## กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

**กฎการคูณ** ถ้าต้องการทำงานอย่างหนึ่งมี $k$ ขั้นตอน ขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ $n_1$ วิธี ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่หนึ่งมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สองได้ $n_2$ วิธี ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานขั้นตอนที่หนึ่งและขั้นตอนที่สองมีวิธีเลือกทำขั้นตอนที่สามได้ $n_3$ วิธี เช่นนี้เรื่อยไปจนถึงขั้นตอนสุดท้ายคือ ขั้นตอนที่ $k$ ทำได้ $n_k$ วิธี จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน $k$ อย่าง เท่ากับ $n_1 n_2 n_3 \cdots n_k$ วิธี

S, M, L W, R

**ตัวอย่าง** ร้านค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดโชว์เสื้อกีฬาทุกขนาดและทุกสี ถ้ามีเสื้อ 3 ขนาด และแต่ละขนาดมี 2 สี คือ สีขาวกับสีแดงจะต้องจัดอย่างไร

$3 \times 2 = 6$

SW SR
MW MR
LW LR


**ตัวอย่าง** โรงเรียนแห่งหนึ่งจัดอาหารกลางวันเป็นอาหารคาว 4 อย่าง และขนม 3 อย่าง ให้นักเรียนเลือกรับประทานชนิดละอย่าง อยากทราบว่านักเรียนจะมีวิธีเลือกอาหารคาวและขนมได้ทั้งหมดกี่วิธี

$4 \times 3 = 12$ วิธี

**ตัวอย่าง** ระหว่างท่าข้ามสองฝั่งแม่น้ำมีเรือยนต์ข้ามฟากแล่นอยู่ 3 ลำ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ผู้โดยสารคนหนึ่งจะข้ามฟากโดยที่เที่ยวไปและเที่ยวกลับลงเรือไม่ซ้ำลำกัน

ถ้าซ้ำได้ $3 \times 3 = 9$ แต่ไม่ซ้ำจะเท่ากับ $\underbrace{3}_{\text{ไป}} \times \underbrace{2}_{\text{กลับ}} = 6$

**ตัวอย่าง** ในการทอยลูกเต๋าสองลูก จะปรากฏผลได้ทั้งหมดกี่วิธี

$6 \times 6 = 36$ วิธี

**ตัวอย่าง** ถ้าต้องการทำป้ายเพื่อแสดงแบบ สี และขนาดของรองเท้ากีฬา 6 แบบ แต่ละแบบมี 3 สี และแต่ละสีมี 5 ขนาด จะต้องจัดป้ายที่ต่างกันทั้งหมดกี่ป้ายจึงจะครบทุกแบบ สี และขนาด

$6 \times 3 \times 5 = 90$

**ตัวอย่าง** จำนวนคู่บวกซึ่งมีสามหลักมีทั้งหมดกี่จำนวน

- เลขโดด (digit) มี 10 ตัว 0-9
- จำนวนคู่บวก 3 หลัก แปลว่า มีเลขโดด 3 ตน.

ตน.สุดท้าย เป็นเลขคู่และเลขที่ลงท้ายด้วย 0

$\underbrace{9}_{1-9} \times \underbrace{10}_{0-9} \times \underbrace{5}_{0,2,4,6,8} = 450$ จำนวน

★ ไทยมี 77 จังหวัด

**ตัวอย่าง** ถ้าในการกำหนดเลขทะเบียนรถยนต์จะต้องใช้พยัญชนะนำหน้า 2 ตัว (ซ้ำกันได้) จากพยัญชนะทั้งหมด 44 ตัว และกำหนดให้มีตัวเลขไม่เกิน 4 หลัก จะออกป้ายทะเบียนรถยนต์ได้ทั้งหมดกี่ป้าย

$\underset{ก-ฮ}{\underline{44}} \cdot \underset{ก-ฮ}{\underline{44}} \cdot$ (ไม่เกิน 4) _ _ _ _

- เลข 1 หลัก ; $44 \times 44 \times 9\ (1-9) = 17,424$
- เลข 2 หลัก ; $44 \times 44 \times 9 \times 10 = 174,240$
- เลข 3 หลัก ; $44 \times 44 \times 9 \times 10 \times 10 = 1,742,400$
- เลข 4 หลัก ; $44 \times 44 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 17,424,000$

19,358,064 แบบ

**ตัวอย่าง** บริษัทแห่งหนึ่ง กำหนดให้มีรหัสประจำตัวพนักงาน ซึ่งประกอบด้วย ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว และเลขโดด 3 ตัว ตัวอย่างเช่น A-001 อยากทราบว่ารหัสประจำตัวของพนักงานในบริษัทนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่รหัส ถ้า

ก) รหัสประจำตัวพนักงานต้องไม่มีเลขโดดที่ซ้ำกัน 18,720

ข) รหัสประจำตัวพนักงานมีเลขโดดที่ซ้ำกัน 7,280

| ทั้งหมด | ไม่ซ้ำ | ซ้ำ |
|---|---|---|
| $\underset{A-Z}{\underline{26}} \times \underset{0-9}{\underline{10}} \times \underset{0-9}{\underline{10}} \times \underset{0-9}{\underline{10}} = 26,000$ | $\underline{26} \times \underline{10} \times \underline{9} \times \underline{8} = 18,720$ | $26,000 - 18720 = 7,280$ |

**ตัวอย่าง** ถ้าทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนวิธีที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองจะมากกว่า 4

- ลูกเต๋ามี 6 หน้า 2 ลูก $= 6 \times 6 = 36$
- จาก 36 แบบอยากได้แบบที่ผลรวมมากกว่า 4

$\therefore$ ผลรวมลูกเต๋าต้องเป็น 2,3,4 $\Rightarrow (1,1),(2,1)(1,2)$
$(1,3),(3,1)(2,2)$

$36 - 6 = 30$ แบบ

**แฟกทอเรียล $n$ (Factorial $n$)**

**บทนิยาม** เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก แฟกทอเรียล $n$ หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง $n$
แฟกทอเรียล $n$ เขียนแทนด้วย $n!$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$n! = n(n-1) \cdot n(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n(n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n+r)! = (n+r) \cdot (n+r-1) \cdot (n+r-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$(n-r)! = (n-r) \cdot (n-r-1) \cdot (n-r-2 \quad \cdot 1$

$0! = 1$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ

ก) $\frac{9!}{6!} \quad \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$

ข) $\frac{12!}{10!} \times \frac{5!}{7!} \quad \frac{\cancel{12}^{2} \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{\cancel{10!}} \times \frac{\cancel{5!}}{7 \cdot \cancel{6}_{1} \cdot \cancel{5!}} = \frac{22}{7}$

ค) $\frac{2!}{5!} + \frac{3!}{4!} = \frac{2}{120} + \frac{6 \times 5}{24 \times 5} = \frac{2+30}{120} = \frac{\cancel{32}^{4}}{\cancel{120}_{15}} = \frac{4}{15}$

$\times 5$

$\frac{2 + 30}{5!} = \frac{\cancel{32}^{\cancel{16}^{4}}}{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} = \frac{4}{15}$

**ตัวอย่าง** จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของแฟกทอเรียล

ก) $5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!}$

ข) $10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{10!}{6!}$

ค) $(n+1)n(n-1)(n-2) = \frac{(n+1)!}{(n-3)!}$

**ตัวอย่าง** ถ้า $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 30$ แล้ว จงหาค่าของ $n$ โจทย์แก้ออกมาต้องเป็นจน.เต็ม

$\frac{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = 30$

$n^2 + 5n + 6 = 30$

$n^2 + 5n - 24 = 0$

$(n+8)(n-3) = 0$

$n = -8, 3$

$n = 3$ #

## วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

ลำดับสำคัญ → ลำดับเปลี่ยนถือว่าเป็นคนละอย่าง

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ $n$ สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $n!$ วิธี

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดคน 5 คน เข้าแถวเรียงหนึ่ง

$5! = 120$

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนคำที่เกิดจากการนำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า APEC มาเรียงสับเปลี่ยนโดยไม่คำนึงถึงความหมาย

$4! = 24$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ $n$ สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยจัดทีละ $r$ สิ่ง เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี เมื่อ $r \leq n$ เขียนแทนด้วย $P_{n,r}$

**ตัวอย่าง** มีธงสีต่าง ๆ 5 สี สีละหนึ่งผืน ถ้าต้องการส่งสัญญาณธงโดยการสลับที่ธงครั้งละ 3 ธง เรียงในแนวดิ่งจะมีวิธีส่งสัญญาณธงทั้งหมดกี่วิธี

$P(5,3) = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$ วิธี

**ตัวอย่าง** โรงละครแห่งหนึ่งจัดเก้าอี้ไว้แถวละ 10 ตัว ถ้าวิบูลย์จะซื้อตั๋วเข้าไปดูละครพร้อมกับเพื่อนอีก 3 คน เขาจะมีวิธีเลือกที่นั่งในแถวเดียวกันได้กี่วิธี (ถ้าในแถวนั้นยังไม่มีคนจอง)

$P(10,4) = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5040$ วิธี

**ตัวอย่าง** จงหาค่า $n$ จากสมการต่อไปนี้

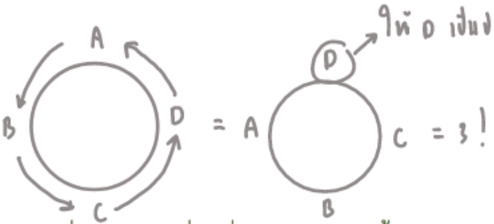
ก) $P_{n,2} = 6$ $\quad \frac{n!}{(n-2)!} = 6 \rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 6 \Rightarrow 3 \cdot 2 = 6 \therefore n = 3$

ข) $P_{n,3} = 720$ $\quad \frac{n!}{(n-3)!} = 720 \rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 720 \Rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \therefore n = 10$

ค) $P_{n,3} = 3P_{5,2}$ $\rightarrow \frac{5!}{3!} = 20 \cdot 3 = 60$

$\frac{n!}{(n-3)!} = 60 \rightarrow n(n-1)(n-2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \therefore n = 5$

**วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเชิงวงกลม**




ให้ D เป็นประธานคือให้ 1 ตัวอยู่ที่เดิม

Note วงกลมหมุนไปหมุนมาฝั่งไหนผลก็ไม่เปลี่ยนต้องมี 1 ตัวที่ไม่หมุน

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของ $n$ สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 6 คน นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมซึ่งมีเก้าอี้ 6 ตัว

$(6-1)! = 5! = 120$

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนวิธีในการจัดชาย 5 คน หญิง 5 คน ยืนสลับกันเป็นวงกลม

ให้ ผช. เป็นประธาน $(5-1)! = 4!$

ผญ. วนไปเรื่อยๆ $= 5!$

$4! \times 5!$

**วิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด**

ถ้ามีสิ่งของอยู่ $n$ สิ่ง ในจำนวนนี้มี $n_1$ สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี $n_2$ สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง มี $n_3$ สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สาม ... และมี $n_k$ สิ่งที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ $k$ โดยที่ $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k=n$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง $n$ สิ่ง เท่ากับ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

**ตัวอย่าง** นำตัวอักษร 3 ตัว ซึ่งได้แก่ A, A และB มาเรียงกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

AAB AAB BAA

ABA ABA BAA

A = 2

B = 1

$\dfrac{3!}{2!1!} = 3$

Note => ทั้งหมดหารด้วยตัวซ้ำ

**ตัวอย่าง** มีหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ภาษาอังกฤษ 4 เล่ม และภาษาไทย 2 เล่ม ถ้าหนังสือวิชาเดียวกันเหมือนกัน จงหาจำนวนวิธีในการจัดเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นหนังสือ

ทั้งหมด 9 เล่ม $\dfrac{9!}{3!4!2!} = \dfrac{9\cdot \cancel{8}^{4}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}\,\cancel{2!}} = 1260$

**ตัวอย่าง** สมภพมีธนบัตรอยู่ 8 ใบ เป็นธนบัตรในละห้าร้อยบาท 2 ใบ ใบละหนึ่งร้อยบาท 3 ใบ ใบละห้าสิบบาท 1 ใบ และใบละยี่สิบบาท 2 ใบ จงหาว่าสมภพจะมีวิธีจัดเรียงซ้อนธนบัตรทั้งหมดได้กี่วิธี

$\dfrac{8!}{2!3!1!2!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{2!}\,\cancel{3!}\,\cancel{2!}} = 1680$

**วิธีจัดหมู่ (Combination)** ลำดับไม่สำคัญ

จำนวนวิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน $n$ สิ่ง ให้มีกลุ่มละ $r$ สิ่ง เมื่อ $r \le n$ เท่ากับ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ เขียนแทนด้วย $C_{n,r}$ หรือ $\dbinom{n}{r}$

**ตัวอย่าง** จงหาจำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้วครั้งละ 3 ลูก จากที่มีอยู่ทั้งหมด 10 ลูก

$$C_{(10,3)} = \frac{10!}{3!\ 7!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \cancel{7!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7!}} = 120$$

**ตัวอย่าง** จงหาค่าของ $C_{5,3}$ และ $P_{5,3}$ แล้วเปรียบเทียบค่าที่ได้

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\ 2!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\ \cancel{2!}} = 10$$

$$P = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad P_{(5,3)} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60$$

$\neq$

**ตัวอย่าง** ข้อสอบวิชาหนึ่งมีทั้งหมด 5 ข้อ นักเรียนคนหนึ่งสามารถทำได้ทุกข้อ จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้จะเลือกทำข้อสอบ ถ้ากำหนดให้

ก) ต้องเลือกทำ 3 ข้อ $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\ 2!} = 10$

ข) ต้องเลือกทำ 2 ข้อ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10$

$=$

**ตัวอย่าง** มีดินสออยู่ 1 โหล ซึ่งแต่ละแท่งมีสีต่างกัน ถ้าต้องการหยิบครั้งละ 5 แท่งตามเงื่อนไขต่อไปนี้ จงหาว่าจะมีวิธีหยิบได้กี่วิธี

ก) แต่ละครั้งที่หยิบต้องมีดินสอสีแดงอยู่ด้วย $\binom{11}{4}$

11 → หยิบสีแดงออกมาแล้ว

4 → หยิบสีแดงออกมาก่อน เลยเหลือ 4 ครั้ง

ข) แต่ละครั้งที่หยิบต้องไม่มีดินสอสีแดง

$\binom{11}{5}$

11 → เอาสีแดงออก

## ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) → เอาไว้คูณกระจายกำลังสูง

Pascal's Triangle

n = 0: $1 = \binom{0}{0}$

n = 1: $1 = \binom{1}{0}$, $1 = \binom{1}{1}$

n = 2: $1 = \binom{2}{0}$, $2 = \binom{2}{1}$, $1 = \binom{2}{2}$

n = 3: $1 = \binom{3}{0}$, $3 = \binom{3}{1}$, $3 = \binom{3}{2}$, $1 = \binom{3}{3}$

n = 4: $1 = \binom{4}{0}$, $4 = \binom{4}{1}$, $6 = \binom{4}{2}$, $4 = \binom{4}{3}$, $1 = \binom{4}{4}$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

**ตัวอย่าง** จงกระจาย $(a+b)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

n = 4: 1 4 6 4 1

n = 5: $1 = \binom{5}{0}$ $5\binom{5}{1}$ $10\binom{5}{2}$ $10\binom{5}{3}$ $5\binom{5}{4}$ $1\binom{5}{5}$

↗ เลขข้างหน้าคือสัมประสิทธิ์ $\binom{5}{0}$ ข้างล่างเป็นกำลัง b

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

**ตัวอย่าง** จงกระจาย $(2x-3y)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

$$= 1(2x)^4+4(2x)^3(-3y)+6(2x)^2(-3y)^2+4(2x)(-3y)^3+1(-3y)^4$$

$$= 16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$$

**ตัวอย่าง** จงหาพจน์กลางของการกระจาย $(p+3)^{12}$

$r = 6$

$n = 12$

$\binom{12}{6} p^6 3^6$

$$C_{(12,6)} = \frac{12!}{6!\ 6!} = \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \overset{2}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}\ \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}$$

$$= 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 924 \cdot 729 \cdot p^6$$

$$= 674008\, p^6$$

Q1 : $(a+b)^n$ กระจายได้กี่เทอม

→ $(a+b)^n$ กระจายได้ $n+1$ เทอม

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

ex: $(a+b)^2$ กระจายได้กี่เทอม

→ 3 เทอม (เริ่มตั้งแต่ 0-2)

$1 = \binom{0}{0}$

$1 = \binom{1}{0}$ $\quad$ $1 = \binom{1}{1}$

$1 = \binom{2}{0}$ $\quad$ $2 = \binom{2}{1}$ $\quad$ $1 = \binom{2}{2}$

$1 = \binom{3}{0}$ $\quad$ $3 = \binom{3}{1}$ $\quad$ $3 = \binom{3}{2}$ $\quad$ $1 = \binom{3}{3}$

$1 = \binom{4}{0}$ $\quad$ $4 = \binom{4}{1}$ $\quad$ $6 = \binom{4}{2}$ $\quad$ $4 = \binom{4}{3}$ $\quad$ $1 = \binom{4}{4}$

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Q2 : จงหาเทอมที่ 7 ของ $(a-b)^{10}$

$n = 10$ (เทอมที่ 10)

$r = 6$ (หาเทอมที่ 7 รวม 0)

$\binom{10}{6} a^{10-6} b^6 = a^4 b^6$

Q3 : จงหาเทอมตรงกลาง ของ $(a-b)^{18}$

$18/2 = 9$

$r = 9$

$n = 18$

$\binom{18}{9} a^9 (-b)^9$

Note !! จำ life cycle

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ จะวนตามเข็มนาฬิกา

แต่ถ้าย้อนศรจะได้ -

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$


① $i \cdot (j \times k) + j \cdot (i \times k) + k \cdot (i \times j)$

$= i \cdot i + j \cdot -j + k \cdot k$

$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot 1$

$= 1 - 1 + 1 = 1$ #