* กลิ่ป 2

บท 1 เทคนิคที่ใช้ในการพิสูจน์

1.1.1 Induction Proof

จาก หสว. → ex 1.1 จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงหรือไม่

พิสูจน์โดย : Induction

กำหนดให้ P(n) คือ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

① Basic Step: พิสูจน์ P(1)

จะได้ $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$

$1 = 2/2$

$1 = 1$

∴ P(1) เป็นจริง

ฝึกฝน if (step ใดๆ) ผิด : สรุปเลยว่าไม่จริง

② Induction step:

2.1 กำหนดให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริง

2.2 พิสูจน์ ให้ได้ว่า P(n+1) ต้องเป็นจริงด้วย ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

เริ่มหา

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = 1+2+3+\dots+n+(n+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)}$$

ปรับให้เป็นรูปบทที่ได้ ถ้าปรับได้ แปลว่าเป็นจริง

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \frac{\times 2}{\times 2}$$

สังเกตด้วย

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

ปรับก่อนนี้ให้เป็น (n+1)+1

2 ก่อนนี้ได้ผล

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$ โดยแยก 2 เป็น 1+1

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$ ∴ P(n+1) เป็นจริง

⑤ Conslusion step:

จาก step 1 และ 2 ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง

$\therefore \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ n

ที่ n เป็นเลขจำ.เต็มบวก #

จากการ → ex จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2+1}{2}$ เป็นจริงหรือไม่ n คือเลขจำ.เต็มบวก

พิสูจน์โดย : Induction

กำหนดให้ P(n) คือ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2+1}{2}$

① Basic Step: พิสูจน์ P(1)

จะได้ $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{(1^2+1)}{2}$

$1^2 = \frac{1+1}{2}$

$1 = 1$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

② Induction step:

2.1 ตั้งสมมุติฐานไว้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2+1}{2}$ เป็นจริง

2.2 พิสูจน์ให้ได้ว่า P(n+1) ต้องเป็นจริงด้วย ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)^2+1}{2}$$

เริ่มหา

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n^2+1}{2} + (n+1)^2 \times 2$$ ← เพิ่มรัดรูป

$$= \frac{n^2+1+2(n+1)^2}{2}$$

$\therefore$ ไม่สามารถหา $\frac{(n+1)^2}{2}$ ได้ เป็นเท็จ

③ Conslusion step:

จาก step 2 ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นเท็จ ทำให้

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^2+1}{2}$$ ไม่เป็นจริง #

แบบฝึกความเข้าใจ

พิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริงหรือไม่ n คือเลขจน.เต็มบวก

กำหนดให้ P(n) คือ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

① Basic Step: พิสูจน์ P(1)

จะได้ $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6}$

$$1^2 = \frac{\cancel{2}^{1} \times \cancel{3}^{1}}{\cancel{6}\cancel{2}_{1}}$$

$$1 = 1$$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

② Induction step:

2.1 ตั้งสมมุติฐานให้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริง

2.2 พิสูจน์ ให้ได้ว่า P(n+1) ต้องเป็นจริง ด้วย ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{n+1((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

เริ่มหา

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(n+1)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)^2 \times 6}{\times 6}$$ ← เพิ่มจัดรูป

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$\therefore$ $P(n+1)$ เป็นจริง

③ Conslusion step:

จาก step 1 และ 2 ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง

$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ n

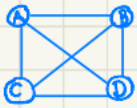
ที่ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก #

1.1.2. Construction proof

(การพิสูจน์โดยการสร้าง)

จะต้องหาสูตรทั่วไป เพื่อสามารถอธิบาย หรือสร้าง ตัวอย่าง การพิสูจน์ทุกกรณี

ใช้ กราฟพิสูจน์ → k-regular graph เพื่อทุกๆ node ในกราฟ มี ดีกรีเท่ากัน



← ทุกๆ node มี 3 ดีกรี

• สิ่งที่ต้องพิสูจน์

จริงหรือไม่ ถ้ามีจำนวนเต็มคู่ n โดยๆ ที่มีค่ามากกว่า 2 (n = 4, 6, 8, 10 .....

จะสามารถสร้าง 3-regular graph ได้ โดยในกราฟจะมีจำนวน node เท่ากับ n

• สูตร

ให้ $G = (V, E)$ ที่มี n node โดยที่ n>2 และ n เป็นจำนวนเต็มคู่

จะสร้าง 3-regular graph ได้ดังนี้

$V = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$E = \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le n-2\} \cup$

$\{(n-1, 0)\} \cup$

$\{(i, i+\frac{n}{2}) \mid 0 \le i \le \frac{n}{2}-1\}$

ex ให้ $n = 4$

จาก สูตร จะได้

$V = \{0, 1, 2, 3\}$

$E = \{(i, i+1) \quad 0 \le i \le 2\} \cup$

$\{(4-1, 0)\} \cup$

$\{(i, i+2) \mid 0 \le i \le 1\}$

$= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\} \cup$

$\{(3, 0)\} \cup \{(0, 2), (1, 3)\}$

$= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 0), (0, 2), (1, 3)\}$

∴ จะได้ 3-regular graph ที่มี $n=4$ #

ex ให้ $n = 6$

$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

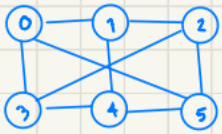
$E = \{(i, i+1) \mid 0 \le i \le 4\} \cup$

$\{(5, 0)\} \cup$

$\{(i, i+3) \mid 0 \le i \le 2\}$

$= \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 0),$

$(0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$



∴ จะได้ 3-regular graph ที่มี $n=6$ #

1.2 ภาษา
- ภาษาปกติ
- ภาษาไม่ปกติ

① sigma (Σ) (ชุดตัวอักษร) → set จำกัดของชุดอักษรที่สนใจ

เช่น $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

② string (สตริง) → การนำสัญลักษณ์ จาก Σ มาเขียนต่อกัน โดยไม่เว้นช่องว่าง ไม่มี , คั่น

Ex กำหนดให้ $\Sigma = \{a, b\}$

$x_1 = abba$

$x_2 = bbbb$

$x_3 = aaaa$

a

b

เขียนตัวเดียวแบบนี้ ก็ถือว่าเป็น string

③ empty string (Λ) → สายอักขระว่าง

④ substring → สายอักขระย่อย

ให้ w เป็นสายอักขระใดๆ และถ้า v จะเป็น substring ของ w ก็ต่อเมื่อ มีสายอักขระ u และ z ที่ทำให้ $w = uvz$

Ex $\Sigma = \{a, b\}$

$w = \underline{a}\,\underline{bb}\,\underline{aa}$ (u, v, z)

ba เป็น substr ของ w

set ของสายอักขระย่อยที่เราสนใจ → ภาษา

เช่น $\Sigma = \{a, b\}$ จะได้

$L_1 = \{aa, ab, bb, ba, aba\}$ = ภาษาจำกัด

หรือ ภาษาที่ขึ้นต้นด้วย a

$L_2 = \{a, ab, aa, aba, aaaa, \ldots \infty\}$ = ภาษาไม่จำกัด

⑤ word → สายอักขระที่เป็นสมาชิกในภาษา

⑥ concat → การต่อกัน

Ex $v = bb$

$w = aab$

$vw = bbaab$

- การต่อกัน จะทำให้เกิดเป็นสายอักขระใหม่ แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นคำในภาษา
- Λ ต่อกับ str ใดๆ จะได้ str เดิม

⑦ ค.ยาวของสายอักขระ → $|x|$

ex $\Sigma = \{a, b\}$

$x = abaa$

$|x| = 4$

$x = \Lambda$ เป็น 0 เพราะ เอาตัวเริ่มต้น

$|x| = 0$ จาก Σ มา 0 ตัว

⑧ reverse (x), x^r, x^R ใช้ได้ 3 สัญลักษณ์

ex $x = aabb$

$(x) = bbaa$

⑨ Compliment → L' สายอักขระทุกสาย แต่ไม่ใช้ค่าในภาษานี้

ex L = ภาษาที่สร้างจาก $\Sigma = \{a, b\}$ โดยสมาชิก

จะขึ้นต้นด้วย a

L' = ภาษาที่สร้างจาก $\Sigma = \{a, b\}$ โดยสมาชิก

จะ ไม่ขึ้นต้นด้วย a

⑩ การทำซ้ำ → *

คือการเอาสมาชิกมาต่อกัน ตามจนที่เราตั้งการตั้งแต่ 0 ครั้ง

ex $L = \{a, ab, bb\}$ คำในภาษา

$L^* = \{\Lambda, a, ab, bb, aaaa \ldots\}$

- $\Sigma^* = (\Sigma)^+$ ทำซ้ำกี่รอบก็ได้เท่ารอบเรา

เป็นนิยามเอาไว้สลรูป

1.3 นิยามแบบ Recursive (เอาไว้นิยามภาษา)

แบ่งเป็น 3 ส่วน

1) กำหนดสมาชิกเริ่มต้น บางตัวใน set (เป็นสมาชิกที่ไม่สามารถสร้างได้จากตัวอื่น กำหนดเป็นตัวเริ่มต้น)
2) กฎกำหนดกฎ สำหรับการสร้าง member ใน set จากที่มีอยู่แล้ว (กำหนดสูตรของภาษานั้นๆ)
3) ยืนยันว่า member จะสร้างจาก 1), 2) เท่านั้น

ex ภาษา Palindrome

กำหนดนิยามแบบ Recursive

1) ให้ Λ, a, b เป็น $\in$ pal
2) ให้ $S \in$ pal จะได้ว่า aSa, $bSb \in$ pal
3) ไม่มี member อื่นที่ $\in$ pal นอก 1), 2)

Induction Proof

จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

① Basic Step: พิสูจน์ P(1)

จะได้ $\sum_{i=1}^{1} i(i+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$1(1+1) = \frac{2(3)}{3}$

$2 = 2$

$\therefore$ P(1) เป็นจริง

② Induction step:

2.1 ตั้งสมมุติฐานไว้ P(n) เป็นจริง

นั่นคือ $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ เป็นจริง

2.2 พิสูจน์ ให้ได้ว่า P(n+1) ต้องเป็นจริง ด้วย ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$$

เริ่มหา

เปลี่ยนเทอม i เป็น n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1} i(i+1) = \overbrace{1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) \dots + n(n+1)}^{1 - n} + (n+1)((n+1)+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)((n+1)+1) \quad \begin{matrix} \times 3 \\ \times 3 \end{matrix}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)((n+1)+1)}{3}$$

ดึงตัวร่วม

$(n+1)+1$ จัดรูปเป็น $(n+2)$ ได้

$$= \frac{(n+1)(n(n+2) + 3(n+2))}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)+2)}{3}$$

$\therefore$ P(n+1) เป็นจริง

③ Conclusion step:

จาก Step 1 และ 2 ที่พิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ n

ที่ n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก #

บทที่ 2 ภาษาปกติ

RE

2.1 นิพจน์ปกติ (Regular Expression)

↓ใช้นิยามภาษาปกติ

ทุกภาษาจำกัด เป็น ภาษาปกติ

ภาษาไม่จำกัดที่สร้าง RE ได้เท่านั้น ถึงจะเป็นภาษาปกติ

รูปแบบของ RE ที่ใช้นิยามภาษา

กำหนด $\Sigma = \{0,1\}$

$\{\Lambda\} \longrightarrow \Lambda$

$\{0\} \longrightarrow 0$

$\{001\} \longrightarrow 001$

$\{0, 00, 001\} \longrightarrow 0 + 00 + 001$

Note ∪ กับ , คือ +

$\{0, 01\}\{001\} \longrightarrow (0+01)(001)$

$\{0, 00, 001\}^* \longrightarrow (0+00+001)^*$

$\{0, 10\}^*(\{11\}^* \cup \{001, \Lambda\}) \longrightarrow (0, 10)^*((11)^* + (001 + \Lambda))$

ex

$R = \{\{\quad\}, \{\quad\}, \{\quad\}, \{\quad\}, \ldots\}$

นิยามสำหรับการสร้างนิพจน์ปกติที่สอดคล้องกับภาษาปกติ

สำหรับกลุ่มภาษาปกติ R บน Σ จะสามารถนิยามนิพจน์ปกติที่สอดคล้องได้ดังนี้

ϕ

1. $\phi \in R$ RE ที่สอดคล้องคือ ϕ
2. $\{\Lambda\} \in R$ — " — Λ
3. สำหรับ $a \in \Sigma$ จะมี $\{a\} \in R$ และ RE ที่สอดคล้องคือ a
4. ถ้าให้ $L_1 \in R$ และ $L_2 \in R$ โดยที่ L_1 มี RE ที่สอดคล้องคือ r_1, L_2 — " — r_2 จะได้ว่า

a) $L_1 \cup L_2$ RE ที่สอดคล้องคือ $(r_1 + r_2)$

b) $L_1 L_2$ — " — $(r_1 r_2)$

c) L_1^* — " — $(r_1)^*$

สลับ

ทำซ้ำ

ex) การหาไม่จำกัดที่สร้าง RE ได้

① $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $ab\}$

$RE = ab\Sigma^*$ ← เป็นอะไรก็ได้จะแทนด้วย Σ^*

$= ab\{a,b\}^* = ab(a+b)^*$ #

② $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $ab\}$

$RE = \Sigma^* ab$

$= \{a,b\}^* ab = (a+b)^* ab$ #

③ $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี ab เป็นสายอักขระย่อย$\}$

$\underbrace{u}_{\Sigma^*}\ \underbrace{v}_{ab}\ \underbrace{z}_{\Sigma^*}$

$RE = \{a,b\}^* ab \{a,b\}^*$

$= (a+b)^* ab (a+b)^*$ #

④ $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มีจน. a ที่หาร 4 ลงตัว$\}$ → a มี 0 ตัว, a มี 4 ตัว เท่านั้น

$L = \Lambda, b, bb, bbb, bbbb \ldots\ldots$ → b^* b ซ้ำ และ a 0 ตัว

จะได้ $(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*a)$

$RE = b^+ + (b^*ab^*ab^*ab^*ab^*a)^*$ #

ทำไม b^+

Note: ดีกรี + → one or more

ดีกรี * → zero or more

Quiz ในห้อง

1) การหาของคำที่มีจน.ของ a อยู่ในคำเพียง 2 ตัวเท่านั้น $\Sigma = \{a,b\}$

$RE = b^*ab^*ab^*$

2) การหาของคำทุกคำที่มีจน.ของ b อยู่ในคำอย่างน้อย 2 ตัว

$\Sigma = \{a,b\}$

$RE = (a+b)^* b (a+b)^* b (a+b)^*$ → เป็นอะไรก็ได้

b อย่างน้อย 2 ตัว

3) การหาของคำที่ไม่ลงท้ายด้วย ba

$\Sigma = \{a,b\}$

$RE = (a+b)^*(aa + ab + bb) + (\Lambda + a + b)$

4) การหาของคำที่ขึ้นต้นด้วย ab และลงท้ายด้วย ba

$\Sigma = \{a,b\}$

$RE = ab(a+b)^*ba + aba$

5) การหาของคำทุกคำที่มีจน.ของ b เป็นจน.คู่

$\Sigma = \{a,b\}$

หมายถึงมี b 0 ตัว

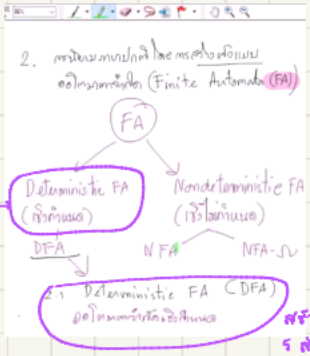
$RE = a^+ + (a^*ba^*b)^*$

แบบนี้ถึงถูก เพราะจะได้มี Λ แต่ฝั่งซ้าย

$\boxed{a^* + (a^*ba^*ba^*)^*}$ → ถ้าเขียนแบบนี้จะ Λ ทั้ง 2 ฝั่ง

บท 3 ออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด

3.1 นิยามออโตมาตาจำกัดเชิงกำหนด (FA)



หมายถึง

สร้างตัวแบบ จาก องประกอบ 5 ส่วน

- **ออโตมาตาเชิงกำหนด (Deterministic FA) (DFA)**

DFA ประกอบไปด้วย 5-tuple (ลำดับสมาชิก 5 ตัว) $= (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ (เดลต้า)

① Q = set จำกัดของสถานะ

② Σ = set จำกัดของชุดตัวอักษร

③ q_0 = สถานะเริ่มต้น $\boxed{q_0 \in Q}$

④ A = set จำกัดของสถานะสิ้นสุด $\boxed{A \subseteq Q}$

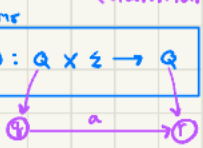
⑤ δ = function การผ่าน เดลต้า เป็นการกำหนดเส้นทาง

function การผ่าน (transition function) → ดูการเดินทางจากสถานะ(q) ไปสถานะ(r)

ตามเส้นที่ปรากฏในตัวแบบโดยจะมีการเดินโดยอ่านสัญลักษณ์ใน (Σ) ปรากฏบนการเดิน (a)

สูตร

$$\boxed{\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q}$$



$\delta(q, a) = r$

ตัวแบบ DFA จะเดินจากสถานะ q โดยผ่านเส้นเชื่อมที่มีสัญลักษณ์ a เมื่อเดินไปยังสถานะ r

- **สัญลักษณ์ที่ใช้ในการสร้างตัวแบบ DFA**

① $\rightarrow q_0$ แทนสถานะเริ่มต้นของ DFA

② q_i แทนสถานะใดๆใน DFA

③ q_f แทนสถานะสิ้นสุด

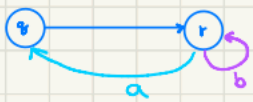
④ $\xrightarrow[(a \in \Sigma)]{a}$ แทนเส้นเชื่อมระหว่างสถานะ

พิจารณา δ 3 ตัว แทนด้วยแผนภาพ

$\delta(q, a) = r$ (node, node)

$\delta(r, b) = r$

$\delta(r, a) = q$



ex การนิยาม DFA

จงเขียนแผนภาพ DFA ตามข้อมูลที่กำหนดให้ดังนี้ $DFA = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

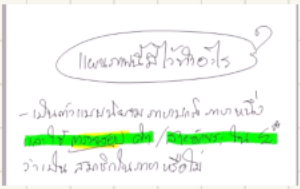
$\Sigma = \{0, 1\}$

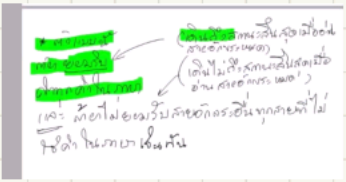
q_0 = สถานะเริ่มต้น

$A = \{q_2, q_3\}$

δ = แสดงได้ดังนี้

$\delta(q_0, 0) = q_0$	$\delta(q_2, 0) = q_3$
$\delta(q_0, 1) = q_1$	$\delta(q_2, 1) = q_2$
$\delta(q_1, 0) = q_0$	$\delta(q_3, 0) = q_3$
$\delta(q_1, 1) = q_2$	$\delta(q_3, 1) = q_2$





วิธีการตรวจสอบ

$\delta^* : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

สายอักขระที่สนใจ

สูตร

① $\boxed{\delta^*(q, \Lambda) = q}$

② $\boxed{\delta^*(q, x) = \delta(\delta^*(q, y), a)}$

$x \rightarrow y, a$

ex การเปลี่ยน $x \rightarrow y, a$

$x = abba$ a ← ตัดตัวสุดท้ายเป็น a

$\therefore y = abba, a = a$ #

$x = a$

$\therefore y = \Lambda, a = a$ #

ex การตรวจสอบ

การตรวจสอบแผนภาพ

$x = 0110 \quad A = \{q_2, q_3\}$

$= q_3$ #

① $\boxed{\delta^*(q, x) = \delta(\delta^*(q, y), a)}$; $x \to y, a$

$x = 011|0$

$\therefore y = 011, a = 0$

Step 1) แทนสูตร $\delta^*(q, x)$ โดยเริ่มจาก q_0 :

$\delta^*(q_0, 0110) = \delta(\delta^*(q_0, 011), 0) = \delta(q_2, 0) = q_3$

$\delta(\delta^*(q_0, 01), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$

$\delta(\delta^*(q_0, 0), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$

2) เมื่อเจอ $\sim$ ก็หยุดทำ: $\delta(\delta^*(q_0, \sim), 0) = \delta(q_0, 0) = q_0$

3) แทนสูตร ① ทีย้อนขึ้นไป

$x = 011$
$\therefore y = 01, a = 1$

4) สรุปคำตอบว่า $q_3 \in A$?

$\delta^*(q_0, 0110) = q_3 \in A$

$\therefore 0110 \in L$ #

ลองทำ

$x = 11001 \in L$?

โดย $A = \{q_2, q_3\}$

$= q_2$ #

$\delta^*(q_0, 11001) = \delta(\delta^*(q_0, 1100), 1) = \delta(q_3, 1) = q_2$

$\delta(\delta^*(q_0, 110), 0) = \delta(q_3, 0) = q_3$

$\delta(\delta^*(q_0, 11), 0) = \delta(q_2, 0) = q_3$

$\delta(\delta^*(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$

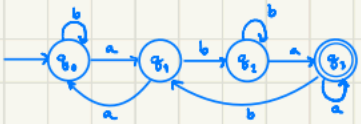
$\delta(\delta^*(q_0, \sim), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1$

$\delta^*(q_0, 0110) = q_2 \in A$

$\therefore 11001 \in L$ #

แบบฝึก

ทก DFA ต่อไปนี้



1) จงทดสอบว่า x_1 = babaab ถูกยอมรับโดยตัวแบบข้างต้น หรือไม่

$\delta^*(q_0, babaab)$

$= \delta(\delta^*(q_0, baba a), b) = \delta(q_3, b) = q_1$

$\delta(\delta^*(q_0, baba), a) = \delta(q_3, a) = q_3$

$\delta(\delta^*(q_0, bab), a) = \delta(q_2, a) = q_3$

$\delta(\delta^*(q_0, ba), b) = \delta(q_1, b) = q_2$

$\delta(\delta^*(q_0, b), a) = \delta(q_0, a) = q_1$

$\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), b) = \delta(q_0, b) = q_0$

$\delta^*(q_0, babaab) = q_1 \notin A$ #

$\therefore x = babaab \notin L$

2) จงทดสอบว่า x_2 = babbaa ถูกยอมรับโดยตัวแบบข้างต้น หรือไม่

$\delta^*(q_0, babbaa)$

$= \delta(\delta^*(q_0, babba), a) = \delta(q_3, a) = q_3$

$= \delta(\delta^*(q_0, babb), a) = \delta(q_2, a) = q_3$

$= \delta(\delta^*(q_0, bab), b) = \delta(q_1, b) = q_2$

$= \delta(\delta^*(q_0, ba), b) = \delta(q_1, b) = q_2$

$= \delta(\delta^*(q_0, b), a) = \delta(q_0, a) = q_1$

$= \delta(\delta^*(q_0, \Lambda), b) = \delta(q_0, b) = q_0$

$\delta^*(q_0, babbaa) = q_3 \in A$ #

$\therefore x = babbaa \in L$

โจทย์น้อง

x_3 = babbabaa $\in L$?

$\delta(\delta^*(q_0, babbaba), a) = q_2$

$\delta(\delta^*(q_0, babbab), a) = q_1$

$\delta(\delta^*(q_0, babba), b) = q_0$

$\delta(\delta^*(q_0, babb), a) = q_1$

$\delta(\delta^*(q_0, bab), b) = q_0$

$\delta(\delta^*(q_0, ba), b) = q_0$

$\delta(\delta^*(q_0, b), a) = q_1$

$\delta(\delta^*(q_0, \Lambda), b) = q_0$

$\therefore q_2 \in A$

$x_3 \notin L$ #

3.1 การออกแบบ ออโตมาตาเชิงกำหนด

คุณลักษณะของ DFA ก่อนออกแบบ

1) แต่ละสถานะจะมี out degree = จน. สมาชิกใน Σ
2) แต่ละสถานะจะเดินออกด้วยตัวอักษรใดๆ ได้เพียง 1 เส้นทาง : 1 ตัวอักษร
3) รวมทางเดินของ DFA แต่ละทางจะต้องมีทางเดิน = $\boxed{|Q| \times |\Sigma|}$

เช่น $Q = 4$, $\Sigma = 3$

$4 \times 3 = 12$

การออกแบบ DFA

กำหนด $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $ab\}$

$RE = ab(a+b)^*$

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

วิธีออกแบบ

1. ใส่สถานะที่ q_0 (สถานะเริ่มต้น)

โดยพิจารณาการเดินของ q_0 เมื่ออ่านสัญลักษณ์ทุกตัวใน Σ ว่าจะเดินอย่างไรก็ได้ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของภาษา

* DFA จะใช้สถานะเป็นตัวกำหนดเงื่อนไขการเดินระหว่างสถานะ

2. ถ้ามีสถานะใหม่เกิดขึ้นจากการเดินในขั้นที่ 1 ให้พิจารณาสัญลักษณ์ทุกตัวใน Σ เช่นเดิม และวนทำข้อ 2 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะไม่มีสถานะใหม่เกิดขึ้น

3. กำหนดสถานะสิ้นสุดของภาษาตามแบบ (สถานะที่เหมาะสมเงื่อนไขของภาษา)

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$

ระบุว่า เมื่อได้ DFA แล้ว การเดินจะต้องครบตามฟังก์ชันของ $Q \times \Sigma$

การออกแบบ

เงื่อนไข

$L = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $ab \}$

① ให้ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

หาทางเกิน ให้ q_0 โดยต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

$\delta(q_0, a) = q_1$ (เป็นสถานะที่อ่าน a ได้แล้ว 1 ตัว ซึ่งเป็นตัวเริ่มต้น)

$\delta(q_0, b) = q_2$ (เป็นสถานะที่ไม่มีโอกาสที่จะถูกยอมรับ)

② หาสถานะใหม่

$\delta(q_1, a) = q_2$

$\delta(q_1, b) = q_3$ (เป็นสถานะที่อ่าน ab ขึ้นต้นได้แล้ว)

$\delta(q_2, a) = q_2$

$\delta(q_2, b) = q_2$

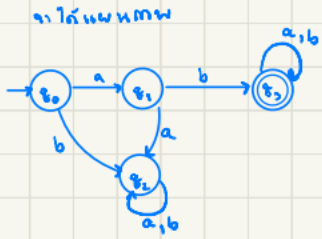
$\delta(q_3, a) = q_3$

$\delta(q_3, b) = q_3$

จบการหา δ เพื่อเจอสถานะที่ได้รับการยอมรับ หรือ ไม่มีสถานะใหม่ แบบฝึก ex 2

③ กำหนดสถานะสิ้นสุด $A = \{q_3\}$

จะได้แผนภาพ



ex 1 จงหาภาษาปกติต่อไปนี้ด้วย DFA

$L = \{ x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $aabc \}$

ออกแบบ

① ให้ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

② หา δ เริ่มที่ q_0

$\delta(q_0, a) = q_1$ (สถานะที่อ่าน a ได้แล้ว 1 ตัว)

$\delta(q_0, b) = q_2$ (สถานะที่ไม่มีโอกาสยอมรับ)

$\delta(q_0, c) = q_2$

$\delta(q_1, a) = q_3$ (สถานะที่อ่าน a ครั้งที่ 2)

$\delta(q_1, b) = q_2$

$\delta(q_1, c) = q_2$

$\delta(q_2, a) = q_2$

$\delta(q_2, b) = q_2$

$\delta(q_2, c) = q_2$

$\delta(q_3, a) = q_2$

$\delta(q_3, b) = q_4$ (สถานะได้ b ตำแหน่ง 3 ตามเงื่อนไข)

$\delta(q_3, c) = q_2$

$\delta(q_4, a) = q_2$

$\delta(q_4, b) = q_2$

$\delta(q_4, c) = q_5$ (สถานะได้ c ตำแหน่ง 4 ตามเงื่อนไข ทำให้ครบเงื่อนไข)

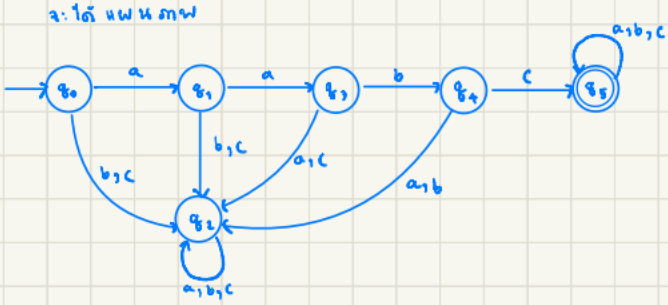
$\delta(q_5, a) = q_5$

$\delta(q_5, b) = q_5$

$\delta(q_5, c) = q_5$

③ กำหนด สถานะสิ้นสุด $A = \{q_5\}$

จะได้ แผนภาพ



ex 1 จงหาภาษาปกติต่อไปนี้ด้วย DFA

$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $10\}$

$RE = (0+1)^*(10)$

ออกแบบ

① ให้ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

② หา δ เริ่มที่ q_0

$\delta(q_0, 0) = q_0$ (รอ 10 มาลงท้าย)

$\delta(q_0, 1) = q_1$ (อ่าน 1 ซึ่งมีโอกาสลงท้าย)

$\delta(q_1, 0) = q_2$ (อ่าน 10 ซึ่งมีโอกาสลงท้าย)

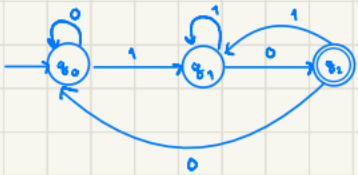
$\delta(q_1, 1) = q_1$ (รอ 0 มาลงท้าย)

$\delta(q_2, 0) = q_0$

$\delta(q_2, 1) = q_1$

③ $A = \{q_2\}$

จะได้แผนภาพ



ex 3 จงหาภาษาปกติต่อไปนี้ด้วย DFA

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี ba เป็นส่วนประกอบ $\}$

สายอักขระย่อย

$RE = (a+b)^* ba (a+b)^*$

① ให้ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น

② หา δ เริ่มที่ q_0

$\delta(q_0, a) = q_0$ (รอเจอ ba)

$\delta(q_0, b) = q_1$ (อ่าน b ได้ 1 ตัว และรอ a)

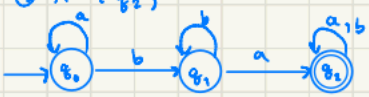
$\delta(q_1, a) = q_2$ (อ่าน ba ได้ครบเงื่อนไข)

$\delta(q_1, b) = q_1$

$\delta(q_2, a) = q_2$

$\delta(q_2, b) = q_2$

③ $A = \{q_2\}$



ex 9 จงหาภาษาปกติต่อไปนี้ด้วย DFA

$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_1(x)$ หาร 3 ลงตัว

จำนวน 1 ของสายอักขระ x

$RE = 0^* + (0^*10^*10^*)^*$

สังเกตว่าภาษานี้มี ∧

สถานะสิ้นสุด มีสถานะเดียว

① ให้ q_0 เป็นสถานะเริ่มต้น และเป็นสถานะสิ้นสุด ← โดยกรณีภาษาที่มี ∧

② หา δ เริ่มที่ q_0

$\delta(q_0, 0) = q_0$

$\delta(q_0, 1) = q_1$ (ได้ 1 มาตัว รออีก 2 ตัว)

$\delta(q_1, 0) = q_1$

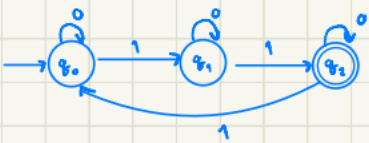
$\delta(q_1, 1) = q_2$ (ได้ 2 มาตัว รออีก 1 ตัว)

$\delta(q_2, 0) = q_2$

$\delta(q_2, 1) = q_0$

③ $A = \{q_0, q_2\}$

จะได้แผนภาพ



Complement ของภาษา L (L')

• ถ้า L เป็นภาษาปกติ จะได้ว่า L' จะเป็นภาษาปกติด้วย

DFA ของ L' หาได้จาก DFA ของ L

โดยให้สลับสถานะปกติในตัวแบบ DFA ของ L

เป็นสถานะสิ้นสุด และสลับสถานะ

สิ้นสุดให้เป็นสถานะปกติ อย่างอื่นเหมือน

ex ถ้า

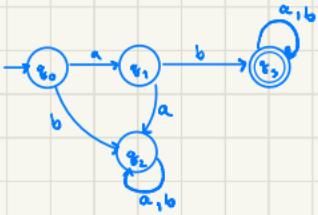
$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี aba เป็นส่วนประกอบ$\}$

L' คือ:

$L' = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ไม่มี aba เป็นส่วนประกอบ$\}$

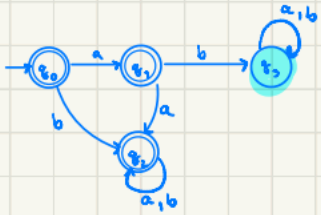
สรุป ภาษาทั้ง 8 แบบ (L4 , L'4)

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย ab $\}$



=>

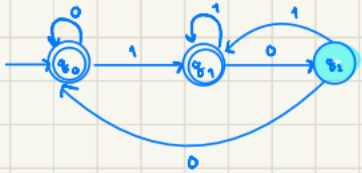
$L' = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ไม่ขึ้นต้นด้วย ab $\}$



$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย 10 $\}$

=>

$L' = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ไม่ลงท้ายด้วย 10 $\}$



$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี ba เป็นส่วนประกอบ $\}$

=>

$L' = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ไม่มี ba เป็นส่วนประกอบ $\}$

$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid n(x)$ หาร 3 ลงตัว $\}$

=>

$L' = \{x \in \{0,1\}^* \mid n(x)$ หาร 3 ไม่ลงตัว $\}$

แบบฝึก หา DFA ของแผนภาพต่อไปนี้

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aaba\}$

<u>ออกแบบ</u>

$\delta(q_0, a) = q_1$ (เห็น a ที่อาจเป็นตัวลงท้าย)

$\delta(q_0, b) = q_0$ (รอเจอ aaba มาลงท้าย)

$\delta(q_1, a) = q_2$ (เห็น aa ที่อาจเป็นตัวลงท้าย)

$\delta(q_1, b) = q_0$

$\delta(q_2, a) = q_2$

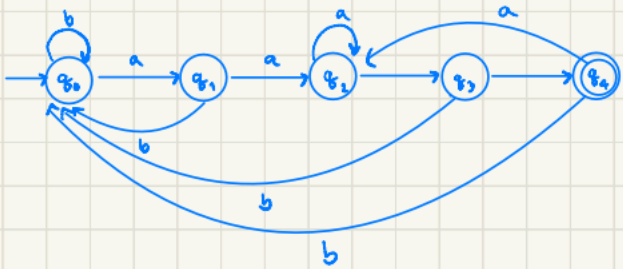
$\delta(q_2, b) = q_3$ (เห็น aab ที่อาจเป็นตัวลงท้าย)

$\delta(q_3, a) = q_4$ (เห็น aaba ที่อาจเป็นตัวลงท้าย)

$\delta(q_3, b) = q_0$

$\delta(q_4, a) = q_2$

$\delta(q_4, b) = q_0$



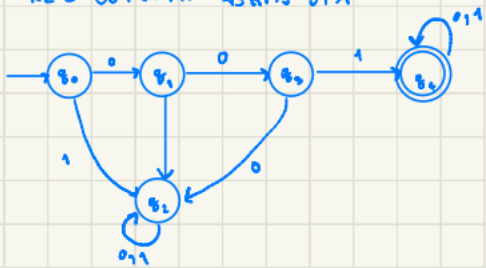
<u>หมายเหตุ</u> การเดินของ DFA ทุกการเดิน (δ) ต้องเดินไปยังสถานะที่มีเงื่อนไขสอดคล้องกับการอ่านสัญลักษณ์ตัวสุดท้าย ณ. ขณะนั้นเสมอ

(ส่วนใหญ่เงื่อนไขภายในที่ออกแบบเองจะมีเงื่อนไขเดียว)

โจทย์หนึ่ง ภาษาทั่ง & แบบ

1) $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $001\}$

$RE = 001(0+1)^*$ จงสร้าง DFA



q_1 : ได้ 0 เริ่มต้นของ 001

q_2 : ไม่ยอมรับ

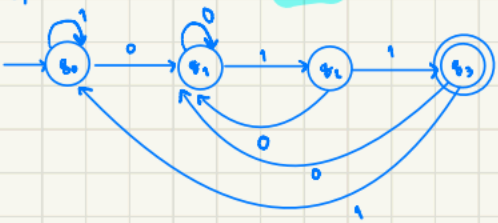
q_3 : ได้ 00 รอ 1

q_4 : กับ

กำหนด $A = \{q_4\}$

---

2) $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ลงท้าย $011\}$



q_1 : ได้ 0 รอ 11

q_2 : ได้ 01 รอ 1

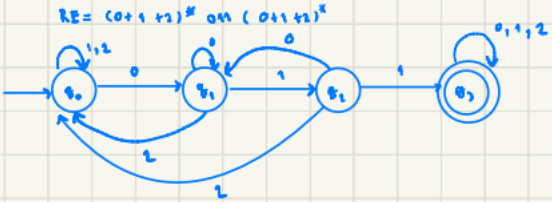
q_3 : ได้ 001 กับ

กำหนด $A = \{q_3\}$

---

3) $L = \{x \in \{0,1,2\}^* \mid x$ มี 011 เป็นส่วนท้ายของ$\}$

$RE = (0+1+2)^* 011 (0+1+2)^*$



q_1 : ได้ 0 รอ 11

q_2 : ได้ 01 รอ 1

q_3 : กับ 011

กำหนด $A = \{q_3\}$

---

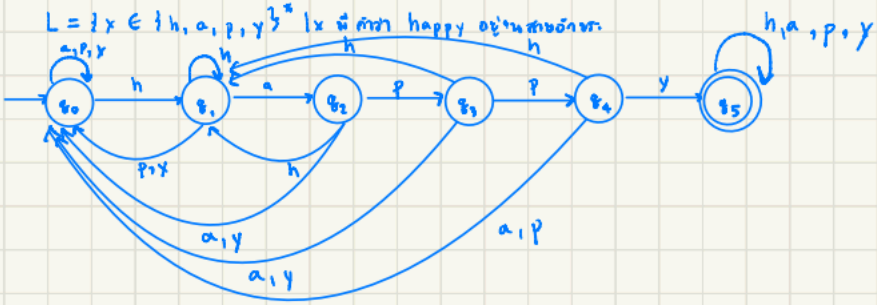
4) $L = \{x \in \{0,1,2\}^* \mid n(x)$ หาร 4 ลงตัว$\}$

จน. ของ 1 ใน x

$RE = (0+2)^* ((0+2)^* 1 (0+2)^* 1 (0+2)^* 1 (0+1)^* 1 (0+1)^*)^*$

กำหนด $A = \{q_0\}$

$L = \{x \in \{h, a, p, y\}^* \mid x$ มีคำว่า happy อยู่ในสายอักขระ



q_0 : ได้ h รอ appy

q_1 : ได้ ha รอ ppy

q_2 : ได้ hap รอ py

q_3 : ได้ happ รอ y

q_5 : ได้ ครบ happy

$A = \{q_5\}$ #

3.3 $\cup, \cap, -$ (L มีหลายๆ เงื่อนไข)

$L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย ab **และ** ลงท้ายด้วย ba

$L_{11} \rightarrow \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $ab\}$

$L_{12} \rightarrow \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $ba\}$

$\therefore L_1 = L_{11} \cap L_{12}$

$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย ab **หรือ** ลงท้ายด้วย ba

$\therefore L_2 = L_{11} \cup L_{12}$

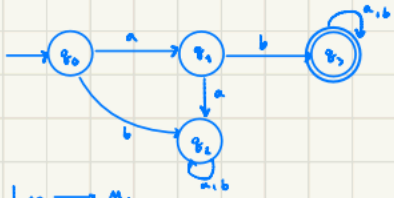
$L_3 = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย ab **แต่ไม่** ลงท้ายด้วย ba

$\therefore L_3 = L_{11} - L_{12}$

แผนภาพ

ตัวแบบของภาษา

$L_{11} \longrightarrow M_{11}$

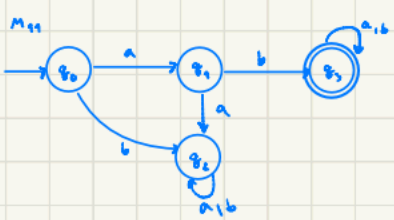


$L_{12} \longrightarrow M_{12}$

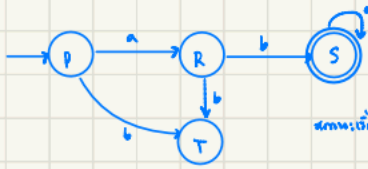
ก่อน การ $\cup, \cap, -$

ต้องเอา ตัวแบบ มาเปลี่ยน ชื่อสถานะ ไม่ให้ซ้ำกัน

M_{11}



$\Longrightarrow$



$M_{11} = (Q_{11}, \Sigma, q_{01}, A_{11}, \delta_{11})$

$Q_{11} = \{P, R, S, T\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

สถานะเริ่ม $q_{01} = P$

$A_{11} = \{S\}$

M_{12}

$\Longrightarrow$

$M_{12} = (Q_{12}, \Sigma, q_{02}, A_{12}, \delta_{12})$

$Q_{12} = \{W, X, Y\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_{02} = W$

$A_{12} = \{Y\}$

ข้อสังเกต ไม่ว่าจะเป็นการทำ $\cup, \cap$ หรือ $-$ การรวมกันของ M_{11} ของภาษา L_{11} และ M_{12} ของภาษา L_{12} จะมีขั้นตอนการใช้งานเหมือนกัน (จะใช้รูปเดียวกัน) ในเมื่อต่างกัน แต่จะแตกต่างกันการทำเนตสถานะสิ้นสุดในขั้นตอนสุดท้ายเท่านั้น

เพราะฉะนั้น การทำตอนนี้ จะทำในการรวมตัวแบบโดยไม่กังวลใจสถานะสิ้นสุด

ซึ่งสถานะสิ้นสุดจะถูกกำหนดตอนท้ายสุด

สูตร

สถานะใหม่ (r, z)

$$\boxed{\delta((p, q), a) = (\delta_{11}(p, a), \delta_{12}(q, a))}$$

p ต่อ a q ต่อ a

โดย $p \in Q_{11}$ และ $q \in Q_{12}$

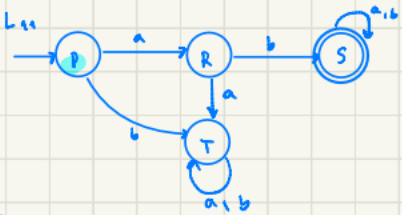
เมื่อเดินแล้ว เกิดสถานะใหม่ ในอีกทาง

หากเดินต่อไปเรื่อยๆ ด้วย Σ ขน

จะต้องไม่มีสถานะใหม่เกิดขึ้น

ex การสร้างตัวแบบ

$\Sigma = \{a, b\}$ $A_{11} = \{s\}$



$A_{12} = \{y\}$

Step 1) หา Q (คู่อันดับ) จากสูตร

✓① $\delta((p, w), a) = (\delta_{11}(p, a), \delta_{12}(w, a))$
$= (R, W)$ ✓

$\delta((p, w), b) = (T, X)$ ✓

✓② $\delta(r, w), a) = (T, W)$ ✓
$\delta(r, w), b) = (S, X)$ ✓

✓③ $\delta(T, x), a) = (T, Y)$ ✓
$\delta(T, x), b) = (T, X)$

✓④ $\delta(T, W), a) = (T, W)$
$\delta(T, W), b) = (T, X)$

✓⑤ $\delta(S, X), a) = (S, Y)$ ✓
$\delta(S, X), b) = (S, X)$

✓⑥ $\delta(T, Y), a) = (T, W)$
$\delta(T, Y), b) = (T, X)$

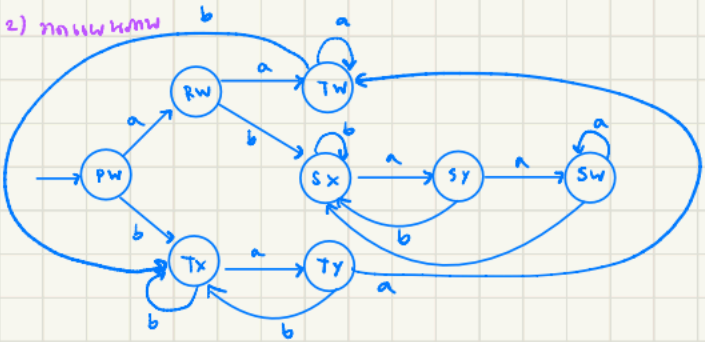
✓⑦ $\delta(S, Y), a) = (S, W)$
$\delta(S, Y), b) = (S, X)$

⑧ $\delta(S, W), a) = (S, W)$
$\delta(S, W), b) = (S, X)$

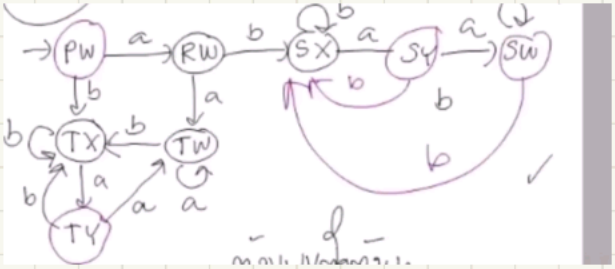
ไม่มีสถานะใหม่แล้ว หยุด

มีทั้งหมด = 8 สถานะ

ได้แผนภาพ 2) วาดแผนภาพ



3) ปรับ Design จะได้ตัวแบบดังต่อไป

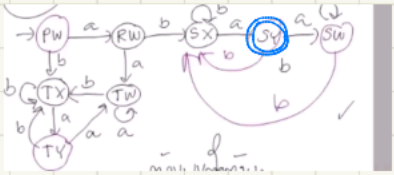


4) หา A (สถานะสิ้นสุด) โดยพิจารณาจากภาษาที่กำหนดว่า
มีการรวมเงื่อนไขภาษาย่อยแบบใด

• กรณี ∩ (ตัวหน้า ∈ $\{A_{L_{11}}\}$ AND ตัวหลัง ∈ $\{A_{L_{12}}\}$)

$L_1 = L_{11} \cap L_{12}$

$A_{L_1} = \{(S,Y)\}$



• กรณี ∪ (ตัวหน้า ∈ $\{A_{L_{11}}\}$ or ตัวหลัง ∈ $\{A_{L_{12}}\}$)

$L_2 = L_{11} \cup L_{12}$

$A_{L_2} = \{(S,X),(S,Y),(S,W),(T,Y)\}$

• กรณี − (ตัวหน้า ∈ $\{A_{L_{11}}\}$ AND ตัวหลัง ∉ $\{A_{L_{12}}\}$)

$L_3 = L_{11} - L_{12}$

$A_{L_3} = \{(S,X),(S,W)\}$

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$\therefore Q = \{(P,W),(S,X),(S,Y),(S,W),(T,W),(T,Y)\}$

$\Sigma = \{a,b\}$

$q_0 = (P,W)$

$A = \{(S,X),(S,Y),(S,W),(T,Y)\}$

δ แสดงในกราฟ

#

แบบฝึก

จงหา DFA ต่อไปนี้

$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ มี 11 เป็นส่วนประกอบ แต่ต้องไม่ลงท้ายด้วย 11$\}$

ตรวจ

Step 1) $L_{11} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ มี 11 เป็นส่วนประกอบ$\}$

หา L_{11}, L_{12} $L_{12} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย 11$\}$ หรือ $L_{12}' = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ต้องไม่ลงท้ายด้วย 11$\}$

$L = L_{11} - L_{12}$ หรือ $L = L_{11} \cap L_{12}'$

2) ออกแบบตัวแบบย่อย

$A_{11} = \{S\}$

$A_{12} = \{Y\}$

3) หา G

✓ ① $\delta(P,W),0) = (P,W)$

$\delta(P,W),1) = (R,X)$ ✓

✓ ② $\delta(R,X),0) = (P,W)$

$\delta(R,X),1) = (S,Y)$ ✓

✓ ③ $\delta(S,Y),0) = (S,W)$ ✓

$\delta(S,Y,1) = (S,Y)$

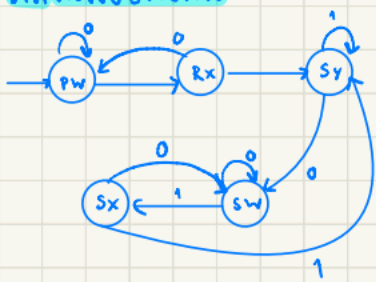
✓ ④ $\delta(S,W),0) = (S,W)$

$\delta(S,W),1) = (S,X)$ ✓

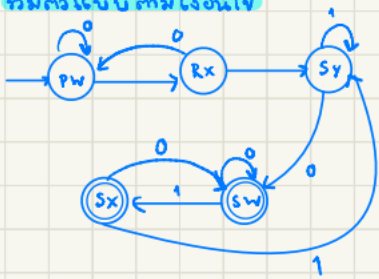
✓ ⑤ $\delta(S,X),0) = (S,W)$

$\delta(S,X),1) = (S,Y)$

4) วาดตัวแบบตั้งต้น



5) รวมตัวแบบตามเงื่อนไข



6) สรุปคำตอบ

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$\therefore Q = \{(P,W),(R,X),(S,Y),(S,W),(S,X)\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

$q_0 = (P,W)$

$A = \{(S,X),(S,W)\}$

δ แสดงในภาพ

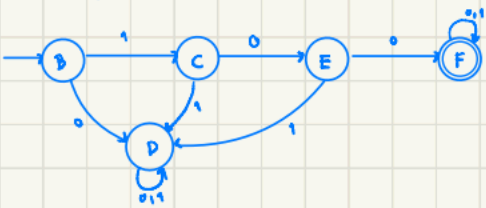
#

โจทย์น้อง

① $L_1 = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย 100 หรือลงท้ายด้วย 011 $\}$

$L_{11} = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย 100 $\}$

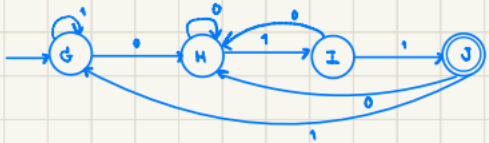
M_{11} , $A_m = \{F\}$



$L_{12} = \{ x \in \{0,1\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย 011 $\}$

M_{12} , $A_{12} = \{J\}$

0111
0110



H: ได้ 0 ถ้า 11

I: ได้ 01 ถ้า 1

J: ได้ 011

$Q = \{ (B,G), (D,H), (C,G), (D,I), (E,H), (D,G), (D,J), (F,H), (F,I), (F,J), (F,G) \}$

• หา Q

① $\delta((B,G),0) = (D,H)$ ✓
$\delta((B,G),1) = (C,G)$ ✓

② $\delta((D,H),0) = (D,H)$
$\delta((D,H),1) = (D,I)$ ✓

③ $\delta((C,G),0) = (E,H)$ ✓
$\delta((C,G),1) = (D,G)$ ✓

④ $\delta((D,I),0) = (D,H)$
$\delta((D,I),1) = (D,J)$ ✓

⑤ $\delta((E,H),0) = (F,H)$ ✓
$\delta((E,H),1) = (D,I)$

⑥ $\delta((D,G),0) = (D,H)$
$\delta((D,G),1) = (D,G)$

⑦ $\delta((D,J),0) = (D,H)$
$\delta((D,J),1) = (D,G)$

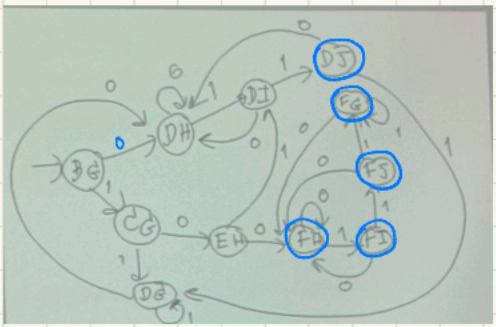
⑧ $\delta((F,H),0) = (F,H)$
$\delta((F,H),1) = (F,I)$ ✓

⑨ $\delta((F,I),0) = (F,H)$
$\delta((F,I),1) = (F,J)$ ✓

⑩ $\delta((F,J),0) = (F,H)$
$\delta((F,J),1) = (F,G)$

⑪ $\delta((F,G),0) = (F,H)$
$\delta((F,G),1) = (F,G)$

$L_{11} \cup L_{12}$ จะได้ DFA ดังนี้



$\therefore M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{ (B,G), (D,H), (C,G), (D,I), (E,H), (D,G), (D,J), (F,H), (F,I), (F,J), (F,G) \}$

$q_0 = (B,G)$

$A = \{ (D,J), (F,G), (F,H), (F,I), (F,J) \}$

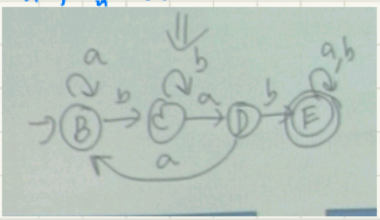
δ แสดงในภาพ

#

② $L_2 = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ มี bab เป็นส่วนประกอบ แต่ต้องไม่ลงท้าย ด้วย bab$\}$

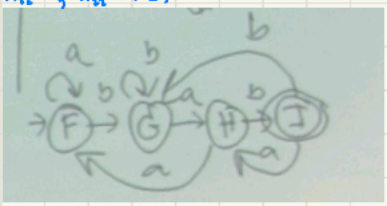
$L_{21} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ มี bab เป็นส่วนประกอบ$\}$

M_{21} , $A_{21} = \{E\}$



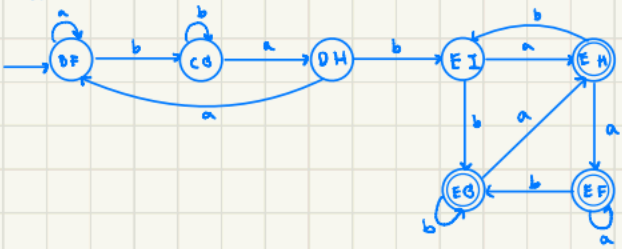
$L_{22} = \{x \in \{0,1\}^* \mid x$ ไม่ลงท้าย ด้วย bab$\}$

M_{22} , $A_{22} = \{I\}$



$Q = \{(B,F),(C,G),(D,H),(E,I),(E,H),(E,G),(E,F)$

$L_{21} - L_{22}$ จะได้ DFA ดังนี้



$\therefore M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{(B,F),(C,G),(D,H),(E,I),(E,H),$

$(E,G),(E,F)\}$

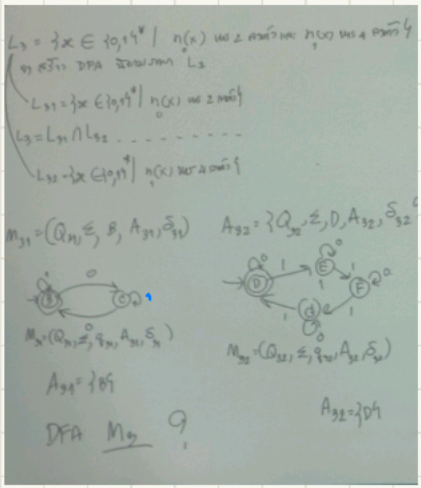
$q_0 = (B,F)$ #

$A = \{(E,H),(E,G),(E,F)\}$

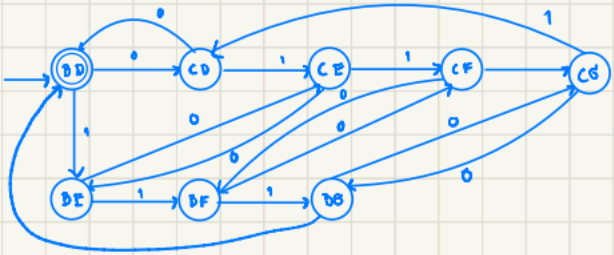
δ แสดงในภาพ

---

③



$Q = \{(B,D),(C,D),(B,E),(C,E),(B,F),(C,F),(B,G)$
$(C,G),$



$\therefore M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{(B,D),(C,D),(B,E),(C,E),(B,F),(C,F),$

$(B,G),(C,G)\}$

$q_0 = (B,D)$ #

$A = \{(B,D)\}$

δ แสดงในภาพ

4) $L_4 = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ มี abac เป็นส่วนประกอบ และ $n_c(x)$ หาร 3 ลงตัว $\}$

หา DFA ของ L_4

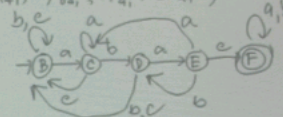
$L_{41} = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ มี abac เป็นส่วนประกอบ $\}$ *

$L_{42} = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid n_c(x)$ หาร 3 ลงตัว $\}$

$$\boxed{L_4 = L_{41} \cap L_{42}}$$

$M_{41} = (Q_{41}, \Sigma, q_{01}, A_{41}, \delta_{41})$

DFA L_{41}

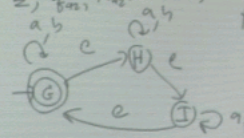


$A_{41} = \{F\}$

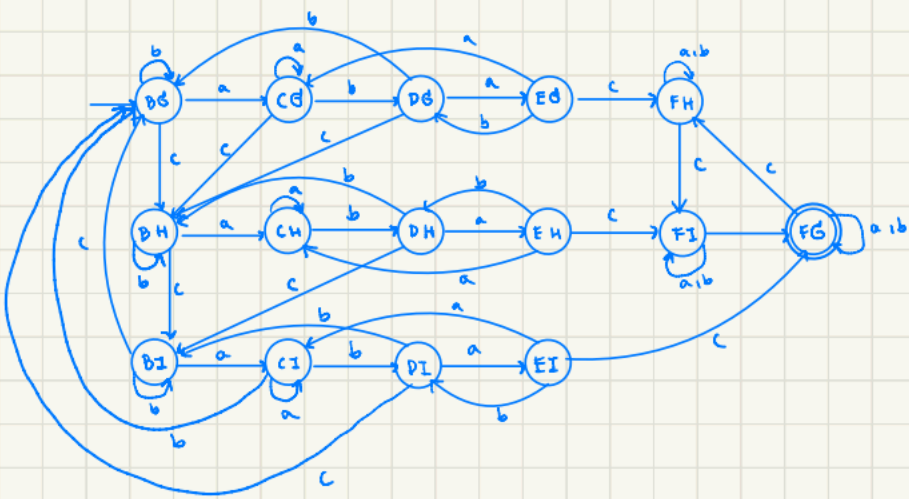
$M_{42} = (Q_{42}, \Sigma, q_{02}, A_{42}, \delta_{42})$

$A_{42} = \{G\}$

DFA L_{42}



$L_{41} \cap L_{42}$ จะได้ DFA ดังภาพ



$\therefore Q = \{(B,G), (C,G), (D,H), (D,G), (C,H), (B,I), (E,G), (D,H), (E,H)$
$(C,I), (F,H), (F,I), (D,I), (F,G), (E,I)\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

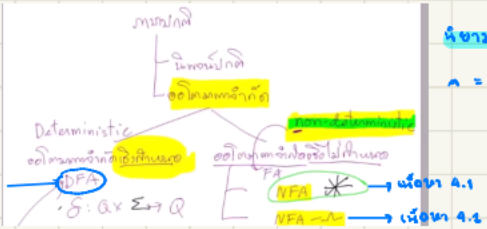
$q_0 = (B,G)$

$A = \{(F,G)\}$

δ แสดงในภาพ

บท 4 เชิงไม่กำหนด และทฤษฎีบทของคลีน

4.1 NFA



นิยาม บท 4.1

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

ระบบของสับเซตย่อยของ Q

$\boxed{\delta : Q \times \Sigma \to 2^{|Q|}}$

Ex ถ้า $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$2^{|Q|} = 2^3 = 8$

$2^Q = \{\{\}, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$

แนวทางการสร้าง NFA (เริ่มเดินจากสถานะเริ่มต้น)

① ใช้วงล้อมไปของภาษาบางก็กำหนดทิศทางการเดินที่เป็นไปได้

② เพิ่มส่วนการเดินที่จะทำให้สายอักขระที่จบการทดสอบสามารถ อ่านจากซ้ายสุดไปขวาสุดได้ครบ เพื่อเข้าสู่การยอมรับ / หรือเพื่อเข้าสู่วงล้อมไปที่เป็นจริง.

Ex 1 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $aab\}$

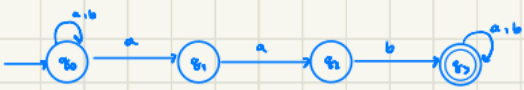
$RE = aab(a+b)^*$

Note การวาด DFA

ไม่จำเป็นต้องมีทางเดินที่ไม่สนใจ

Ex 2 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี aab เป็นสาย อักขระย่อย$\}$

$RE = (a+b)^* aab (a+b)^*$



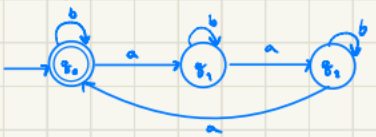
Ex 3 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aba\}$

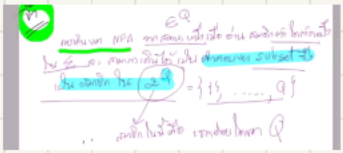
$RE = (a+b)^* aba$

Ex 4 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x)$ หาร 3 ลงตัว$\}$

จำได้เป็นส่วน DFA

$RE = b^* + (b^* a b^* a b^* a b^*)^*$





- ถ้าสิ้นสุดที่ $\{q_f\}$ แสดงว่าสตริงนี้ เดินไปถึงสถานะรับของ q_f ซึ่งไม่มีทางเดิน ε จึงไม่มีทางเดิน
- ถ้าสิ้นสุดที่ $\{q_i, q_j\}$ โดยที่ $q_i \in Q$ แสดงว่าสตริงนี้เดินไปที่ q_i
- ถ้าสิ้นสุดที่ $\{q_i, q_j, q_k\}$ แสดงว่ามีทางเดิน 3 ทาง

นั่นคือ ทางเดินของ NFA มีสถานะใดๆ เมื่ออ่าน a ใดๆ ใน ⊆ จะมีทางเดิน ≥ 0 ทาง

การตรวจสอบคำ / สายอักขระ จาก δ^*

สูตร

① $\delta^*(q, \Lambda) = \{q\}$

② $\delta^*(q, x) = \delta(q, ya) = \bigcup_{P \in \delta^*(q, y)} \delta(P, a)$

Ex1 จาก NFA ต่อไปนี้

จงตรวจสอบว่า $x = aabba \in L$?

$\delta^*(q_0, aabba) \longrightarrow \bigcup_{P \in \delta^*(q_0, aabb)} \delta(P, a) = \bigcup_{P \in \{q_3\}} \delta(P, a) = \delta(q_3, a) = \{q_3\}$

$\bigcup_{P \in \delta^*(q_0, aab)} \delta(P, b) = \bigcup_{P \in \{q_3\}} \delta(P, b) = \delta(q_3, b) = \{q_3\}$

$\bigcup_{P \in \delta^*(q_0, aa)} \delta(P, b) = \bigcup_{P \in \{q_2\}} \delta(P, b) = \delta(q_2, b) = \{q_3\}$

$\bigcup_{P \in \delta^*(q_0, a)} \delta(P, a) = \bigcup_{P \in \{q_1\}} \delta(P, a) = \delta(q_1, a) = \{q_2\}$

$\bigcup_{P \in \delta^*(q_0, \Lambda)} \delta(P, a) = \bigcup_{P \in \{q_0\}} \delta(P, a) = \delta(q_0, a) = \{q_0\}$

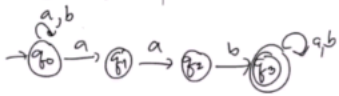
ทำจนเจอ Λ ก็จะเข้าสูตร ① $\rightarrow P \in \delta^*(q_0, \Lambda)$

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, aabba) &= \{q_3\} \cap A \\
&= \{q_3\} \cap \{q_3\} \\
&= \{q_3\} \neq \emptyset
\end{aligned}$$

$\therefore$ $x = aabba \in L$ จริง #

ex 2

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี aab เป็นสตริงย่อยประกอบ$\}$



จงตรวจสอบว่า $x = baabb \in L$ จริงหรือไม่

$$\delta^*(q_0, baabb) \rightarrow \cup\delta(P,b) = \cup\delta(P,b) = \delta(q_0,b) \cup \delta(q_1,b) = \{q_0\} \cup \{q_3\} = \{q_0, q_3\}$$

$P \in \delta^*(q_0, baab)$ $\quad P \in \{q_0, q_3\}$

$$\downarrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\cup\delta(P,b) = \cup\delta(P,b) = \delta(q_0,b) \cup \delta(q_1,b) \cup \delta(q_2,b) = \{q_0\} \cup \{\} \cup \{q_3\} = \{q_0, q_3\}$$

$P \in \delta^*(q_0, baa)$ $\quad P \in \{q_0, q_1, q_2\}$

$$\downarrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\cup\delta(P,a) = \cup\delta(P,a) = \delta(q_0,a) \cup \delta(q_1,a) = \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$P \in \delta^*(q_0, ba)$ $\quad P \in \{q_0, q_1\}$

$$\downarrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\cup\delta(P,a) = \cup\delta(P,a) = \delta(q_0,a) = \{q_0, q_1\}$$

$P \in \delta^*(q_0, b)$ $\quad P \in \{q_0\}$

$$\downarrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\cup\delta(P,b) = \cup\delta(P,b) = \delta(q_0,b) = \{q_0\}$$

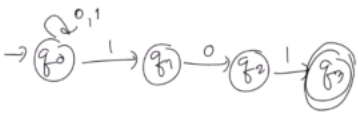
$P \in \delta^*(q_0, \varepsilon)$ $\quad P \in \{q_0\}$

$$\begin{aligned}\delta^*(q_0, baabb) &= \{q_0, q_3\} \cap A \\ &= \{q_0, q_3\} \cap \{q_3\} \\ &= \{q_3\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

$\therefore$ $x = baabb \in L$ จริง #

แบบฝึกทบทวนเข้าใจ

① จาก NFA ต่อไปนี้



จงตรวจสอบว่า สายอักขระ x ต่อไปนี้ เป็นสมาชิกในภาษาหรือไม่

1.1) $x_1 = 010011$

$\delta^*(q_0, 010011)$

$\longrightarrow \cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 01001)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 0100)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0\}$

$P \in \delta^*(q_0, 010)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 01)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 0)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0\}$

$P \in \delta^*(q_0, \epsilon)$

$\delta^*(q_0, 010011) = \{q_0, q_1\} \cap A$

$= \{q_0, q_1\} \cap \{q_3\}$

$= \emptyset$

$\therefore x_1 = 010011 \notin L$

1.2) $x_2 = 101011$

$\delta(q_0, 101011)$

$\longrightarrow \cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 10101)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 1010)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 101)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 10)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 1)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, \epsilon)$

$\delta^*(q_0, 101011) = \{q_0, q_1\} \cap A$

$= \{q_0, q_1\} \cap \{q_3\}$

$= \emptyset$

$\therefore x_2 = 101011 \notin L$

เปรียบเทียบ NFA กับ DFA

NFA
- ข้อดี → สร้างง่ายขึ้น
- ข้อเสีย → ตรวจสอบยากมากขึ้น

DFA
- ข้อดี → ตรวจสอบง่าย
- ข้อเสีย → สร้างยาก

สมมูล = Equivalent

สิ่งที่ต้องการคือ ตรวจสอบง่าย

∴ จะสร้าง DFA ให้ถูกต้องมากขึ้นจะใช้วิธีการแปลงจาก NFA ช่วย

ขั้นตอนการแปลงจาก NFA → DFA

เริ่มต้นจะมี NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$ ← ไม่ต้องหาใหม่

ต้องการสร้าง DFA ที่มีภาษาเดียวกันกับ NFA ดังกล่าว โดยจะดำเนินการสร้างตัวแบบ DFA ชื่อว่า $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ โดยที่

1. Q_1 = เป็น set ของ 2^Q (ซึ่งสถานะที่เราได้จะอยู่ในรูปของเซตย่อย)
2. Σ เหมือนเดิม
3. $q_1 = \{q_0\}$
4. $A_1 = \{q \in Q_1 \mid q \cap A \neq \emptyset\}$ เป็นเซตย่อย
5. หา δ_1 จาก δ โดยเริ่มจากสถานะเริ่มต้น

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$$\delta_1(q, a) = \bigcup_{p \in q} \delta(p, a)$$

ตัวอย่าง การแปลง NFA → DFA

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_0 = q_0$

$A = \{q_2\}$

δ แสดงในตาราง

จะสร้าง DFA $M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$ ได้ดังนี้

$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{\{q_0, q_2\}\}$

$\boxed{A_1 \cap A \text{ ต้องไม่} = \emptyset}$

δ_1 แสดงในตาราง

• เริ่มหา δ_1

① $\delta_1(\{q_0\}, a) = \bigcup_{P \in \{q_0\}} \delta(P, a) = \delta(q_0, a) = \underline{\{q_0, q_1\}}$ ✓

$\delta_1(\{q_0\}, b) = \bigcup_{P \in \{q_0\}} \delta(P, b) = \delta(q_0, b) = \{q_0\}$

② $\delta_1(\{q_0, q_1\}, a) = \bigcup_{P \in \{q_0, q_1\}} \delta(P, a) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) = \{q_0, q_1\} \cup \{\} = \{q_0, q_1\}$

$\delta_1(\{q_0, q_1\}, b) = \bigcup_{P \in \{q_0, q_1\}} \delta(P, b) = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \underline{\{q_0, q_2\}}$ ✓

③ $\delta_1(\{q_0, q_2\}, a) = \bigcup_{P \in \{q_0, q_2\}} \delta(P, a) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0, q_1\} \cup \{\} = \{q_0, q_1\}$

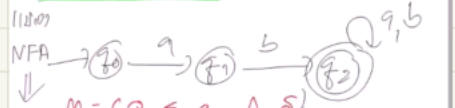
$\delta_1(\{q_0, q_2\}, b) = \bigcup_{P \in \{q_0, q_2\}} \delta(P, b) = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_0\} \cup \{\} = \{q_0\}$

NFA → DFA ได้ดังนี้

ex

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย $ab\}$

แปลง NFA ⇓ DFA



$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ | $A = \{q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$ | δ = ดูจากภาพ

$q_0 = q_0$

$\{\} \Rightarrow$ dead state จะต้องมีทางเดินต่อเชื่อมกัน แต่จะใช้แนวทางการเดินวนอยู่กับที่ เพื่อไม่ให้มีโอกาสเดินไปสู่สถานะสิ้นสุด

$M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A, \delta_1)$

$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_1\}, \{\}, \{q_2\}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{q_2\}$

δ_1 แสดงในภาพ

• หา δ_1

✓ ① $\delta_1(\{q_0\}, a) = \{q_1\}$ ✓

$\delta_1(\{q_0\}, b) = \{\}$ ✓

✓ ② $\delta_1(\{q_1\}, a) = \{\}$

$\delta_1(\{q_1\}, b) = \{q_2\}$

Note สมุดที่เขียน ไม่ต้องวาดใส่ เขียนวงกลมที่ได้เลย

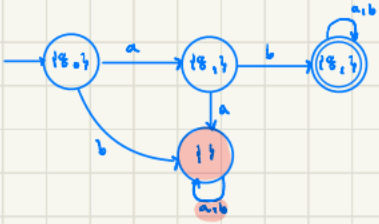
✓ ③ $\delta_1(\{\}, a) = \{\}$

$\delta_1(\{\}, b) = \{\}$

④ $\delta_1(\{q_2\}, a) = \{q_2\}$

$\delta_1(\{q_2\}, b) = \{q_2\}$

NFA → DFA ได้ดังภาพนี้



Note การสร้าง DFA โดยตรง กับการ NFA → DFA อาจไม่ได้คำตอบที่เหมือนกัน แต่ไม่ได้ถือว่าผิด

ทดสอบ จงสร้าง DFA ของ L ต่อไปนี้ (โดยการ NFA → DFA)

$L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid x$ มี abc เป็นส่วนประกอบ$\}$

$A = \{q_3\}$

Step ① หา NFA

② แปลงจาก NFA → DFA

$M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A, \delta_1)$

$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_3\}\}$

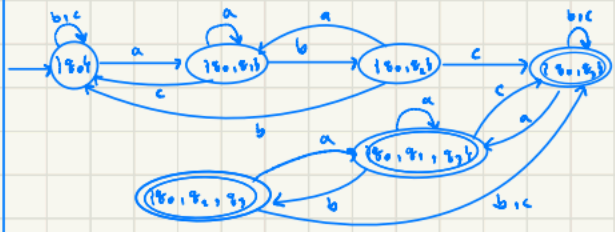
$\Sigma = \{a, b, c\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{\{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_2, q_3\}\}$

δ_1 แสดงในภาพ

NFA → DFA ได้ดังภาพนี้



โจทย์ในข้อ

ทดสอบ $x_2 = bbaab \in L$?

$\delta^*(q_0, bbaab)$

$\rightarrow \cup\delta(P, b) = \{q_0, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, bbaa)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, a) = \{q_0, q_1, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, bba)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, a) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, bb)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, b) = \{q_0\}$

$P \in \delta^*(q_0, b)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, b) = \{q_0\}$

$P \in \delta^*(\underline{q_0, \varepsilon})$

$\{q_0\}$

$\delta^*(q_0, bbaab) = \{q_0, q_3\} \cap A$

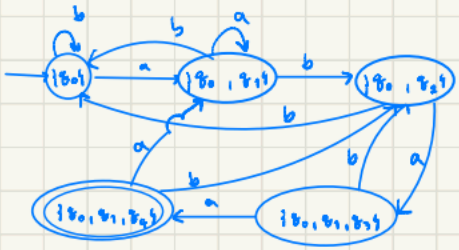
$= \{q_0, q_3\} \cap \{q_3\}$

$= \{q_3\} \neq \emptyset$ #

$\therefore x_2 = bbaab \in L$

$A = \{q_4\}$

NFA → DFA



$M_1 = \{Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1\}$

$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_1, q_3\}, \{q_0, q_1, q_4\}\}$

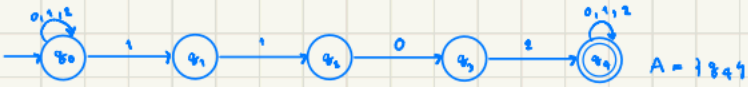
$\Sigma = \{a, b\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{q_0, q_1, q_4\}$ #

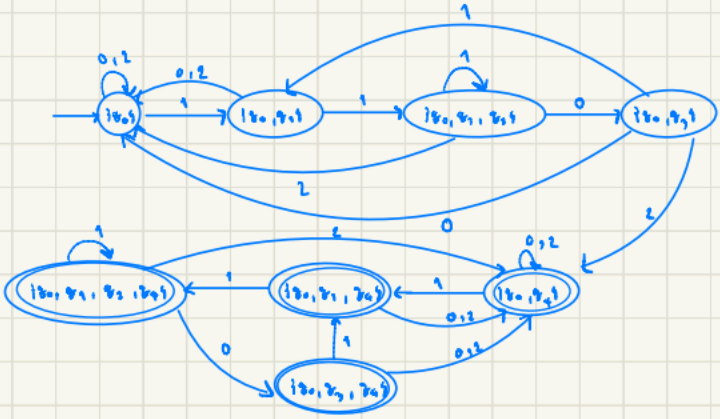
δ_1 = แสดงรายการ

แปลง NFA → DFA



$A = \{q_4\}$

NFA → DFA



$M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, A_1, \delta_1)$

$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \{q_0, q_4\}, \{q_0, q_1, q_4\}, \{q_0, q_1, q_2, q_4\}, \{q_0, q_3, q_4\}\}$

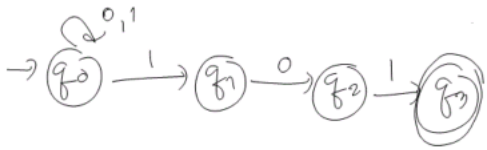
$\Sigma = \{0, 1, 2\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{\{q_0, q_4\}, \{q_0, q_1, q_4\}, \{q_0, q_1, q_2, q_4\}, \{q_0, q_3, q_4\}\}$

δ_1 = แสดงในภาพ

(1) จาก NFA ต่อไปนี้



จงตรวจสอบว่า สายอักขระ ต่อไปนี้ เป็นสมาชิกในภาษาหรือไม่

(1) $x_1 = 01101 \in L$?

$\delta(q_0, 01101)$

$\rightarrow \cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 0110)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_2\}$

$P \in \delta^*(q_0, 011)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 01)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 0)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0\}$

$P \in \delta^*(q_0, \varepsilon)$

$\delta(q_0, 01101) = \{q_0, q_1, q_3\} \cap A$

$= \{q_0, q_1, q_3\} \cap \{q_3\}$

$= \{q_3\} \neq \emptyset$

$\therefore x_1 = 01101 \in L$ #

(2) $x_2 = 11010 \in L$?

$\delta(q_0, 11010)$

$\rightarrow \cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_2\}$

$P \in \delta^*(q_0, 1101)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1, q_3\}$

$P \in \delta^*(q_0, 110)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 0) = \{q_0, q_2\}$

$P \in \delta^*(q_0, 11)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, 1)$

$\downarrow$

$\cup\delta(P, 1) = \{q_0, q_1\}$

$P \in \delta^*(q_0, \varepsilon)$

$\delta(q_0, 11010) = \{q_0, q_2\} \cap A$

$= \{q_0, q_2\} \cap \{q_3\}$

$= \emptyset$

$\therefore x_2 = 11010 \notin L$ #

② จงสร้าง NFA เพื่อนิยามภาษา L

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี abba เป็นสายย่อย$\}$

จากนั้นแปลง NFA ที่ได้ไปเป็น DFA

NFA

$A = \{q_4\}$

NFA ⟶ DFA

$M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$

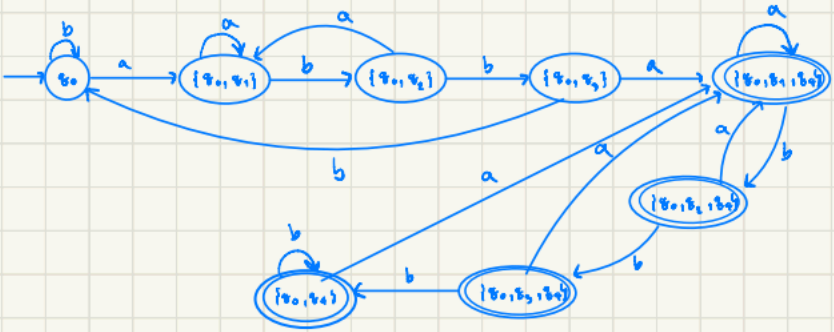
$Q_1 = \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_0, q_3\}, \{q_0, q_1, q_4\}, \{q_0, q_2, q_4\}, \{q_0, q_3, q_4\}, \{q_0, q_4\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_1 = \{q_0\}$

$A_1 = \{\{q_0, q_4\}, \{q_0, q_1, q_4\}, \{q_0, q_2, q_4\}, \{q_0, q_3, q_4\}\}$

δ แสดงในภาพ



4.2 NFA - Λ

NFA - Λ

อดีตมาตราจำกัดเชิงไม่กำหนด
ที่มีการทำฟังก์ชั่นการผ่านด้วย Λ เพิ่มเข้ามา

เช่น DFA, NFA ทั่วไป $q_i \xrightarrow{a \in \Sigma \text{ เท่านั้น}} q_j$

FA
- DFA
- NFA
  - NFA
  - NFA-Λ

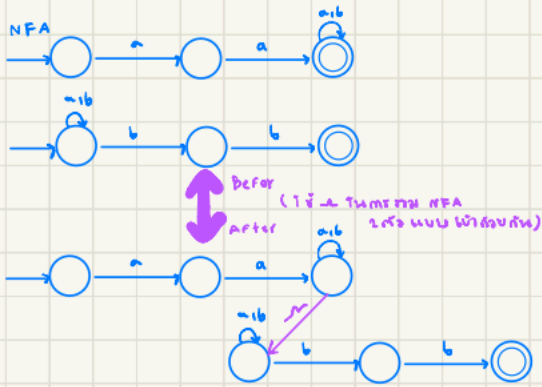
ย้ำ $\Lambda \notin \Sigma$

$q_i \xrightarrow{\Lambda} q_j$

$\Sigma \cup \{\Lambda\}$

$q_i \xrightarrow{a \in \Sigma \cup \{\Lambda\}} q_j$

Ex $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ขึ้นต้นด้วย aa และลงท้ายด้วย bb



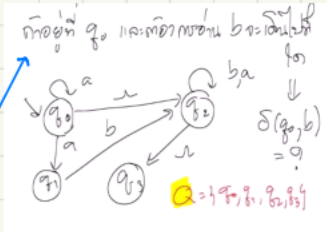
(1 ขั้น Λ ในการวาด NFA 2 ครั้ง แบบ ผ้าคลุมต้น)

NFA-Λ จะสร้างง่ายขึ้น

เมื่อเดิน ด้วย Λ ได้ $\Rightarrow$ ไม่ต้องอ่านสิ่งใดก็ได้
ใดๆ ใน Σ เลยก็สามารถเดินได้

$\therefore$ เราต้องมอง δ ให้ครอบคลุมการเดินด้วย Λ ด้วย
ซึ่งจะมีแนวทางการพิจารณาโดยใช้ Λ-closure
ของ set ของสถานะ S ใดๆ เข้ามาช่วย $\Rightarrow \Lambda(S)$

ถ้าอยู่ที่ q_0 และต้องการอ่าน b จะเดินไปที่ไหน



$\Downarrow$

$\delta(q_0, b) = q_1$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

NFA-Λ การนิยาม 4.4

NFA-$\Lambda \Rightarrow M = (\underbrace{Q, \Sigma, q_0, F, \delta}_{\text{ส่วนเพิ่ม}})$

$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \to 2^Q$

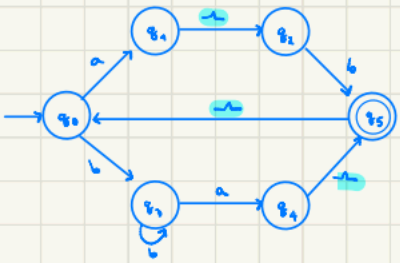
Λ - closure ของ set ของสถานะ S ใดๆ

$\boxed{\Lambda(S)}$ หาได้จากนิยามต่อไปนี้

1) สมาชิกทุกตัวใน S จะ $\in \Lambda(S)$
2) สำหรับ q ใดๆ $\in \Lambda(S)$ จะได้ว่า $\delta(q, \Lambda)$ ผลลัพธ์จะได้เป็น $\in \Lambda(S)$ ด้วย วนจนว่า $\Lambda(S)$ ไม่มีการเปลี่ยนแปลง

Ex หาค่า $\Lambda(S)$

NFA-Λ, $\Sigma = \{a, b\}$



$\Lambda(\{q_0\}) = ?$ จากการหา

หา NFA-Λ ถ้ามี $S = \{q_0\}$

$= \{q_0, q_5, q_2\}$

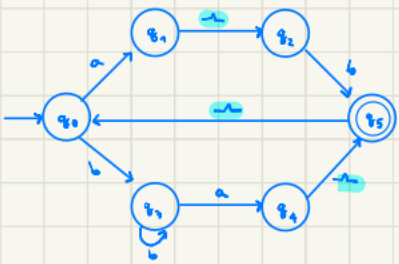
Step
1. ได้จากนิยาม 1)
2. อ่าน $\delta(q_0, \Lambda)$
3. ทำ 2 ซ้ำ จนไม่มีสถานะใหม่ถ้าน

หา NFA-Λ ถ้ามี $S = \{q_3, q_2\}$

$\Lambda(\{q_3, q_2\}) = \{q_3, q_2\}$

กรณีที่อ่านไม่เจอ Λ ก็ตอนตัวเอง (q_3) แล้วค่อยไปดูตัวถัดไป (q_2)

แบบฝึกทักษะเข้าใจ



จงหา

1) $\varepsilon(\{q_3, q_5\}) = \{q_5, q_0\}$

2) $\varepsilon(\{q_0, q_3, q_2\}) = \{q_0, q_3, q_2\}$

---

* หน้าที่ 21:11

(δ^* ของ NFA-ε)

การตรวจสอบคำ / สายอักขระ ของ NFA-ε

1) เมื่อ x เป็น ε

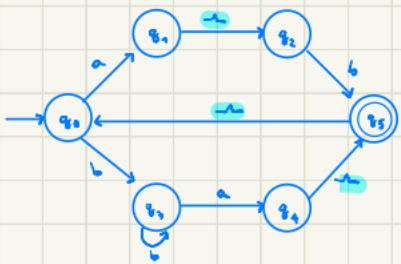
$q \in Q, \delta^*(q, \varepsilon) = \varepsilon(\{q\})$

2) เมื่อ x ไม่เป็น ε

$$\delta^*(q, ya) = \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,y)} \delta(p, a)\right)$$

ex การตรวจสอบ

NFA-ε



$A = \{q_5\}$

จงตรวจสอบว่า $x = ab \in L$? $\boxed{\delta^*(q_0, x)} \cap A \neq \emptyset$ จะได้ว่า $x \in L$

$\delta^*(q_0, ab)$

$$\rightarrow \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0,a)} \delta(p, b)\right) = \varepsilon(\delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b)) = \varepsilon(\{\} \cup \{q_5\}) = \varepsilon(\{q_5\}) = \{q_5, q_0\}$$

$$\varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0,\varepsilon)} \delta(p, a)\right) = \varepsilon(\delta(q_0, a)) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$$

เอาสูตร 1) จะได้ $\varepsilon(s)$

$$\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$$

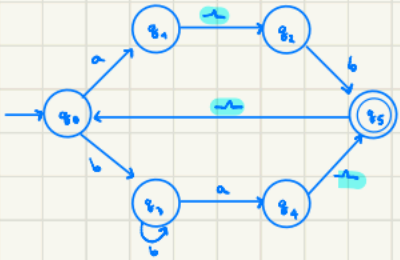
$\delta^*(q_0, ab = \{q_5, q_0\} \cap A$

$= \{q_5, q_0\} \cap \{q_5\}$

$= \{q_5\} \neq \emptyset$

$\therefore ab \in L$ จริง #

Ex จงตรวจสอบ $bab \in L$?



$A = \{q_5\}$

$$\delta^*(q_0, bab) = \{q_3\} \cap A = \{q_3\} \cap \{q_5\} = \emptyset$$

$\therefore bab \notin L$ #

$\delta^*(q_0, bab)$

$\rightarrow \varepsilon\left(\begin{array}{l} \cup\, \delta(P, b) \\ P \in \delta^*(q_0, ba) \end{array}\right) = \varepsilon(\delta(q_4, b) \cup \delta(q_5, b) \cup \delta(q_0, b)) = \varepsilon(\{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \{q_3\}) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

$\downarrow$

$\varepsilon\left(\begin{array}{l} \cup\, \delta(P, a) \\ P \in \delta^*(q_0, b) \end{array}\right) = \varepsilon(\delta(q_3, a)) = \varepsilon(\{q_4\}) = \{q_4, q_5, q_0\}$

$\uparrow$

$\downarrow$

$\varepsilon\left(\begin{array}{l} \cup\, \delta(P, b) \\ P \in \delta^*(q_0, \varepsilon) \end{array}\right) = \varepsilon(\delta(q_0, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

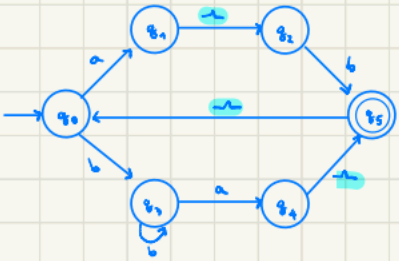
$\uparrow$

$\downarrow$

$\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$

แบบฝึกความเข้าใจ

จงทดสอบว่า $x = abba \in L$?



$A = \{q_5\}$

$$\delta^*(q_0, abba) = \{q_4, q_5, q_0\} \cap A$$
$$= \{q_4, q_5, q_0\} \cap \{q_5\}$$
$$= \{q_5\} \neq \emptyset$$

$\therefore\ x = abba \in L$ จริง #

$\delta^*(q_0, abba)$

$$\sim\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, abb)} \delta(p, a)\right) = \sim(\{q_0\}) = \{q_4, q_5, q_0\}$$

$$\sim\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, ab)} \delta(p, b)\right) = \sim(\{\} \cup \{q_3\}) = \{q_3\}$$

$$\sim\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, a)} \delta(p, b)\right) = \sim(\{\} \cup \{q_5\}) = \{q_5, q_0\}$$

$$\sim\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, \sim)} \delta(p, a)\right) = \sim(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$$

$$\sim(\{q_0\}) = \{q_0\}$$

NFA-ε → NFA

ทฤษฎีบท 4.2

NFA-ε สมมูลกับ NFA

ขั้นตอน

① จะต้องมี NFA-ε

$M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

② ต้องการสร้าง NFA

$M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$

ใช้ตัวเดิม

สูตรหา δ_1

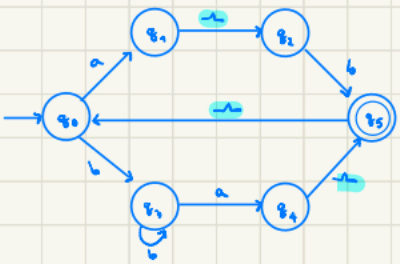
$$\delta_1(q, a) = \delta^*(q, a) = \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,\varepsilon)} \delta(p, a)\right)$$

สูตรหา A_1

$A_1 = \{A \cup \{q_0\}$ ถ้า $\varepsilon(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset$

A ถ้าเป็นกรณีอื่น

Ex ทำ NFA-ε → NFA



NFA-ε, $M = (Q, \Sigma, q_0, A, \delta)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_0 = q_0$

$A = \{q_5\}$

δ แสดงในตาราง

NFA-ε → NFA

$M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$q_0 = q_0$

$A = \{q_5\}$ → Step ที่ A_1

δ แสดงในตาราง

1) หา $\varepsilon(\{q_0\})$

2) เอาคำตอบที่ได้ไป $\cap A$

3) if $(\varepsilon(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset)$? $A \cup \{q_0\}$: A

• หา δ_1

$$\delta_1(q_0, a) = \delta^*(q_0, a) = \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0,\varepsilon)} \delta(p, a)\right)$$

$= \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$ $\quad = \varepsilon(\delta(q_0, a))$

$= \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

$$\delta_1(q_0, b) = \delta^*(q_0, b) = \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0,\varepsilon)} \delta(p, b)\right)$$

$= \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$

$= \varepsilon(\delta(q_0, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

$$\delta_1(q_1, a) = \delta^*(q_1, a) = \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_1,\varepsilon)} \delta(p, a)\right)$$

$= \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$

$= \varepsilon(\delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a))$

$= \varepsilon(\{\} \cup \{\}) = \{\}$

เอาออกมาใช้ทีเดียว

$\delta_1(q_1, b) = \varepsilon(\delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b))$

$= \varepsilon(\{q_5\}) = \{q_5, q_0\}$

สัญลักษณ์ของ แบบนี้เลย

$\delta_1(q_2, a) = r(\{q_2\}) = \{q_2\}$

$= r(\delta(q_2, a)) = r(\{\}) = \underline{\{\}}$

$\delta_1(q_2, b) = r(\delta(q_2, b)) = r(\{q_5\}) = \underline{\{q_5, q_0\}}$

$\delta_1(q_3, a) = r(\{q_3\}) = \{q_3\}$

$= r(\delta(q_3, a) = r(\{q_4\}) = \underline{\{q_4, q_5, q_0\}}$

$\delta_1(q_3, b) = r(\delta(q_3, b) = r(\{q_3\}) = \underline{\{q_3\}}$

$\delta_1(q_4, a) = r(\{q_4\}) = \{q_4, q_5, q_0\}$

$= r(\delta(q_4, a) \cup \delta(q_5, a) \cup \delta(q_0, a)) = r(\{q_1\}) = \underline{\{q_1, q_3\}}$

$\delta_1(q_4, b) = r(\delta(q_4, b) \cup \delta(q_5, b) \cup \delta(q_0, b)) = r(\{q_3\}) = \underline{\{q_3\}}$

$\delta_1(q_5, a) = (\{q_5\}) = \{q_5, q_0\}$

$= r(\delta(q_5, a) \cup \delta(q_0, a) = r(\{q_1\}) = \underline{\{q_1, q_3\}}$

$\delta_1(q_5, b) = r(\delta(q_5, b) \cup \delta(q_0, b) = r(\{q_3\}) = \underline{\{q_3\}}$

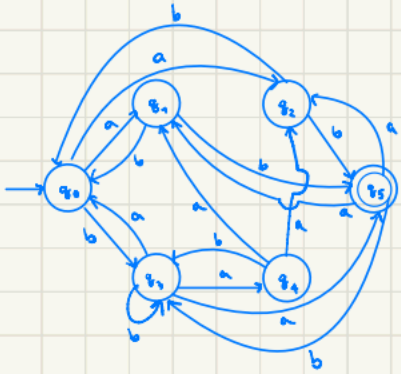
Step ทำ NFA-r → NFA

① ให้มองว่าได้ $r(\ )$ มองตัวเอง

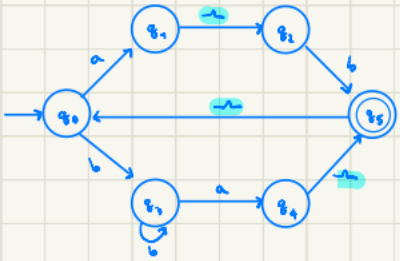
② เอา ตัวตอน จาก $r(\ )$ ไปใส่ δ

③ δ เอาไปใช้ต่อได้

NFA-r → NFA จะได้แผนภาพ



แบบฝึกหัด NFA-ε



1.1) จงหา $\varepsilon(\{q_0, q_1, q_4\})$

$\varepsilon(\{q_0, q_1, q_4\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_5\}$ #

1.2) จงทดสอบว่า $x = abbba \in L$?

$\delta^*(q_0, abbba)$

$$\rightarrow \varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, abbb)} \delta(p, a)\right) = \varepsilon(\delta(q_3, a)) = \varepsilon(\{q_4\}) = \{q_4, q_5, q_0\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, abb)} \delta(p, b)\right) = \varepsilon(\delta(q_3, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, ab)} \delta(p, b)\right) = \varepsilon(\delta(q_5, b) \cup \delta(q_0, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, a)} \delta(p, b)\right) = \varepsilon(\delta(q_1, b) \cup \delta(q_2, b)) = \varepsilon(\{q_5\}) = \{q_5, q_0\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q_0, \varepsilon)} \delta(p, a)\right) = \varepsilon(\delta(q_0, a)) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1, q_2\}$$

$$\downarrow$$

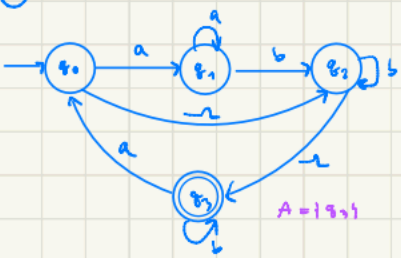
$$\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$$

$\delta^*(q_0, abbba) = \{q_4, q_5, q_0\} \cap \{q_5\}$

$= \{q_5\} \neq \emptyset$

$\therefore$ $x = abbba \in L$ จริง #

② NFA-ε → NFA



$M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$A_1 = \{q_0, q_3\}$

δ_1 แสดงในแผนภาพ

หาค่า A_1

$(\{q_0\}) = \{q_0, q_2, q_3\}$

$\{q_0, q_2, q_3\} \cap A = \{q_3\} \neq \phi$

$\therefore A \cap \{q_0\} = \{q_0, q_3\}$

• หา δ_1

q_0

$\delta_1(q_0, a) = \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_2, q_3\}$

$= \varepsilon(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \delta(q_3, a)) = \varepsilon(\{q_1, q_0\}) = \underline{\{q_2, q_0, q_2, q_3\}}$

$\delta_1(q_0, b) = \varepsilon(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) \cup \delta(q_3, b)) = \varepsilon(\{q_2, q_3\}) = \underline{\{q_2, q_3\}}$

q_1

$\delta_1(q_1, a) = (\{q_3\}) = \{q_3\}$

$= \varepsilon(\delta(q_1, a)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3\}}$

$\delta_1(q_1, b) = \varepsilon(\delta(q_1, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_2, q_3\}}$

q_2

$\delta_1(q_2, a) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_3\}$

$= \varepsilon(\delta(q_2, a) \cup \delta(q_3, a)) = \varepsilon(\{q_0\}) = \underline{\{q_0, q_2, q_3\}}$

$\delta_1(q_2, b) = \varepsilon(\delta(q_2, b) \cup \delta(q_3, b)) = \varepsilon(\{q_2, q_3\}) = \underline{\{q_2, q_3\}}$

q_3

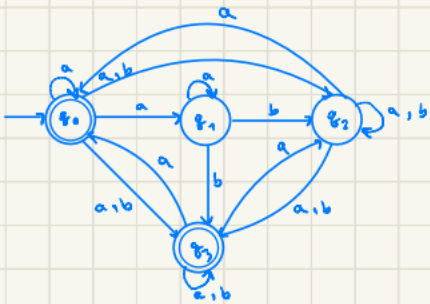
$\delta_1(q_3, a) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

$= \varepsilon(\delta(q_3, a)) = \varepsilon(\{q_0\}) = \underline{\{q_0, q_2, q_3\}}$

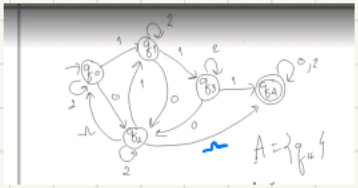
$\delta_1(q_3, b) = \varepsilon(\delta(q_3, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3\}}$

สรุปทั้งเส้น NFA-ε → NFA จะได้แผนภาพ

สถานะ	$\delta_1(q_i, a)$	$\delta_1(q_i, b)$
q_0	$\{q_1, q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\{q_0, q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$



โจทย์หน้อง



จงตรวจสอบ $x = 11202 \in L$?

$\delta^*(q_0, 11202)$

$$\rightarrow \varepsilon\begin{pmatrix}\cup\,\delta(p,2) \\ p \in \delta^*(q_0, 1120)\end{pmatrix} = \varepsilon(\delta(q_2,2) \cup \delta(q_0,2) \cup \delta(q_4,2)) = \varepsilon(\{q_2, q_0, q_4\})$$
$$= \{q_2, q_0, q_4\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\cup\,\delta(p,0) \\ p \in \delta^*(q_0, 112)\end{pmatrix} = \varepsilon(\delta(q_4,0) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\cup\,\delta(p,2) \\ p \in \delta^*(q_0, 11)\end{pmatrix} = \varepsilon(\delta(q_3,2) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\} \checkmark$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\cup\,\delta(p,1) \\ p \in \delta^*(q_0, 1)\end{pmatrix} = \varepsilon(\delta(q_1,1)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\} \checkmark$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\cup\,\delta(p,1) \\ p \in \delta^*(q_0, \varepsilon)\end{pmatrix} = \varepsilon(\delta(q_0,1)) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1\} \checkmark$$

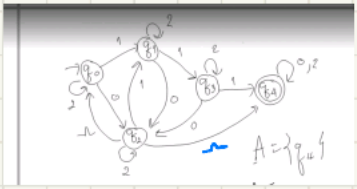
$$\downarrow$$

$$\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$$

$$\delta^*(q_0, 11202) = \{q_2, q_0, q_4\} \cap \{q_4\}$$
$$= \{q_4\} \neq \emptyset$$

$\therefore\ x = 11202 \in L$ จริง #

NFA-ε → NFA



$M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$A_1 = \{q_4\}$

δ_1 แสดงด้วยตาราง #

• หา δ_1

✓ q_0

$\delta(q_0, 0) = \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$

$= \varepsilon(\delta(q_0, 0)) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

$\delta(q_0, 1) = \varepsilon(\delta(q_0, 1)) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1\}$

$\delta(q_0, 2) = \varepsilon(\delta(q_0, 2)) = \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0\}$

✓ q_1

$\delta(q_1, 0) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1\}$

$= \varepsilon(\delta(q_1, 0) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

$\delta(q_1, 1) = \varepsilon(\delta(q_1, 1) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

$\delta(q_1, 2) = \varepsilon(\delta(q_1, 2) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1\}$

✓ q_2

$\delta(q_2, 0) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

$= \varepsilon(\delta(q_2, 0) \cup \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_4, 0) = \varepsilon(\{q_2, q_4\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

$\delta(q_2, 1) = \varepsilon(\delta(q_2, 1) \cup \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_4, 1) = \varepsilon(\{q_1\}) = \underline{\{q_1\}}$

$\delta(q_2, 2) = \varepsilon(\delta(q_2, 2) \cup \delta(q_0, 2) \cup \delta(q_4, 2) = \varepsilon(\{q_2, q_0, q_4\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

✓ q_3

$\delta(q_3, 0) = \varepsilon(q_3) = \{q_3\}$

$= \varepsilon(\delta(q_3, 0) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_0, q_4\}$

$\delta(q_3, 1) = \varepsilon(\delta(q_3, 1) = \varepsilon(\{q_4\}) = \{q_4\}$

$\delta(q_3, 2) = \varepsilon(\delta(q_3, 2) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3\}$

✓ q_4

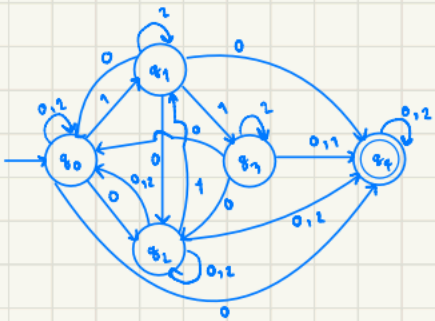
$\delta(q_4, 0) = \varepsilon(q_4) = \{q_4\}$

$\varepsilon(\delta(q_4, 0) = \varepsilon(\{q_4\}) = \{q_4\}$

$\delta(q_4, 1) = \varepsilon(\delta(q_4, 1) = \varepsilon(\{\}) = \{\}$

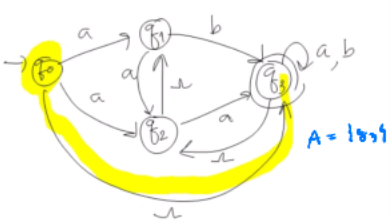
$\delta(q_4, 2) = \varepsilon(\delta(q_4, 2) = \varepsilon(\{q_4\}) = \{q_4\}$

NFA-ε → NFA จะได้แผนภาพ



การแปลง NFA-ε ให้ไปเป็น NFA

$\Sigma = \{a, b\}$



$M_1 = (Q, \Sigma, q_0, A_1, \delta_1)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$A_1 = \{q_3\}$

δ_1 แสดงในภาพ

#

Step หา A_1

1) หา $\varepsilon(\{q_0\})$

2) เอาคำตอบที่ได้ไป $\cap A$

3) if $(\varepsilon(\{q_0\}) \cap A \neq \emptyset)$? $A \cup \{q_0\}$: A

• หา δ_1

✓ q_0

$\delta_1(q_0, a) = \varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_3, q_2, q_1\}$

$= \varepsilon(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_3, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \delta(q_1, a)) = \varepsilon(\{q_1, q_2, q_3\}) = \underline{\{q_1, q_2, q_3\}}$

$\delta_1(q_0, b) = \varepsilon(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_3, b) \cup \delta(q_2, b) \cup \delta(q_1, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3, q_2, q_1\}}$

✓ q_1

$\delta_1(q_1, a) = \varepsilon(\{q_1\}) = \{q_1\}$

$= \varepsilon(\delta(q_1, a)) = \varepsilon(\{q_2\}) = \underline{\{q_2, q_1\}}$

$\delta_1(q_1, b) = \varepsilon(\delta(q_1, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3, q_2, q_1\}}$

✓ q_2

$\delta_1(q_2, a) = \varepsilon(\{q_2\}) = \{q_2, q_1\}$

$= \varepsilon(\delta(q_2, a) \cup \delta(q_1, a)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3, q_2, q_1\}}$

$\delta_1(q_2, b) = \varepsilon(\delta(q_2, b) \cup \delta(q_1, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3, q_2, q_1\}}$

✓ q_3

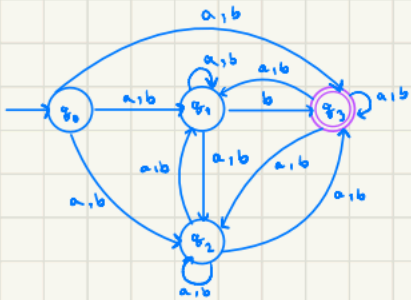
$\delta_1(q_3, a) = \varepsilon(\{q_3\}) = \{q_3, q_2, q_1\}$

$= \varepsilon(\delta(q_3, a) \cup \delta(q_2, a) \cup \delta(q_1, a)) = \varepsilon(\{q_3, q_2\}) \{q_3, q_2, q_1\}$

$\delta_1(q_3, b) = \varepsilon(\delta(q_3, b) \cup \delta(q_2, b) \cup \delta(q_1, b)) = \varepsilon(\{q_3\}) = \underline{\{q_3, q_2, q_1\}}$

สรุปทั้งเส้น NFA-ε → NFA จะได้แผนภาพ

สถานะ	$\delta_1(q_i, a)$	$\delta_1(q_i, b)$
q_0	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3, q_2, q_1\}$
q_1	$\{q_2, q_1\}$	$\{q_3, q_2, q_1\}$
q_2	$\{q_3, q_2, q_1\}$	$\{q_3, q_2, q_1\}$
q_3	$\{q_3, q_2, q_1\}$	$\{q_3, q_2, q_1\}$



4.3 การตีความผ่าน — TG / GTG

TG

TG $G = (Q, \Sigma, S, A, \delta)$ โดยที่

Q = เซตจำกัดของสถานะ

Σ = เซตจำกัดของชุดตัวอักษร

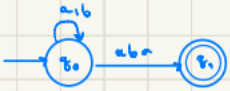
S = เซตจำกัดของสถานะเริ่มต้น

A = เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด

$\delta : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

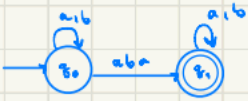
Ex 1 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aba\}$

จงหา TG ที่นิยาม ภาษา L นี้



Ex 2 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี aba เป็นส่วนประกอบ$\}$

จงหา TG ที่นิยาม ภาษา L นี้



GTG

GTG $G = (Q, \Sigma, S, A, \delta)$

โดยที่

Q = เซตจำกัดของสถานะ

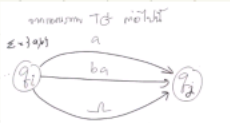
Σ = เซตจำกัดของชุดตัวอักษร

S = เซตจำกัดของสถานะเริ่มต้น

A = เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด

$\delta : Q \times RE \to 2^Q$

Ex 1 จากแผนภาพ TG ต่อไปนี้



ถ้าจะเปลี่ยนเป็น GTG จะได้เป็น

$q_i \xrightarrow{(ab+ba+\Lambda)} q_j$

เอา RE มาเขียนได้เลย

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aba\}$

Ex 2 สร้าง GTG ได้ $\to (p_0) \xrightarrow{(a+b)^* aba} (p_1)$

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ มี aba เป็นส่วนประกอบ$\}$

สร้าง GTG $\to (p_0) \xrightarrow{(a+b)^* aba (a+b)^*} (p_1)$

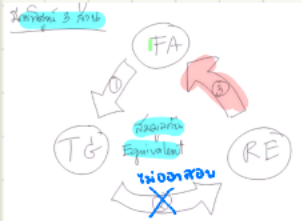
ปัญหาการยอมรับ ที่ถูกนิยาม ที่ถูกนิยามด้วย — RE

- FA (DFA, NFA, NFA-Λ)
- TG (TG, GTG)

จะมีการพิสูจน์ความสมมูลกันของ ผลนิยาม ทั้ง 3 กลุ่ม ด้วย ระบบอัตโนมัติ

4.4 ทฤษฎีบทของกลีน

ที่ทำงานร่วมกัน 3 ส่วน



เปลี่ยนนิยามจะมีการแสดงการทำงาน δ ของตัวแบบ DFA, NFA, NFA-Λ กับ TG ดังนี้

$\delta_{DFA} : Q \times \Sigma \to Q$

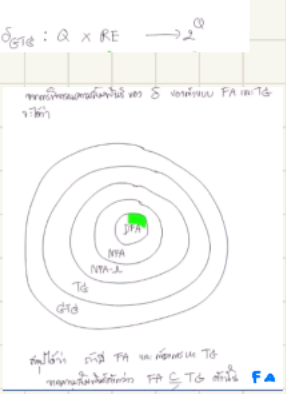
$\delta_{NFA} : Q \times \Sigma \to 2^Q$

$\delta_{NFA\text{-}\Lambda} : Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \to 2^Q$

$\delta_{TG} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

$\delta_{GTG} : Q \times RE \to 2^Q$

ขอบเขตนิยามด้านล่างของ δ ของตัวแบบ FA และ TG จะได้ว่า



สรุปได้ว่า ถ้ามี FA จะ ต้องสร้าง TG

ขอบเขตนิยามที่ต่างกัน FA $\subseteq$ TG ดังนั้น FA ทำได้

จะเป็น TG ด้วย #

ในการพิสูจน์ข้อที่ 3 เราจะพิสูจน์ว่า ถ้า นิพจน์ภาษาปกติ สร้าง นิพจน์ปกติได้ ก็จะทำให้ สามารถหา FA มาเขียนได้เช่นเดียวกัน ซึ่งเนื่องจาก พิสูจน์ ก็จะแสดงให้เห็นถึงการแปลงจาก RE → FA

โดยจะแปลงจาก RE ไปเป็น NFA-λ

(ex) เช่น

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aba\}$

นิพจน์ปกติของ L คือ $(a+b)^*aba$

จะสร้างออกแบบ

$(a+b)^*aba \longrightarrow$ NFA-λ ได้อย่างไร

RE → NFA-λ

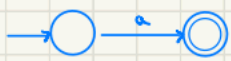
① RE = $\emptyset$ จะมี NFA-λ ที่สอดคล้องคือ

(สถานะเริ่มต้น)

② RE = λ จะมี NFA-λ ที่สอดคล้องคือ

(สถานะสิ้นสุด)

③ RE = a ใดๆ ใน Σ NFA-λ ที่สอดคล้องคือ



และถ้า RE = $(a+b)^*aba$ จะมี NFA-λ ที่สอดคล้องคือ อะไร

⇒ จะดำเนินการสร้างโดยใช้ NFA-λ ย่อยที่สอดคล้องกับ RE ย่อย และความสัมพันธ์ได้ NFA-λ ที่สอดคล้องกับ RE ที่ต้องการตามการนิยามของภาษานั้นๆ

โดยการรวมกันของ NFA-λ จะมีการดำเนินการได้ใน 3 แบบ ดังนี้

1. concat ⇒ การต่อกัน
2. Union ⇒ การ +
3. * ⇒ การทำซ้ำ

ซึ่งจะสอดคล้องกับการสร้างนิยาม RE นั่นเอง

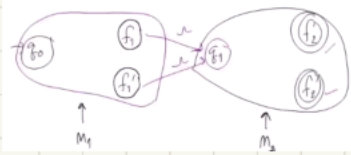
1 ทำ concat

① นิยาม λ-ทรานซิชัน จากสถานะสิ้นสุดของทุกสถานะ ใน M_1 ไปยังสถานะเริ่มต้นของ M_2

② ปรับสถานะสิ้นสุดของ M_1 เป็นสถานะปกติ

③ ปรับสถานะเริ่มต้นของ M_2 ให้เป็นสถานะปกติ เช่นเดียวกัน

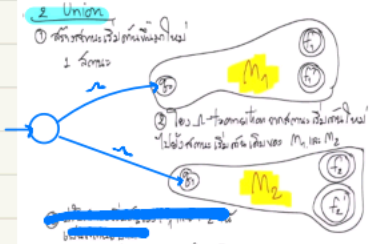
M_1 concat M_2 $\neq$ M_2 concat M_1



2 Union

① สร้างสถานะเริ่มต้นตัวใหม่ 1 สถานะ

② โดย λ-ทรานซิชันจากสถานะเริ่มต้นใหม่ ไปยังสถานะเริ่มต้นของ M_1 และ M_2



[redacted]

3 การทำซ้ำ $(*)$ $(M_1)^*$

① สร้างสถานะเริ่มต้นและสถานะสิ้นสุดใหม่ที่เป็นสถานะเดียวกันขึ้นมา 1 สถานะ

② โดย λ-ทรานซิชันจากสถานะเริ่มต้นใหม่ ไปยังสถานะเริ่มต้นของ M_1 แต่ปรับสถานะเริ่มต้นเดิมของ M_1 ให้เป็นสถานะปกติ

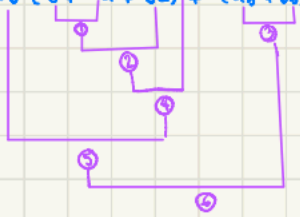
③ โดย λ-ทรานซิชันจากสถานะสิ้นสุดของ M_1 ทุกสถานะไปยังสถานะสิ้นสุดใหม่ และปรับสถานะสิ้นสุดเดิมของ M_1 ให้เป็นสถานะปกติ

Ex 1 หา RE ที่สร้างจาก $\Sigma = \{a, b\}$ ที่นิยาม ภาษา FA

เลือกใช้ NFA-ε

ที่นิยาม ภาษาเดียวกัน

$RE = ab(b + aa + ba)^* + (ab + bb)$ → NFA-ε



Step RE → NFA-ε

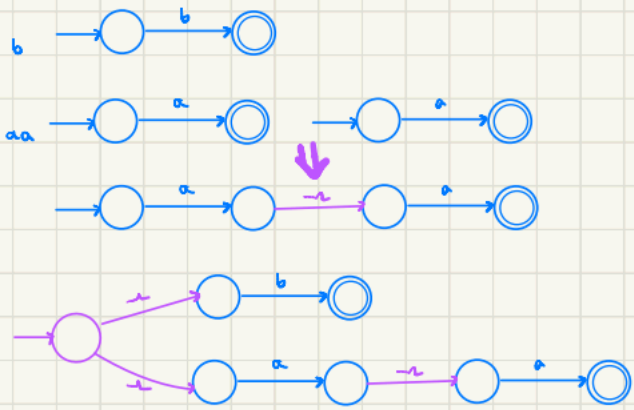
① ดูลำดับ op ว่าอะไรทำก่อน

1) ( )
2) *
3) concat
4) ∪ (+)

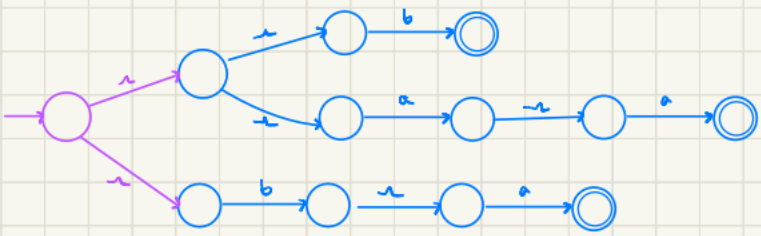
} ถ้าเท่ากัน ทำ ซ้าย → ขวา

② ทำ ① เสร็จ จะรู้ว่า กลุ่มรวม คู่ไหนก่อน

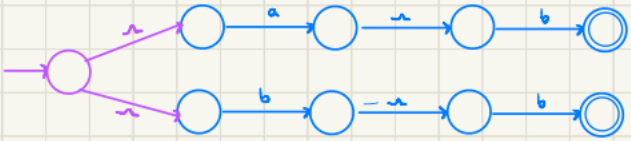
① b + aa



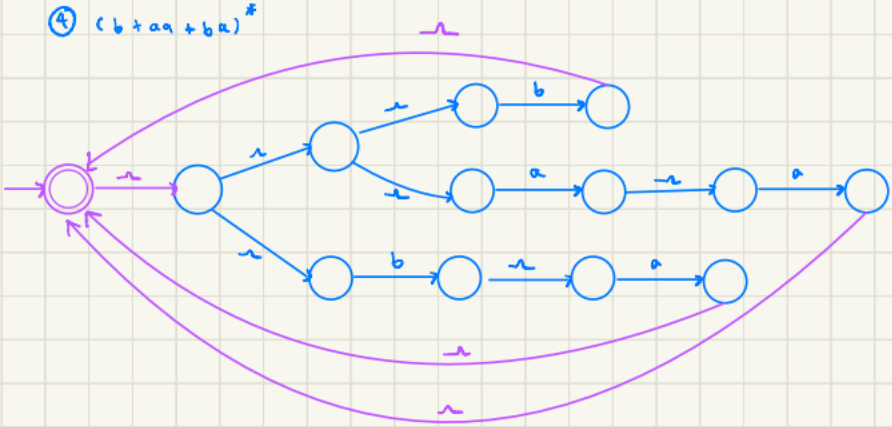
② b + aa + ba



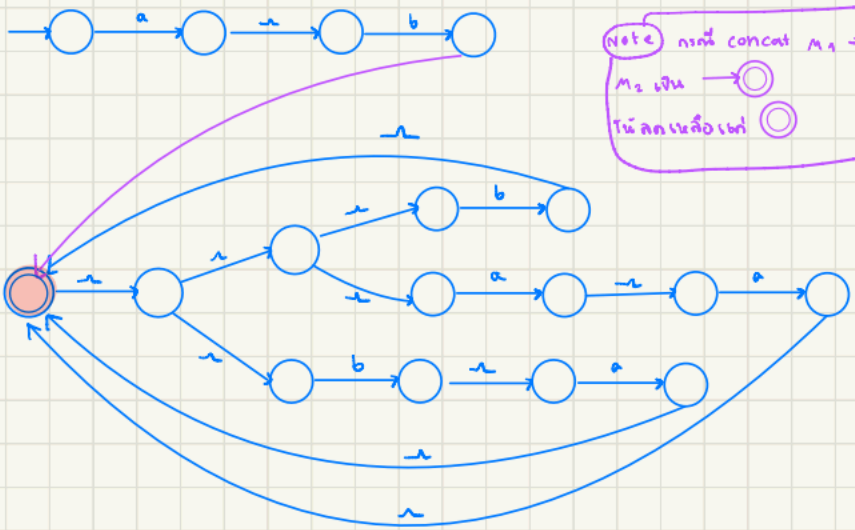
③ $ab + bb$



④ $(b + aa + ba)^*$



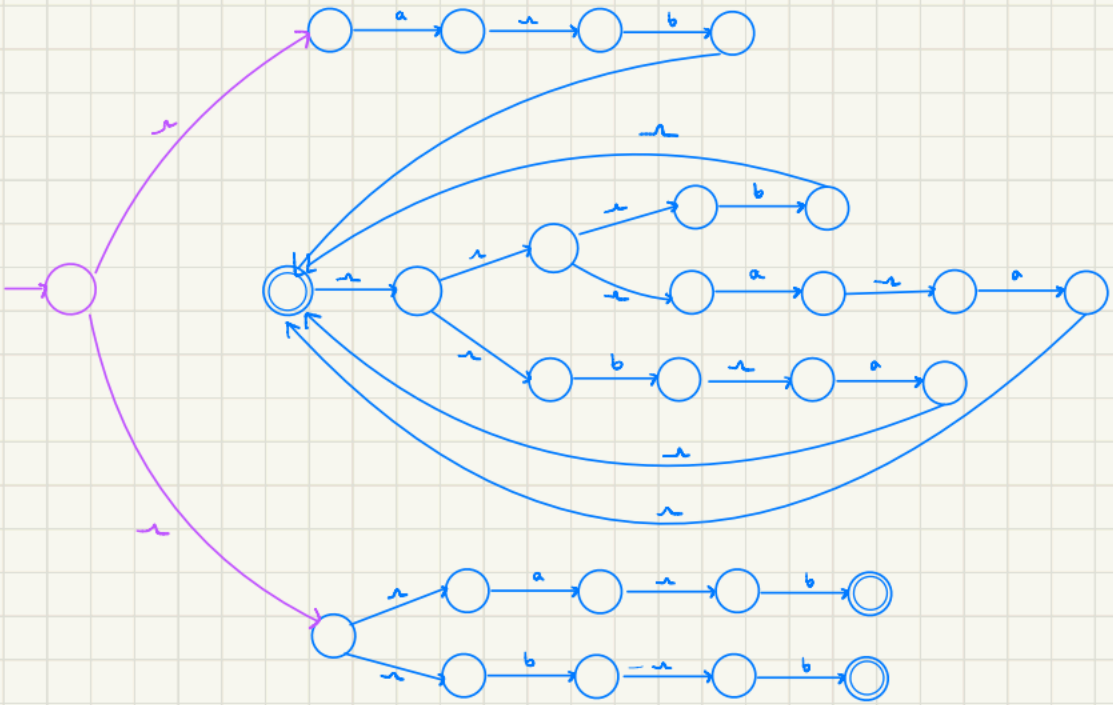
⑤ $ab(b + aa + ba)^*$



Note กรณี concat $M_1 \to M_2$ แล้ว
M_2 เป็น ⟶ ◎
ให้ลดเหลือเพียง ◎

⑥ $= ab(b + \overset{⑤}{aa + ba})^{*} \overset{+}{+} (\overset{②}{ab + bb})$

∴ NFA − ε จะได้ดังภาพ #

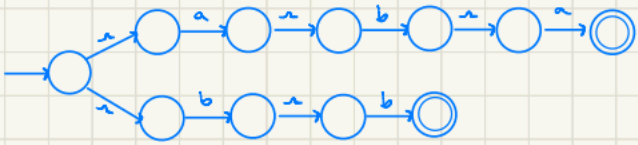


ex 2 หา RE ที่สร้างจาก Σ = {a,b} ที่นิยาม FA ที่นิยามภาษาเดียวกัน

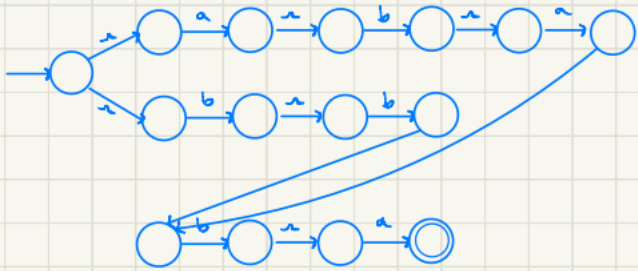
$PE = ((aba + bb)ba + bab)^{*} bb + (aa + ba)^{*}$

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

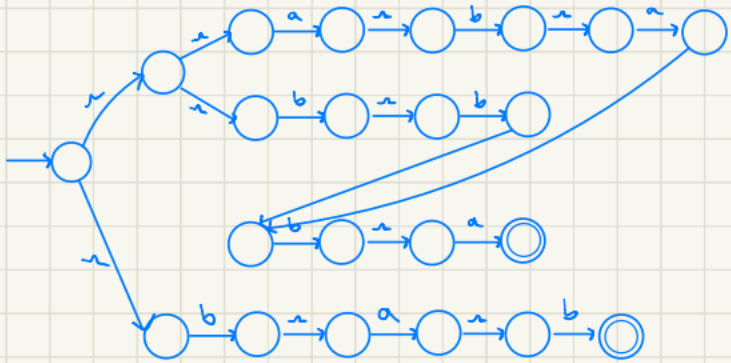
① (aba + bb)



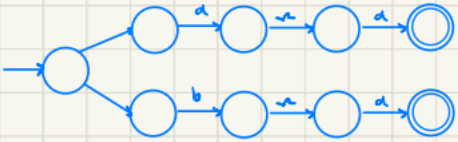
② (aba + bb) ba



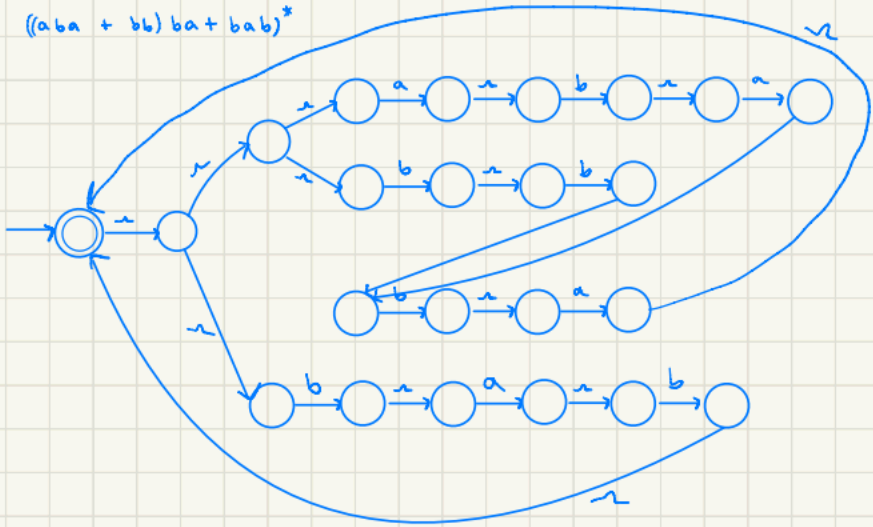
③ ((aba + bb) ba + bab)



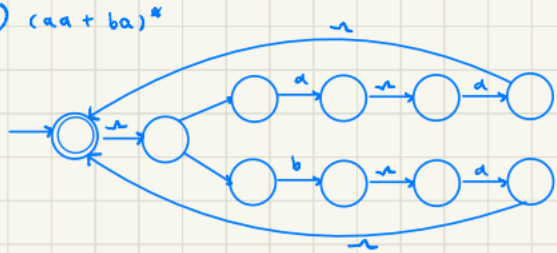
④ $(aa + ba)$



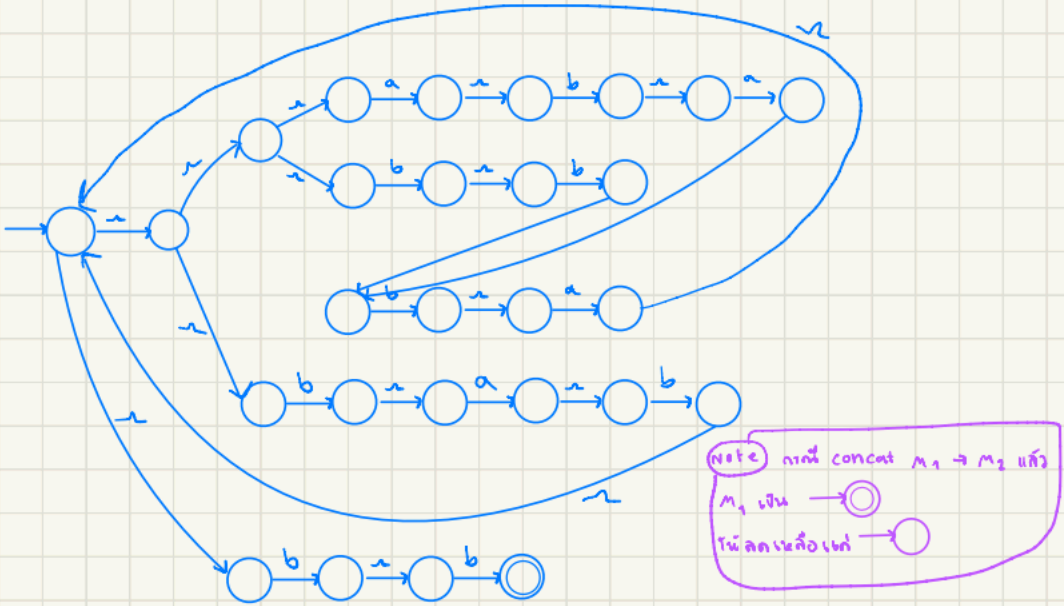
⑤ $((aba + bb)ba + bab)^*$



⑥ $(aa + ba)^*$

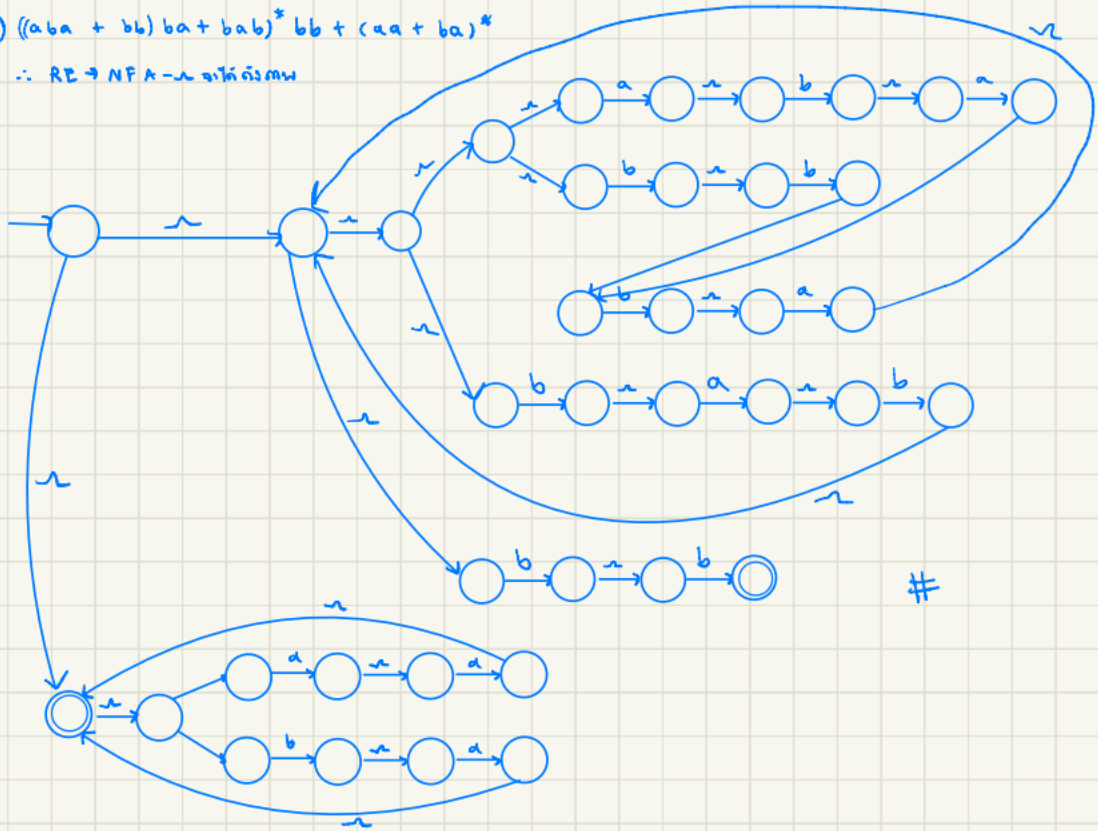


⑦ $((aba + bb)ba + bab)^* bb$



⑧ $((aba + bb)ba + bab)^* bb + (aa + ba)^*$

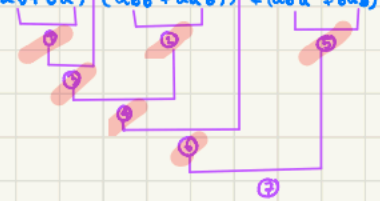
∴ RE → NFA-ε สร้างได้ดังภาพ



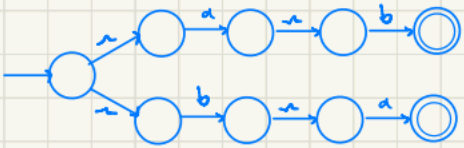
#

โจทย์ ให้น้อง

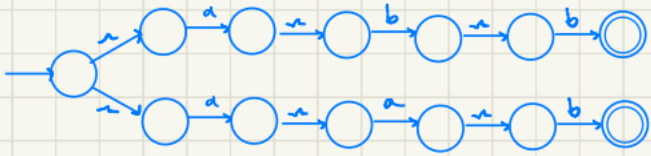
① $((ab+ba)^*(abb+aab))^* + (aba+bab)$



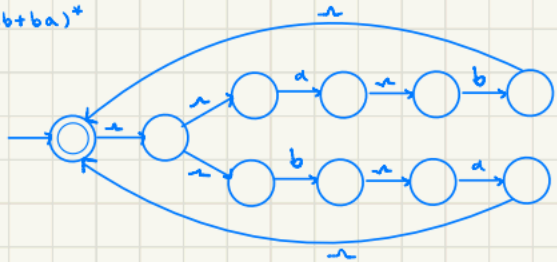
① ab+ba



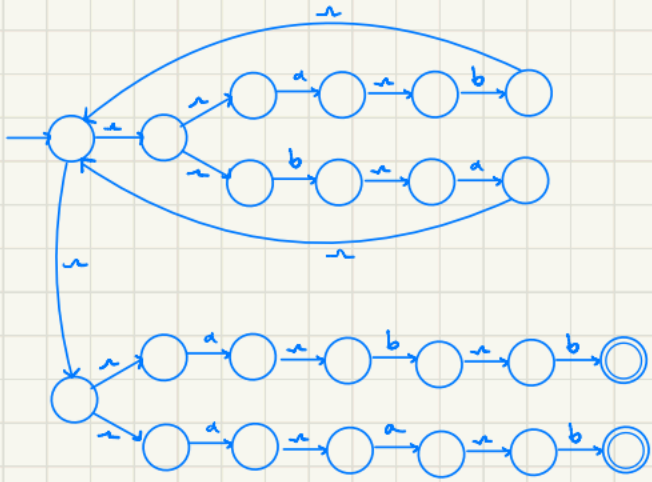
② (abb+aab)



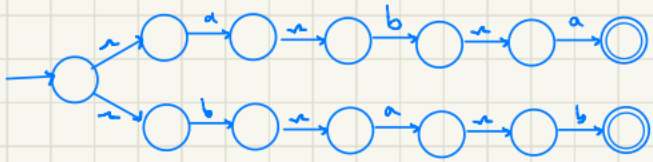
③ $(ab+ba)^*$



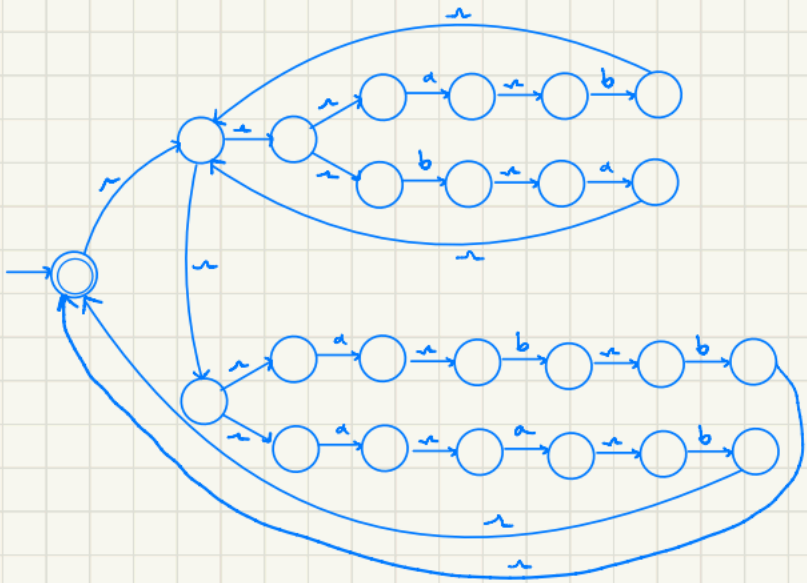
④ $((ab+ba)^*(abb+aab))$



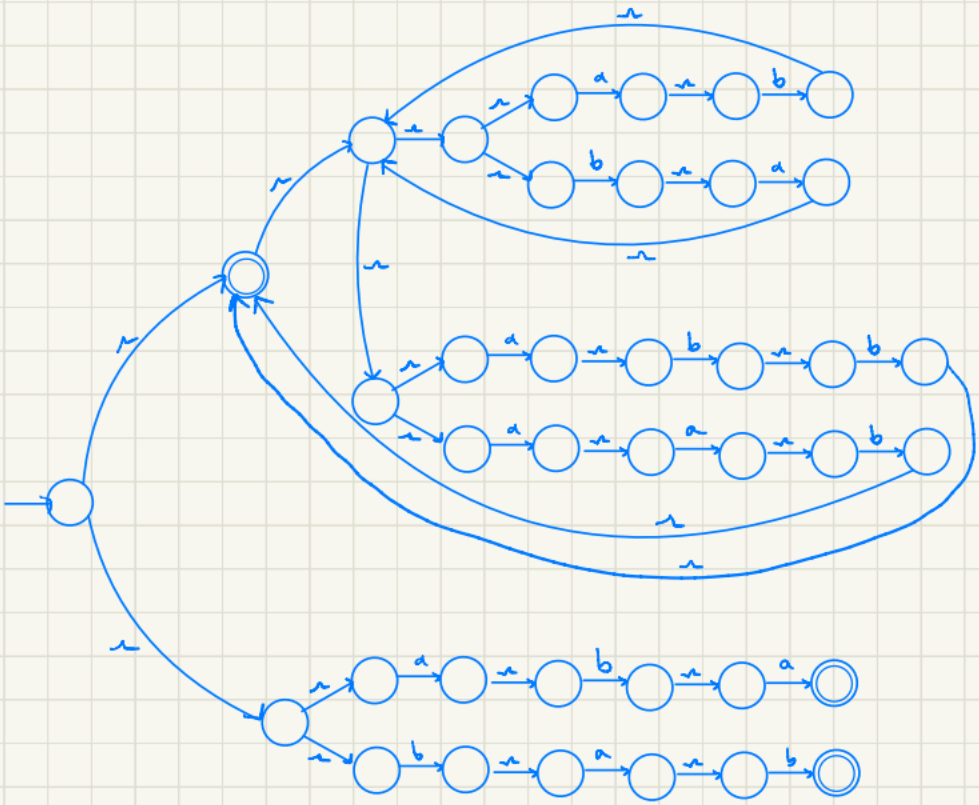
⑤ $(aba+bab)$



⑥ $((ab+ba)^*(abb+aab))^*$

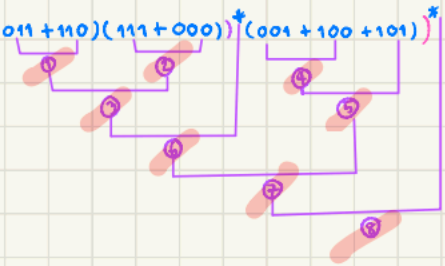


⑦ $((ab+ba)^*(abb+aab))^* + (aba+bab)$

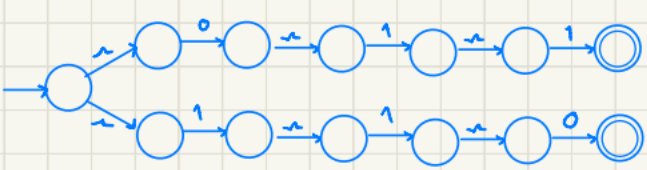


---

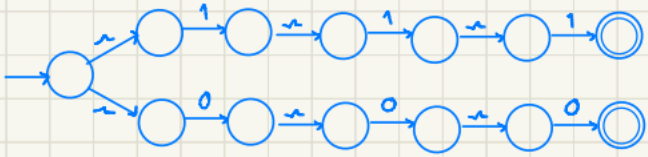
② $(((011+110)(111+000))^*(001+100+101))^*$



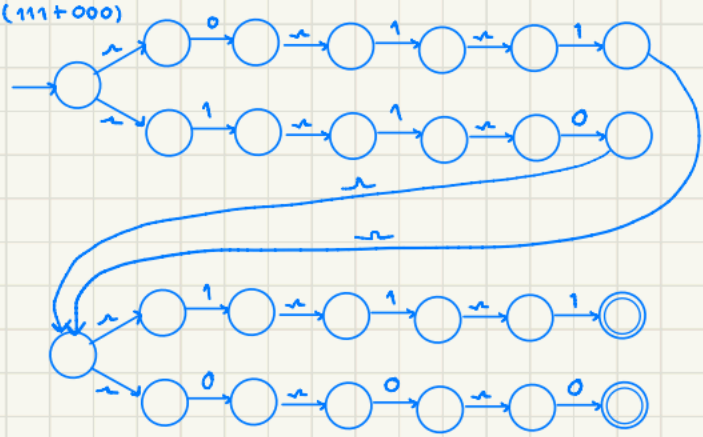
✓① $(011+110)$



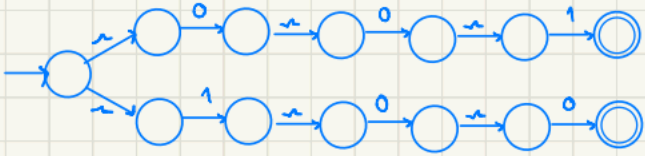
② (111 + 000)



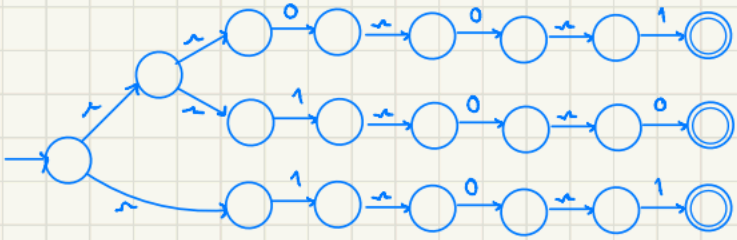
③ (011 + 110)(111 + 000)



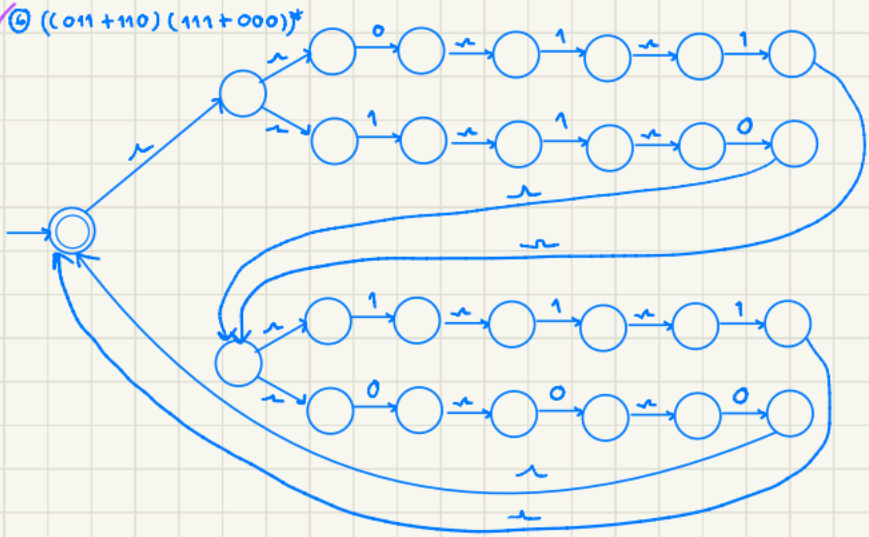
④ (001 + 100)



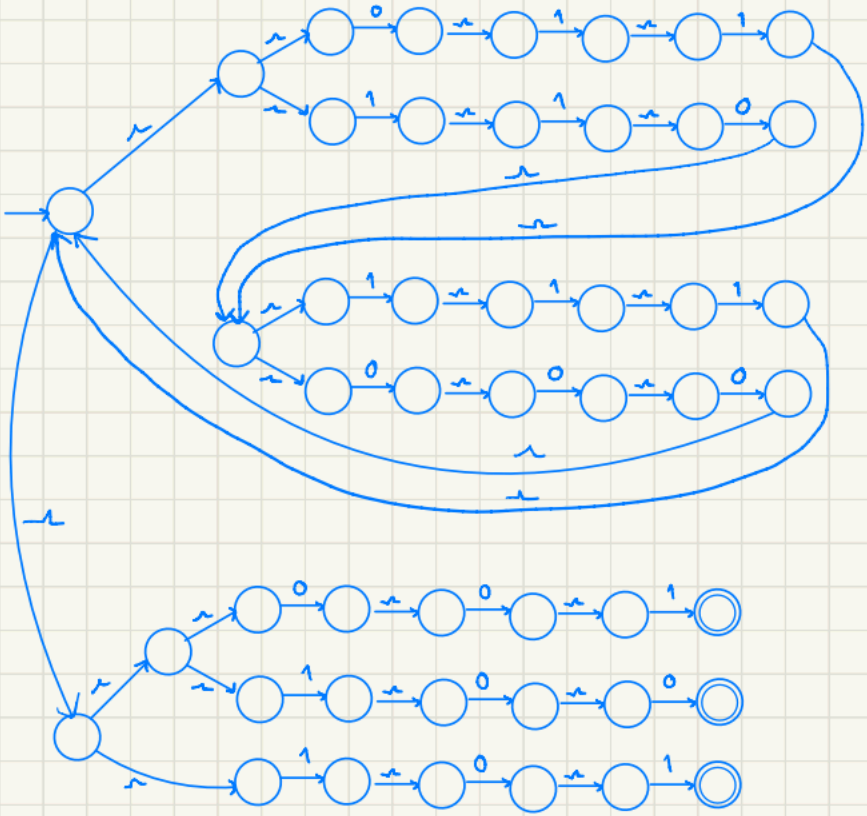
⑤ (001 + 100 + 101)



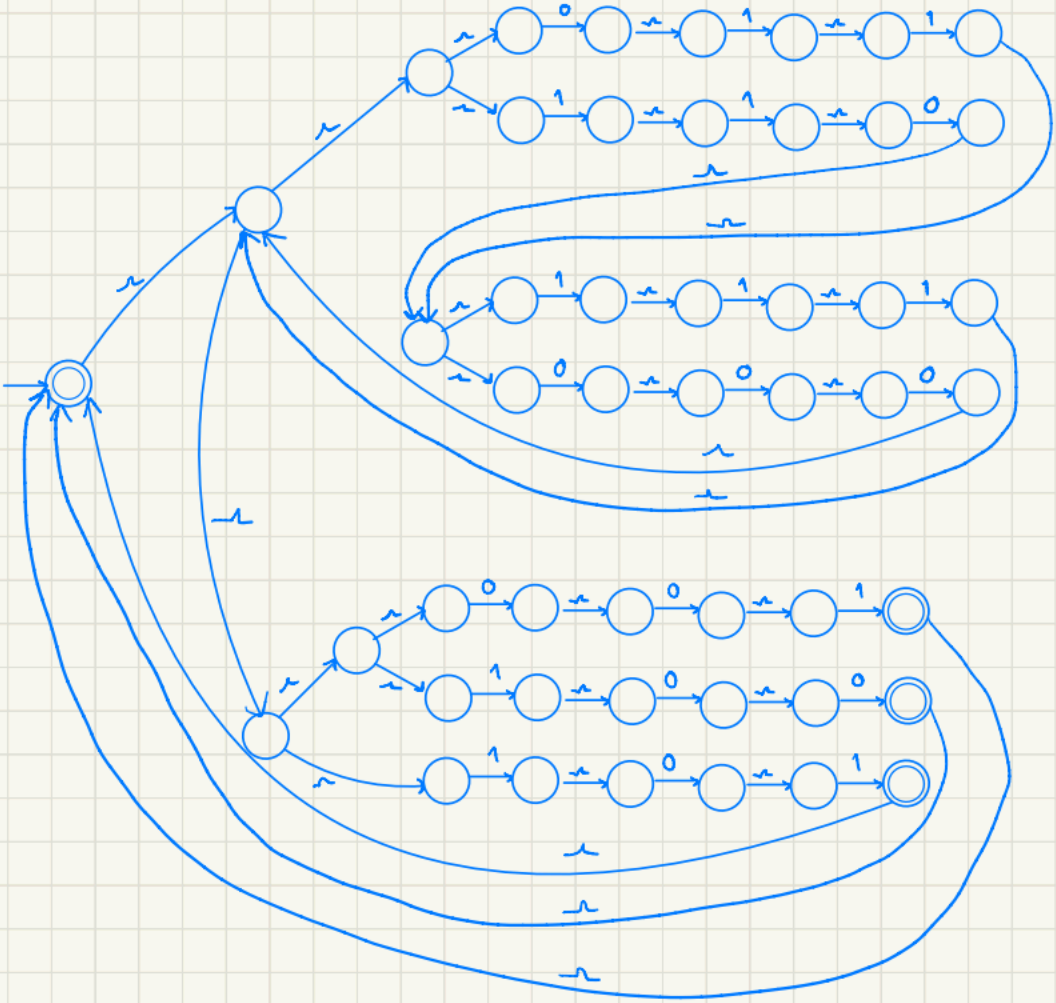
⑥ $((011+110)(111+000))^*$



⑦ $((011+110)(111+000))^*(001+100+101)$

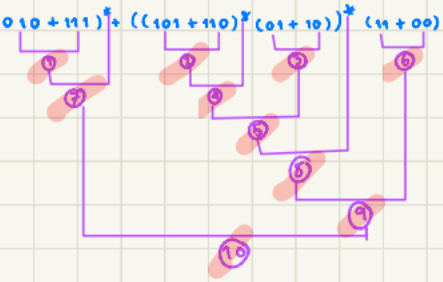


✓ ⑧ $(((011+110)(111+000)^*(001+100+101))^+$

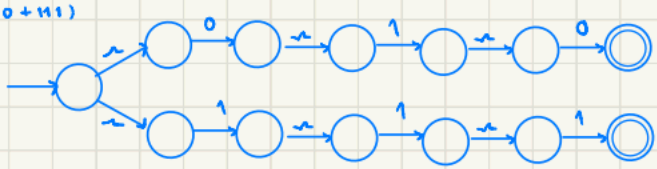


วงแปลง RE เป็น NFA-ε

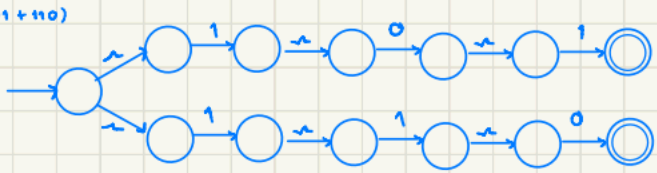
$(010+111)^* + ((101+110)^*(01+10))^*(11+00)$



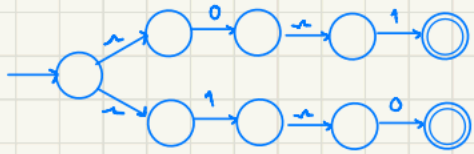
① $(010+111)$



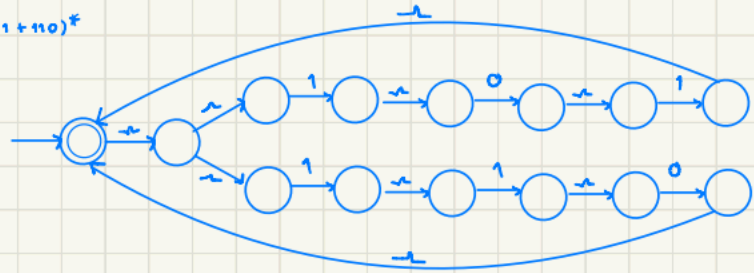
② $(101+110)$



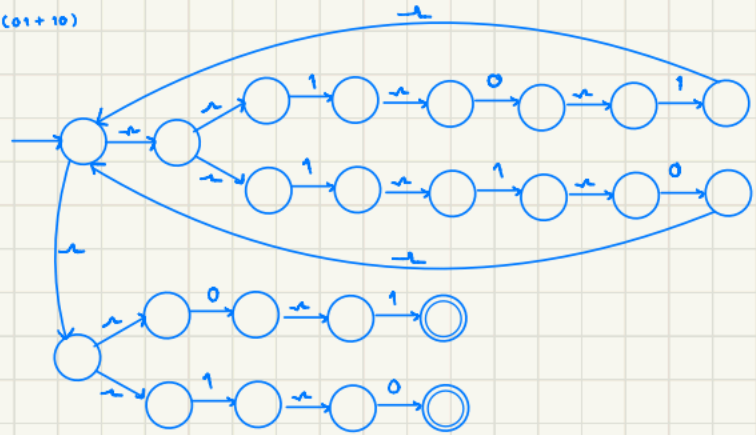
③ $(01+10)$



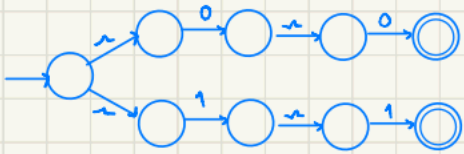
④ $(101+110)^*$



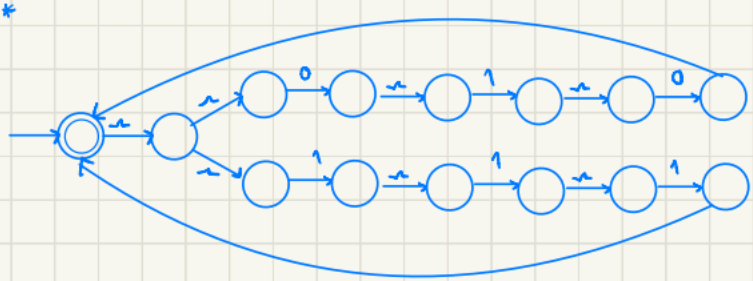
⑤ $(101+110)^*(01+10)$



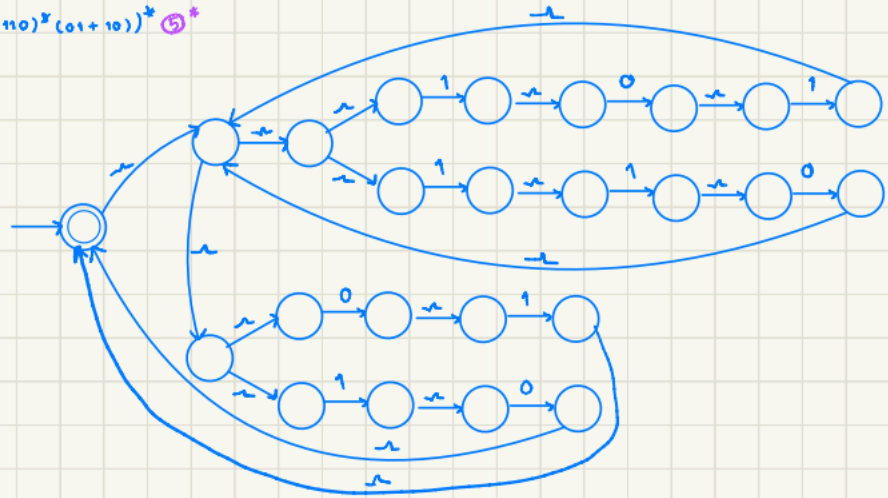
⑥ $(11+00)$



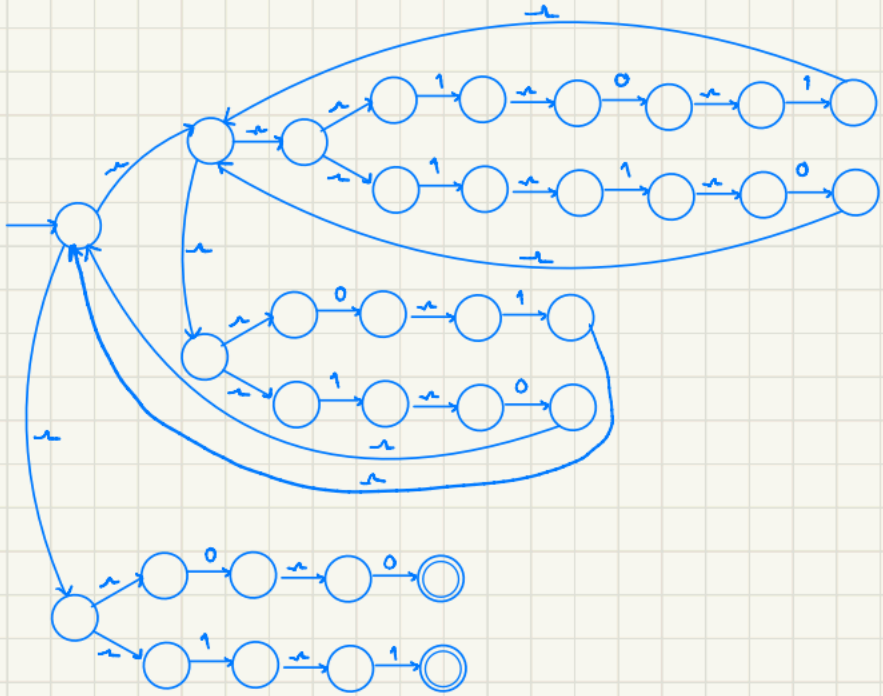
⑦ $(010+111)^*$



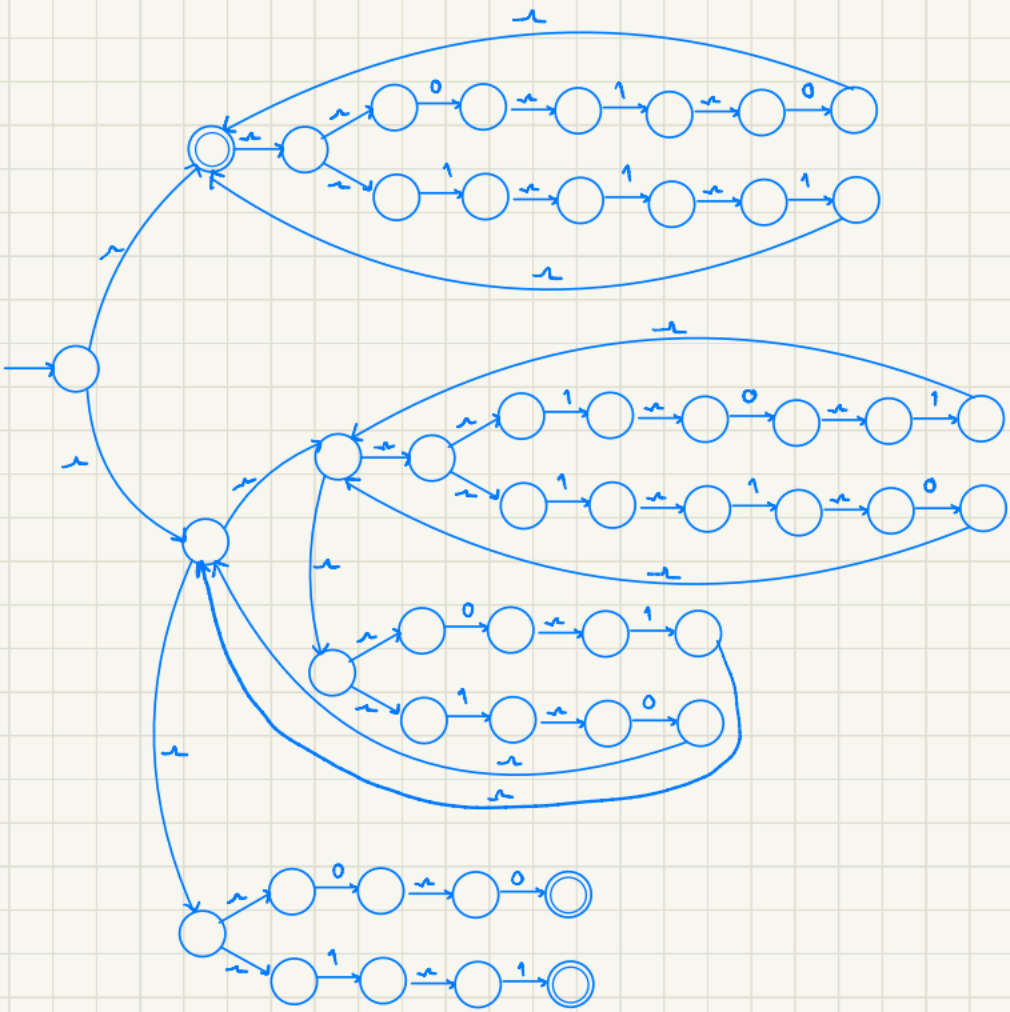
⑧ $((101+110)^*(01+10))^*$ ⑤*



9 $((101+110)^*(01+10))^*(11+00)$ 5 concat 6

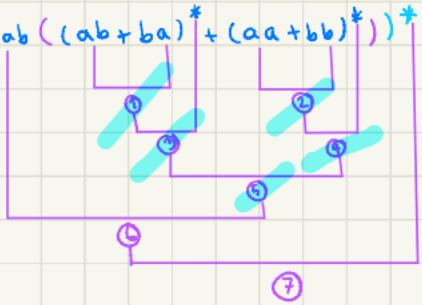


(10) $(010+111)^* + ((101+11)^*(01+10))^*(11+00)$ (2) + (3)

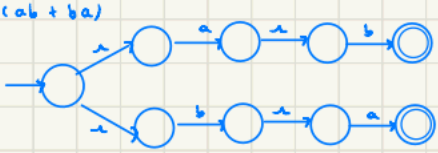


1. จาก นิพจน์ปกติที่สร้างจาก {a,b}* ต่อไปนี้ จงแปลงไปเป็น NFA-λ ที่นิยามภาษาเดียวกัน

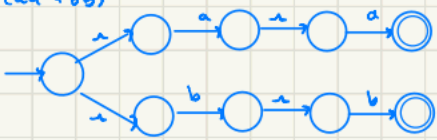
$$RE = (aab((ab+ba)^* + (aa+bb)^*))^*$$



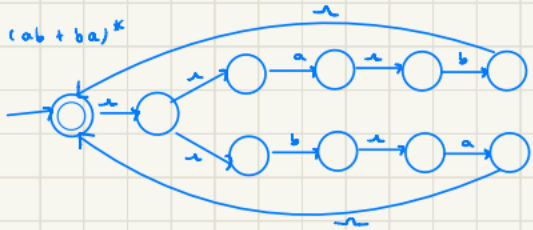
1. (ab + ba)



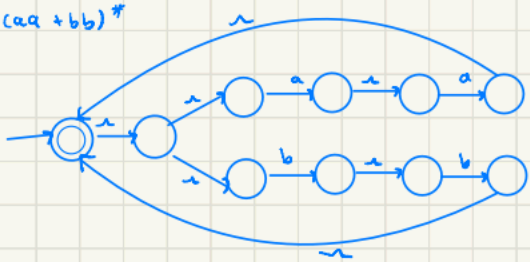
2. (aa + bb)



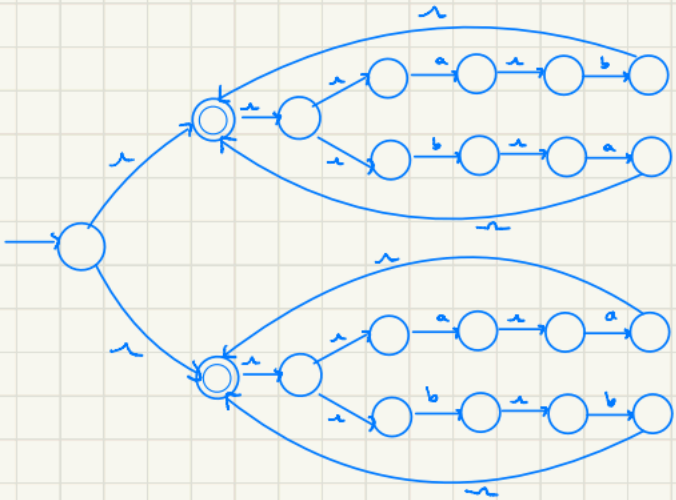
3. $(ab + ba)^*$



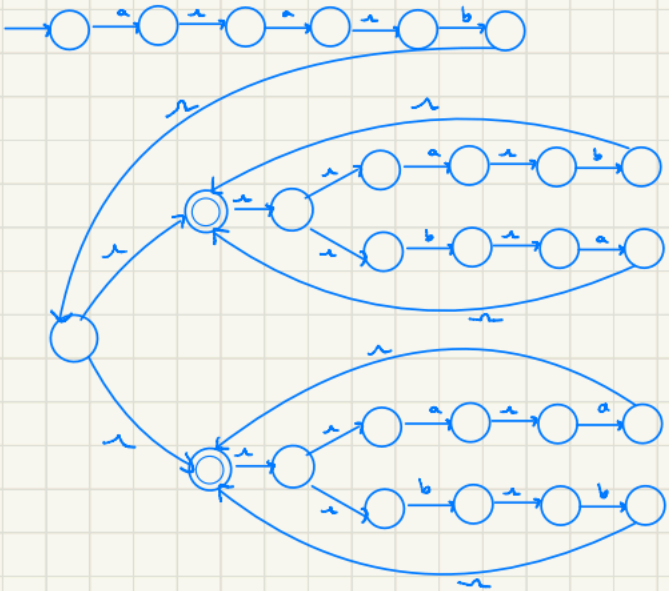
4. $(aa + bb)^*$



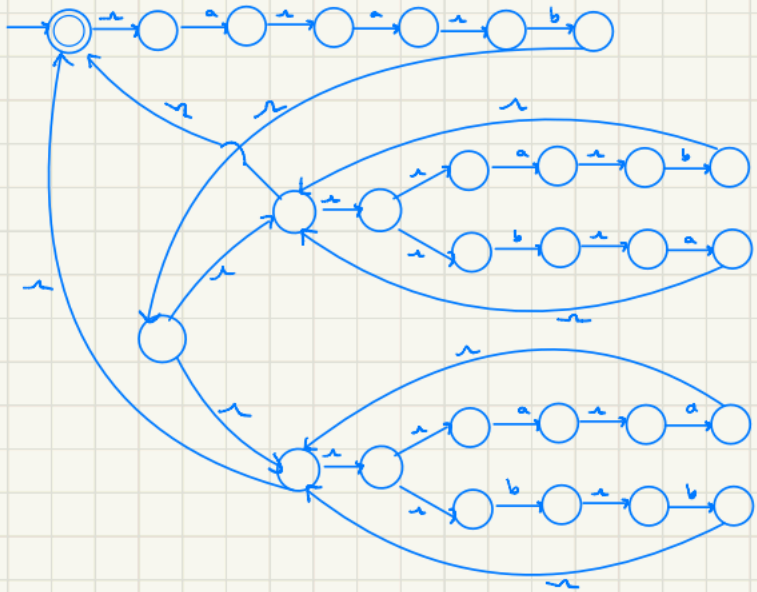
⑤ $((ab + ba)^* + (aa + bb)^*)$



⑥ $(aab((ab + ba)^* + (aa + bb)^*))$

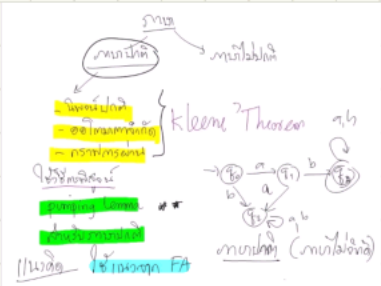


⑦ $(aab((ab+ba)^* + (aa+bb)^*))^*$



บท 5 ภาษาไม่ปกติ

5.1 pumping lemma



Ex ภาษาที่ไม่สามารถกำจัดสถานะได้

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x)\}$

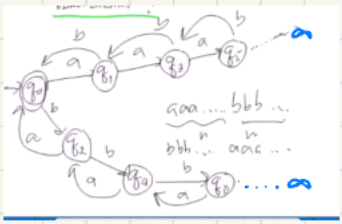
$L = \{\Lambda, ab, ba, abab, aabb, bbaa, baba \ldots\}$

เป็นภาษาไม่จำกัด

เป็นภาษาปกติ ?

aaabbb ✓

bbbaaa

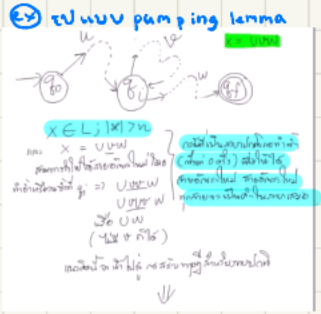


สรุป เราทำ pumping lemma ทำไม?

→ บางครั้งภาษาไม่จำกัดก็อาจเป็นภาษาปกติ

เราเลยทำ pumping lemma เพื่อพิสูจน์

Ex รูปแบบ pumping lemma



การที่ภาษา L เราจะต้องตรวจสอบว่าเป็นภาษาปกติ หรือไม่ จะมีพิสูจน์ตรวจสอบโดยใช้กฎที่จะนำเสนอต่อไปนี้ ชื่อว่าเรียกว่า **กฎที่ตรวจไม่ผ่านภาษาปกติ (Pumping lemma)**

ขั้นแรก จะต้องหา x ที่เป็นสำคัญในภาษาเพื่อใช้ตรวจสอบในกฎที่ โดย x จะต้องมีคุณสมบัติดังนี้

$|x| > n$ และ x จะต้องสอดคล้องกับ

เงื่อนไข 4 ข้อดังนี้ — n เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใดๆ

① $x = uvw$

② $|uv| \le n$

③ $|v| > 0$

④ ข้อความ $u(v)^m w \in L$ โดยที่ $m \geq 0$

ในเงื่อนไขถ้าเป็นภาษาปกติจะสร้างสายอักขระใหม่ ด้วยการแทนค่า $m \geq 0$ และสายอักขระใหม่ดังกล่าวต้องเป็นสมาชิกภาษา L เสมอ

Ex 1 จงตรวจสอบว่า $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x$ ลงท้ายด้วย $aab\}$ เป็นภาษาปกติ ? โดยการ pumping lemma สำหรับภาษาปกติ

Step ① กำหนด x

กำหนด $x = b^n aab$ โดยที่ $|x| = n+3$ ซึ่ง ≥ 3 จริง

② สรุปแบบ x ตามเงื่อนไข 4 ข้อ

① $x = uvw$ จริง ✓

② $uv = b^n$ ซึ่ง $|uv| \le n$

③ $v = b^i$; $i > 0$ ∴ $|v| > 0$ จริง

จาก ①,②,③ จะได้ว่า $u = b^{n-i}$; $v = b^i$ และ $w = aab$

ซึ่งเป็นไปตามข้อ ④ ว่าจริงด้วย

④ ข้อความนี้ $u(v)^m w$ ให้เป็น $b^{n-i}(b^i)^m aab$

และต้องตรวจสอบนี้ได้ว่า

$b^{n-i}(b^i)^m aab \in L$ ทุกค่า $m \geq 0$

③ ตรวจสอบตรงนี้ด้วยการแทนค่า m

จะเริ่มจาก ① $m = 0$; $b^{n-i}(b^i)^0 aab = b^{n-i}aab \in L$

ข้าม 1

แล้วไป ② $m = 2$; $b^{n-i}(b^i)^2 aab = b^{n-i}b^{2i}aab$

$= b^{n(+i)}aab \in L$

③ จะเห็นว่า จาก ② เมื่อ $m \geq 3$ ก็จะทำสายอักขระใหม่ ถูกสร้างเป็นสมาชิกภาษาเสมอ

∴ สรุปได้ว่า L ที่ต้องการพิสูจน์เป็นภาษาปกติ จริง

* การพิสูจน์ภาษา L ว่าเป็นภาษาไม่ปกติ

จะพิสูจน์ด้วยวิธี

เราต้อง จะพิสูจน์โดยใช้เทคนิค contradiction proof

และนี่เราทำกฎที่ตรวจไม่ผ่านภาษาปกติมาช่วยด้วย

แนวทางการพิสูจน์ภาษา

(Contradiction Proof)

(การพิสูจน์แบบขัดแย้ง)

แนวคิด

เริ่มต้นโจทย์จะให้สิ่งที่เกี่ยวกับการพิสูจน์มาก โดยโจทย์เกี่ยวกับการสมมติ หรือ ค่าความจริงบางอย่าง เช่นถือว่าสนใจว่าภาษานี้เป็นภาษาไม่ปกติจริงหรือไม่

ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอน

1. ตั้งต่างสมมติฐานในสิ่งที่เกี่ยวกับพิสูจน์ ในส่วนของปัญหา หรือมีค่าความจริงเป็นตรรกะที่ขัดกับสิ่งที่เกี่ยวกับการพิสูจน์

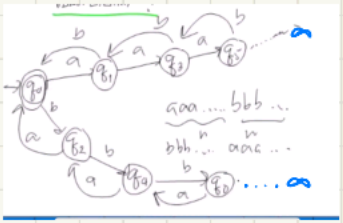
2. หาผลลัพธ์ขึ้นอันขัดแย้งกับสมมติฐานในข้อ 1 ว่าเป็นจริง หรือไม่ และถ้า หาผลลัพธ์ขึ้นอันแล้ว หรือพิสูจน์ตามแนวทางการอื่นอันไปแล้ว ไม่ได้ไปตามสมมติฐานที่กำหนดไว้ แสดงว่ามีความขัดแย้งกันเกิดขึ้น

3. เมื่อสอบจาก ข้อ 1 และข้อ 2 ที่ใช้ นั่นคือถ้ามีความขัดแย้งเกิดขึ้น ในข้อ 2 ก็ให้สรุปว่าสิ่งที่เกี่ยวกับพิสูจน์ มีค่าความจริงเป็นไปตามนี้ โจทย์ความเดิมเกี่ยวกับการพิสูจน์ โดยจะต้องรวบรวมทุกผลลัพธ์ตามใช้ให้พอ

Ex 1 $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x)\}$

จงพิสูจน์ว่า L เป็นภาษาไม่ปกติ

$L = \{\varepsilon, ab, ba, abab, baab \ldots\}$



พิสูจน์

① สมมุติฐาน

ให้ L ที่กล่าวถึงการพิสูจน์ เป็นภาษาปกติ

② ใช้ pumping lemma สำหรับภาษาปกติ เพื่อยืนยัน ①

pumping lemma

เลือก $x = a^n b^n$ $x \in L$ และ $2x \geq n$ จริง ($|x| \geq n$ จริง)

1) $x = uvw$

2) $uv = a^n$; $|uv| \leq n$ จริง ??

3) $v = a^i$; $i > 0$ ทำให้ได้ $u = b^{n-i}$ และ $w = b^n$

4) จัดรูป $u(v)^m w = a^{n-i}(a^i)^m b^n \in L$ $m \geq 0$

ตรวจสอบ $m > 0$ จะได้

$a^{n-i}(\cancel{a^i})^{\cancel{0}} b^n = a^{n-i} b^n \notin L$

③ สรุป จากการพิสูจน์ ตรงนี้ที่ $m=0$ ทำให้ ความยาวของ a น้อยกว่า ความยาวของ b อยู่ i ตัวซึ่งไม่เป็นไปตามเงื่อนไข

∴ L จึงเป็นภาษาไม่ปกติ ตามที่โจทย์ต้องการตรวจสอบ #

Ex 2 $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) \neq n_1(x)\}$

จงพิสูจน์ว่า L เป็นภาษาไม่ปกติ

พิสูจน์

① สมมุติฐาน

ให้ L ที่กล่าวถึงการพิสูจน์ เป็นภาษาปกติ

② ใช้ pumping lemma สำหรับภาษาปกติ เพื่อยืนยัน ①

pumping lemma

เลือก $x = 0^n 1^{n+1}$ $x \in L$ และ $2n+1 \geq n$ จริง

1) $x = uvw$

2) $uv = 0^n$; $|uv| \leq n$ จริง

3) $v = 0^i$; $i > 0$ ทำให้ได้ $u = 0^{n-i}$, $w = 1^{n+1}$

4) จัดรูป $u(v)^m w = 0^{n-i}(0^i)^m 1^{n+1} \in L$

โดยที่ $m \geq 0$

ตรวจสอบ $m > 0$ จะได้

$0^{n-i}(\cancel{0^i})^{\cancel{0}} 1^{n+1} = 0^{n-i} 1^{n+1}$

$$
\begin{aligned}
0^{n-i}(0^i)^2 1^{n+1} &= 0^{n-i} 0^{2i} 1^{n+1} \\
&= 0^{n(+1+2)i} 1^{n+1} \\
&= 0^{n+1i} 1^{n+1} \\
&= 0^{n+i} 1^{n+1} \notin L
\end{aligned}
$$

∴ pump ไม่ได้

③ สรุป จากการแทนค่า $m = 1$ ทำให้ความยาวของ 0 เท่ากับความยาวของ 1 เพราะ $n+i$ ตัว เมื่อ $i = 1$ ซึ่งไม่ใช่ค่าในภาษา ทำให้ขัดแย้งในสมมุติฐาน ①

∴ L จึง เป็นภาษาปกติ ไม่จริง #

เพิ่มเติม การเลือก x

1) $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid (i+j) = (k+l)\}$ → ความยาว ของ a กับ b รวมกัน = ความยาว ของ c กับ d รวม

จนกระทั่งว่า L เป็นภาษาไม่ปลอดบริบท

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$

พิจารณาว่า ใส่อะไร เป็นที่

x จะต้องประกอบขึ้นจาก สมาชิกทุกตัวใน Σ เพราะถ้าไม่ใช่เป็น

เลือก $\boxed{x = a^n c^n}$

ไม่เหมาะ ยากไป

$a^n b^n c^n d^n$ ✗

2) $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid 2i = (j+k+l)\}$ → ก.ยาว ของ b, c, d รวมกัน = 2 เท่า ของ ก.ยาว a

$\boxed{x = a^n b^{2n}}$

$2(n) = (2n+0+0)$

Σ

$a^n b^n c^n$ → แบบนี้ก็ได้ แต่ แบบ บน สั้นกว่า

3) $L_1 = \{x \in \{a, b, c, d\}^* \mid n_a(x), n_b(x), n_c(x), n_d(x) \neq 0$ และ

$(n_a(x) + n_b(x)) = (n_c(x) + n_d(x))\}$

$\boxed{x = a^n b^n c^n d^n}$

4) $L_2 = \{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l > 0$ และ $(i+j) = (k+l)\}$

สังเกตว่าต้อง > 0 เพราะว่า ต้องมีตัวนั้น

$\boxed{x = a^n b^n c^n d^n}$

5) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k > 0$ และถ้า

$\boxed{i = 1 \text{ แล้ว } j = k}\}$

$\boxed{x = a b^n c^n}$

$uv = ab^{n-1}$; $w = bc^n$

$v = b^i$, $u = ab^{n-1-i}$

จงพิสูจน์ว่า L ต่อไปนี้ว่าเป็นภาษาไม่ปกติ

① $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i,j,k,l > 0$ และ $(i+j+k) = l\}$

<u>พิสูจน์</u>

① สมมุติฐาน

ให้ L ที่ต้องการพิสูจน์เป็นภาษาปกติ

② ใช้ pumping lemma สำหรับภาษาปกติเพื่อยืนยัน ①

<u>pumping lemma</u>

เลือก $x = a^n b^n c^n d^{3n}$ $x \in L$ และ $6n \geq n$ จริง

1) $x = uvw$

2) $uv = a^n$; $|uv| \leq n$ จริง

3) $v = a^i$; $i > 0$ ทำให้ได้ $u = a^{n-i}$, $w = d^{3n}$

4) จัดรูป $u(v)^m w = a^{n-i}(a^i)^m b^n c^n d^{3n}$

<u>ตรวจสอบ m</u> จะได้

$m = 0$; $a^{n-i}\cancel{(a^i)^0} b^n c^n d^{3n}$

$= a^{n-i} b^n c^n d^{3n}$ $(i+j+k) \neq 1$

$n-i+n+n \neq 3n$

$\therefore$ pump ไม่ได้

⑤ สรุป จากการแทนค่า $m = 0$ พบว่าผลรวมของ i, j, k ไม่เท่ากับ 1

$\therefore$ L จึง เป็นภาษาปกติไม่จริง #

② $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid 2(i+j) = 3(k+l)\}$

<u>พิสูจน์</u>

① สมมุติฐาน

ให้ L ที่ต้องการพิสูจน์เป็นภาษาปกติ

② ใช้ pumping lemma สำหรับภาษาปกติเพื่อยืนยัน ①

<u>pumping lemma</u>

เลือก $x = a^{3n} c^{2n}$ $x \in L$ และ $5n \geq n$ จริง

1) $x = uvw$

2) $uv = a^n$; $|uv| \leq n$ จริง

3) $v = a^i$; $i > 0$ ทำให้ได้ $u = a^{n-i}$, $w = c^{2n}$

4) จัดรูป $u(v)^m w = a^{n-i}(a^i)^m c^{2n}$

<u>ตรวจสอบ m</u> จะได้

$m = 0$; $a^{n-i}\cancel{(a^i)^0} c^{2n}$

$= a^{n-i} c^{2n}$

$\therefore$ pump ไม่ได้

⑤ สรุป จากการแทนค่า $m = 0$ พบว่าผลรวมของ 2 เท่าของ $(i+j)$ ไม่เท่ากับ 3 เท่าของ $(k+l)$

$\therefore$ L จึง เป็นภาษาปกติไม่จริง #

บท 6 ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท (CFL)

6.1 นิยาม ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท (CFG)

ภาษา
- ภาษาปกติ
- ภาษาไม่ปกติ → ตัวอย่างภาษาที่ไม่ปกติ → CFL
  Context-free Language

การนิยามภาษาไม่ปกติ ต้องใช้ Recursive
ประกอบด้วย 3 ส่วน
1. ตั้งคลังตัวอักษรเริ่มต้น
2. กำหนดสตริงขึ้นจากคลังตัวอักษรที่ใช้อยู่ก่อนหน้า
3. การใช้ไม่กี่ครั้งมาก จนสมบูรณ์ก็ต้องหยุดได้ เท่านั้น

ex $L = \{x \in \{a,b\}^* \mid x = x^R\}$ Palindrome

เช่น $x = abba$
$x^R = abba$

ถ้าในภาษาจะเป็นสายอักขระแบบไม่จำกัด

$L = \{\lambda, a, b, aa, bb, aba, bab \ldots\ldots\}$

ใช้วิธีนิยามแบบ Recursive มานิยามภาษา Palindrome ได้นี้

1. [illegible] เป็นสตริงที่ยาวของ Palindrome
2. ถ้าให้ $x \in$ palindrome จะได้ว่า $a.x.a$ หรือ $b.x.b$ จะเป็นสตริงที่ยาวของ Palindrome ด้วย
3. ไม่มีสตริงอื่น จะเป็นสตริงใน ภาษา จากข้อ 1 และ 2

ex ในภาษา $aabbaa \in$ palindrome
จะต้อง x จะต้องเป็นตัวอันใดอันหนึ่ง
$S = b$ ∨ aSa ∨ $aba \in L$ ✓
$S = aba$ ∨ aSa ∨ $aaaaaa \in L$ ✓

วิธีนิยาม Recursive

เรียกการทำแบบนี้ว่า ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท

ปรับให้ เข้ากับรูปแบบที่ใช้สิ่งต่อไปนี้ ภาษา

"สามารถสร้างขึ้นได้เป็น" แทนด้วย → ตัวนี้
ใช้ | แทน หรือ กรณีที่จะสร้างสตริงหลายรูปแบบ

นิยามภาษา palindrome ใหม่

$\boxed{\begin{array}{l} ① \ S \to \lambda \mid a \mid b \\ ② \ S \to aSa \mid bSb \end{array}}$

โดยการพิจารณาจากนิยาม จะพบว่า องค์ประกอบในการนิยามจะต้องมีการทำงานดังนี้
มี Set ของตัวแปร → ตัวทำงาน
มี Set ของ Terminal → ตัวปฏิบัติการ
มี รูปแบบการสร้างภาษา ⇒ ภาษาของ $A \to \alpha$

CFG ประกอบด้วย

$G = (V, \Sigma, S, P)$ ในแต่ละตัว

- V = เซตของตัวแปร → สิ่งที่ใช้ในการทำงานร่วมกับ ตัวอื่นๆ เช่น Recursive
- Σ = เซตของ Terminal (สิ่งแวดล้อมโปรแกรม) ไม่ได้ทำงานจะเป็นสิ่งที่ผลลัพธ์ภายนอกเท่านั้น
- S = ตัวแปรเริ่มต้น ; $S \in V$
- P = เซตของกฎเกณฑ์ (ที่บ่งบอกว่าจะนิยาม Recursive อย่างไร)

ex การนิยามด้วย CFG

นิยามภาษา palindrome ด้วย CFG
จะได้ $G = (V, \Sigma, S, P)$
$V = \{S\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
S = ตัวแปรเริ่มต้น
$P = \{S \to aSa \mid bSb \mid \lambda\}$
นี้ค่าได้

จะนิยามภาษา P ?

จะต้องนิยามด้วยกฎของเส้นทางต่อไปนี้ โดย กฎของเส้นทางต่อไปนี้
δ ใช้สัญลักษณ์ [illegible] และ [illegible]
δ' [illegible]

ex 1 $x = aabaa \in$ palindrome ?
$A \to \alpha$

$\boxed{P = \{S \to \lambda \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb\}}$

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabaa$

$\therefore x \in L$ จริง #

ex 2 $x = abbabba \in$ palindrome ?

ตัวแปรเริ่มต้น S

$S \Rightarrow aSa \Rightarrow abSba$
$\Rightarrow abbSbba$
$\Rightarrow abbabba$

$\therefore x \in L$ จริง #

ex 3 กรณีมีหลายตัวแปร

ตัวอย่าง CFG ที่มีตัวแปรหลายตัว เพื่อการนิยาม
CFG $G = (V, \Sigma, A, P)$ ตัวแรกเริ่มต้น
ตัวแรกที่ใช้ เป็นตัวแปรเริ่มต้น
$P = \{A \to ab \mid Aa \mid Bb$
$B \to baa \mid bCa$
$C \to \lambda \mid aa \mid bb\}$ ← แต่นิยมใช้ S
$V = \{A, B, C\}$ ✓
$\Sigma = \{a, b\}$ ✓
ตัวแปรเริ่มต้นคือ A

$x = bbbaaa \in L$?

$A \Rightarrow Aa$
$\Rightarrow Aaa$
เปลี่ยนจาก A เป็น B แล้วใช้กฎ B →
$\Rightarrow Bbaa$
เปลี่ยนจาก B เป็น C แล้วใช้กฎ C →
$\Rightarrow bCabaa$
$\Rightarrow bbbabaa$

$\therefore x \in L$ จริง #

แบบฝึกความเข้าใจ

② CFG $G = (V, \Sigma, A, P)$

$P = \{ A \to ab \mid Aa \mid Bb$
$B \to baa \mid bCa$
$C \to \epsilon \mid aa \mid bb \}$

$V = \{A, B, C\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
ตัวแปรที่เริ่มต้นคือ A

จงตรวจสอบว่า สายอักขระต่อไปนี้ เป็น $\in L$?
ที่มี CFG ข้างต้นหรือไม่

2.1) $x_1 = \cancel{bbaaaaaa}$

Step ① กำหนดตัวเริ่มต้น คือ V
② พิจารณา P ในการเดิน

$A \Rightarrow Aa$
$\Rightarrow Aaa$
$\Rightarrow Aaaa$
$\Rightarrow Bbaaa$
$\Rightarrow bCabaaa$
$\Rightarrow bbbabaaa$
$\therefore x_1 = bbbabaaa \in L$ จริง

2.2) $x_2 = \cancel{bbaaaaaa}$

$A \Rightarrow Aa$
$\Rightarrow Bba$
$\Rightarrow bCaba$
$\Rightarrow baaaba, bbbaba, baba$
$\therefore x_2 = bbaaaba \notin L$

การออกแบบ CFG เพื่อนิยามภาษาไม่สิ้นสุด

- ใช้ [illegible] Recursive [illegible] ตัวแปร [illegible] หรือ [illegible]
- [illegible] จะ [illegible] ผลลัพธ์ ที่จะนำมาใช้นิยาม

CFG = (V, Σ, S, P)

Ex 1 การออกแบบ CFG

$L = \{ a^i b^j \mid i = j \}$
จงหา CFG ของภาษา

$L = \{ \epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots \}$

$S \to \epsilon$
$S \to aSb$
$\Rightarrow S \to \epsilon \mid aSb$ ← หาผลผลิต

จะได้ CFG ภาษานี้คือ
$G(V, \Sigma, S, P)$
$P = \{ S \to \epsilon \mid aSb \}$ #

วิธีหาผลผลิต

① ดู ϵ ใน set L ว่า ϵ ใน L ตัวไหน บ้างที่สร้างตัวต่อๆ ไปได้
เช่น ab, aaa, bbb สร้างจาก ϵ ได้
aabb .... สร้างจาก aSb ได้
② ให้เอาจาก ① มาเขียน
จะได้ set P

Ex 2

$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x) \}$
จงหา CFG ภาษาของ L

$L = \{ \epsilon, 01, 10, 0011, 0101, 1010, 1100, 1001, 0110, \ldots \}$

$S \to \epsilon$
$S \to 01S \mid 1S0$
$S \to SS$

เป็นตำแหน่งที่ตามอยู่หลัง (S)
10 01
01 10
S S

จะได้ $G = (V, \Sigma, S, P)$
$\Sigma = \{0, 1\}$
$V = \{S\}$
S = ตัวแปรเริ่มต้น
$P = \{ S \to \epsilon \mid 01S \mid 1S0 \mid SS \}$ #

Ex 3

$L = \{ x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) > n_1(x) \}$

จงหา CFG ของภาษา L

$L = \{0, 00, 000, 0000, \ldots, 010, 100 \ldots\}$

0 มากกว่า 1 อยู่ 1 ตัวเสมอ เช่น

010 100 001

S 1 S 1 S S S 1 S

ต้องการให้ 0 มากกว่า 1 อยู่ 1 ตัว

$S \to 0 \mid 0S$
$S \to S1S \mid 1SS \mid SS1$

$\{S \to 0 \mid 0S \mid S1S \mid 1SS \mid SS1\}$

จะได้ CFG $= G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$; S คือตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{S \to 0 \mid 0S \mid S1S \mid SS1 \mid 1SS\}$ #

ทวนทา ตรวจสอบ

$x = 001011001 0 1 \in L$?

จงแสดงขั้นตอนการได้มา

$S \Rightarrow S1S$ มีตัวแบบนี้จนเต็มจนฝั่งซ้ายล่อน

$\Rightarrow SS1 1S$

$\Rightarrow 0S11S$

$\Rightarrow 0S1S11S$

$\Rightarrow 001S11S$

$\Rightarrow 00101 1S$

$\Rightarrow 0010 11SS1$

$\Rightarrow 0010110S1$

$\Rightarrow 00101 10S1S1$

$\Rightarrow 00101 110 1S1$

$\Rightarrow 00101 110 0 101$

$\therefore x \in L$ จริง #

$\boxed{\text{นางตนา มี การได้มา มากกว่า 1 แบบ}}$ จากโจทย์

เดี๋ยว จะมา ลอง แสดง อีก แบบ

$x = 0010110010 1 \in L$?

$S \Rightarrow S1S$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow S1SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow SS11SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0S11SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0S1S11SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 001S11SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0010110SS1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0010110S1S1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0010110 01S1$ ทด 0010110010 1

$\Rightarrow 0010110 0101$

$\therefore x \in L$ จริง #

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$L(G) = \{ x \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} x \}$

ต้องได้ $S \overset{*}{\Rightarrow} 0010110010 1$

$\therefore x \in L$

$L = \{ x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) < n_b(x) \}$

(2.1) จงหา CFG ที่ยอมรับภาษา L

$L = \{ b, bb, bbb \ldots, bab, bba, abb \ldots \}$

b มากกว่า a อยู่ 1 ตัว

bab abb bba

s a s as s s s a

$$\boxed{\begin{aligned} S &\rightarrow b \mid bS \\ S &\rightarrow SaS \mid aSS \mid SSa \end{aligned}}$$

จะได้ CFG

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$S =$ ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{ S \rightarrow b \mid bS \mid SaS \mid aSS \mid SSa \}$ #

(2.2) จงตรวจสอบสายอักขระ x ด้วย CFG ที่สร้างได้ว่า x เป็นสมาชิกภาษา L หรือไม่

$x = \cancel{abbbaaab}$

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow aSSaaaS \\ &\Rightarrow aSaSSaaaS \\ &\Rightarrow abaSSaaaS \\ &\Rightarrow abaaSSSaaaS \\ &\Rightarrow abaabSSaaaS \\ &\Rightarrow abaabbSaaaS \\ &\Rightarrow abaabbbaaaS \\ &\Rightarrow abaabbbaaab \end{aligned}$$

ไม่ตรงตามเงื่อนไข $n_a(x) < n_b(x)$

∴ จากการตรวจสอบ พบว่า ได้สายอักขระที่ไม่ตรงตามเงื่อนไข $n_a(x) < n_b(x)$ จึงสรุปได้ว่า $x \notin L$

6.2 $\cup$, concat, $*$ ของ CFLs

CFL ที่มีสัญลักษณ์ตรงกัน 1 เรียงกัน

เราจะสร้าง CFG ออกมาได้ ก็ต่อเมื่อ

ex1 $L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x)\}$

$L_{11} = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x)\}$

$L_{12} = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \leq n_b(x)\}$

$L_1 = L_{11} \cup L_{12}$

$CFG_{L_{11}} \cup CFG_{L_{12}} = CFG_{L_1}$

ex2 $L_2 = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$

$L_{21} = \{a^i b^j \mid i < j\}$

$L_{22} = \{a^i b^j \mid i = j\}$

$L_3 = L_{21} \cup L_{22}$

$CFG_{L_2} = CFG_{L_{21}} \cup CFG_{L_{22}}$

สังเกตว่า L_{22} ถ้าต่างจะสร้างออกไม่ได้

$L_{22} = \{a^i b^j \mid i = j\}$

$L_{221} = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$

$L_{222} = \{b^k \mid k > 0\}$

$j = i + k$

$a^i b^i b^k \Rightarrow a^i b^{i+k}$; $k > 0$

$\therefore L_{22} = L_{221} \cdot L_{222}$ (concat)

$CFG_{L_{221}} \cdot CFG_{L_{222}}$

จะได้ตามกฎพลิก L_{221} $S \to \lambda \mid aSb$

L_{222} $S \to b \mid bS$

เริ่มกฎ $\cup$, concat, $*$

เริ่ม [redacted]

[redacted] $G_1 = ([redacted])$

$G_2 = (V_2, \Sigma, S_2, P_2)$

$*$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ เสมอ

หมายถึง ชื่อตัวแปร ของ set V_1, V_2 ต้องไม่ซ้ำกัน

① กฎ $\cup$ มี 2 กฎพลิกเพิ่ม

① จะหากฎ $L_1 \cup L_2$ ต้องสร้าง

$G_1 \cup G_2 \Rightarrow G_U = (V_U, \Sigma, S_U, P_U)$

$V_U = V_1 \cup V_2 \cup \{S_U\}$

Σ = ตัวเดิม

S_U = ตัวแปรเริ่มต้นใหม่ขอไว้ยากกรณีนี้

$P_U = \{S_U \to S_1 \mid S_2\} \cup P_1 \cup P_2$

② กฎ concat มี 1 กฎพลิกเพิ่ม

② จะหา [redacted] ต้องสร้าง

$G_1 G_2 \Rightarrow G_C = (V_C, \Sigma, S_C, P_C)$

$V_C = V_1 \cup V_2 \cup \{S_C\}$; Σ = ตัวเดิม

S_C = ตัวแปรเริ่มต้นใหม่

$P_C = \{S_C \to S_1 S_2\} \cup P_1 \cup P_2$

③ กฎ $*$ มี 2 กฎพลิกเพิ่ม

③ หา L_1^* ต้องหา

$G_1^* = G_K = (V_K, \Sigma, S_K, P_K)$

$V_K = V_1 \cup \{S_K\}$; Σ = ตัวเดิม

S_K = เป็นตัวเริ่มต้นใหม่

$P_K = \{S_K \to S_1 S_K \mid \lambda\} \cup P_1$

Ex1 กร $\cup$

$L = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) \geq n_b(x)\}$

$L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) = n_b(x)\}$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid aSb \mid bSa \mid SS$

จะได้ $G_1 = (V_1, \Sigma, S_1, P_1)$

$V_1 = \{S_1\}$

$\Sigma = \{a,b\}$

S_1 = ตัวแปรเริ่มต้น

$P_1 = \{S_1 \rightarrow \varepsilon \mid aS_1b \mid bS_1a \mid S_1S_1\}$

$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \mid n_a(x) > n_b(x)\}$

$S_2 \rightarrow a \mid aS \mid bSS \mid SSb \mid SbS$

$a \quad baa \quad aab \quad aba$

จะได้ $G_2 = (V_2, \Sigma, S_2, P_2)$

$V_2 = \{S_2\}$

$\Sigma = \{a,b\}$

S_2 = ตัวแปรเริ่มต้น

$P_2 = \{S_2 \rightarrow a \mid aS_2 \mid bS_2S_2 \mid S_2S_2b \mid S_2bS_2\}$

$L = L_1 \cup L_2$

$G_u = G_1 \cup G_2$

โดย

$G_u = (V_u, \Sigma, S_u, P_u)$

$V_u = \{S_1\} \cup \{S_2\} \cup \{S_u\} = \{S_1, S_2, S_u\}$

$\Sigma = \{a,b\}$

S_u = เป็นตัวแปรเริ่มต้นตัวใหม่

$P_u = \{S_u \rightarrow S_1 \mid S_2$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid aS_1b \mid bS_1a \mid S_1S_1$

$S_2 \rightarrow a \mid aS_2 \mid bS_2S_2 \mid S_2S_2b \mid S_2bS_2\}$ #

Ex2 กร $\cdot$ ($\cdot$ คือ concat)

$L = \{a^i b^j \mid i \leq j\}$

$L_1 = \{a^i b^j \mid i = j\}$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid aS_1b$

จะได้ $G_1 = (V_1, \Sigma, S_1, P_1)$

$V_1 = \{S_1\}$ | S_1 = ตัวแปรเริ่มต้น

$\Sigma = \{a,b\}$ | $P_1 = \{S_1 \rightarrow \varepsilon \mid aS_1b\}$

$L_2 = \{a^i b^j \mid i < j\}$

$L_{21} \cdot L_{22}$

$L_{21} = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ $\quad S_{21} \rightarrow \varepsilon \mid aS_{21}b$

$L_{22} = \{b^k \mid k > 0\}$ $\quad S_{22} \rightarrow b \mid bS_{22}$

จะได้ $G_{21} = (V_{21}, \Sigma, S_{21}, P_{21})$

$V_{21} = \{S_{21}\}$ | S_{21} = ตัวแปรเริ่มต้น

$\Sigma = \{a,b\}$ | $P_{21} = \{S_{21} \rightarrow \varepsilon \mid aS_{21}b\}$

ถ้า $G_{22} = (V_{22}, \Sigma, S_{22}, P_{22})$

$V_{22} = \{S_{22}\}$ | S_{22} = ตัวแปรเริ่มต้น

$\Sigma = \{a,b\}$ | $P_{22} = \{S_{22} \rightarrow b \mid bS_{22}\}$

สร้าง L_2 ก่อนได้จาก $L_{21} \cdot L_{22}$

สร้าง $G_c = G_{21} \cdot G_{22}$

โดย

$G_c = (V_c, \Sigma, S_c, P_c)$

$V_c = \{S_{21}, S_{22}, S_c\}$

$\Sigma = \{a,b\}$

S_c = เป็นตัวแปรเริ่มต้นตัวใหม่

$P_c = \{S_c \rightarrow S_{21} \cdot S_{22}$

$S_{21} \rightarrow \varepsilon \mid aS_{21}b$

$S_{22} \rightarrow b \mid bS_{22}\}$

เมื่อได้ L_2 แล้วจะสร้าง L ได้โดย $\boxed{L = L_1 \cup L_2}$

$L = L_1 \cup L_2$

$G_u = G_1 \cup G_2$

$\downarrow$

$G_1 \cup G_c$

$G_u = (V_u, \Sigma, S_u, P_u)$

$V_u = \{S_1, S_{21}, S_{22}, S_c, S_u\}$ ($V_1 \cup$, V_c, $\cup \{S_u\}$)

$\Sigma = \{a, b\}$

S_u = เป็นตัวแปรเริ่มต้นตัวใหม่

$P_u = \{S_u \to S_1 \mid S_c$

P_1: $S_1 \to \lambda \mid aS_1b$

P_c: $S_c \to S_{21} \cdot S_{22}$

$S_{21} \to \lambda \mid aS_{21}b$

$S_{22} \to b \mid bS_{22}$ #

สรุป กร concat

1) ต้องหา G_c ก่อน ซึ่ง $G_c = G_1 \cdot G_2$

แล้วเราก็จะได้ L_2 มาด้วย

2) $L = L_1 \cup L_2$

---

ex 3 ภาษาที่ซับซ้อน (มีกร concat แบบไหนก็ไม่รู้)

$L = \{a^i b^j c^k \mid i+j < k\}$ $k = (i+j+l)$

$\therefore L = L_1 \cdot L_2$

$L_1 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \geq 0\}$

จะได้ $G_1 = (V_1, \Sigma, A, P_1)$

$V_1 = \{A, B\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

A = ตัวแปรเริ่มต้น

$P_1 = \{A \to aAc \mid B$

$B \to bBc \mid \lambda\}$

$L_2 = \{c^l \mid l > 0\}$

จะได้ $G_2 = (V_2, \Sigma, C, P_2)$

$V_2 = \{C\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

C = ตัวแปรเริ่มต้น

$P_2 = \{C \to cC \mid c\}$

$\therefore L = L_1 L_2$ สร้าง G_c ได้ดังนี้

$G_c = (V_c, \Sigma, S_c, P_c)$

$V_c = \{S_c, A, B, C\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

= ตัวแปรเริ่มต้น — ตัวใหม่

$P_c = \{S_c \to AC$

P_1: $A \to aAc \mid B$

$B \to bBc \mid \lambda$

P_2: $C \to cC \mid c\}$ #

---

ex 4 กร ทำ * (จาก ex 3 เอามาทำซ้ำ)

$L = \{a^i b^j c^k \mid i+j < k\}$

ถามหา CFG ของภาษา L^*

$G_L = (V, \Sigma, D, P)$ → ตัวแบบ จาก ex 3

$V = \{S_c, A, B, C\}$; $\Sigma = \{a, b, c\}$

D = ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{S_c \to AC$

$A \to aAc \mid B$

$B \to bBc \mid \lambda$

$C \to cC \mid c\lambda$

G_1, G_2 $\Rightarrow G_k$

$= (V_k, \Sigma, S_k, P_k)$

$V_k = \{A, B, C, S_c, S_k\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

S_k = ตัวแปรเริ่มต้นใหม่

$P_k = \{S_k \to S_c S_k \mid \lambda$

$S_c \to AC$

$A \to aAc \mid B$

$B \to bBc \mid \lambda$

$C \to cC \mid c\}$ #

* การสร้าง CFG เพื่อนิยามภาษา * ออกสอบ

ปกติ ที่มีนิพจน์ปกตินิยามอยู่ก่อนแล้ว

แปลง RE → CFG

แนวทางการแปลง

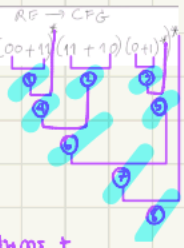
1. ดูสำดับก่อนหลังในข้อกฎข้อ
2. ใน สายอักขระย่อยแต่ละตัวในสร้าง B → bb ตรงคลิต จากตัวแปรไปผลิตได้เลยโดยตรง

(aa+bb)
A → aa

3. ทำผ่าน Union, concat, * ตามนิพจน์ปกติ ที่ให้มาตามลำดับความสำคัญที่กำหนดไว้ให้ดูกฎข้อ

ex แปลง RE → CFG

RE = ((00+11)*(11+10)(0+1)*)*



กฎลำดับ op ความสำคัญ

1) ( )
2) *
3) concat
4) ∪ (+)

ถ้าเท่ากัน ทำข้าง → ขวา

① – ③ เป็นกร +

① (00 + 11)

A → 00 ; B → 11

C → A | B
A → 00
B → 11

② (11 + 10)

D → 11 ; E → 10

F → D | E
D → 11
E → 10

③ (0 + 1)

G → 0 ; H → 1

I → G | H
G → 0
H → 1

④, ⑤, ⑥ เป็นกร *

④ (00 + 11)*

J → CJ | ε
C → A | B
A → 00
B → 11

⑤ (0 + 1)*

K → IK | ε
I → G | H
G → 0
H → 1

⑥ (00 + 11)* (11 + 10)

④ concat ②

④, ② เป็นกร concat

L → JF
J → CJ | ε
C → A | B
A → 00
B → 11
F → D | E
D → 11
E → 10

⑦ (00 + 11)* (11 + 10) (0 + 1)*

⑥ • ⑤

M → LK
L → JF
J → CJ | ε
C → A | B
A → 00
B → 11
F → D | E
D → 11
E → 10
K → IK | ε
I → G | H
G → 0
H → 1

⑧ $((00+11)^*(11+10)(0+1)^*)^*$

$N \to MN \mid \varepsilon$
$M \to LK$
$L \to JF$
$J \to CJ \mid \varepsilon$
$C \to A \mid B$
$A \to 00$
$B \to 11$
$F \to D \mid E$
$D \to 11$
$E \to 10$
$K \to IK \mid \varepsilon$
$I \to G \mid H$
$G \to 0$
$H \to 1$

สรุป

∴ CFG ที่นิยามนิพจน์ ดังกล่าวคือ

$G = (V, \Sigma, N, P)$

$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$N =$ ตัวแปรเริ่มต้น

ตัวบนสุด ตาม step สุดท้าย

$P = \{ N \to MN \mid \varepsilon$
$M \to LK$
$L \to JF$
$J \to CJ \mid \varepsilon$
$C \to A \mid B$
$A \to 00$
$B \to 11$
$F \to D \mid E$
$D \to 11$
$E \to 10$
$K \to IK \mid \varepsilon$
$I \to G \mid H$
$G \to 0$
$H \to 1 \}$ #

---

① $L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x)\}$

จงหา CFG ที่นิยาม

ภาษา $(L_1)^*$

เริ่มหา L_1

$L_1 = \{x \in \{0,1\}^* \mid n_0(x) = n_1(x)\}$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid 0S_1 \mid 1S_0 \mid SS$

จะได้ $G = (V_1, \Sigma, S_1, P_1)$

$V_1 = \{S_1\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

S_1 = ตัวแปรเริ่มต้น

$P_1 = \{S_1 \rightarrow \varepsilon \mid 0S_1 \mid 1S_0 \mid SS_1\}$

จะได้ CFG $(L_1)^*$

$G_k = (V_k, \Sigma, S_k, P_k)$

$V_k = \{S_1, S_k\}$

$\Sigma = \{0,1\}$

S_k = ตัวแปรเริ่มต้นใหม่

$P_k = \{S_k \rightarrow S_1 S_k \mid \varepsilon$

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid 0S_1 \mid 1S_0 \mid SS_1\}$ #

② จงหา CFG ของภาษาที่นิยามด้วยนิพจน์ปรกติต่อไปนี้

$\Sigma = \{a,b\}$

$RE = ((aa+bb)(ba+ba)^* + aab)^*$

① $(aa+bb)$

$A \rightarrow aa$; $B \rightarrow bb$

$C \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aa$

$B \rightarrow bb$

② $(ba+ba)$

$D \rightarrow ba$; $E \rightarrow ba$

$F \rightarrow D \mid E$

$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

③ $(ba+ba)^*$ ②*

$G \rightarrow FG \mid \varepsilon$

$F \rightarrow D \mid E$

$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

④ $(aa+bb)(ba+ba)^*$ ① · ③

$H \rightarrow CG$

$C \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aa$

$B \rightarrow bb$

$G \rightarrow FG \mid \varepsilon$

$F \rightarrow D \mid E$

$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

⑤ $(aa+bb)(ba+ba)^* + aab$ ④

$I \rightarrow aab$

$J \rightarrow H \mid I$

$H \rightarrow CG$

$C \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aa$

$B \rightarrow bb$

$G \rightarrow FG \mid \varepsilon$

$F \rightarrow D \mid E$

$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

$I \rightarrow aab$

⑥ $((aa+bb)(ba+ba)^* + aab)^*$ ⑤*

$K \rightarrow JK \mid \varepsilon$

$J \rightarrow H \mid I$

$H \rightarrow CG$

$C \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aa$

$B \rightarrow bb$

$G \rightarrow FG \mid \varepsilon$

$F \rightarrow D \mid E$

$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

$I \rightarrow aab$

สรุป

∴ CFG ที่นิยามนิพจน์ดังกล่าวคือ

$G = (V, \Sigma, K, P)$

$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

K = ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{K \rightarrow JK \mid \varepsilon$

$J \rightarrow H \mid I$

$H \rightarrow CG$

$C \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aa$

$B \rightarrow bb$

$G \rightarrow FG \mid \varepsilon$

$F \rightarrow D \mid E$

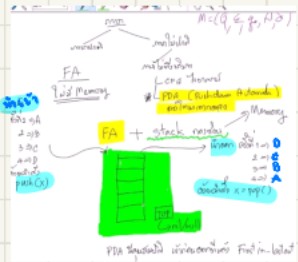
$D \rightarrow ba$

$E \rightarrow ba$

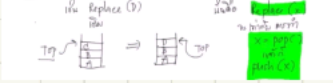
$I \rightarrow aab\}$ #

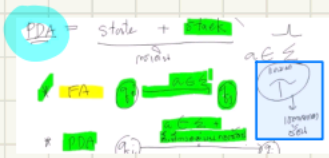
บท 7 ออโตมาตากดลง (PDA)

7.1 นิยาม ออโตมาตากดลง



PDA ย่อมเป็น เครื่องสถานะจำกัด Finite-state





ขอเป็นทางการ PDA

1. ชุดของสถานะจำกัดเป็น $q_i \in Q$
2. อักขระ a ใดๆ ที่ถูกป้อนเข้าสายอักขระที่รับได้ $a \in \Sigma$
3. สัญลักษณ์ของกองซ้อนที่ตำแหน่ง TOP ชี้อยู่ เขาเป็น $\in \Gamma$

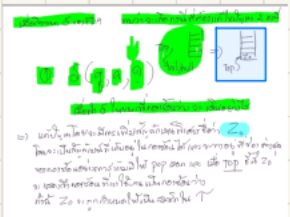
เงื่อนไขการเดิน

1. จะมีการเปลี่ยนสถานะ (หรืออยู่ที่เดิม) $\in Q$
2. ต้องแทนที่สัญลักษณ์ของกองซ้อนที่ตำแหน่ง Top ด้วยสายอักขระตั้งแต่ 0 ตัวเป็นต้นไป $\in \Gamma^*$

$$\delta: Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

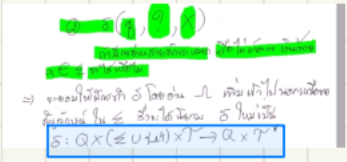
กรณีปัญหาต่างๆ

①



⇒ เมื่อปุ่มโดยจะมีสระเงื่อนไขที่ถูกกำหนดไว้ว่า Z_0 โดยจะเป็นสัญลักษณ์ที่เป็นอยู่ในกองซ้อนได้ (ตรวจกองซ้อนที่จะถูกต้องของกองซ้อนจะถูกนำไปใช้ pop ออก และ เป็น Top ขึ้นที่ Z_0 ทุกครั้งจะต้องใช้เป็นเงื่อนไขว่าที่ Z_0 ทุกครั้งจะต้องใช้เป็นเงื่อนไขว่าที่ Γ

②



⇒ จะต้องมีฟังก์ชัน δ โดยอ่าน Λ เพิ่มเข้าไปในตารางเพื่อที่ถูกต้องใน Σ จึงจะได้นิยาม δ ใหม่เป็น

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

PDA ที่จะเรียนในบทนี้ จะหมายถึงเฉพาะ PDA ที่ไม่กำหนด (non-deterministic Pushdown Automata)

นั่นคือ ตราบใด $\delta(q, a, X)$ ใดๆ จะสามารถมีค่าเป็นเซตที่มีสมาชิกอันได้มากกว่า 1 หรือไม่ได้

เราจะได้นิยาม PDA ที่ไม่กำหนดใหม่เป็น

$$\text{PDA } M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$$

ตัวแทนสัญลักษณ์

ที่ไม่กำหนด

โดยที่

Q = เซตจำกัดของสถานะ

Σ = เซตจำกัดของชุดตัวอักษร

Γ = เซตจำกัดของสัญลักษณ์ในกองซ้อน

q_0 = สถานะเริ่มต้น ; $q_0 \in Q$

Z_0 = สัญลักษณ์ในกองซ้อนเริ่มต้น ; $Z_0 \in \Gamma$

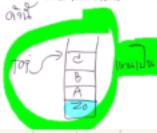
A = เซตจำกัดของสถานะสิ้นสุด

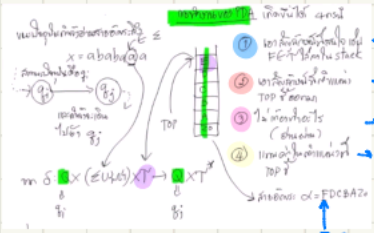
$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\Lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \text{เซตย่อยที่ไม่กำหนดของ } Q \times \Gamma^*$$

วิธีการพิจารณาเชิงที่เก็บในกองซ้อน (stack)

จะไม่เขียนเป็น ภาพ แต่จะแทนด้วย สายอักขระ $\alpha \in \Gamma^*$

ดังนี้





① $\delta(q_i, a, E) = (q_j, FE)$ หรือ

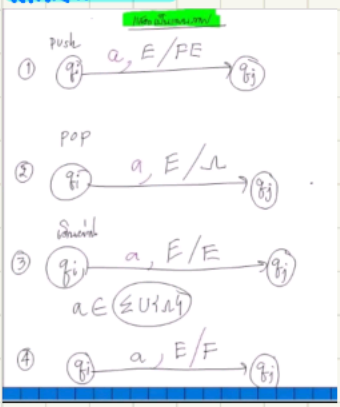
② $\delta(q_i, a, E) = (q_j, \Lambda)$ หรือ

③ $\delta(q_i, a, E) = (q_j, E)$ หรือ

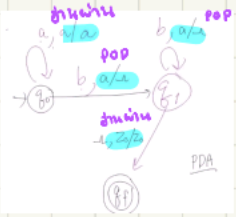
④ $\delta(q_i, a, E) = (q_i, F)$

เราจะไม่พิจารณาทั้ง α เราจะดูแค่ที่ Top ซึ่งจะอะไรที่จะเปลี่ยน

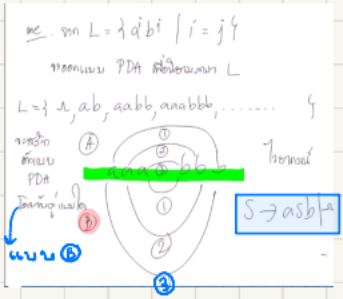
แสดงแผนภาพ

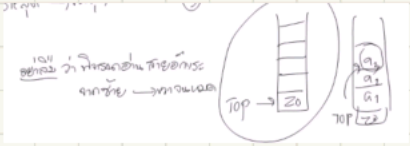


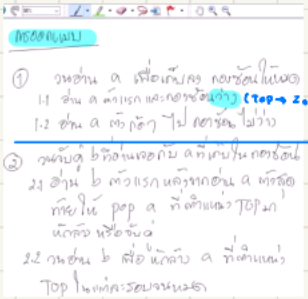
ex แผนภาพ PDA



ex การสร้างตัวแบบ PDA







จะได้แผนภาพ

ถ้าแผนภาพที่ได้ ไปสร้างทางการผ่าน

MOVE#	state	Input	stack symbol	MOVE(s)
1	q_0	a	Z_0	(q_0, aZ_0)
2	q_0	a	a	(q_0, aa)
3	q_0	b	a	(q_1, ε)
4	q_1	b	a	(q_1, ε)
5	q_1	ε	Z_0	(q_2, Z_0)
all other combination				none

เราจะได้ตาราง ดังนี้ ในการทดสอบ

การทำงานโดยแบบ (configuration)

⊢ ⇒ การเดิน 1 ขั้นตอน

⊢* ⇒ การเดินกี่ขั้นก็ได้ (0 ครั้ง)

สัญลักษณ์ที่ถูกบน กลุ่มซ้ายสุดเท่านั้น ถ้าเหมือนกัน ตัวที่ถูกต้อง ตัวที่ 1 ถูกต้อง

ตัวเดิม

$(q_i, abc, ABCZ_0) \vdash$ ตำแหน่งถัดไป → ดูจาก ทางการผ่าน

POP A ออก

และถ้า $\delta(q_i, \varepsilon, A) = (q_j, \varepsilon)$ จะได้ว่า

$(q_i, abc, ABCZ_0) \vdash (q_j, abc, BCZ_0)$

ถ้าสำเร็จเป็นการเดินตามแบบ ⊢* ถึงสถานะสิ้นสุด และ ค่าสัญลักษณ์ที่เหลือ เท่ากับ เป็นสิ่งที่สถานะสิ้นสุดต้องการว่า $x \in L$ x

ex การทดสอบ จากตาราง

สิ่งที่ได้

MOVE#	state	Input	stack symbol	MOVE(S)
1	q_0	a	Z_0	(q_0, aZ_0)
2	q_0	a	a	(q_0, aa)
3	q_0	b	a	(q_1, λ)
4	q_1	b	a	(q_1, λ)
5	q_1	λ	Z_0	(q_2, Z_0)
all other combination				none

Ex จงทดสอบว่า $x = aaabbb \in L9$

$(q_0, aaabbb, Z_0)$

- ① $\vdash (q_0, aabbb, aZ_0)$
- ② $\vdash (q_0, abbb, aaZ_0)$ — a เปลี่ยนเป็น aa , a ไม่เปลี่ยน
- ③ $\vdash (q_0, bbb, aaaZ_0)$ — สาวได้ λ จะไม่เปลี่ยน เดินที่เปลี่ยนกันมง)
- ④ $\vdash (q_1, bb, aaaZ_0)$
- ⑤ $\vdash (q_1, b, aZ_0)$
- ⑥ $\vdash (q_1, \lambda, Z_0)$ — ไม่มีเหลือแล้ว
- ∴ ⑦ $\vdash (q_2, \lambda, Z_0)$ — ยอมรับ #

ยอมรับ or ไม่ยอมรับ จาก $x = \lambda$ แล้ว , เกินมาสุดทางแล้วได้ ก็สุดท้ายใบ้ม

CFG ⟶ PDA

CFG ภาษาไม่กำกวม PDA

⇓

ต้องมีสภาพ

✓ ง่าย CFG $\xrightarrow{\text{แก้/แปลง}}$ PDA ได้ ✓ ออกสอบ

✓ ง่าย PDA $\xrightarrow{\text{แก้/แปลง}}$ CFG ได้ ✗ ไม่ออก

[illegible]

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ต้องสับนี้แต่ 3 สถานะ

Σ = ตัวอิน $Z_0 \notin V$

$\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{Z_0\}$

q_0 = สถานะเริ่มต้น

[illegible]

$F = \{q_2\}$

δ = [illegible]

[illegible] $\delta(q_0, \lambda, Z_0) = \{(q_1, SZ_0)\}$

(ตัวที่ 1 ของสับนี้ต้องเป็นตัวแรก)

② สับนี้ตัวแปร A ทุกตัวในเซต V ต้องว่า $\delta(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, \alpha)\}$ $A \to \alpha$ ใน P }

③ สับนับ a ทุกตัวใน Σ $\delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}$

max นี้ $\Sigma = \{a, b\}$

ตอนสับไปสถานะสิ้นสุด

④ $\delta(q_1, \lambda, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

ex CFG ⟶ PDA

$L = \{a^i b^j \mid i = j\}$

จากงานา L ใช้สร้างนิยาม L ด้วย CFG ได้ดังนี้

$G = (V, \Sigma, S, P)$

$V = \{S\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

S = สัญลักษณ์เริ่มต้น

$P = \{S \to aSb \mid \lambda\}$

CFG ⟶ PDA

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$; $\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{Z_0\} = \{S, a, b, Z_0\}$

q_0 = สถานะเริ่มต้น

Z_0 = สัญลักษณ์เริ่มต้นของสแตก

A = $\{q_2\}$ (ได้สถานะสุดท้าย Q)

δ = จะได้ตามในตาราง ดังนี้ดังนี้

$\delta(q_0, \lambda, S) = \{(q_1, SZ_0)\}$

ต้องสร้างเองจากได้

④ step จาก เป็นตารางโดยดูเทียบ S

MOVE#	state	Input	stack symbol	Move(S)
1 (1)	q_0	λ	Z_0	(q_1, SZ_0)
2 (2)	q_1	λ	S	(q_1, aSb)
3 (2)	q_1	λ	S	(q_1, λ)
4 (3)	q_1	a	a	(q_1, λ)
5 (3)	q_1	b	b	(q_1, λ)
6 (4)	q_1	λ	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combination				none

Ex การตรวจสอบ PDA ที่แปลงมาจาก CFG

Move#	state	Input	stack symbol	Move(s)
1 (1)	q_0	ε	Z_0	(q_1, SZ_0)
2 (2)	q_1	ε	S	(q_1, aSb)
3 (2)	q_1	ε	S	(q_1, ε)
4 (3)	q_1	a	a	(q_1, ε)
5 (3)	q_1	b	b	(q_1, ε)
6 (4)	q_1	ε	Z_0	(q_2, Z_0)
All other combination				move

4, 5 เป็นการลบทิ้ง เหมือนกัน แต่ จะลบ a เลือก 4 จะลบ b เลือก 5

(ex) $x = aaabbb \in L$

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb$

$\Rightarrow aaabbb$

ผลการตรวจสอบโดย PDA จะต้องคำนวณได้ดังนี้

$(q_0, aaabbb, Z_0)$

เป้าหมาย โจทย์เลือก กฎ ถัดไป อยากให้ S เปลี่ยนเป็น aSb เลย เลือก ②

ทั้งแสดงว่ากลับรอ ③

$\vdash$ ① $(q_1, aaabbb, SZ_0)$

$\vdash$ ② $(q_1, aaabbb, aSbZ_0)$ ได้ a ที่ต้องการ ใน x แล้ว ก็จะลบทิ้ง

$\vdash$ ③ $(q_1, aabb, SbZ_0)$

$\vdash$ ② $(q_1, abb, aSbbZ_0)$

$\vdash$ ③ $(q_1, abbb, SbbZ_0)$

$\vdash$ ② $(q_1, bbb, aSbbbZ_0)$

$\vdash$ ③ $(q_1, bbb, SbbbZ_0)$ S แสดงเป็น ε

$\vdash$ ④ $(q_1, bb, bbbZ_0)$

$\vdash$ ⑤ (q_1, b, bbZ_0)

$\vdash$ ⑤ (q_1, ε, bZ_0)

$\vdash$ ⑤ (q_1, ε, Z_0)

$\therefore$ $\vdash$ ⑥ (q_2, ε, Z_0) ยอมรับ #

RE → CFG → PDA

Ex RE → CFG → PDA

RE = $(aaa + bbb)^*(aa + ba)$

① ② ③ ④

① $(aaa + bbb)$

$A \to aaa$; $B \to bbb$

$C \to A \mid B$

$A \to aaa$

$B \to bbb$

② $(aa + ba)$

$D \to aa$; $E \to ba$

$F \to D \mid E$

$D \to aa$

$E \to ba$

③ $(aaa + bbb)^*$ ①*

$G \to CG \mid \varepsilon$

$C \to A \mid B$

$A \to aaa$

$B \to bbb$

④ $(aaa + bbb)^*(aa + ba)$ ③ ②

$H \to GF$

$G \to CG \mid \varepsilon$

$C \to A \mid B$

$A \to aaa$

$B \to bbb$

$F \to D \mid E$

$D \to aa$

$E \to ba$

CFG ที่นิยามหินจาง ดังกล่าวคือ

$G = (V, \Sigma, H, P)$

$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

H = ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{H \to GF$

$G \to CG \mid \varepsilon$

$C \to A \mid B$

$A \to aaa$

$B \to bbb$

$F \to D \mid E$

$D \to aa$

$E \to ba\}$ #

จะสร้าง PDA ได้ดังนี้

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, s_0, z_0, A, \delta)$ — มีแค่ δ ที่ต้องหา

$Q = \{s_0, s_1, s_2\}$ ของกัน ต้องเป็น set นี้เท่านั้น

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G, H, a, b, Z_0\}$ ($\cup \Sigma$, $\cup \{Z_0\}$)

$A = \{s_2\}$ ของกัน

s_0 = สถานะเริ่มต้น

Z_0 = สัญลักษณ์ เสตงกองว่าง

δ = แสดงในตาราง

เริ่มไปที่ทุกตัว

MOVE#	state	Input	stack symbol	MOVE δ
1 (1)	q_0	Λ	Z_0	(q_1, HZ_0)
2. (2)	q_1	Λ	H	(q_1, GF)
3. (2)	q_1	Λ	G	$(q_1, CD), (q_1, A)$
4. (2)	q_1	Λ	C	$(q_1, A), (q_1, B)$
5. (2)	q_1	Λ	A	(q_1, aaa)
6. (2)	q_1	Λ	B	(q_1, bbb)
7. (2)	q_1	Λ	F	$(q_1, D), (q_1, E)$
8. (2)	q_1	Λ	D	(q_1, aa)
9. (2)	q_1	Λ	E	(q_1, ba)
10 (3)	q_1	a	a	(q_1, Λ)
11 (3)	q_1	b	b	(q_1, Λ)
12 (4)	q_1	Λ	Z_0	(q_2, Z_0)

all other combination none

ต้องประเป็นต้น

Step จากหน้า 122

Step ① เริ่มต้น

H →

ใช้ step ② มาเป็นตัวแทนทุกตัวใน P

step ③ นัดสาง ทำให้ครบทุกตัวใน Σ

step ④ สิ้นสุด

H.W

จงหา PDA ที่มีภาษาต่อไปนี้

① L ที่มีนิยามปกติดังนี้ $\Sigma = \{a, b\}$

$$RE = ((\underbrace{aa+bb}_{1})^{*}(\underbrace{abaa+bbaa}_{2})(\underbrace{abb+baab}_{3})^{*})^{*}$$

4 5 6 7

1. $(aa+bb)$

$C \to A \mid B$
$A \to aa$
$B \to bb$

2. $(abaa+bbaa)$

$F \to D \mid E$
$D \to abaa$
$E \to bbaa$

3. $(abb+baab)$

$I \to G \mid H$
$G \to abb$
$H \to baab$

4. $(aa+bb)^{*}$

$J \to CJ \mid \Omega$
$C \to A \mid B$
$A \to aa$
$B \to bb$

5. $(abb+baab)^{*}$

$K \to IK \mid \Omega$
$I \to G \mid H$
$G \to abb$
$H \to baab$

6. 4 · 2

$L \to JF$
$J \to CJ \mid \Omega$
$C \to A \mid B$
$A \to aa$
$B \to bb$
$F \to D \mid E$
$D \to abaa$
$E \to bbaa$

7. 6 · 5

$M \to LK$
$L \to JF$
$J \to CJ \mid \Omega$
$C \to A \mid B$
$A \to aa$
$B \to bb$
$F \to D \mid E$
$D \to abaa$
$E \to bbaa$
$K \to IK \mid \Omega$
$I \to G \mid H$
$G \to abb$
$H \to baab$

8. 7^{*}

$N \to MN \mid \Omega$
$M \to LK$
$L \to JF$
$J \to CJ \mid \Omega$
$C \to A \mid B$
$A \to aa$
$B \to bb$
$F \to D \mid E$
$D \to abaa$
$E \to bbaa$
$K \to IK \mid \Omega$
$I \to G \mid H$
$G \to abb$
$H \to baab$

D = ได้ CFG

$G = (V, \Sigma, N, P)$

$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

N = ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{$ $N \to MN \mid \Omega$

$M \to LK$

$L \to JF$

$J \to CJ \mid \Omega$

$C \to A \mid B$

$A \to aa$

$B \to bb$

$F \to D \mid E$

$D \to abaa$

$E \to bbaa$

$K \to IK \mid \Omega$

$I \to G \mid H$

$G \to abb$

$H \to baab$ $\}$

CFG → PDA จะได้

$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{Z_0\}$

$= \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, a, b, Z_0\}$

q_0 = สถานะเริ่มต้น

$A = \{q_2\}$

Z_0 = symbol แสดงก้องว่าง

δ = แสดงในตาราง

δ ไม่เชิงกำหนด

move#	state	input	stack symbol	move(s)
1 (1)	q_0	Ω	Z_0	(q_1, NZ_0)
2 (2)	q_1	Ω	N	$(q_1, MN), (q_1, \Omega)$
3 (2)	q_1	Ω	M	(q_1, LK)
4 (2)	q_1	Ω	L	(q_1, JF)
5 (2)	q_1	Ω	J	$(q_1, CJ), (q_1, \Omega)$
6 (2)	q_1	Ω	C	$(q_1, A), (q_1, B)$
7 (2)	q_1	Ω	A	(q_1, aa)
8 (2)	q_1	Ω	B	(q_1, bb)
9 (2)	q_1	Ω	F	$(q_1, D), (q_1, E)$
10 (2)	q_1	Ω	D	(q_1, aba)
11 (2)	q_1	Ω	E	(q_1, bba)
12 (2)	q_1	Ω	K	$(q_1, IK), (q_1, \Omega)$
13 (2)	q_1	Ω	I	$(q_1, G), (q_1, H)$
14 (2)	q_1	Ω	G	(q_1, abb)
15 (2)	q_1	Ω	H	(q_1, bab)
16 (3)	q_1	a	a	(q_1, Ω)
17 (3)	q_1	b	b	(q_1, Ω)
18 (4)	q_1	Ω	Z_0	(q_2, Z_0)
all other combination				none

② $RE = ((\underbrace{101+111}_{1})(\underbrace{000+111}_{2})^{*}(\underbrace{010+001}_{3}))^{*}$

1. $(101+111)$

$C \to A \mid B$
$A \to 101$
$B \to 111$

2. $(000+111)$

$F \to D \mid E$
$D \to 000$
$E \to 111$

3. $(010+001)$

$I \to G \mid H$
$G \to 010$
$H \to 001$

4. $(000+111)^{*}$

$J \to FJ \mid \Omega$
$F \to D \mid E$
$D \to 000$
$E \to 111$

5. $1 \cdot 4$

$K \to CJ$
$C \to A \mid B$
$A \to 101$
$B \to 111$
$J \to FJ \mid \Omega$
$F \to D \mid E$
$D \to 000$
$E \to 111$

6. $5 \cdot 3$

$L \to KI$
$K \to CJ$
$C \to A \mid B$
$A \to 101$
$B \to 111$
$J \to FJ \mid \Omega$
$F \to D \mid E$
$D \to 000$
$E \to 111$
$I \to G \mid H$
$G \to 010$
$H \to 001$

7. 6^{*}

$M \to LM \mid \Omega$
$L \to KI$
$K \to CJ$
$C \to A \mid B$
$A \to 101$
$B \to 111$
$J \to FJ \mid \Omega$
$F \to D \mid E$
$D \to 000$
$E \to 111$
$I \to G \mid H$
$G \to 010$
$H \to 001$

D = ไม่ CFG

$G = (V, \Sigma, M, P)$

$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

M = ตัวแปรเริ่มต้น

$P = \{ M \to LM \mid \Omega$

$L \to KI$

$K \to CJ$

$C \to A \mid B$

$A \to 101$

$B \to 111$

$J \to FJ \mid \Omega$

$F \to D \mid E$

$D \to 000$

$E \to 111$

$I \to G \mid H$

$G \to 010$

$H \to 001 \}$

CFG → PDA จะได้

$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, A, \delta\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{Z_0\}$

$= \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, 0, 1, Z_0\}$

q_0 = สถานะเริ่มต้น

$A = \{q_2\}$

Z_0 = symbol แสดงก้องว่าง

δ = แสดงในตาราง

δ ไม่เชิงกำหนด

move #	state	input	stack symbol	move(s)
1 (1)	q_0	Ω	Z_0	(q_1, MZ_0)
2 (2)	q_1	Ω	M	$(q_1, LM), (q_1, \Omega)$
3 (2)	q_1	Ω	L	(q_1, KI)
4 (2)	q_1	Ω	K	(q_1, CJ)
5 (2)	q_1	Ω	C	$(q_1, A), (q_1, B)$
6 (2)	q_1	Ω	A	$(q_1, 101)$
7 (2)	q_1	Ω	B	$(q_1, 111)$
8 (2)	q_1	Ω	J	$(q_1, FJ), (q_1, \Omega)$
9 (2)	q_1	Ω	F	$(q_1, D), (q_1, E)$
10 (2)	q_1	Ω	D	$(q_1, 000)$
11 (2)	q_1	Ω	E	$(q_1, 111)$
12 (2)	q_1	Ω	I	$(q_1, G), (q_1, H)$
13 (2)	q_1	Ω	G	$(q_1, 010)$
14 (2)	q_1	Ω	H	$(q_1, 001)$
15 (3)	q_1	0	0	(q_1, Ω)
16 (3)	q_1	1	1	(q_1, Ω)
17 (4)	q_1	Ω	Z_0	(q_2, Z_0)
all other combination				none

บท 5 Turing Machine

5.1 Turing Machine

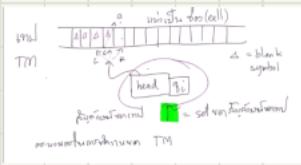
เครื่องจักร (Turing Machine)

เป็นตัวแบบคิดโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ อลันทัวริง ใช้สร้างขึ้นเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีการคำนวณได้ โดยมีการกำหนดให้ TM เป็น หน่วยความจำรูปทรงยืดหยุ่นได้ และอุปกรณ์ควบคุมการอ่านเขียนข้อมูลด้วย

state + เทป (Tape)

PDA state + กองซ้อน (stack)

FA state อย่างเดียว ไม่มี



การเคลื่อนที่ของ head

- หนึ่งช่องต่อหนึ่งขั้นตอนการทำงานของเครื่อง
- ทิศทางเคลื่อนที่ (ซ้าย ได้ ขวา หรือ อยู่กับที่)

ซ้าย Left ⇒ L

ขวา Right ⇒ R

อยู่กับที่ Stationary = S

องค์ประกอบของเครื่องจักร

TM ประกอบด้วย 7 tuple

$T = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta)$

Q = เซตของสถานะที่ไม่ว่าง จำกัด

(h สถานะพิเศษคือสถานะสิ้นสุด TM หยุดทำงาน)

Σ = เซตอักษรของสัญลักษณ์ภายในเครื่อง

Γ = เซตของสัญลักษณ์ที่ปรากฏบนเทป ประกอบด้วย Σ และ Δ (รวม Σ เป็นส่วนย่อย)

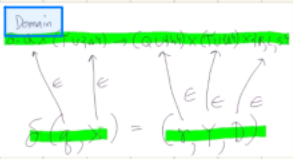
Δ = blank symbol

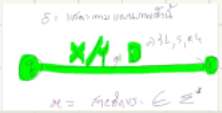
q_0 = สถานะเริ่มต้น

δ = ฟังก์ชันการเปลี่ยนของ TM นิยามได้เป็น

$\delta: Q \times (\Gamma \cup \{\Delta\}) \to (Q \cup \{h\}) \times (\Gamma \cup \{\Delta\}) \times \{R, L, S\}$

ทิศทางการเลื่อน ขวา, ซ้าย, กระ

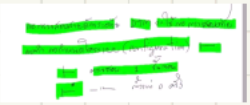




TM ต่างจาก DFA ใน แผนภาพจะมีทางเดินเพียงทางเดียวเท่านั้น (ไม่มีทางเดินเลือกได้) และทำให้ผลของการทำงาน TM ที่ได้จากแผนภาพนี้

Deterministic Turing Machine DTM

การตรวจสอบ



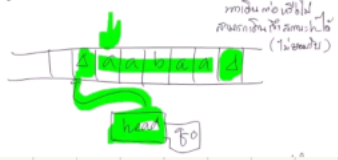
วิธีตรวจ

$x = aabba$ $\Sigma = \{a, b\}$

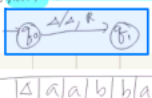
การตรวจสอบว่าสตริงอักขระ x ตัวอย่าง DTM จะมีขั้นตอนดังนี้

- สมมติให้มีสตริงอักขระ x ให้คัดไปในเทปและให้หัวเทปชี้ไปที่ช่องเทปก่อนหน้าสตริงอักขระ x 1 ช่อง

- จากนี้ไปให้เริ่มต้นการเดินการอ่านตามแนวทางที่กำหนดใน DTM จนกว่าจะเดินสิ้นสุดที่ h สมมติว่าเครื่องรับ เป็นไปได้ว่าทางเดินต่อเนื่องไม่สามารถเดินได้ (ไม่ยอมรับ)

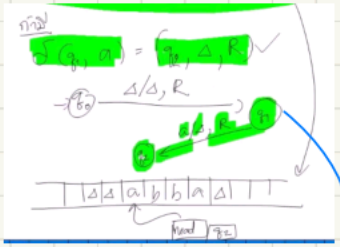


DTM จะเริ่มต้นเดินทางด้วย $\delta(q_0, \Delta) = (q_1, \Delta, R)$ เพื่อให้หัวเทปชี้ไปที่ช่องสุดท้ายของสตริงอักขระ x เสมอ



ก็มี

$\delta(q_1, a) = (q_1, \Delta, R)$



สถานะแผนภาพ เราเอามาถ้าหนดลักษณะแบบได้แบบนี้

เราจะสามารถกำหนดโครงสร้างแบบได้

$(q_1, \Delta a b b a \Delta) \vdash (q_1, \Delta \Delta a b b a \Delta)$

$\vdash (q_1, \Delta \Delta \underline{a} b b a \Delta)$

TM

เนื่องจาก โดยปกติเราจะใช้สัญลักษณ์ Δ เป็น ถ้าคำนวณจุดเริ่มต้น เราจะต้องเดินไปสุดเพื่อหาตำแหน่งที่ว่างก็สิ้นสุดลงในเทป

Ex การสร้าง DTM

Ex. $L = \{a^i b^j \mid i = j\}$

จงสร้าง DTM ที่ยอมรับภาษา L

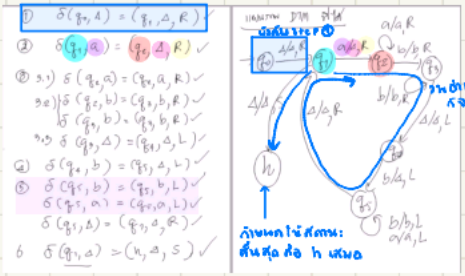
รูปแบบการเดิน TM

x = aaabbb

แนวทางการออกแบบ 6 step

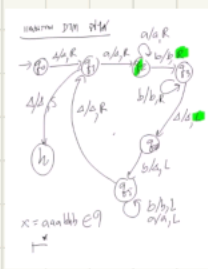
① จาก q_0 อ่าน Δ ย้ายไปยังสถานะใหม่ q_1	$\delta(q_0, \Delta) = (q_1, \Delta, R)$
② ที่ q_1 รับ a ครั้งแรก จะไปที่ q_2	② $\delta(q_1, a) = (q_2, \Delta, R)$
③ เดินวนไปสู่การกระทำอื่นๆ โดยไม่ประมวลผล q_2 ที่ไม่ใช่ 2.1 เจอ a ครั้งแรก 2.2 เจอครั้งที่ 2 ของ a 2.3 เจอครั้งแรกของ b ไปที่ q_3 ตลอดไป	③ 2.1) $\delta(q_2, a) = (q_2, a, R)$ 2.2) $\delta(q_2, a) = (q_2, a, R)$ 2.3) $\delta(q_2, b) = (q_3, b, R)$
④ เมื่อเดินมาเจอ b ตัวสุดท้าย จะต้องเจอ b ตลอด	④ $\delta(q_3, b) = (q_3, b, L)$
⑤ จากนั้นเราต้องกลับไปเดินซ้ายเพื่อทำรอบใหม่	⑤ $\delta(q_3, a) = (q_2, b, L)$ $\delta(q_2, a) = (q_2, a, L)$ $\delta(q_2, \Delta) = (q_1, \Delta, R)$
⑥ เมื่อไม่มีตัวอักษรให้ประมวลผลอีกแล้ว เราจะถือว่าเป็นตัวในภาษา	6 $\delta(q_1, \Delta) = (h, \Delta, S)$

จำได้ DTM



ทำ ตัวแบบ DTM นี้ได้มาตรวจ x

x = aaabbb ∈ ?



$(q_0, \Delta aaabbb\Delta)$ — แปลว่า head อยู่

$\vdash (q_1, \Delta aaabbb\Delta)$ → เริ่มเดิน ①

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → เจอตัวแรก ②

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → เริ่มวนอ่าน จนครบ ③

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → หยุดอ่าน b จนครบ

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

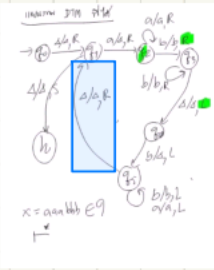
$\vdash (q_4, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → เกินกลับ (4.1)

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → นักสาร b ④

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → วนอ่านย้อนหลัง จะ กลับไป

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

(ต่อ)



$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ หยุดใหม่

$\vdash (q_1, \Delta\Delta aabbb\Delta)$ → เส้นอ่านหยุดตัวที่ 2 แสดงว่า จะแบบเดินไปเรื่อยๆ

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

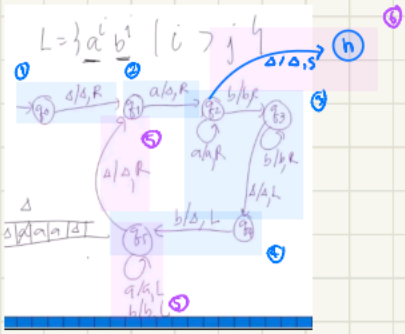
$\vdash (q_2, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

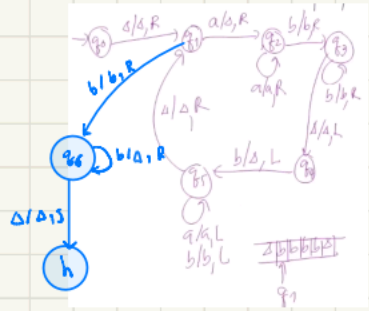
$\vdash (q_3, \Delta\Delta aabbb\Delta)$

$\vdash (q_3

ex DTM ในกรณี i > j



ex DTM ในกรณี i < j

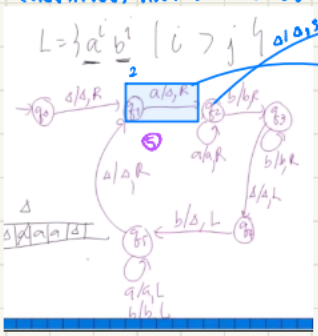


tip จะสังเกตว่า ไม่ว่า กรณีไหน $q_0 - q_5$ จะเดินเหมือนกัน แต่ q_5 จะเดินกลับ q_1 ต่อเมื่อเป็นอยู่กันว่างเท่ากับ pre ตรง ? ถ้าไม่ทำก็จะเดินกลับ q_1 ถ้าทำก็เดินไป DTM ก่อนหน้า

ส่วน h เราต้องพิจารณาเอง ว่า สถานะไหนที่ได้เกิด h

โจทย์ ในหนังสือ

(ลองทำเอง) กรณี x = aaabbt ?



อธิบาย q_1 อ่าน a ให้ Δ ไปทางขวา ที่ q_2

	Δ	Δ	a	a	b	b	Δ

↑ head

$(q_0, \underline{\Delta}aaabbΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\underline{a}aabbΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta a\underline{a}abbΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta aa\underline{a}bbΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta aaa\underline{b}bΔ)$

$\vdash (q_3, \Delta aaa\underline{b}\underline{b}Δ)$

$\vdash (q_3, \Delta aaabb\underline{Δ})$

$\vdash (q_4, \Delta aaa\underline{b}\underline{b}Δ)$

$\vdash (q_5, \Delta aaa\underline{b}ΔΔ)$

$\vdash (q_5, \Delta aaa\underline{a}bΔΔ)$

$\vdash (q_5, \Delta aa\underline{a}bΔΔ)$

$\vdash (q_5, \Delta\underline{a}aabΔΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\underline{a}aabΔΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\Delta\underline{a}abΔΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\Delta a\underline{a}bΔΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta\Delta aa\underline{b}ΔΔ)$

$\vdash (q_3, \Delta\Delta aa\underline{b}\underline{Δ}Δ)$

$\vdash (q_4, \Delta\Delta aa\underline{b}ΔΔ)$

$\vdash (q_5, \Delta\Delta a\underline{a}ΔΔ)$

$\vdash (q_5, \Delta\Delta\underline{a}aΔΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\Delta\underline{a}aΔΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta\Delta\Delta\underline{a}ΔΔ)$

$\vdash (h, \Delta\Delta\Delta\underline{a}ΔΔ)$

∴ ยอมรับได้ #

(ลองทำเอง) กรณี x = ab ε ?

	Δ	a	Δ	Δ

↑ head

$(q_0, \underline{\Delta}abΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\underline{a}bΔ)$

$\vdash (q_2, \Delta a\underline{b}Δ)$

$\vdash (q_3, \Delta ab\underline{Δ})$

$\vdash (q_4, \Delta a\underline{b}Δ)$

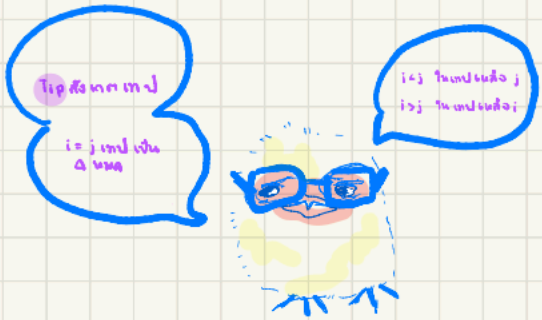
$\vdash (q_5, \Delta\underline{a}ΔΔ)$

$\vdash (q_1, \Delta\underline{Δ}ΔΔ)$

∴ ไม่ยอมรับ เพราะไม่มีทางเดินอ่าน Δ จาก q_1 #

สรุป การตรวจสอบ จะยอมรับ ?

- เดินถึง h ? ใช่ → ยอมรับ ; ไม่ → ไม่ยอมรับ
- ไม่มีทางเดินต่อ → ไม่ยอมรับ



โจทย์ในห้อง

$L_1 = \{ a^i b^j c^k d^l \mid i,j,k,l > 0$ และ $i+j = k+l \}$

จะปรับ $a^i \to a^i$

$b^j \to a^j$

$c^k \to b^k$

$d^l \to b^l$

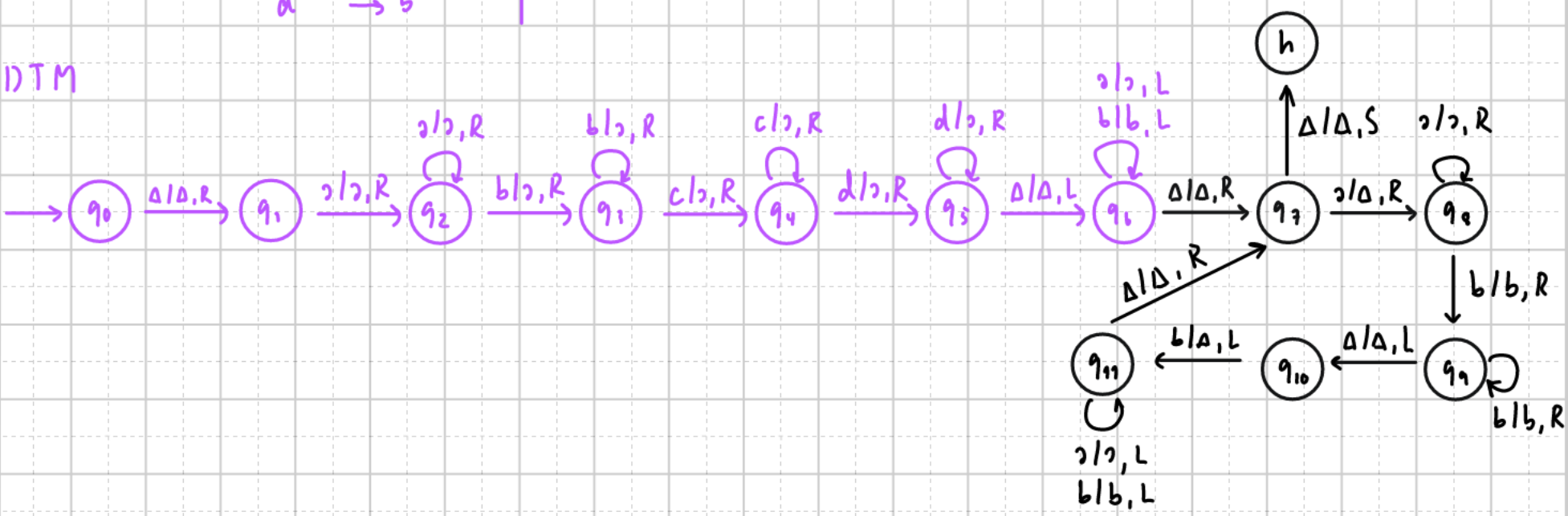
จะมองเป็น $a^i a^j b^k b^l$ เพื่อทำ preprocessing

$x = a\ b\ c\ d$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

$a\ a\ b\ b$

DTM



$L_2 = \{ a^i b^j c^k d^l \mid i,j,k,l > 0$ และ $i > (j+k) \}$

จะปรับ $a^i \to a^i$

$b^j \to b^j$

$c^k \to b^k$

จะมองเป็น $a^i b^j b^k$ เพื่อทำ preprocessing

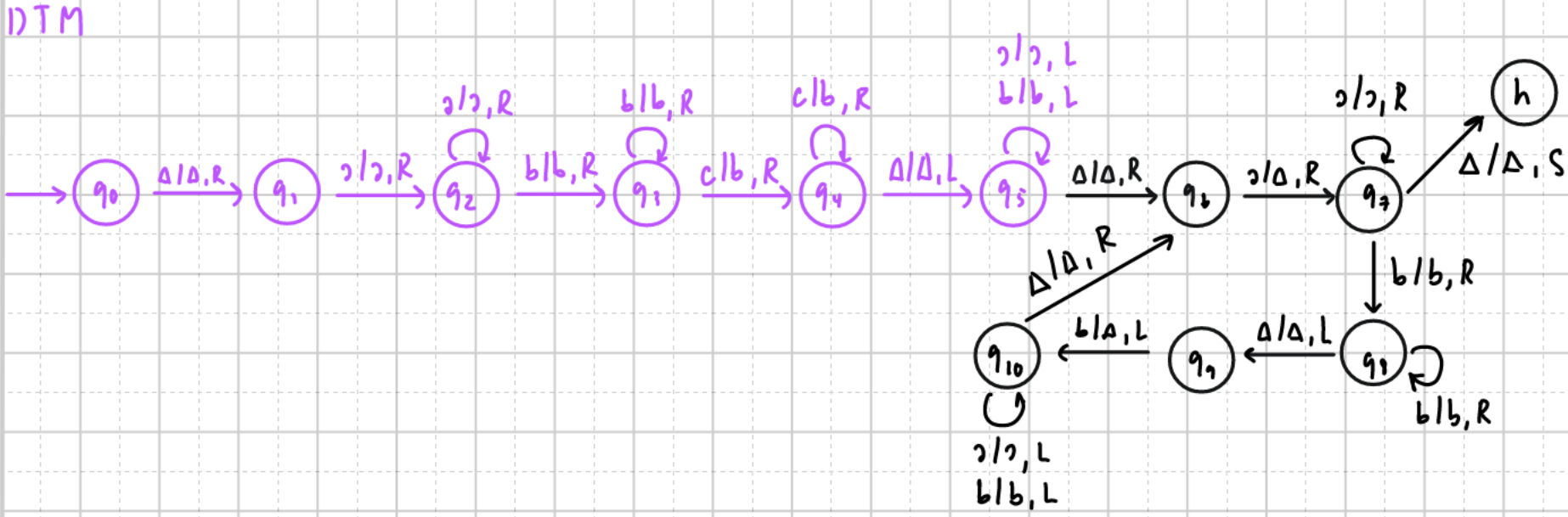
$x = a\ a\ a\ b\ c$

$\downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow$

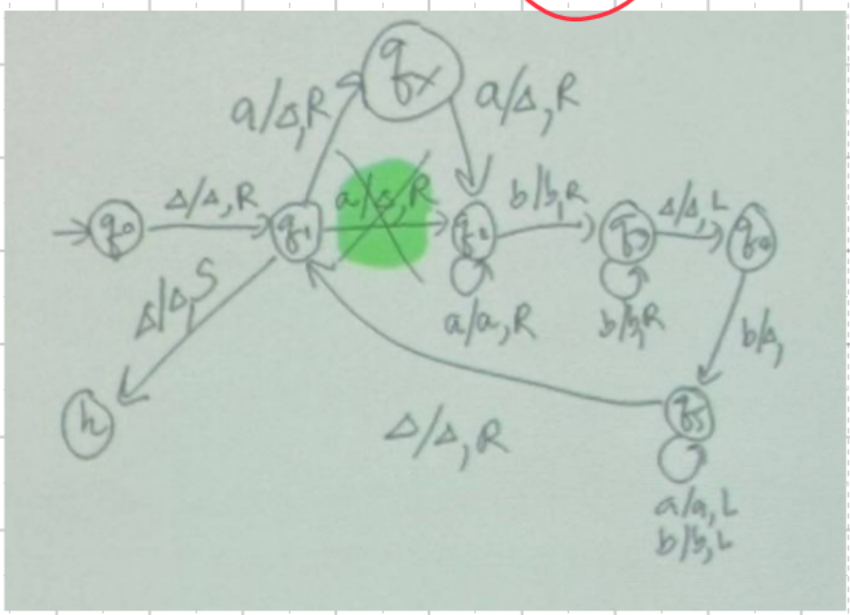
$\Delta\ \cancel{a}\ a\ a\ b\ \cancel{b}\ \Delta$

$\Delta\qquad\qquad \Delta$

DTM



$L_3 = \{ a^i b^j \mid i, j > 0$ และ $i = 2j \}$ → X = ~~a~~ ~~a~~ b ~~b~~ (ทำให้เท่ากันก่อน)

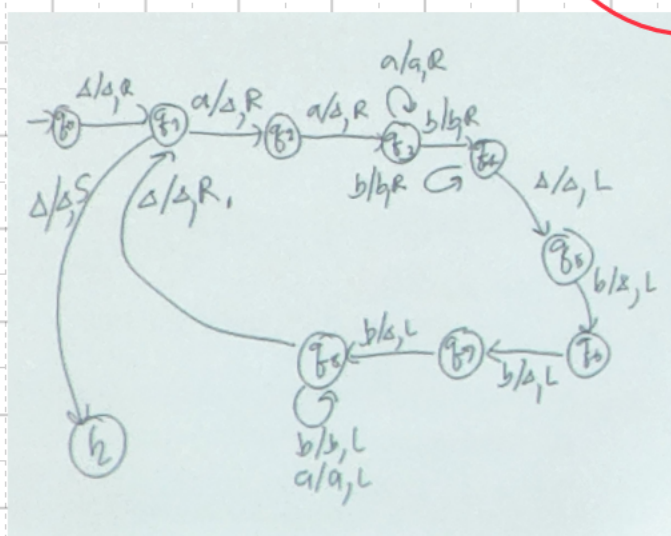


มองไปว่า ตัด A 2 b 1

เหลือ b 1 ต่อ a 0 ถูกตามเงื่อนไข ?

$L_4 = \{ a^i b^j \mid i, j > 0$ และ $3i = 2j \}$ → 3 : 2 X = ~~a~~ ~~a~~ ~~a~~ ~~a~~ a a ~~b~~ ~~b~~ ~~b~~ ~~b~~ ~~b~~ ~~b~~

→ ทำไม a ตัด 2 b ตัด 3



ถ้ามองตามเทป A จะเหลือ 1

B ตัดลบ ?

กำลังคิด

H.W

① จงสร้าง DTM ที่รับภาษาต่อไปนี้

$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i,j,k,l > 0$ และ $2(i+j) = k+l\}$

จะมองเป็น $a^{2(i+j)} b^{k+l}$ เนื่องจากเราแบบที่จะนำมาใช้ทำ Preprocessing

$a^i \rightarrow a^i$

$b^j \rightarrow a^j$

$c^k \rightarrow b^k$

$d^l \rightarrow b^l$

ต้องทำเงื่อนไขให้ถูกทั้งที่เป็น x และเปลี่ยนก็ต้องเท่า

$2(n+n) = n+n$

$4n = 2n$
$\downarrow$
$4n$

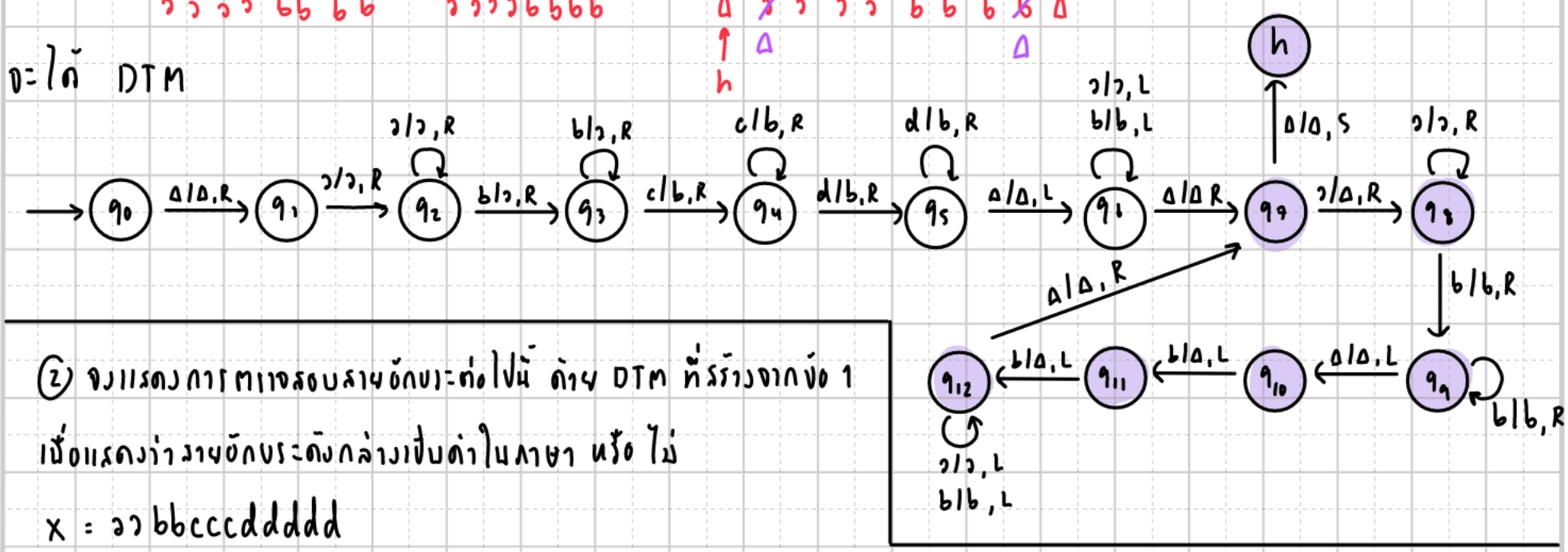
x = aa bb cc dd | aaabccd ⇒ Δ a a b b c c d d Δ

a a a a b b a a a b b b b

Δ Δ a a a b b b b Δ

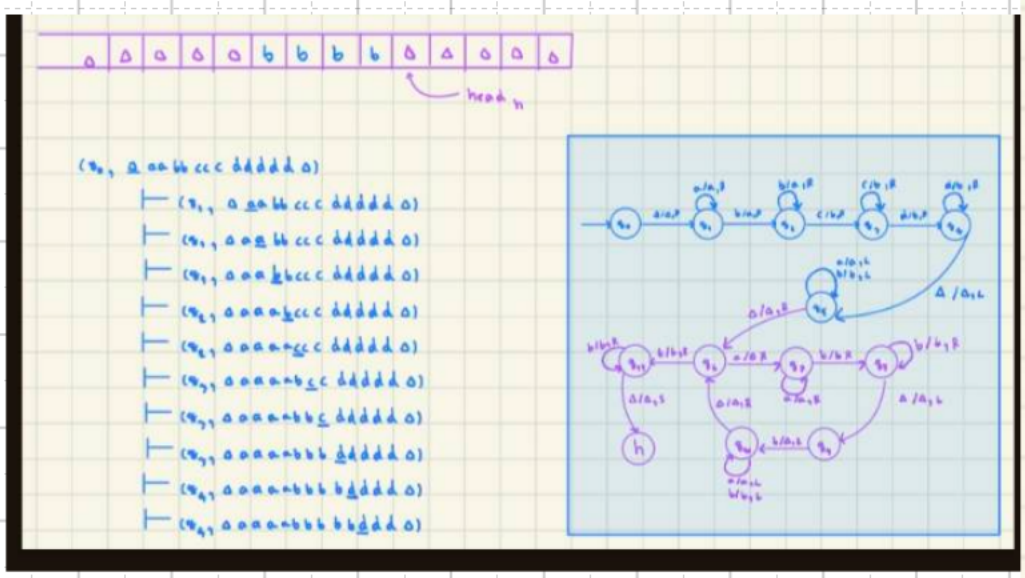
h

จะได้ DTM



② จงแสดงการทำงานของสายอักขระต่อไปนี้ ด้วย DTM ที่สร้างจากข้อ 1 เพื่อแสดงว่าสายอักขระดังกล่าวเป็นคำในภาษา หรือไม่

x = aabbcccddddd



$\vdash (q_{10}, a\,a\,a\,a\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,b\,a\,a)$