เมทริกซ์

เมทริกซ์ (Matrices) คือ แถวของจำนวนที่เรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ถูกปิดล้อมด้วยเครื่องหมายวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & -1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x + 2 & \tan x \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามารถนำมาใช้แสดงข้อมูลปัญหาที่อยู่ในรูปแบบตารางได้เช่นกัน

ตัวอย่าง ปัญหาค่าใช้จ่ายในการขนส่งสินค้า

ตลาด โรงงาน	A	B	C
1	200	150	300
2	250	400	250

เขียนเป็นเมทริกซ์ค่าใช้จ่ายในการขนส่ง ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 200 & 150 & 300 \\ 250 & 400 & 250 \end{bmatrix}$

ทุก ๆ แถวต้องมีจำนวนของตัวเลขเท่ากันทั้งหมด เราเรียกตัวเลขที่อยู่ในแนวนอนว่า แถว (row) ของเมทริกซ์ และเรียกตัวเลขที่อยู่ในแนวตั้งว่า หลัก (column) ของเมทริกซ์

ขนาดของเมทริกซ์ (order of a matrix)

เมทริกซ์ที่มี m แถวและ n หลัก จะเรียกว่า เมทริกซ์มีขนาด $m \times n$

เราสามารถเขียนเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

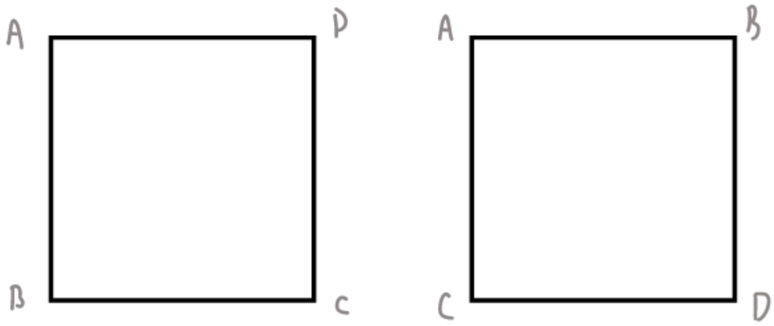
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

หรือ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n, i, j \in \mathbb{N}$

นอกจากนั้น เรายังสามารถเขียนแทนจุด (x, y) ใด ๆ ในระนาบ xy ได้ด้วยเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ หรือ $[x \quad y]$ และใช้เมทริกซ์เพื่อแสดงจุดยอดของรูปเรขาคณิตใด ๆ ในระนาบได้ด้วย เช่น พิจารณารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $A(1,0), B(3,2), C(1,3), D(-1,2)$ ตามลำดับ ก็จะสามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้

เป็น $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ หรือ $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$

ตัวอย่าง ถ้าเมทริกซ์มีสมาชิก 8 ตัว จงเขียนขนาดของเมทริกซ์ที่เป็นไปได้



ช่วยในการแปรรูป

ตัวอย่าง จงสร้างเมทริกซ์ขนาด 3×2 โดยที่สมาชิกในเมทริกซ์นิยามโดย

$$a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$$

$a_{11} = \frac{1}{2}|1-3(1)|$

$a_{12} = \frac{1}{2}|1-3(2)|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} = 1 & a_{12} = \frac{5}{2} \\ a_{21} = \frac{1}{2} & a_{22} = 2 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = \frac{3}{2} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

หลัก

แถว

ชนิดของเมทริกซ์

1. เมทริกซ์หลัก (column matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีเพียง 1 หลัก เช่น $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. เมทริกซ์แถว (row matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีเพียง 1 แถว เช่น

$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถว เช่น

$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

4. เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวที่ไม่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมหลักเท่ากับศูนย์ เช่น $D = [4], E = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. เมทริกซ์ค่าคงตัว (scalar matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกทุกตัวบนแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด เช่น $G = [3], H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$J = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

6. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 และสมาชิกตัวอื่นเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น $I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. เมทริกซ์ศูนย์ (zero matrix) คือ เมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์เป็นศูนย์ เช่น

$[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ เขียนแทนเมทริกซ์ศูนย์ด้วย O

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์ A จะเท่ากับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ A และ B มีขนาดเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันทั้งหมด เขียนแทนด้วย $A = B$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของตัวแปรทั้งหมด

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของตัวแปรทั้งหมด

$x+3=0$
$x=-3$
$z+4=6$
$z=2$

$2y-7=3y-2$
$y=-7+2$
$y=5$

$a-1=-3$
$a=-2$
$2c+2=0$
$c=-1$

$b-3=2b+4$
$b=-3-4$
$b=-7$

$x=-3$; $c=-1$
$z=2$; $b=-7$
$y=5$
$a=-2$
#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของตัวแปรทั้งหมด

$2a+b=4$
$a-2b=-3$
$a=2b-3$
$2(2b-3)+b=4$
$4b-6+b=4$
$5b-6=4$
$5b=10$
$b=2$

$a=2(2)-3$
$a=1$ #
$b=2$ #

$4c+3d=24$
$5c-d=11$
$-d=-5c+11$
$d=5c-11$

$4c+3(5c-11)=24$
$4c+15c-33=24$
$19c=57$
$c=\frac{57}{19}$
$c=3$ #

$d=15-11$
$d=4$ #

$5c-d=11$ $\times 3$
$4c+3d=24$
$15c-\cancel{3d}=33$ $+$
$4c+\cancel{3d}=24$
$19c=57$
$c=\frac{57}{19}$
$c=3$

การดำเนินการบนเมทริกซ์

การบวกเมทริกซ์

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ ผลบวกของ A และ B แทนด้วย $A+B$ โดยที่ $A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต ในการบวกเมทริกซ์นั้น จะต้อง

(1) ขนาดของเมทริกซ์ต้องเท่ากัน
(2) นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน
(3) สามารถบวกได้มากกว่าครั้งละ 2 เมทริกซ์

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2\times3}$ จงหา $A+B$

$$A+B = \begin{bmatrix} \sqrt{3}+2 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ แล้วจงหาค่าของ $A+B$ และ $A+C$

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$A+C$ ไม่ได้เพราะขนาดไม่เท่ากัน

การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

คือ การคูณ A ด้วยจำนวน k แทนด้วยสัญลักษณ์ kA คือ $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}$

หมายเหตุ จะได้ข้อสรุปว่า $A+B$ และ kA จะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่าเดิม

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $2A, -3A, 0A$

$2A = \begin{bmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 0 & 6 & 10 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad -3A = \begin{bmatrix} -6 & 15 & -3 \\ 0 & -9 & -15 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $\quad 0A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Negative of a matrix แทนด้วย $-A$ นิยามโดย $-A = (-1)A$ เช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$ แล้วจะได้ $-A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

การลบของเมทริกซ์ $\quad$ ★ ขนาดไม่เท่า +,- ไม่ได้

ให้ A, B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว $A - B = A + (-B) = A + (-1)B$ โดยที่ A และ B ต้องมีขนาดเท่ากันและนำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาลบกัน

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 4 & 10 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 6 & 8 & 0 \end{array} \end{array}$ จงหา $A - B$ และ $2B - A$

$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

$2B - A = \begin{bmatrix} 4-3 & 10-(-2) & 2-4 \\ 6-2 & 8-1 & 0-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 4 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 2 \end{array} \end{array}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $2A - B$

$2A - B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

สมบัติของการบวกและการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \boxed{O} = O + A = A$ (Metrix 0) => Metrix 0 + A = A (ก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่า)
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. $k(A + B) = kA + kB$
6. $(k + l)A = kA + lA$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหา C ที่ทำให้ $A + C = B$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

=> แทนค่าใส่สมการ ①
ex. $0 + b = 2$; $2 + b = -1$

② $C = B - A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหา X ที่ทำให้ $2A + 3X = 5B$

$3X = 5B - 2A$; $X = \frac{1}{3}(5B - 2A)$

$$\frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 8 & -4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -19 & -7 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & -\frac{14}{3} \\ -\frac{19}{3} & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหา X และ Y ถ้ากำหนดให้ $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ และ $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$X + \cancel{Y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X - \cancel{Y} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

+

$$2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \#$$

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \#$$

ตัวอย่าง จงหาค่า x และ y จากสมการ $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$

$2x + 3 = 7$
$2x = 4$
$x = 2$ #

$2(y-3)+2 = 14$
$2y - 6 + 2 = 14$
$2y = 18$
$y = 9$ #

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times k$ แล้วเมทริกซ์ $C = AB$ เมื่อ $C = [c_{ij}]_{m\times k}$ และ $c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ หมายถึง สมาชิกแต่ละตัวของผลคูณหาได้จากผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในแถวของเมทริกซ์ตัวหน้ากับสมาชิกในหลักของเมทริกซ์ตัวหลัง นั่นคือ

c_{11} หาได้จาก แถวที่ 1 คูณกับหลักที่ 1

c_{12} หาได้จาก แถวที่ 1 คูณกับหลักที่ 2

$\vdots$

c_{ij} หาได้จาก แถวที่ i คูณกับหลักที่ j

$A_{2\times 3} \times B_{2\times 2}$ ($3 \neq 2$) คูณไม่ได้

$B_{2\times 2} \times A_{2\times 3}$ ($2 = 2$) คูณได้ จะมีขนาด 2×3

ข้อสังเกต จำนวนหลักของ A ต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B เท่านั้นจึงจะหาผลคูณ AB ได้ และถ้าสามารถหา AB ได้ แต่ BA อาจจะหาได้หรือหาค่าไม่ได้ก็ได้ (AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA)

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}_{2\cdot 3}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\cdot 2}$ แล้ว จงหา AB และ BA

AB = หาไม่ได้ขนาดไม่เท่า

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\cdot 0)+(0\cdot 1) & (1\cdot 2)+(0\cdot 5) & (1\cdot -4)+(0\cdot -3) \\ (2\cdot 0)+(3\cdot 1) & (2\cdot 2)+(3\cdot 5) & (2\cdot -4)+(3\cdot -3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 5 & 19 & -17 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\cdot 2}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\cdot 2}$ แล้ว จงหา AB และ BA

$$AB = \begin{bmatrix} (-2\cdot 1)+(1\cdot 2) & (-2\cdot 0)+(1\cdot 3) \\ (5\cdot 1)+(3\cdot 2) & (5\cdot 0)+(3\cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+0 & 1+0 \\ -4+15 & 2+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 11 & 11 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\cdot 3}$ และ $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}_{3\cdot 2}$ แล้ว จงหา CD

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1+10 & 7+(-1)+(-8) \\ 0+(-3)+20 & 0+3+(-16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$$

สมบัติของการคูณเมทริกซ์

ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ที่มีขนาดสอดคล้องกับการบวกและการคูณ และ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้ว

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
5. $OA = O$ และ $BO = O$ เมื่อ O คือเมทริกซ์ศูนย์ที่มีขนาดสอดคล้องกับการคูณ
6. โดยทั่วไป $AB \neq BA$ แต่ถ้าเมื่อใดที่ $AB = BA$ เราจะเรียกเมทริกซ์แบบนี้ว่า เมทริกซ์สลับที่ได้
7. ถ้า $AB = O$ แล้ว A และ B ไม่จำเป็นต้องเป็นเมทริกซ์ศูนย์

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สลับที่ได้

$$\begin{bmatrix} 0+0 & 6+0 \\ 0+6 & 0+0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore AB = BA$

A, B เป็นmatrixสลับที่ได้

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหา AB เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ 2 Metrix คูณกันได้ 0 ทั้งหมด

ห้าม ❗ สรุปเด็ดขาดว่า Metrix ตัวที่คูณเป็น

Metrix 0 เพราะว่ามันเป็นแท้จ

สัญลักษณ์ A^n แทน A คูณกัน n ครั้ง แต่ A ต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^3 - 23A - 40I = O$

หา $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$

$1+6+12=19$; $2+(-4)+6=4$; $3+2+3=8$
$3+(-6)+4=1$; $6+4+2=12$; $9+(-2)+1=8$
$4+6+4=14$; $8+(-4)+2=6$; $12+2+1=15$

$19+12+32=63$; $38+(-8)+16=46$; $57+4+8=69$
$1+36+32=69$; $2+(-24)+16=-6$; $3+12+8=23$
$14+18+60=92$; $28+(-12)+30=46$; $42+6+15=63$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการสลับระหว่างแถวและหลักของเมทริกซ์ A แทนด้วย A^t หรือ A'

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3\times 2}$ จงหา A'

$A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}_{2\cdot 3}$

สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

1. $(A')' = A$
2. $(kA)' = kA'$
3. $(A+B)' = A' + B'$
4. $(AB)' = B'A'$

$A_{3\cdot 2} \times B_{2\cdot 4} = (AB)'_{4\cdot 3}$

$B'_{4\cdot 2} \times A'_{2\cdot 3} = B'A'_{4\cdot 3}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{3\cdot 1 \to 1\cdot 3}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}_{1\cdot 3 \to 3\cdot 1}$ จงแสดงว่า $(AB)' = B'A'$

$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$

$(AB)' = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) และ เมทริกซ์สมมาตรเสมือน (Skew Symmetric Matrix)

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]$ จะเรียกว่า เมทริกซ์สมมาตร เมื่อ $A' = A$ เช่น

∴ ถ้าหน้าตาเหมือนเป็นสมมาตร
แต่ถ้าเหมือน * -1 เข้าไปเป็น
สมมาตรเสมือน

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

นิยาม เมทริกซ์จัตุรัส $A = [a_{ij}]$ จะเรียกว่า เมทริกซ์สมมาตรเสมือน เมื่อ $A' = -A$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 0 & -e & -f \\ e & 0 & -g \\ f & g & 0 \end{bmatrix}$$

สมบัติของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

1. $A + A'$ จะได้เมทริกซ์สมมาตร และ $A - A'$ จะได้เมทริกซ์สมมาตรเสมือน
2. เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์สมมาตรเสมือนได้เสมอ

ตัวอย่าง จงเขียน $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของเมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

ให้ x เป็น metrix สมมาตร
y เป็น metrix สมมาตรเสมือน

$$B + B' = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$+$

$$B - B' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\cancel{2}B}{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

การดำเนินการตามแถวมูลฐาน (Elementary Row Operation) มีอยู่ด้วยกัน 3 แบบ ดังนี้

ERO

1. การสลับสองแถวใด ๆ ของเมทริกซ์ เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. การคูณแถวใด ๆ ด้วยค่าคงตัว $k \neq 0$ เขียนแทนด้วย $R_i \rightarrow kR_i$ เช่น ∴ เอาอะไรก็ได้ที่ไม่ใช่ 0

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \begin{bmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{bmatrix}$$

3. การบวกแถวใดแถวหนึ่งด้วย k เท่าของอีกแถว เขียนแทนด้วย $R_i \rightarrow R_i + kR_j$ เช่น

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \longrightarrow R_2 - 2R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$1\cdot(-2) \quad 2\cdot(-2)$

$R_2 + (-2R_1)$

เมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ (Invertible Matrix)

$m \cdot n$ = แถว·หลัก

นิยาม ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ m และถ้ามีเมทริกซ์จัตุรัส B ที่มีอันดับ m เท่ากัน โดยที่ $AB = BA = I$ แล้ว B เรียกว่า เมทริกซ์ผกผันของ A แทนด้วย A^{-1} และเรียก A ว่า เมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (2\cdot2)+(3\cdot-1) & (2\cdot-3)+(3\cdot2) \\ (1\cdot2)+(2\cdot-1) & (1\cdot-3)+(2\cdot2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$\therefore$ A เป็น matrix ผกผันของ B

สมบัติของเมทริกซ์ผกผัน

1. เมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) จะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
4. $(A^{-1})^{-1} = A$

การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2

$A = [a]_{1\times1} \quad A^{-1} = [\frac{1}{a}]$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้เมทริกซ์ผกผัน คือ $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ แล้วจงหา A^{-1}

$ad - bc = (2\cdot5) - (4\cdot2) = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การดำเนินการตามแถวมูลฐาน

เริ่มจากการสร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A\,|\,I]$ แล้วใช้การดำเนินการตามแถวมูลฐานเปลี่ยนให้เมทริกซ์ตัวหน้าเป็น I จะได้ $[I\,|\,A^{-1}]$

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$ad - bc = (1\cdot(-1)) - (2\cdot 2) = -1 - 4 = -5$

$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ Augmented Matrix

$\downarrow R_2 \to R_2 - 2R_1$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right]$

$\downarrow R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2}$

$[\,I \quad | \quad A^{-1}\,]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right]$

$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\downarrow R_1 \leftrightarrow R_2$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\downarrow R_3 \to R_3 - 3R_1$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$\uparrow R_3 \to R_3 + 5R_2$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2} R_3}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right]$

$\downarrow R_1 \to R_1 + R_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right]$

$\downarrow R_2 \to R_2 - 2R_3$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right] \longrightarrow [\,I\,|\,A^{-1}\,]$

$-2 + \frac{5}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{-3}{2} = \frac{2}{2} + \frac{-3}{2} = -\frac{1}{2}$

$-\cancel{2} \times \frac{5}{\cancel{2}} = -5 \;\Big|\; -\cancel{2} \times \frac{-3}{\cancel{2}} = 3$

$-\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} = -1$

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$ad - bc = (10\cdot 1) - (-2\cdot(-5)) = 10 - 10 = 0$

$\therefore$ A ไม่มี inverse

ตัวกำหนด หรือ ดีเทอร์มินันต์ (Determinant) คือ ฟังก์ชันที่ส่งเซตของเมทริกซ์จัตุรัสไปยังเซตของจำนวนจริง ค่าดีเทอร์มินันต์ของ A แทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1, $A = [a]$

$$\det A = a$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

บน

ล่าง - บน = det A

ล่าง

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่กว่าขนาด 3×3 สามารถหาค่าดีเทอร์มินันต์ได้โดยการกระจายโคแฟกเตอร์ (Cofactor Expansion) ซึ่งมีวิธีการดังนี้

พิจารณาเมทริกซ์ A ที่มีขนาด $n \times n$

ให้ M_{ij} แทนเมทริกซ์ที่มีขนาด $(n-1) \times (n-1)$ ซึ่งเกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เช่น $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $M_{23} = \begin{bmatrix} a & b \\ g & h \end{bmatrix}$ $|M_{23}| = ah - bg$

แถว 2 หลัก 3

เรียก $|M_{ij}|$ ว่า ไมเนอร์ของ a_{ij} ของ A และเรียก $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ว่า โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} ของ A ดังนั้น $A_{23} = -1(ah - bg) = bg - ah$

ดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ มีค่าเท่ากับผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถว (หรือหลัก) ใด ๆ กับค่าโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้น

เราสามารถเลือกแถวหรือหลักใดก็ได้ของเมทริกซ์มาหาค่าโคแฟกเตอร์ แต่ถ้าเลือกแถวหรือหลักที่มีสมาชิกเป็นศูนย์เยอะ ๆ ก็จะช่วยให้คำนวณได้ง่ายมากขึ้น

ตัวอย่าง จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$|M_{11}| = 3$

$A_{11} = 3$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$|M_{12}| = (3 \cdot 2) - (1 \cdot 1) = 5$

$A_{12} = 5 \times (-1) = -5$

1+2 = 3 ได้ติด ×-1

$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|M_{13}| = 1$

$A_{13} = 1$

$\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13}$

$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 1$

$= 3 - 10 + 1 = \boxed{-6}$

$|A| = 1 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{33}$

$M_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$|M_{33}| = -4$

$A_{33} = -4$

3+3 = 6 คู่ไม่ต้องคูณ

ตัวอย่าง จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของ $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$|A| = 4 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + \cancel{0 \cdot A_{31}} = -12 + (-9)$
$= -21$

$|A| = 3 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} = -9 + (-9) = -18$

$|A| = \cancel{0 \cdot A_{31}} + \cancel{0 \cdot A_{32}} + -2 \cdot A_{33} = -20$

$|M_{11}| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2 - 1 = -3$

$|M_{21}| = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3 = -3$

$|M_{22}| = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -8 - 1 = -9$

$|M_{23}| = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 0 = 0$

$|M_{33}| = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 4 - (-6) = 10$

ตัวอย่าง จงหาค่าดีเทอร์มินันต์ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

$0 + 1 + 12 = 13$

$\boxed{6 - 13 = -7}$

$4 + 2 + 0 = 6$

$|A| = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + \cancel{0 \cdot A_{13}}$
$= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5)$
$= 3 + (-10)$
$= -7$

$|M \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$

$12| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 1 = 5 \rightarrow -5$

3

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{-7}$

คุณสมบัติของดีเทอร์มินันต์

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ แถว 1 คูณอะไรเข้าไปให้เข้ากับแถว 3
det = 0

1. $\det A = \det A'$
2. ถ้า A มีแถว (หรือหลัก) ใด ๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ แล้ว $\det A = 0$
3. ถ้า A มีแถว (หรือหลัก) คู่ใดคู่หนึ่งเป็นสัดส่วนต่อกัน แล้ว $\det A = 0$
4. ถ้าสลับแถว (หรือหลัก) คู่ใดคู่หนึ่งแล้วค่าดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ใหม่จะมีค่าตรงข้ามกับค่าเดิม
5. $\det I = 1$ $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$
6. $\det(kA) = k^n \det A$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n $\quad \det(2A) = 2^3$
7. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ $\quad \det(A^2) = \det(A \cdot A) = [\det(A)]^2$
8. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่า $\det(A^3)$ $\left[\det(A)\right]^3$

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + \cancel{0 \cdot A_{12}} + \cancel{0 \cdot A_{13}}$$

$$|M_{11}| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 1 = 3$$

$$\det(A)^3 = \left[\det(A)\right]^3 = 3^3 = 27$$

$(1 \cdot 2 \cdot 0) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (2 \cdot 3 \cdot 0) = 1$

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$\det A =$ ล่าง - บน $= 4 - 1 = 3$

$(2 \cdot 2 \cdot 1) + (0 \cdot 1 \cdot 1) + (0 \cdot 3 \cdot 1) = 4$

การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การกระจายโคแฟกเตอร์

เริ่มจากหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A แล้วนำมาสร้างเป็นเมทริกซ์โคแฟกเตอร์ ดังนี้ $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

จากนั้นนำมาหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน เรียกว่า เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) ของ A

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

แล้วจะได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\text{adj}A$

ตัวอย่าง จงหาเมทริกซ์ผกผันของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = 1 \cdot M_{31} + 1 \cdot M_{32} + \cancel{0 \cdot M_{33}}$$

$|M_{31}| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 - 3 = 1$

$|M_{32}| = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 - 3 = -1 = 1$

$|M_{11}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 2 = -2$

$|M_{12}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 = 2$

$|M_{13}| = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$

$|M_{21}| = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -3 = 3$

$|M_{22}| = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -3$

$|M_{33}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$

$|M_{23}| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 = 1$

$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ระบบสมการเชิงเส้น → 2 สมการ up+

คือ ระบบสมการที่ตัวแปรในทุก ๆ สมการมีกำลังเป็น 1 และอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3
\end{aligned}
$$

ค่าคงที่ทางขวามือ

ซึ่งสามารถนำมาเขียนในรูปผลคูณของเมทริกซ์ โดยให้

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{3\cdot 4} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\cdot 1} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}
$$

col vector

จะได้ระบบสมการอยู่ในรูป $AX = B$

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของเครเมอร์ (Cramer's Rule)

1. หา $\det A$ ↳ ใช้ได้เฉพาะ จน.สมการ & ตัวแปรเท่ากัน
2. หา $\det A_i$ โดยที่ A_i เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการแทนหลักที่ i ด้วยสมาชิกของ B
3. คำตอบ $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของเครเมอร์

$$
\begin{aligned}
2x + y + z &= 9 \\
x - 2y + 2z &= 1 \\
x - 3y - z &= -4
\end{aligned}
$$

$-2-12-1=-15$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{matrix}$$

$4+2-3=3$

$|A| = 3-(-15) = 18$

$9-54-1=-47$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 9 & 1 \\ 1 & -2 \\ -4 & -3 \end{matrix}$$

$18-8-3=7$

$|A_1| = 7-(-47) = 54$

$1-16-9=-24$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 9 \\ 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{matrix}$$

$-2+18-4=12$

$|A_2| = 12-(-24) = 36$

$y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{36}{18} = 2$

$2x+y+z=9$

$2(3)+2+z=9$

$z=1$

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดย A^{-1}

เริ่มจากการหา A^{-1} แล้วนำไปคูณทั้งสองข้างของสมการได้เป็น $A^{-1}AX = A^{-1}B$ จะได้ว่า $X = A^{-1}B$

ตัวอย่าง จงหาคำตอบของระบบสมการในตัวอย่างที่แล้วโดยใช้ A^{-1}

$A^{-1}AB = A^{-1}B$

$IB = A^{-1}B$

$\therefore X = A^{-1}B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 18$

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} 8 & +3 & -1 \\ -2 & -3 & +7 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}B = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 72 & -2 & -16 \\ 27 & -3 & 12 \\ -9 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 54 \\ 36 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

วิธีที่ 3 ในการหาค่าของตัวแปรในสมการ โดยใช้วิธี ERO

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} -2 & 4 & -4 & -2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3 \, ; \, -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & -5 & -15 & -25 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 - 5R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-18} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 8R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 3R_3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$\Downarrow$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$x + 8z = 11$

$y + 3z = 5$ $\quad z = 1$

$x + 8(1) = 11$

$x = 11 - 8$

$x = 3$

$y + 3(1) = 5$

$y = 5 - 3$

$y = 2$