u, p),\ u(x_0) = u^0, \quad x \in [a, b],\ x_0 = a.$$

1. Вычислите точное решение $u(x)$ этой задачи Коши вручную или с помощью символьных машинных систем.
2. Приближенное с точностью ε решение $y(x)$ этой задачи Коши вычислите для заданных значений параметра p, используя метод Рунге-Кутты не менее третьего порядка с автоматическим выбором шага,
3. Оцените качество (погрешность и время расчета) рассматриваемого метода.

Задание 2.

Предлагается вычислить с точностью ε приближенное решение задачи Коши для уравнения

$$u' = f(x, u),\ u(x_0) = u^0, \quad x \in [a, b],\ x_0 = a.$$

1. Вычислите точное решение $u(x)$ этой задачи Коши вручную или с помощью символьных машинных систем.
2. Приближенное с точностью ε решение $y(x)$ этой задачи Коши вычислите, используя вложенный метод Кутты-Фельдберга 4(5) с автоматическим выбором шага,
3. Оцените качество (погрешность и время расчета) рассматриваемого метода.

Задание 3.

Предлагается вычислить с точностью ε приближенное решение задачи Коши для уравнения

$$u' = f(x,u),\ u(x_0) = u^0, \quad x \in [a,b],\ x_0 = a.$$

1. Вычислите точное решение $u(x)$ этой задачи Коши вручную или с помощью символьных машинных систем.
2. Приближенное с точностью ε решение $y(x)$ этой задачи Коши вычислите, используя метод Рунге- Кутты 4-ого порядка и вложенный метод Кутты-Фельдберга 4(5) с автоматическим выбором шага,
3. Сравните качество (погрешность и время расчета) рассматриваемых методов.

Задание 4.

Предлагается вычислить с точностью ε приближенное решение задачи Коши для уравнения

$$u' = f(x,u),\ u(x_0) = u^0, \quad x \in [a,b],\ x_0 = a.$$

1. Вычислите точное решение $u(x)$ этой задачи Коши вручную или с помощью символьных машинных систем.
2. Приближенное с точностью ε решение $y(x)$ этой задачи Коши вычислите, используя метод Predictor-Corrector, построенный для трехшаговых методов Адамса,
3. Оцените качество (погрешность и время расчета) рассматриваемого метода.

Для выполнения этих заданий можно использовать любой язык программирования, удобно использовать математический пакет Maple. Оценивать погрешность методов расчета можно, изобразив на одном рисунке графики точного и рассчитанного решения.

Методические указания.

Методы Рунге - Кутты — одношаговые методы, в которых по известному в некоторой точке x решению $u(x)$ задачи Коши

$$u' = f(x,u),\ u(a) = u^0, \quad x \in [a,b]$$

значение ее приближенного решения при $x+h$ разыскивается по формуле

$$u(x+h) \approx y(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i\ k_i(h) \tag{1}$$

где $y(x) = u(x)$,

$$\begin{aligned}
&k_1 = h\ f(x, y(x))\\
&k_2 = h\ f(x + \alpha_2 h, y(x) + \beta_{21} k_1(h))\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&k_q = h\ f(x + \alpha_q h, y(x) + \beta_{q1} k_1(h) + \cdots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h))
\end{aligned}$$

Коэффициенты p_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$, α_i $(i = 2, 3, \ldots, q)$ и β_{ij} $(1 \leqslant j < i \leqslant q)$ выбраны так, чтобы погрешность приближенного решения $\varphi(h) = u(x+h) - y(x+h)$ стремилась к нулю при $h \to 0$.

Если выбранным коэффициентам соответствует невязка порядка $\varphi(h) = u(x+h) - y(x+h) = O(h^{s+1})$, то построенный метод называется явным q–стадийным методом Рунге - Кутты s – порядка. В этом случае для оценки локальной погрешности можно использовать правило Рунге

$$u(x+h) - y(x+h) \approx \frac{y^{(1)}(x+h) - y^{(2)}(x+h)}{2^s - 1},$$

где решение $y^{(1)}(x+h)$ вычислено по формуле (1), а $y^{(2)}(x+h)$ — по той же формуле за два шага размера $h/2$.

Если выполняется неравенство

$$\frac{|y^{(1)}(x+h) - y^{(2)}(x+h)|}{2^s - 1} \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

то шаг выбран верно, и можно продолжать расчет в следующей точке, принимая в формуле (1) рассчитанное решение $y^{(2)}(x+h)$ за точное.

Если же

$$\frac{|y^{(1)}(x+h) - y^{(2)}(x+h)|}{2^s - 1} > \varepsilon,$$

то шаг делится пополам $h := h/2$. Расчет с новым шагом начинается с оператора присваивания $y^{(2)} := y^{(1)}$, затем вычисляется $y^{(1)}(x+h)$ и снова проверяется справедливость неравенства (2). Расчет повторяется до тех пор, пока не будет выполнено (2). Число таких повторений требуется ограничивать, т.к. метод Рунге - Кутты может расходиться (предположения о гладкости решения или другие оказались неверными).

Возможна ситуация, когда на одной части отрезка шаг должен быть малым, а на другой можно считать со значительно большим шагом. Если окажется

$$\frac{|y^{(1)}(x+h) - y^{(2)}(x+h)|}{2^s - 1} \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$ (например, $\varepsilon_1 = 0.05\varepsilon$), то шаг h можно удвоить.

Из постановки задачи известно точное значение искомого решения $u(x_0) = u^0$ в точке $x_0 = a$, для расчета в следующих точках начальный шаг h_0 разумно выбрать $h_0 = \sqrt[s]{\varepsilon}$, тогда практическая оценка погрешности будет иметь порядок $O(h^s) = O(\varepsilon)$.

Заметим, что проверка условия (2) требует $(3q-1)$ раз вычислять правую часть задачи $f(x,u)$.

Перед построением алгоритма метода Рунге Кутты с автоматическим выбором шага создается процедура $RK1h(x,y,z,z_1)$, в которой вычисляется $z_1 = y(x+h)$ по формуле (1) и известному решению $z = y(x)$, а также процедура $OUT(x,z,x_p,h_p,ipr)$, обрабатывающая результаты расчета решения z в точке x. Так, если надо рассчитать таблицу решения с шагом h_p, то в этой процедуре производится печать $z(x_p)$. Если по какой либо причине требуется прекратить расчет, то в $OUT(x,z,x_p,h_p,ipr)$ значению параметра ipr присваивается $ipr := 1$, если $ipr := 0$, то вычисления продолжаются.

Кроме того, нужна еще $FUN(x,u(x),z)$ — процедура вычисления правой части задачи $z = f(x,u(x))$, где $u(x)$ — искомая функция.

Если существуют такие процедуры, то один из алгоритмов расчета с автоматическим выбором шага можно построить следующим образом:

1. Ввод данных:

   a, b — границы отрезка изменения независимой переменной x,

   ε — точность расчета,

   u^0 — значение решения в точке x_0,

   IT — максимальное число делений шага пополам,

   h_p — заданный шаг таблицы значений рассчитанного решения.
2. $h_0 := \sqrt[s]{\varepsilon}$, $h := h_0$, $z := u^0$,$ipr := 0$, $x := x_0$, $x_p := x_0$, $i := 0$,
3. $OUT(x,z,x_p,h_p,ipr)$,
4. в цикле пока $x < b$ выполнять

   (это условие из за ошибок округления нужно понимать как $|x-b| \ll \varepsilon$)

   если $ipr = 0$,

   тогда $RK1h(x,z,h,z_1)$— вычисляется $z_1 = y(x+h)$, $r := 1$ — для входа в цикл

   в цикле пока $r > \varepsilon$ и $i < IT$ выполнять

   $RK1h(x,z,h/2,z_2)$— вычисляется $z_2 = y(x+h/2)$

   $RK1h(x,z_2,h/2,z_3)$— вычисляется $z_3 = y(x+h)$

$r := |z_1 - z_3|/(2^s - 1)$, $i := i + 1$,

конец цикла по r или числу делений шага пополам,

если $r \leqslant \varepsilon$,

тогда z_3 — приближенное с точностью ε решение в точке $x + h$, $x := x + h$,

$z := z3$,

иначе если $i > IT$,

тогда печать информации, что точность не достигнута, $ipr := 1$,

иначе $h := h/2$, $i := 1 + 1$, $z_1 := z_2$,

если $r < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1 \ll \varepsilon$) и $h < h_p$, тогда $h := 2\ h$,

если $x + h > b$, то $h := b - x$

$OUT(x, z, x_p, h_p, ipr)$,

конец цикла по x.

Процедура $OUT(x, z, x_p, h_p, ipr)$ может быть пустой, если требуется решение только в конце интервала. В случае, когда нужна таблица значений решения с шагом приблизительно равным h_p, один из вариантов алгоритма для этой процедуры может быть таким

Начало процедуры $OUT(x, z, x_p, h_p, ipr)$,

если $x > x_p$, тогда печать x и z, $x_p := x_p + h_p$;

если по какому либо условию, которое может зависить от x и z надо прекратить счет, то $ipr := 1$;

выход из процедуры $OUT(x, z, x_p, h_p, ipr)$.

Если требуется вычислить решение системы ОДУ n-ого порядка, то надо изменить эти процедуры и алгоритм, добавив во входные данные порядок n и выполняя все действия с компонентами вектора решения.

Вложенные методы Рунге - Кутты

Точность вложенных методов оценивается с помощью приближенных решений $y(x + h)$ и $\widetilde{y}(x + h)$, рассчитанных методами Рунге - Кутты разных порядков точности. Такие методы называются „фамилия автора p(s)“, где p означает порядок метода вычисления $y(x + h)$, а s — порядок $\widetilde{y}(x + h)$. Построенные таким образом вложенные методы позволяют уменьшить число операций для практической оценки локальной погрешности при автоматическом выборе шага. Например, в методе Фельберга 4(5), с помощью метода четвертого порядка разыскивается решение

$$u(x + h) \approx y(x + h) = y(x) + \sum_{i=1}^{6} p_i k_i(h),$$

и с помощью метода пятого порядка решение

$$u(x+h) \approx \widetilde{y}(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^{6} \widetilde{p}_i k_i(h),$$

Здесь важно, что $k_i(h)$ в обоих методах одинаковые. Тогда практическая щценка погрешности с точностью до $O(h^5)$ имеет вид

$$u(x+h) - \widetilde{y}(x+h) \approx \sum_{i=1}^{6} (p_i(x) - \widetilde{p}_i) k_i(h)$$

При реализации алгоритма решения с автоматическим выбором шага такая оценка погрешности экономичнее правила Рунге.

Некоторые расчетные формулы методов Рунге - Кутты

1. "Классический"метод Рунге - Кутты 4-ого порядка

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)/6 \\ k_1 &= hf(x, y(x)) \\ k_2 &= hf(x + h/2, y(x) + k_1/2) \\ k_3 &= hf(x + h/2, y(x) + k_2/2) \\ k_4 &= hf(x + h, y(x) + k_3) \end{aligned}$$

2. Правило 3/8 (Метод Рунге - Кутты 4-ого порядка)

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x) + (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8 \\ k_1 &= hf(x, y(x)) \\ k_2 &= hf(x + h/3, y(x) + k_1/3) \\ k_3 &= hf(x + 2h/3, y(x) - k_1/3 + k_2) \\ k_4 &= hf(x + h, y(x) + k_1 - k_2 + k_3) \end{aligned}$$

3. Вложенный метод Фельберга 4(5)

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right) \\
k_1 &= hf(x, y(x)) \\
k_2 &= hf(x + h/4, y(x) + k_1/4) \\
k_3 &= hf\left(x + \frac{3}{8}h, y(x) + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\
k_4 &= hf\left((x + \frac{12}{13}h, y(x) + \frac{1932}{2197}k_1 + \frac{7296}{2197}k_2\right) \\
k_5 &= hf\left((x + h, y(x) + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\
k_6 &= hf\left((x + h/2, y(x) - \frac{8}{27}k_1 + 28k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
\end{aligned}
$$

Практическая оценка для этого метода имеет вид

$$
r = h\left(\frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right)
$$