ข้อสอบไเะพุกต่

MTH1201 Mathematics for Computer Science

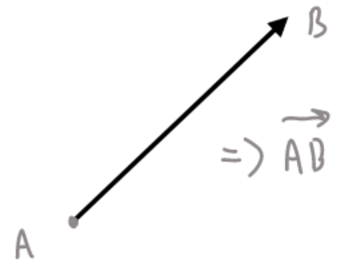
ผู้สอน : อ.ดร.ทิพย์ภาภรณ์ อิ้งรัศมี

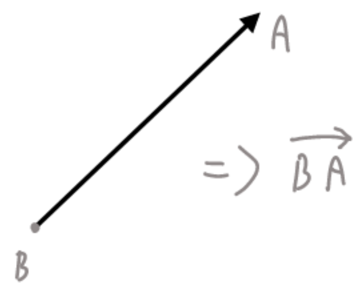
รายละเอียดกระบวนวิชา

- เวกเตอร์
- เมทริกซ์
- พีชคณิตเชิงเส้น
- กำหนดการเชิงเส้น
- หลักการนับและความน่าจะเป็น

เวกเตอร์

นิยาม ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า เวกเตอร์ (vector) สามารถเขียนแทนด้วยแผนภาพที่เป็นส่วนของเส้นตรงที่เริ่มต้นจากจุดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า จุดเริ่มต้น (initial point) ไปยังอีกจุดหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า จุดสิ้นสุด (terminal point) โดยมีหัวลูกศรที่จุดสิ้นสุดเป็นการบอกทิศทาง

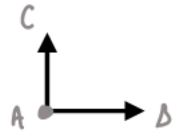


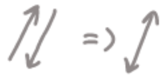


เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A และมีจุดสิ้นสุดที่ B แทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ บางครั้งเพื่อความสะดวกอาจเขียนแทนด้วย $\vec{u}$ หรือ $\bar{v}$

ชนิดของเวกเตอร์

- สำหรับเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน จะเรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0}$
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a}$ ที่กำหนดให้ จะเขียนแทนด้วย $\hat{a}$

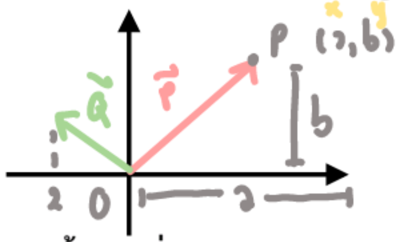


- เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า coinitial vectors
- เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ขนานกัน เรียกว่า collinear vectors 
- เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากัน ถ้าทั้งสองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน เขียนได้ว่า $\vec{a} = \vec{b}$
- เวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงข้ามกัน จะเรียกว่าเป็น negative ซึ่งกันและกัน เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

ด.ยาวเส้น

ระยะห่างระหว่างจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ เรียกว่า <u>ขนาด</u> (magnitude) ของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$ หรือ $|\vec{a}|$

หน่วยของ $\vec{v}$



tip : เริ่มต้นจาก x ก่อน หลังต่อพุ่งไป y จะได้ $\vec{v}$

เวกเตอร์ใน 2 มิติ

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $O(0,0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่ $P(a,b)$ ดังรูป

↓ เริ่มต้นที่จุด 0 เสมอ => x => y

จากรูป เรียกว่า เวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แต่บางครั้งเพื่อความสะดวกจะเขียนแทนด้วยจุดสิ้นสุดเพียงจุดเดียวเป็น $\vec{P}$ และสามารถระบุตำแหน่งของเวกเตอร์ได้ด้วย $\vec{P} = (a,b)$

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P(a_1,b_1)$ และมีจุดสิ้นสุดที่ $Q(a_2,b_2)$ แล้วจะสามารถเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ได้ดังนี้

$$\overrightarrow{PQ} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$$

ตัวอย่าง กำหนดจุด $P(1,2)$ และ $Q(-3,5)$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{QP}$

formula => จุดปลาย - จุดต้น

$\overrightarrow{PQ} = (-3-(1), 5-2) = (-4,3)$

$\overrightarrow{QP} = (1-(-3), 2-5) = (4,-3)$

เวกเตอร์ใน 3 มิติ

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P(a_1, b_1, c_1)$ และมีจุดสิ้นสุดที่ $Q(a_2, b_2, c_2)$ แล้วจะสามารถเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ ได้ดังนี้

$$\overrightarrow{PQ} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$$

ตัวอย่าง กำหนดจุด $P(2,3,0)$ และ $Q(-1,-2,-4)$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{QP}$

สูตร = ปลาย - ต้น

$\overrightarrow{PQ} = (-1-(2), -2-(3), -4-(0)) = (-3, -5, -4)$

$\overrightarrow{QP} = (2-(-1), 3-(-2), 0-(-4)) = (3, 5, 4)$

การบวกเวกเตอร์ resultant

สามารถหาผลบวกของเวกเตอร์ได้โดยใช้แผนภาพ ดังนี้

e+ $\vec{a} + \vec{b}$

key word หางต่อหัว

สมบัติของการบวกเวกเตอร์

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

การบวกและการลบเวกเตอร์ใน 2 และ 3 มิติ

กำหนดให้ $\hat{i}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปทางเดียวกับแกน X

$\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปทางเดียวกับแกน Y

$\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วยที่มีทิศทางไปทางเดียวกับแกน Z

ใน 2 มิติ สามารถเขียนเวกเตอร์ได้เป็น $\overrightarrow{P} = (a, b) = a\hat{i} + b\hat{j}$

ใน 3 มิติ สามารถเขียนเวกเตอร์ได้เป็น $\overrightarrow{P} = (a, b, c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ จะได้ว่า

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\hat{i} + (b_1 + b_2)\hat{j}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (a_1 - a_2)\hat{i} + (b_1 - b_2)\hat{j}$$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ จะได้ว่า

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2)\hat{i} + (b_1 + b_2)\hat{j} + (c_1 + c_2)\hat{k}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (a_1 - a_2)\hat{i} + (b_1 - b_2)\hat{j} + (c_1 - c_2)\hat{k}$$

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{u} = 5\hat{i} + 4\hat{j}$ และ $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$ จงหา $\vec{u} + \vec{v}$ และ $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (5\hat{i} + 2\hat{i}) + (4\hat{j} + 1\hat{j}) = 7\hat{i} + 5\hat{j}$

$\vec{u} - \vec{v} = (5\hat{i} - 2\hat{i}) + (4\hat{j} - 1\hat{j}) = 3\hat{i} - 3\hat{j}$

$\left.\begin{array}{l} x + x = x \\ i + j \end{array}\right\}$ ไม่ได้

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{u} = 5\hat{i} + 4\hat{k}$ และ $\vec{v} = 3\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$ จงหา $\vec{u} + \vec{v}$ และ $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (5i + 3i) + (0 + (-j)) + (4k + 9k) = 8\hat{i} - j + 13\hat{k}$

$\vec{u} - \vec{v} = (5i - 3i) + (0 - (-j)) + (4k - 9k) = 2\hat{i} + j - 5\hat{k}$

scala x vector ได้ แต่ +, - ไม่ได้

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ใน 2 และ 3 มิติ

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ และ m เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$m\vec{u} = (ma_1)\hat{i} + (mb_1)\hat{j}$$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ และ m เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$m\vec{u} = (ma_1)\hat{i} + (mb_1)\hat{j} + (mc_1)\hat{k}$$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์จะมีผลกับขนาดของเวกเตอร์ โดยที่

ถ้า $m > 0$ แล้ว $m\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็น $|m|$ เท่าของ $\vec{u}$

ถ้า $m < 0$ แล้ว $m\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเป็น $|m|$ เท่าของ $\vec{u}$

ถ้า $m = 0$ แล้ว $m\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ศูนย์

ตัวอย่าง กำหนด $A(3,4)$ และ $B(-1,2)$ จงหา $5\overrightarrow{AB}$

Step หา $\overrightarrow{AB}$ ก่อน ค่อยคูณ

$\overrightarrow{AB} = (-1-3, 2-4) = (-4,-2)$

$\therefore 5\overrightarrow{AB} = (-20,-10)$

สมบัติของการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

1. $k\vec{a} + m\vec{a} = (k+m)\vec{a}$

   $5\vec{a} + 2\vec{a} = (5+2)\vec{a} = 7\vec{a}$

2. $k(m\vec{a}) = (km)\vec{a}$

   $5(2\vec{a}) = (5\cdot 2)\vec{a} = 10\vec{a}$

3. $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

   $5(\vec{a}+\vec{b}) = 5\vec{a} + 5\vec{a}$

   ↳ $5\vec{a}+5\vec{b}$

   ปรับใช้ตาม question

การเท่ากันของเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ จะได้ว่า

$\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$ และ $b_1 = b_2$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ จะได้ว่า

$\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ และ $c_1 = c_2$

ตัวอย่าง จงหาค่า x, y และ z ถ้ากำหนดว่า $\vec{a} = x\hat{i} + 2\hat{j} + z\hat{k}$ และ $\vec{b} = 2\hat{i} + y\hat{j} + \hat{k}$ เท่ากัน

$x = 2$

$y = 2$

$z = 1$

การขนานกันของเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ จะได้ว่า

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2}$

ex. ให้ $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ & $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{u} \cdot 2 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ $\therefore \vec{u} \parallel \vec{v}$

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่

(1) $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ และ $\vec{v} = -8\hat{i} - 12\hat{j}$ $\Rightarrow \vec{u} : \frac{3}{2}$, $\vec{v} : \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$ $\therefore \vec{u} \parallel \vec{v}$

(2) $\vec{u} = -7\hat{i} + 3\hat{j}$ และ $\vec{v} = -7\hat{i} - 3\hat{j}$ $\Rightarrow \vec{u} : \frac{3}{-7}$, $\vec{v} : \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$ $\therefore \vec{u} \nparallel \vec{v}$

ex. ให้ $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ & $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

$\vec{u} \cdot 2 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ $\therefore \vec{u} \parallel \vec{v}$

ex. $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ & $\vec{v} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{u} \cdot -3 = -3\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k}$ $\therefore \vec{u} \nparallel \vec{v}$

ขนาดของเวกเตอร์

กำหนด $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ จะได้ว่า $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

กำหนด $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ จะได้ว่า $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ตัวอย่าง จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

(1) $\vec{u} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ $\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

(2) $\vec{u} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ $\Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 4 + 16} = \sqrt{36} = 6$

ตัวอย่าง ให้ $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ และ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ ถามว่า $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ หรือไม่ แล้ว $\vec{a} = \vec{b}$ หรือไม่

$$\left.\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5} \end{aligned}\right\} \therefore |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ แต่ } \vec{a} \neq \vec{b}$$

เพราะว่าขนาดไม่เท่ากัน

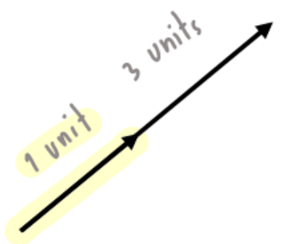
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ถ้า $\vec{u} \neq \vec{0}$ แล้วเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$

$|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\therefore \hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{5} \cdot \vec{u} = \dfrac{4}{5}\hat{i} + \dfrac{3}{5}\hat{j}$



ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}$

$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \vec{a} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$

ตรงข้าม

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ และมีขนาดเท่ากับ 7 หน่วย

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ $= 7$ หน่วย $\Rightarrow \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$

$-7\hat{a} = \frac{-7}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ในทิศทางเดียวกับผลบวกของ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ และ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{a} + \vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

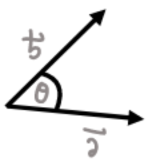
$\hat{c} = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ (scalar product of two vectors)

นิยาม ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ หาได้จาก

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ โดยที่ $0 \le \theta \le \pi$

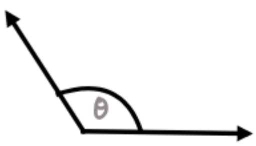
ข้อสังเกตเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์



$\pi = 180^\circ$ $\quad \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ $\quad \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

1. ถ้า $\vec{a} = \vec{0}$ หรือ $\vec{b} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ เป็นจำนวนจริง
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \perp \vec{b}$
4. ถ้า $\theta = 0$ แล้ว $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ $(\cos 0 = 1)$
5. ถ้า $\theta = \pi$ แล้ว $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ $(\cos 180^\circ = -1)$
6. $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1, \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$
7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
8. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$



	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

จำ !!

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{u} = 2\hat{i} - 10\hat{j} + 4\hat{k}$ และ $\vec{v} = -4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ จงหา $\cos\theta$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \cos\theta$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2)(-4) + (-10)(2) + (4)(5)$

$= -8 - 20 + 20 = -8$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2 + 4^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\cos\theta = \dfrac{-\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{2}\sqrt{30}\cdot 3\sqrt{5}} = \dfrac{-4}{15\sqrt{6}}$

150
30 5
3 10
2 5

ตัวอย่าง จงหามุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ที่มีขนาดเท่ากับ 1 และ 2 ตามลำดับ และ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

$|\vec{a}| = 1$

$|\vec{b}| = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$

ตัวอย่าง จงหามุมระหว่าง $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ และ $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1 - 1 - 1 = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{3}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \dfrac{-1}{3}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)$

$\vec{c} \perp \vec{d} = 0$

ตัวอย่าง ถ้า $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ และ $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ จงแสดงว่า $\vec{a} + \vec{b}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{c} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

$\vec{d} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{c}\cdot\vec{d} = 24 - 8 - 16 = 0$

$\therefore\ \vec{c} \perp \vec{d}$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ จะได้ว่า

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2$$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ จะได้ว่า

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$

ตัวอย่าง ให้ $\vec{u} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ และ $\vec{v} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -4\hat{i} + 6\hat{j}$

ตัวอย่าง จงหา $|\vec{a} - \vec{b}|$ เมื่อกำหนดให้ $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ และ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$

พิจารณา $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b}$

$= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 2^2 - 2(4) + 3^2 = 5$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 5$

$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$ #

ตัวอย่าง ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 8$ จงหา $|\vec{x}|$

$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$

$|\vec{x}|^2 - |\vec{a}|^2 = 8$

$|\vec{x}|^2 = \cancel{8+1}\ 9$

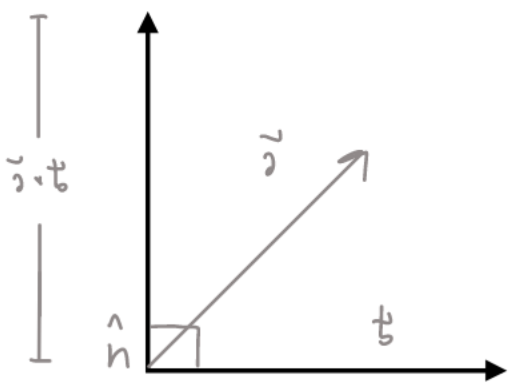
$|\vec{x}| = 3$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์ vector product ; cross product

นิยาม ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของสองเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ หาได้จาก

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\hat{n}$$

เมื่อ θ คือ มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ โดยที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\hat{n}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับทั้ง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$



ข้อสังเกตเกี่ยวกับผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. ถ้า $\vec{a} = \vec{0}$ หรือ $\vec{b} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$
2. $\vec{a}\times\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์
3. $\vec{a}\times\vec{b} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \parallel \vec{b}$

cross ได้ 0 ขนานกัน

4. ถ้า $\theta = \overset{90^\circ}{\frac{\pi}{2}}$ แล้ว $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

5. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$, $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

6. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ พุ่งขึ้น ลดลง

7. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

8. ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมจะเท่ากับ $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

$\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

9. ถ้า $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นด้านสองด้านที่ติดกันของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน แล้วพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจะเท่ากับ $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$\frac{1}{\cancel{2}}|\vec{a} \times \vec{b}| \times \cancel{2} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

กำหนดให้ $\vec{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ และ $\vec{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ จะได้ว่า

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \hat{n}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} & i & j \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \end{array} \right|$$

บน

ล่าง

= ล่าง - บน

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ และ $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ จงหา $\vec{a} \times \vec{b}$ และ $\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \right|$$

$3k - i - 4j$ (บน)

ล่าง - บน = $-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ #

$-2i - 3j + 2k$ (ล่าง)

$-2i - (-i) = -i$ $2k - 3k = -k$

$-3j - (-4j) = j$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

$-2i - 3j + 2k$

$-i - 4j + 3k$

ล่าง - บน = $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ #

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ และ $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ จงหา $|\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \begin{array}{ccc|cc} i & j & k & i & j \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 & 5 \end{array} \right|$$

$15i - 4j + 3k$

$-2i + 9j + 10k$

ล่าง - บน = $-17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$ #