В пособии приводятся варианты заданий по курсу "Практикум на ЭВМ" и методические указания по их выполнению.

Целью заданий первого раздела является выяснение причин появления ошибок округления при машинных расчетах и их влияния на результат.

В остальных разделах предлагается выполнить одно из заданий, в котором требуется вычислить решение некоторой задачи с помощью заданного численного метода. Как правило, решение задачи можно вычислить аналитически или оно приводится в варианте задания, что позволяет сравнить реальную ошибку вычисленного решения с теоретической оценкой погрешности метода расчета.

Чтобы выполнить такое задание требуется построить алгоритм метода, составить программу его реализации на вычислительной машине и провести расчет. При разработке алгоритма надо обращать внимание на ситуации, когда малые погрешности при вводе данных или при расчете могут вызывать большие погрешности вычисленного решения.

Дополнительная информация, которая требуется в задании, выдается преподавателем. После выполнения каждого задания требуется составить отчет по форме:

1. постановка задачи;
2. распечатка программы и результатов счета;
3. анализ погрешности результатов.

1 Тема „Машинные вычисления“

Задание 1

Выполните следущие небольшие расчеты.

1. Вычислите машинное ε.

> Машинным ε называется наименьшее положительное число в множестве чисел с плавающей запятой, для которого выполняется неравенство $1+\varepsilon>1$

Машинное ε принимается за приближенное значение нуля в множестве чисел, которые можно записать в память вычислительной машины (в множестве чисел с плавающей запятой). При численных расчетах достаточно знать приближенное значение ε с точностью до некоторого множителя.

2. Вычислите значения интегралов

$$E_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 0, 1, \ldots, N,$$

для заданного $N \geqslant 20$.

Для этого используйте рекуррентные формулы, которые получаются при интегрировании E_n по частям.

Сначала проведите вычисления по формуле

$$E_n = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

учитывая, что

$$E_0 = \int\limits_0^1 e^{x-1} dx = 1 - \frac{1}{e^1}.$$

Затем используйте формулу

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}, \quad n = N, N-1, \ldots, 0,$$

положив $E_N = 0$, так как справедлива оценка $E_n \leqslant 1/(n+1)$.

Сравните результаты расчета с анализом свойств E_n. Из этого анализа (см. ниже стр. 3) следует, что $E_n \geqslant 0$ и E_n убывает при возрастании n.

3. Вычислите приближенное значение e^x для $x < -8$, используя разложение

$$e^x \approx \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n!},$$

где значение k выбирается так, чтобы $\left|\dfrac{x^k}{k!}\right| \leqslant \varepsilon$, ε— точность расчета. Результат расчета сравните с значением встроенной функции exp(x).

Для выполнения задания можно использовать известный Вам язык программирования.

Методические указания

1. Числа с плавающей запятой, которые записываются в память ЭВМ, имеют вид

$$x = \mathrm{sgn}(x)\, m_t\, \beta^p,$$

где $\beta = 2$— основание двоичной системы счисления (удобнее считать $\beta = 16$), $m_t = \dfrac{d_1}{\beta} + \dfrac{d_2}{\beta^2} + ... + \dfrac{d_t}{\beta^t}$ — мантисса числа, $d_k (k = 1, \ldots, t)$ — цифры β-ичной системы счисления ($0 \leq d_k \leq \beta - 1$), причем $d_1 \neq 0$ (в вычислительной машине хранятся нормализованные числа). Нуль — единственное ненормализованное число во множестве F чисел с плавающей запятой.

Множество чисел F с плавающей запятой конечно, пусть ω — наименьшее, а Ω — наибольшее положительные числа в F.

Любое вещественное число $x^* \in R$ можно записать в виде

$$x^* = \operatorname{sgn}(x^*)\, m\, \beta^p,$$

где $m = \dfrac{d_1}{\beta} + \dfrac{d_2}{\beta^2} + ... + \dfrac{d_t}{\beta^t} + \dfrac{d_{t+1}}{\beta^{t+1}} + ...$. Если $d_i = 0$ для любого $i > t$, то $x^* \in F$. Если же хотя бы одно $d_i \neq 0$ для $i > t$, то x^* не принадлежит множеству F, тогда с помощью округления ему ставится в соответствие приближенное значение $x = \operatorname{sgn}(x^*)\, m_t\, \beta^p \in F$, где

$$m_t = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + ... + \frac{\widetilde{d}_t}{\beta^t}, \quad \widetilde{d}_t = \begin{cases} d_t, & \text{если}\, d_{t+1} < \beta/2, \\ d_t + 1, & \text{если}\, d_{t+1} \geqslant \beta/2. \end{cases}$$

При таком округлении каждому вещественному числу $|x^*| \leqslant \Omega$ ставится в соответствие число $x \in F$, так что

$$x = (1+\delta)x^*, \quad \text{где} \quad \begin{cases} |\delta| \leq \beta^{1-t}/2, & \text{если}\, |x| \geq \omega, \\ \delta = -1, & \text{если}\, |x| < \omega. \end{cases}$$

При высокой точности современных ЭВМ (больших значениях t) влияние относительной погрешности округления δ может оказаться опасным лишь при больших по объему расчетах. Чтобы увидеть как малые погрешности в исходных данных и ошибки округления приводят к большим потерям точности в результатах вычислений при небольших по объему расчетах, можно ограничить число значащих цифр (число t) при выполнении арифметических операций и при вводе данных.

2. Формула для вычисления интеграла

$$E_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

получается с помощью интегрирования по частям

$$E_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - n \int\limits_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Чтобы убедиться в правильности рассчитанных значений E_n, выясним их свойства. Во-первых, $E_n > 0$, во-вторых, справедлива оценка

$$E_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx \leqslant \int\limits_0^1 x^n dx \leqslant \frac{1}{n+1},$$

то есть $E_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Значение $E_0 = \int\limits_0^1 e^{x-1}dx = 1 - e^{-1}$ можно вычислять с высокой точностью, но при расчете по рекуррентной формуле

$$E_n = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{1.1}$$

значения E_n перестают убывать и при $n > 20$ среди них появляются отрицательные. Эти результаты не согласуются с анализом свойств интегралов E_n.

Если проследить только за одной малой погрешностью вычисления точного значения E_{0T} с помощью цепочки равенств

$$E_{0T} = E_0 + \delta_0,\ E_{1T} = E_1 - 1\delta_0,\ E_{2T} = E_2 + 1 \cdot 2\delta_0,\ \ldots\ , E_{nT} = E_n + (-1)^n n!\ \delta_0,$$

то станет ясно, что алгоритм расчета неустойчив.

Из формулы (1.1) можно получить другую рекуррентную формулу

$$E_{n-1} = \frac{1 - E_n}{n}, \quad n = N, N-1, \ldots, 1.$$

Если положить $E_N = 0$, то результаты расчета по этой формуле не противоречат свойствам значений E_n, несмотря на то, что погрешность E_N ($E_N \approx 1/(N+1)$) больше чем погрешность E_0.

3. Слагаемые $x^n/n!$ сходящегося ряда убывают по модулю при $n \to \infty$. Для $x < -8$ они начинают убывать с достаточно большого значения $n = N$. Значения же первых знакопеременных слагаемых велики по модулю, при их сложении ошибки округления могут оказаться по модулю больше значений $|x|^n/n!$ при $N < n < k$. Это означает, что ошибки округления при суммировании большого числа слагаемых, упорядоченных по убыванию их модулей, могут сильно исказить результат вычислений

Список литературы

[1] Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. -М.:Наука,1977.

[2] Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. - М.: Мир, 1960.

[3] Беленькая Л.Х., Овчинникова С.Н. Вычислительная погрешность при расчетах на ЭВМ, Методические указания.. Ростов -на- Дону, УПЛ РГУ, 1994г., 27 с.