เวกเตอร์สเปซ (Vector Spaces)

$R^2 (x,y)$

จน. dimension

A. Euclidean n-space

นิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว order n-tuple คือ ลำดับของจำนวนจริง n จำนวน เขียนแทนด้วย $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ เซตของ order n-tuple ทั้งหมด เรียกว่า n-space แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{R}^n$

นิยาม เวกเตอร์ $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ และ $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ อยู่ใน $\mathbb{R}^n$ จะเท่ากัน ถ้า

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

ต้องเท่ากันทั้งหมด

Standard operations บน $\mathbb{R}^n$ ได้แก่

1. ผลบวก $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$
2. Scalar multiple $k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$

เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^n$ แทนด้วย $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$

$-1 \times \vec{u}$

Negative ของ $\vec{u}$ แทนด้วย $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$

การลบเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ หมายถึง $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$

dimensionต้องเท่ากัน ถึงจะลบได้

ตัวอย่าง ให้ $\vec{u} = (2,0,-1,3)$ ($n=4$) และ $\vec{v} = (5,4,7,-1)$ ($n=4$) จงหา $\vec{u} - \vec{v}$

$\vec{u}, \vec{v} \in R^4$

$\vec{u} - \vec{v} = (2,0,-1,3) - (5,4,7,-1)$

$= (2,0,-1,3) + (-5,-4,-7,1)$

$= (-3,-4,-8,4)$ #

ทฤษฎีบท กำหนด $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ และ $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ และ k, l เป็นค่าคงที่

$+$

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ สลับที่การบวก
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ เปลี่ยนกลุ่มการบวก
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ใน R^n จะต้องมี 0
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ นั่นคือ $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$ ต้องมีnegativeในทุกคู่

$\times$

5. $k(l\vec{u}) = (kl)\vec{u}$
6. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$ ต้องมีเลข 1

นิยาม Euclidean inner product หมายถึง

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

ตัวอย่าง จงหา Euclidean inner product ของ $\vec{u}=(-1,3,5,7)$ และ $\vec{v}=(5,-4,7,0)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1,3,5,7)\cdot(5,-4,7,0)$

$= (-1)(5)+(3)(-4)+(5)(7)+(7)(0)$

$= -5-12+35+0$

$= 18$ #

ต้องเป็น dot เท่านั้น เขียนแบบอื่นไม่ได้

ทฤษฎีบท ให้ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ และ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
3. $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
4. $\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$ และ $\vec{v}\cdot\vec{v}=0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{v}=\vec{0}$ ผลลัพธ์จะ + เสมอ ถ้ามัน dot ตัวมันเอง

ตัวอย่าง พิจารณา $(3\vec{u}+2\vec{v})\cdot(4\vec{u}+\vec{v})$

$= 3\vec{u}\cdot4\vec{u}+3\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{v}\cdot4\vec{u}+2\vec{v}\cdot\vec{v}$

$= 12\,\vec{u}\cdot\vec{u}+3\vec{u}\cdot\vec{v}+8\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{v}\cdot\vec{v}$

$= 12\,\vec{u}\cdot\vec{u}+11\,\vec{u}\cdot\vec{v}+2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$ #

นิยาม Euclidean norm (ขนาด) ของ $\vec{u}$ แทนด้วย $\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$ และ Euclidean distance ระหว่างจุด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ใน $\mathbb{R}^n$ คือ

$$d(\vec{u},\vec{v})=\underbrace{\|\vec{u}-\vec{v}\|}_{\text{สลับที่ได้}}=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$$

ตัวอย่าง กำหนด $\vec{u}=(1,3,-2,7)$ และ $\vec{v}=(0,7,2,2)$ จงหา $\|\vec{u}\|$ และ $d(\vec{u},\vec{v})$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2+7^2} = \sqrt{1+9+4+49} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$ #

63
3 21
3 7

$d(\vec{u},\vec{v}) = \sqrt{(1-0)^2+(3-7)^2+(-2-2)^2+(7-2)^2} = \sqrt{1+16+16+25}$

$= \sqrt{58}$ #

หมายเหตุ บางครั้งสามารถใช้สัญลักษณ์เมทริกซ์ขนาด $n\times1$ เขียนแทนเวกเตอร์ได้ เช่น

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\7\end{bmatrix} \text{ และ } \vec{v}=\begin{bmatrix}0\\7\\2\\2\end{bmatrix}$$

B. General Vector Spaces

นิยาม ให้ V เป็นเซตใด ๆ ของวัตถุที่สามารถดำเนินการ การบวก และ การคูณด้วยค่าคงที่ เราจะเรียก V ว่า เวกเตอร์สเปซ (vector space) และเรียกวัตถุใน V ว่า เวกเตอร์ (vectors) ถ้าทุกสมาชิกใน V มีสมบัติทุกข้อต่อไปนี้ ครบ 10 ข้อจะเรียก vector space

1. $\vec{u}+\vec{v}\in V$ บวกกันแล้วผลลัพธ์ต้องอยู่ใน V (จน.จริง + จน.จริง = จน.จริง)
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ สลับที่การ +
3. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ เปลี่ยนกลุ่มการ +
4. มี $\vec{0}\in V$ ที่ทำให้ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ มี 0 ในเซตที่ + แล้วได้ตัวเดิม
5. สำหรับแต่ละ $\vec{u}\in V$ จะมี $-\vec{u}\in V$ ที่ทำให้ $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ เช่น มีคู่ 1 ก็ต้องมีคู่ตรงข้าม -1
6. $k\vec{u}\in V$
7. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$ คูณกระจาย
8. $(k+l)\vec{u}=k\vec{u}+l\vec{u}$
9. $k(l\vec{u})=(kl)\vec{u}$
10. $1\vec{u}=\vec{u}$

สลับที่

หมายเหตุ ถ้าค่าคงที่ k,l เป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะเรียก V ว่า complex vector spaces

ตัวอย่าง ของเวกเตอร์สเปซ

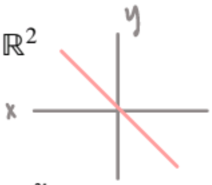
(1) $\mathbb{R}^n$

(2) ระนาบใด ๆ ที่ผ่านจุดกำเนิดใน $\mathbb{R}^3$

อธิบายอยู่อีกหน้า

(3) เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดใน $\mathbb{R}^2$

$y=mx$



(4) เซตของเมทริกซ์ขนาด $m\times n$ ทั้งหมด

$\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}$ → matrix space ที่เล็กที่สุด

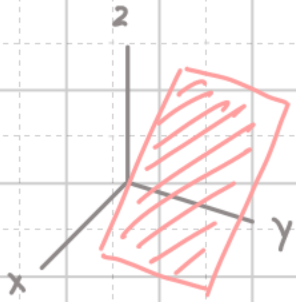
(5) เซตของฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $\mathbb{R}$

(6) เซตของจุด (x,y) ทั้งหมดใน $\mathbb{R}^2$ ที่อยู่ในจตุภาคที่ 1

(7) เซตของ $\vec{0}$ เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีขนาดเล็กที่สุด เรียกว่า zero vector space

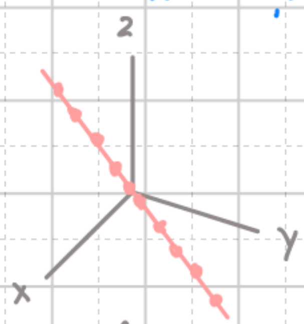
$\{\vec{0}\}$

2. ระนาบใดๆ ที่ผ่านจุดกำเนิด R^3



1. เอา vector ใน ระนาบมาบวกกันผลลัพธ์ก็จะยังอยู่ในระนาบ ไม่ได้พุ่งขึ้นข้างบนหรือลงข้างล่าง ดังนั้นผ่านข้อ 1
2. เมื่อเราเอา vector 2 คู่ในแนวระนาบมาสลับที่บวกกันเปลี่ยนกลุ่มบวกกันก็จะได้ผลลัพธ์อยู่ในระนาบผ่านข้อ 2-3
3. ระนาบที่ผ่านจุดกำเนิดใดๆ หมายถึงระนาบที่ผ่าน (0, 0) ดังนั้นผ่านข้อ 4
4. เมื่อคู่อันดับในแนวระนาบมี 1 ก็ต้องมี -1 ในฝั่งตรงข้าม ดังนั้นผ่านข้อ 5
5. เมื่อเราเอา vector ไปคูณค่าคงที่ vector ก็จะไปในทิศทางเดิม แค่ขยายใหญ่ขึ้น ดังนั้นผ่านข้อ 6-10

3. เส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดใน R^3



1. จุดที่อยู่ใน + กันก็ยังคงอยู่บนเส้นด้วยสมบัติของสมการเส้นตรง $(ax + by + cz = 0)$ ดังนั้นผ่านข้อ 1-3

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 0 \end{aligned}\right\} + \quad a(x_1+x_2) + b(y_1+y_2) + c(z_1+z_2) = 0$$

ก็ยังคงได้ 0

<u>object</u> ในเส้นตรง คือ จุดที่มีสมบัติ

2. ผ่านจุดกำเนิด (0, 0) ผ่านข้อ 4
3. จุดตรงข้ามก็แค่เอา -คูณตลอด $-ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$ ผ่านข้อ 5
4. เมื่อเราเอา vector ไปคูณค่าคงที่ vector ก็จะไปในทิศทางเดิม แค่ขยายใหญ่ขึ้น ดังนั้นผ่านข้อ 6-10

4. set ของ matrix ขนาด m×n ทั้งหมด

1. matrix ขนาด 2×2 บวกกันก็ยังคงได้ขนาด 2×2 หากสลับที่หรือเปลี่ยนกลุ่มกันบวกก็จะยังคงได้ขนาดเท่าเดิม ผ่านข้อ 1-3
2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ มี 0 ผ่านข้อ 4
3. matrix ขนาด 2×2 คูณ -1 เข้าไปก็ยังขนาดเท่าเดิม ผ่านข้อ 5
4. matrix ขนาด 2×2 คูณค่าคงที่ก็ได้ขนาดเท่าเดิม ผ่านข้อ 6-10

5. set ของ function ค่าจริงที่นิยามบน R

1. function ค่าจริง + กัน ก็ได้ผลลัพธ์จน.จริง ผ่านข้อ 1-3 $f(x)+g(x)$
2. $kf(x)$ ก็ได้จน.จริง ผ่านข้อ 6-10
3. function 0 $(h(x)=0)$ ผ่านข้อ 4
4. function ค่าจริงคูณ -1 เข้าไปก็ได้จน.จริง ผ่านข้อ 5

6. set ของจุด (x, y) ทั้งหมดใน R^2 ที่อยู่ในจตุภาคที่ 1

1. จตุภาคที่ 1 เป็นค่าบวกทั้งหมด ข้อนี้ไม่เป็น vector space เพราะทุกจุดในจตุภาคที่ 1 ไม่มีค่า Negative

7. set ของ $\vec{0}$

$\{\vec{0}\}$

1. set ของ $\vec{0}$ บวกกันยังไงก็ได้ 0 เพราะมี 0 ตัวเดียว ผ่านข้อ 1-3
2. set ของ $\vec{0}$ มี 0 ผ่านข้อ 4
3. set ของ $\vec{0}$ คูณ -1 ก็เท่ากับ -0 เป็น 0 ผ่านข้อ 5
4. ค่าคงที่คูณ 0 ก็ได้ 0 ผ่านข้อ 6-10

ทฤษฎีบท ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V และ k เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $0\vec{u} = \vec{0}$
2. $k\vec{0} = \vec{0}$
3. $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
4. ถ้า $k\vec{u} = \vec{0}$ แล้ว $k = 0$ หรือ $\vec{u} = \vec{0}$

stop 1. ดูฝั่งซ้ายขวาแล้วแทนไปตามนิยาม
2. ดูผลลัพธ์ของทั้ง 2 ฝั่งว่าเท่ากันมั้ย

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า เซตของจุด (x, y, z) ที่นิยามด้วยการบวก $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ และการคูณด้วยค่าคงตัว $k(x, y, z) = (kx, y, z)$ เป็นเวกเตอร์สเปซหรือไม่

อยู่อีกหน้าจ้า

C. Subspaces

นิยาม สับเซต W ของเวกเตอร์สเปซ V จะเรียกว่า สับสเปซ (subspace) ของ V ถ้า W เป็นเวกเตอร์สเปซภายใต้การบวกและการคูณด้วยค่าคงตัวที่นิยามบน V

ตัวอย่าง $\mathbb{R}^3$ เป็นเวกเตอร์สเปซ และระนาบใด ๆ ที่ผ่านจุดกำเนิดใน $\mathbb{R}^3$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^3$ และก็มีสมบัติเป็นเวกเตอร์สเปซ ดังนั้น ระนาบใด ๆ ที่ผ่านจุดกำเนิดใน $\mathbb{R}^3$ จึงเป็นสับสเปซของ $\mathbb{R}^3$

ทฤษฎีบท ถ้า W เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของเวกเตอร์สเปซ V แล้ว W จะเป็นสับสเปซของ V ก็ต่อเมื่อ
(1) ถ้า $u, v \in W$ แล้ว $u + v \in W$
(2) ถ้า $u \in W$ แล้ว $ku \in W$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ทุก ๆ เวกเตอร์สเปซ V จะมีอย่างน้อย 2 สับสเปซเสมอ ได้แก่ V และ $\{\vec{0}\}$

ตัวอย่าง ของสับสเปซ

เป็น vector space แน่นอน ∴ check แค่ subspace

(1) ระนาบที่ผ่านจุดกำเนิดเป็นสับสเปซของ $\mathbb{R}^3$

① $\{Ax + By + Cz = 0\}$

$P_1 : Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0$

$P_2 : Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0$

$P_1 + P_2 : A(x_1+x_2) + B(y_1+y_2) + C(z_1+z_2) = 0$

② $KP_1 : KA_1x + KA_2y + KA_3z = k \cdot 0 = 0$

HW. $\{Ex + Fy + Gz = 0\}$

$\left.\begin{array}{l} P_1 : Ex_1 + Fy_1 + Gz_1 = 0 \\ P_2 : Ex_2 + Fy_2 + Gz_2 = 0 \end{array}\right\} +$

① $P_1 + P_2 : E(x_1+x_2) + F(y_1+y_2) + G(z_1+z_2) = 0$

② $KP_1 : KE_1x + KF_1y + KG_1z = K \cdot 0 = 0$

1. จงพิจารณาว่าเซตของจุด (x, y, z) ที่นิยามด้วยการบวก $(x, y, z) + (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z')$ และ การคูณด้วยค่าคงตัว $k(x, y, z) = (kx, y, z)$ เป็น vector space หรือไม่

step 1. ดูฝั่งซ้ายขวาแล้วแทนไปตามนิยาม
2. ดูผลลัพท์ของทั้ง 2 ฝั่งว่าเท่ากันมั้ย

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. มี $\vec{0} \in V$ ที่ $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. มี $-\vec{u} \in V$ ที่ $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$
6. $k\vec{u} \in V$
7. $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
9. $(kl)\vec{u} = k(l\vec{u})$
10. $1\vec{u} = \vec{u}$

H. W

99

(2) เซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่มีสมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 เป็นสับสเปซของเวกเตอร์สเปซ M_{22} (เซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ทั้งหมด)

① $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+c \\ b+d & 0 \end{bmatrix} \in W$

$\therefore$ W เป็น subspace ของ M_{22}

② $k\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(a) \\ k(b) & 0 \end{bmatrix} \in W$

(3) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ W เป็นเซตของฟังก์ชันพหุนามดีกรีไม่เกิน n จะได้ว่า W เป็นสับสเปซของเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $\mathbb{R}$

ดีกรีลดได้แต่

(4) เนื่องจาก ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ k เป็นค่าคงตัว แล้ว $f+g$ และ kf ก็เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า เซตของฟังก์ชันต่อเนื่องทั้งหมด เป็นสับสเปซของเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $\mathbb{R}$

มีมากกว่า 1 สมการ

(5) พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบไปด้วย m สมการ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

b เป็น 0 ทุกสมการ

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ และให้เวกเตอร์ $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ผลเฉลย (solution vector) ของระบบสมการนี้ แล้วจะได้ว่า เซตของเวกเตอร์ผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์ (homogeneous system) เป็นสับสเปซของ $\mathbb{R}^n$

$\searrow \vec{s}$ ต้องเป็น subspace

ex. $\vec{s} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

$x - y = 7$

$x + y = 3$

$\therefore x = 5, y = -2$

นิยาม เวกเตอร์ $\mathbf{w}$ จะเรียกว่าเป็น ผลผนวกเชิงเส้น (linear combination) ของเวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ถ้าสามารถเขียน $\mathbf{w}$ ให้อยู่ในรูป $\mathbf{w} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \ldots + k_r\mathbf{v}_r$ เมื่อ $k_1, k_2, \ldots, k_r$ เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง ให้ $\mathbf{u} = (1,2,-1)$ และ $\mathbf{v} = (6,4,2)$ จงแสดงว่า $\mathbf{w} = (9,2,7)$ เป็นผลผนวกเชิงเส้นของ $\mathbf{u}$ กับ $\mathbf{v}$ แต่ $\mathbf{w}' = (4,-1,8)$ ไม่ใช่

$\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$

$$\left.\begin{aligned} 9 &= k_1 + 6k_2 \\ 2 &= 2k_1 + 4k_2 \\ 7 &= -k_1 + 2k_2 \end{aligned}\right\}\text{ ถ้าจัดทั้ง 3 สมการ}$$

① + ③ $16 = 8k_2 \quad \therefore k_2 = 2$ แทนค่าใน ①

$9 = k_1 + 6(2)$ | $2 = 2k_1 + 4(2)$ | $\therefore k_1 = -3$

$k_1 = 9 - 12 = -3$ | $2k_1 = -6 = -3$

$\therefore \vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$

เป็น linear combination

$\therefore \vec{w}'$ ไม่เป็น linear com.

$\vec{w}' = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$

$(4,-1,8) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$

$4 = k_1 + 6k_2$

$-1 = 2k_1 + 4k_2$

$8 = -k_1 + 2k_2$

① + ③ $12 = 8k_2$

$k_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$4 = k_1 + 6\left(\frac{3}{2}\right)$

$k_1 = -5$

$-1 = 2k_1 + 4\left(\frac{3}{2}\right)$

$2k_1 = -7$

$k_1 = -7/2$

นิยาม ถ้า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ เป็นเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ V และถ้าทุกเวกเตอร์ใน V สามารถเขียนในรูปผลผนวกเชิงเส้นของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ ได้ แล้วเราจะกล่าวว่า เวกเตอร์ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ แผ่ทั่ว (span) V เปไรขบเท้พบกับแม่ร์

ตัวอย่าง

(1) เวกเตอร์ $\hat{i} = (1,0,0), \hat{j} = (0,1,0), \hat{k} = (0,0,1)$ แผ่ทั่ว R^3

$(4,-2,8) = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$

$(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 0.8) = \sqrt{3}(1,0,0) + \frac{1}{2}(0,1,0) + 0.8(0,0,1)$

$(e,f,g) = e\hat{i} + f\hat{j} + g\hat{k}$

$(a,b,c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$

$\therefore i, j, k$ span R^3

(2) พหุนาม $1, x, x^2, \ldots, x^n$ แผ่ทั่วเวกเตอร์สเปซ P_n

n+1 ตัว

รูปของพหุนาม

ดีกรีไม่เกิน n

พหุนาม $1, x, x^2, \ldots, x^n$ span P_n

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $\mathbf{v}_1 = (1,1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,1)$ และ $\mathbf{v}_3 = (2,1,3)$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

$(a,b,c) = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + k_3\vec{v}_3$

$(a,b,c) = k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,1,3)$

$a = k_1 + k_2 + 2k_3$

$b = k_1 + k_3$

$c = 2k_1 + k_2 + 3k_3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{B}$$

$0+1+3=4$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

ล่าง - บน

$\det A = 4 - 4 = 0$

$0+1+3=4$

ระบบสมการจะมีคำตอบก็ต่อเมื่อมี A inverse (A^{-1})

ดังนั้นระบบสมการมีคำตอบ แปลว่า $\det A \neq 0$ span

$\therefore \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ไม่ span R^3 ※

step

1. จัดรูป
2. จัดรูประบบสมการ
3. จัดรูป $AX = B$
4. หา det A
5. ได้คำตอบ

$|A| \neq 0 \rightarrow A$ มี A^{-1}

ระบบสมการมีคำตอบ

↳ หาค่า k_1, k_2, k_3 ได้

$\therefore$ span ได้

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า เซตของเวกเตอร์ทั้งหมดที่อยู่ในรูป $(a,0,0)$ เป็นสับสเปซของ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

$(a,0,0) \subseteq R^3$

✓ ① $(a,0,0)+(b,0,0)=(a+b,0,0)\in W$

✓ ② $k(a,0,0)=k(a,0,0)\in W$

$\therefore (a,0,0) \subseteq R^3$

โดยทั่วไป เซตของเวกเตอร์ $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ ในเวกเตอร์สเปซ V อาจจะแผ่ทั่ว V หรือไม่ก็ได้

ถ้าเรารวบรวมทุกเวกเตอร์ใน V ที่เกิดจากผลผนวกเชิงเส้นของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ แล้วเราจะได้สับสเปซของ V เรียกว่า ปริภูมิเชิงเส้นที่ถูกแผ่ทั่วโดย $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ (linear space spanned by $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$)

ต้องผลบวกทั้งหมดที่ทำได้

ทฤษฎีบท ถ้า $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ เป็นเวกเตอร์ในเวกเตอร์สเปซ V แล้ว

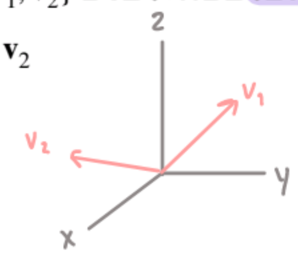
1. เซต W ของทุกผลผนวกเชิงเส้นของ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ เป็นสับสเปซของ V
2. W เป็นสับสเปซที่เล็กที่สุดของ V ที่มี $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ อยู่

ปริภูมิเชิงเส้น W ที่ถูกแผ่ทั่วโดย $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ เขียนแทนด้วย $\text{lin}(S)$ หรือ $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$

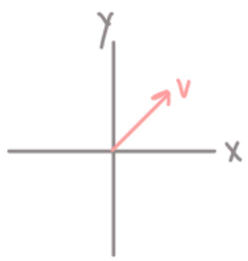
พุ่งออกจากจุด(0,0)

ตัวอย่าง ถ้า $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$ เป็นเวกเตอร์มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ใน $\mathbb{R}^3$ ที่ไม่ร่วมเส้นตรงกัน แล้ว $\text{lin}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ซึ่งประกอบไปด้วยผลผนวกเชิงเส้น $k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2$ ทั้งหมด ก็คือ ระนาบที่เกิดจาก $\mathbf{v}_1$ และ $\mathbf{v}_2$

เป็นเลขอะไรก็ได้



ทำนองเดียวกัน ถ้า $\mathbf{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^2$ หรือ $\mathbb{R}^3$ แล้ว $\text{lin}\{\mathbf{v}\}$ ซึ่งก็คือเซตของพหุคูณค่าคงตัว $k\mathbf{v}$ ทั้งหมด คือ เส้นตรงที่เกิดจาก $\mathbf{v}$



lin{v}

kv

Note - อิสระเชิงเส้นต้อง $k=0$
- ไม่อิสระต้อง $k \neq 0$ หรือมีใคร +,- กันแล้วได้ 0

D. Linear Independence

ให้ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$ ถ้าสมการ $k_1\mathrm{v}_1+k_2\mathrm{v}_2+\cdots+k_r\mathrm{v}_r=0$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $k_1=k_2=\ldots=k_r=0$ เท่านั้น แล้วเราจะกล่าวว่า S เป็น เซตอิสระเชิงเส้น (linearly independent set)
แต่ถ้ามีค่า k ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้สมการเป็นจริง จะเรียก S ว่า เซตไม่อิสระเชิงเส้น (linearly dependent set)

ตัวอย่าง ถ้ากำหนดให้ $S=\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ โดยที่ $\mathrm{v}_1=(2,-1,0,3)$, $\mathrm{v}_2=(1,2,5,-1)$, $\mathrm{v}_3=(7,-1,5,8)$ จะได้ว่า S เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก $3\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2-\mathrm{v}_3=0$

$3(2,-1,0,3)+(1,2,5,-1)-(7,-1,5,8)$
$=(6,-3,0,9)+(1,2,5,-1)+(-7,1,-5,-8)$
$=(0,0,0,0)$

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly dependent

check

$3v_1+v_2-v_3=0$
$v_2=-3v_1+v_3$
$=(-6,3,0,-9)+(7,-1,5,8)$
$=(1,2,5,-1)$

★ กรณีโจทย์บอกว่าไม่เป็น โจทย์จะให้สมการมาเราต้องพิสูจน์ว่า $k \neq 0$
★ แต่ถ้าเป็น เราก็แค่เขียนสมการ $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$ แล้วพิสูจน์ว่า $k=0$

ตัวอย่าง กำหนดพหุนาม $\mathrm{p}_1=1-x$, $\mathrm{p}_2=5+3x-2x^2$ และ $\mathrm{p}_3=1+3x-x^2$ จะได้ว่า $S=\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \mathrm{p}_3\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เนื่องจาก $3\mathrm{p}_1-\mathrm{p}_2+2\mathrm{p}_3=0$

$3(1-x)-(5+3x-2x^2)+2(1+3x-x^2)$
$=3\cancel{-3x}-5\cancel{-3x}\cancel{+2x^2}+2\cancel{+6x}\cancel{-2x^2}$
$=0$

$\therefore \{p_1, p_2, p_3\}$ is linearly dependent

check

$3p_1-p_2+2p_3=0$
$2p_3=-3p_1+p_2$
$=(-3+3x)+(5+3x-2x^2)$
$=\frac{(2+6x-2x^2)}{2}$
$=(1+3x-x^2)$

ตัวอย่าง พิจารณาเวกเตอร์ $\hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$ และ $\hat{k}=(0,0,1)$ ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่าเซต $S=\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

$k_1\hat{i}+k_2\hat{j}+k_3\hat{k}=(0,0,0) / \vec{0}$
$k_1(1,0,0)+k_2(0,1,0)+k_3(0,0,1)=(0,0,0)$
$(k_1,k_2,k_3)=(0,0,0)$
$\therefore k_1,k_2,k_3=0$, $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ is linearly independent

ใน R^n vector มาตรฐาน $e_1=(1,0,0,\ldots,0)$
$e_2=(0,1,0,\ldots,0)$
$\vdots$
$e_n=(0,0,0,\ldots,1)$
ได้ว่า $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ is linearly independent

แก้ระบบสมการ $\begin{cases} k_1, k_2, k_3 \neq 0 \rightarrow \text{dependent} \\ k_1, k_2, k_3 = 0 \rightarrow \text{independent} \end{cases}$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าเซต

A หา inververse ได้ $\equiv Ax = 0$ เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น $\equiv Ax = b$ มีคำตอบแน่ๆ

$$S = \{v_1 = (1, -2,3), v_2 = (5,6, -1), v_3 = (3,2,1)\}$$

เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือไม่ $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = (0,0,0)$

$k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

$54 - 2 - 10 = 42$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 6 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$6 + 30 + 6 = 42$

det A = 0 แปลว่า A ไม่มี inverse นั่นคือ $Ax = 0$ เป็นจริง โดย $x \neq 0$

$\therefore \{v_1, v_2, v_3\}$ is lin. depen

หา k_1, k_2, k_3

☆ไม่ต้องทำต่อเพราะว่าแถวล่างสุดเป็น 0 หมดแล้ว

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & -16 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{8}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

แทนสมการ

$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$ ①

$2k_2 + k_3 = 0$

$k_3 = -2k_2$ ②

แทน

$k_1 + 5k_2 + 3(-2k_2) = 0$

$k_1 = -5k_2 + 6k_2$

$k_1 = k_2$

ให้ $k_2 = 1, k_1 = 1, k_3 = -2$

$1(1,-2,3) + 1(5,6,-1) - 2(3,2,1)$

$= (0,0,0)$

$v_1 + v_2 - 2v_3 = 0$

$v_1 = -v_2 + 2v_3$

$= -(5,6,-1) + 2(3,2,1)$

$= (1,-2,3)$

ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น แสดงว่า มี v_i อย่างน้อยหนึ่งตัวที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลผนวกเชิงเส้นของเวกเตอร์อื่น ๆ ที่เหลือได้

☆ 99

ตัวอย่าง พิจารณา $\mathbb{R}^2$ และ $\mathbb{R}^3$

ใน R^3 $\{v_1, v_2, v_3\}$ lin. dependent

$v_2 = k_1v_1 + k_3v_3 + k_4v_4$

ใน R^2 $\{(0,1), (1,0), (2,3)\}$

ได้ว่า $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$

$v_3 = 2v_2 + 3v_1$ → v_3 สามารถเขียนในรูปผลผนวกเชิงเส้นของตัวอื่นๆ

ใน R^2 $\{(10,4), (5,0), (0,2)\}$

ได้ว่า $(10,4) = 2(5,0) + 2(0,2)$

$= (10,0) + (0,4)$

$= (10,4)$

$v_1 = 2v_2 + 2v_3$ → ให้ v_1 เป็นผลผนวกเชิงเส้น (linear combination)

ทฤษฎีบท ให้ $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^n$ ถ้า $r > n$ แล้ว S ไม่อิสระเชิงเส้น

จน.ของสมาชิกใน set เช่น S=4

จน.dimension

ex. $\{(1,2,3), (-1,2,3), (7,1,10), (5,-1,-12)\} \subseteq R^3$

$r = 4$, $n = 3$ ∴ linearly dependent

ตัวอย่าง จงอธิบายว่าทำไม $S = \{u_1 = (1,2), u_2 = (-3, -6)\}$ ใน $\mathbb{R}^2$ จึงเป็นเซตอิสระไม่เชิงเส้น $r = 2, n = 2$

ถ้าเป็นอิสระไม่เชิงเส้น แสดงว่า $k \neq 0$

$(-3,-6) = k(1,2)$

$\therefore k = -3$

S เป็น linearly dependent เนื่องจาก $u_2 = -3u_1$

V → ถังสี
S → แม่สี
แม่สี 3 สี ไม่มีสีไหนผสมได้ (lin. independent)
แม่สี 3 สี ผสมได้ทุกสีใน V (span)
∴ แม่สีเป็น basis

E. Basis and Dimension

นิยาม ให้ V เป็นเวกเตอร์สเปซใด ๆ และ $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$ เป็นเซตจำกัดของเวกเตอร์ใน V แล้วจะเรียก S ว่า ฐานหลัก (basis) ของ V ถ้า

i) S เป็นเซตอิสระเชิงเส้น

ii) S แผ่ทั่ว V

$\{(1,0),(0,1)\}$ เป็น basis ของ R^2
$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ เป็น basis ของ R^3
$\Big\}$ มี basis ได้หลายชุด

ตัวอย่าง ให้ $\hat{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\hat{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, ..., $\hat{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$ เราทราบแล้วว่า $S = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots, \hat{e}_n\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นใน $\mathbb{R}^n$ และเนื่องจากเวกเตอร์ $\mathrm{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^n$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\mathrm{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + \cdots + v_n\hat{e}_n$ ได้เสมอ จึงได้ว่า S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^n$ จึงสรุปได้ว่า S เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^n$ เรียก S ว่า ฐานหลักมาตรฐาน (standard basis) ของ $\mathbb{R}^n$

ตัวอย่าง ให้ $\mathrm{v}_1 = (1,2,1)$, $\mathrm{v}_2 = (2,9,0)$ และ $\mathrm{v}_3 = (3,3,4)$ จงแสดงว่า $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3\}$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^3$

(1) ตรวจสอบอิสระเชิงเส้น

$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$

$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$

$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$

$k_1 + 4k_3 = 0$

$27+0+16=43$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \\ 1 & 0 \end{matrix}\ \right\}\ \begin{matrix} \det A = -1 \\ \text{หา } A^{-1} \text{ ได้} \end{matrix}$$

$36+6+0=42$

$k_1, k_2, k_3 = 0$ เท่านั้น

(2) ตรวจสอบ span

$b = (b_1, b_2, b_3)$ ใน R^3

$b = k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3$

$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4)$

$$\left.\begin{aligned} k_1 + 2k_2 + 3k_3 &= b_1 \\ 2k_1 + 9k_2 + 3k_3 &= b_2 \\ k_1 + 4k_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}\ \begin{matrix} \text{มีคำตอบมั้ย?} \\ \underline{\text{มีคำตอบ}} \end{matrix}$$

S เป็น basis ของ R^3 #

ตัวอย่าง จงแสดงว่า เซต $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ เป็นฐานหลักของเวกเตอร์สเปซ P_n

<u>สมบัติการเท่ากันของพหุนาม (P_n)</u>
$ax^2 + bx + c = 2x^2 - 5x + 3$
ถ้าพหุนามเท่ากัน แปลว่าสัมประสิทธิ์ (k) ต้องเท่ากัน

(1) อิสระเชิงเส้น

$k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 + k_3 \cdot x^3 + \ldots k_n \cdot x^n = 0$

ก็ต่อเมื่อ $k_0 = k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_n = 0$

∴ เป็น อิสระเชิงเส้น

(2) span

$k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot x + k_2 \cdot x^2 + k_3 \cdot x^3 + \ldots k_n \cdot x^n = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$

∴ span P_n

สรุปได้ว่า S เป็น basis ของ P_n #

ตัวอย่าง ให้ $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ เป็นฐานหลักของเวกเตอร์สเปซ M_{22} ของเมทริกซ์ขนาด 2×2

① อิสระเชิงเส้น

$k_1m_1 + k_2m_2 + k_3m_3 + k_4m_4 = 0$

$k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$

สรุป $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

② span

$k_1m_1 + k_2m_2 + k_3m_3 + k_4m_4 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\therefore k_1 = a, k_2 = b, k_3 = c, k_4 = d$

สรุป $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ span M_{22}

$\therefore \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ เป็น basis ของ M_{22} #

ตัวอย่าง ถ้า $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_r\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นในเวกเตอร์สเปซ V แล้ว S จะเป็นฐานหลักของสับสเปซ $\mathrm{lin}(S)$ เสมอ

โดยนิยามแล้ว

S span lin(S) เสมอ

หาแค่อิสระ

เวกเตอร์สเปซ(ที่ไม่เป็นศูนย์) V เรียกว่า มีมิติจำกัด (finite dimensional) ถ้ามีเซตจำกัดของเวกเตอร์ $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของ V

ถ้าหาเซตดังกล่าวไม่ได้ แสดงว่า V มีมิติอนันต์ (infinite dimensional)

นอกจากนี้ เวกเตอร์สเปซศูนย์เป็นมิติจำกัดถึงแม้ว่าจะไม่มีฐานหลักก็ตาม

dimension ของ P_n มี $1+n$ ตัว

dimension = 4

ตัวอย่าง เวกเตอร์สเปซ $\mathbb{R}^n$, P_n และ M_{22} เป็นเวกเตอร์สเปซที่มีมิติจำกัด

basis ของ $R^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ // basis ของ $P_n = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

ทฤษฎีบท ถ้า $S = \{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ เป็นฐานหลักของเวกเตอร์สเปซ V แล้ว ทุก ๆ เซตที่มี$\underbrace{\text{จำนวนสมาชิก}}_{r}\underbrace{\text{มากกว่า}}_{>}\underbrace{n}_{n}$ เวกเตอร์จะเป็นเซตอิสระไม่เชิงเส้น

ทฤษฎีบท สองฐานหลักใด ๆ ของเวกเตอร์สเปซมิติจำกัดจะต้องมีจำนวนเวกเตอร์เท่ากัน

basis ของ R^2 จะมีกี่ชุดก็ได้แต่จะต้องมีจำนวน vector เท่ากัน

ตัวอย่าง ฐานหลักมาตรฐานของ $\mathbb{R}^n$ มี n เวกเตอร์ ดังนั้น ทุก ๆ ฐานหลักของ $\mathbb{R}^n$ ก็จะต้องมี n เวกเตอร์เท่านั้น

ตัวอย่าง ฐานหลักมาตรฐานของ P_n มี $n+1$ เวกเตอร์ ดังนั้น ทุก ๆ ฐานหลักของ $\cancel{\mathbb{R}^n}$ P_n ก็จะต้องมี $n+1$ เวกเตอร์

นิยาม มิติ (dimension) (จน. basis) ของเวกเตอร์สเปซมิติจำกัด V นิยามโดย จำนวนเวกเตอร์ในฐานหลักของ V dimension ของ P_n คือ $n+1$ | dimension ของ M_{22} คือ 4 $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$

มิติของเวกเตอร์สเปซศูนย์ เท่ากับศูนย์

ตัวอย่าง จงหาฐานหลัก (basis) และมิติ (dimension) ของปริภูมิผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธ์

$$
\begin{array}{rrrrrl}
2x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +x_5 & =0\\
-x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +x_5 & =0\\
x_1 & +x_2 & -2x_3 & & -x_5 & =0\\
 & & x_3 & +x_4 & +x_5 & =0
\end{array}
$$

★ จะรู้ได้ยังไงว่าเป็นจัตุรัสมั้ย?
→ จน.ตัวแปร = จน.สมการ
ex. โจทย์นี้ตัวแปร = 1 คือ x
สมการ = 4
∴ ไม่จัตุรัส

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0\\
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
-1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0\\
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+R_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{R_3-3R_2}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_4-R_3}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[R_2-R_3]{R_1+2R_2}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Step
1. ทำยังไงก็ได้ให้ตน.แรกของแถว1 = 1 (leading 1)
2. ใต้เลข 1 ต้องเป็น 0 ทั้งหมด
3. จะต้องมี 1 เยื้องไปทางขวาในแถวถัดไป
4. จะหยุดตอนที่แถวล่างสุดเป็น 0 ทั้งหมด
5. จากนั้นเอาแถวที่ไม่เป็น 0 ทั้งหมดไปคิดสมการต่อ

ถ้ามีสมาชิกn ตัว = n dimension

$x_1 + x_2 + \cancel{2x_4}^{\,0} + x_5 = 0$
$x_3 + x_5 = 0$
$x_4 = 0$

แก้สมการ
$x_4 = 0$
$x_3 = -x_5 = -t$
$x_1 = -x_2 - x_5$
$x_1 = -s-t$

เพื่อ x_2, x_5 ย้ายฝั่งหมายถึงมันจะเป็นอะไรก็ได้
∴ เขาให้
$x_2 = s, x_5 = t$

$s, t \in R$

$$
\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t\\ s\\ -t\\ 0\\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\\ s\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t\\ 0\\ -t\\ 0\\ t \end{bmatrix} = s\underbrace{\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + t\underbrace{\begin{bmatrix} -1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}
$$

∴ basis คือ $\{(-1,1,0,0,0), (-1,0,-1,0,1)\}$
dimension ของ solution space = 2 #

ทฤษฎีบท

check ข้อใด ของหลัง

a) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตของ n เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันในเวกเตอร์สเปซ V ที่มี n มิติ แล้ว S จะเป็นฐานหลักของ V ถ้า Vector เป็น independent แล้วมี n ตัว = dimension n สรุปได้ว่าเป็น basis เลย

b) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ เป็นเซตของ n เวกเตอร์ที่แผ่ทั่วเวกเตอร์สเปซ V ที่มี n มิติ แล้ว S จะเป็นฐานหลักของ V

c) ถ้า $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นในเวกเตอร์สเปซ V ที่มี n มิติ และ $r < n$ แล้ว S จะสามารถขยายให้เป็นฐานหลักของ V ได้ นั่นคือ จะมีเวกเตอร์ $v_{r+1}, \ldots, v_n$ ที่ทำให้ $\{v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ เป็นฐานหลักของ V

$r = 2, n = 2$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\mathrm{v}_1 = (-3,7)$ และ $\mathrm{v}_2 = (5,5)$ เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$

1 ตรวจอิสระเชิงเส้น

$k_1v_1 + k_2v_2 = 0$

$k_1(-3,7) + k_2(5,5) = (0,0)$

$\left.\begin{aligned} -3k_1 + 5k_2 &= 0 \\ 7k_1 + 5k_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$ 2 - 1

$10k_1 = 0\ ;\ k_1 = 0$

แทน k_1 ที่ 1

$-3(0) + 5k_2 = 0$

$5k_2 = 0$

$k_2 = 0$

$|A| = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

$= -15 - 35$

$= -50 \neq 0$

$\therefore \{v_1, v_2\}$ เป็น lin. independent

เนื่องจาก $\dim(R^2) = 2$

สรุปได้ว่า $\{v_1, v_2\}$ เป็น basis ของ R^2 #

ตัวอย่าง จงอธิบายว่า ทำไมเซตของเวกตอร์ $\mathrm{u}_1 = (1,2)$, $\mathrm{u}_2 = (0,3)$ และ $\mathrm{u}_3 = (2,7)$ จึงไม่เป็นฐานหลักของ $\mathbb{R}^2$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ มี 3 vector

แต่ $\dim(R^2) = 2$ แสดงว่า $\{u_1, u_2, u_3\}$ ไม่เป็น lin. independent

$\therefore$ ไม่เป็น basis #

F. Row and Column Space of a Matrix; Rank; Applications to Finding Bases

เกี่ยวกับ matrix

นิยาม พิจารณาเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์

$$\begin{aligned} \mathrm{r}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \mathrm{r}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathrm{r}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

ที่เกิดจากแถวของเมทริกซ์ A เรียกว่า เวกเตอร์แถว (row vectors) ของ A

และเวกเตอร์

$$\mathrm{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathrm{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathrm{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

ที่เกิดจากหลักของเมทริกซ์ A เรียกว่า เวกเตอร์หลัก (column vectors) ของ A

สับสเปซของ $\mathbb{R}^n$ ที่เกิดจากการแผ่ทั่วของเวกเตอร์แถว เรียกว่า ปริภูมิแถว (row space) ของ A และ สับสเปซของ $\mathbb{R}^n$ ที่เกิดจากการแผ่ทั่วของเวกเตอร์หลัก เรียกว่า ปริภูมิหลัก (column space) ของ A

ตัวอย่าง พิจารณา $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ แถว · หลัก 2 · 3

$\left.\begin{aligned} r_1 &= (2,1,0) \\ r_2 &= (3,-1,4) \end{aligned}\right\}$ $(k_1r_1 + k_2r_2)$ row space

$\left.\begin{aligned} c_1 &= (2,3) \\ c_2 &= (1,-1) \\ c_3 &= (0,4) \end{aligned}\right\}$ $(k_1c_1 + k_2c_2 + k_3c_3)$ column space

ทฤษฎีบท การดำเนินการตามแถวมูลฐานไม่ได้เปลี่ยนแปลงปริภูมิแถวของเมทริกซ์

ถ้าแถวสุด = 1 ใต้ 1 เป็น 0 $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$ เป็น △

ทฤษฎีบท เวกเตอร์แถวที่ไม่เป็นศูนย์ในรูป row-echelon ของเมทริกซ์ A ก็คือฐานหลักของปริภูมิแถวของ A

ตัวอย่าง จงหาฐานหลักของปริภูมิที่ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์
$v_1 = (1,-2,0,0,3)$, $v_2 = (2,-5,-3,-2,6)$, $v_3 = (0,5,15,10,0)$, $v_4 = (2,6,18,8,6)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 18 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-5R_2]{-R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 18 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-10R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{12}R_3]{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

row-echelon

แถว 0 มาไว้ล่างสุดเสมอเอาไปทำอะไรไม่ได้จริงไม่นับ

★ row-echelon แค่ให้เป็น △ แต่ reduce row-echelon ให้เป็น 0 ทั้งบนและล่าง

$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \\ 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ row-echelon $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ reduce

$\therefore$ basis ของ A คือ $w_1 = (1,-2,0,0,3)$
$w_2 = (0,1,3,2,0)$
$w_3 = (0,0,1,1,0)$

หมายเหตุ ปริภูมิหลักของเมทริกซ์ A ก็คือปริภูมิแถวของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A นั่นเอง

step
1. transpose ให้เป็น row
2. ทำเหมือน row
3. transpose กลับ

ตัวอย่าง จงหาฐานหลักของปริภูมิหลักของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1]{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_2]{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ basis ของ column space คือ $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท
จน.vector ใน basis ของ row space และ column space ของ A จะเท่ากันเสมอ
จน.vector ใน basis เรียกว่า "rank"

rank(A) = 2

ทฤษฎีบท ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ แล้วปริภูมิแถวและปริภูมิหลักของ A มีมิติเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้วจงหาฐานหลักของปริภูมิแถว

$$A = \begin{array}{c} \scriptstyle -3 \quad 0 \quad -3 \quad -3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 4R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ basis ของ row space คือ $r_1 = (1,0,1,1)$

$r_2 = (0,1,1,-1)$

$\text{rank}(A) = 2$ #

ไม่นับจน.แถวที่มี 0 ล้วนจากการ ero

นิยาม มิติของปริภูมิแถวและหลักของเมทริกซ์ A เรียกว่า ค่าลำดับชั้น (rank)

ตัวอย่าง จากตัวอย่างข้างต้น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ มีค่าลำดับชั้น 2

ทฤษฎีบท ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

a) A สามารถหาอินเวอร์สได้

b) $Ax = 0$ มีผลเฉลยชัด (trivial solution) เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น $\quad x = 0$

c) A สมมูลแถว (row equivalent) กับ I_n $\quad [A \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to [\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \mid \underbrace{\begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix}}_{A}]$

d) $Ax = b$ มีผลเฉลยสำหรับทุก ๆ เมทริกซ์ b ขนาด $n \times 1$

e) $\det(A) \neq 0$

f) A มีค่าลำดับชั้น n

g) เวกเตอร์แถวของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

h) เวกเตอร์หลักของ A เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท ระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ จะมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ b อยู่ในปริภูมิหลักของ A

rank(A) = 3 ??

99

ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

row

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-3R_1]{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 1 & -22 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{0R_3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -7 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

∴ basis ของ row space คือ $r_1 = (1,4,2,7)$

$r_2 = (0,-7,1,-22)$

rank(A) = 2

column

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_1]{R_1\leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-7R_2]{\frac{1}{4}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 11/4 \\ 0 & 0 & 14/4 \\ 0 & 5 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_5-5R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 11/4 \\ 0 & 0 & 14/4 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ก็ต่อเมื่อ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ โดยที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัว

นิยาม ให้ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วอสมการ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ และ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ จะเรียกว่า อสมการเชิงเส้น (linear inequalities)

นิยาม ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (linear programming problem : LP) คือ ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าเหมาะที่สุด โดยที่

1) เราจะหาค่ามากที่สุด (maximize) หรือค่าน้อยที่สุด (minimize) ของฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร (decision variables) ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function)
2) ค่าของตัวแปรทุกตัวต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (constraints) ที่มี ซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้อาจจะเป็นสมการเชิงเส้นหรืออสมการเชิงเส้นก็ได้
3) ตัวแปรแต่ละตัวต้องสอดคล้องกับการกำกัดเครื่องหมาย (sign restriction) ของตัวแปรนั้น ๆ ว่า x_i ต้องไม่เป็นจำนวนลบ หรือ x_i อาจจะเป็นค่าใด ๆ ก็ได้ (unrestricted in sign : urs)