ตัวอย่าง จงหาเวกเตอร์แถวและเวกเตอร์หลักของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

กำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming)

นิยาม ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ก็ต่อเมื่อ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ โดยที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัว

จะอยู่ในรูปของผลผนวกเชิงเส้นเท่านั้น

นิยาม ให้ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วอสมการ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ และ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ จะเรียกว่า อสมการเชิงเส้น (linear inequalities)

นิยาม ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (linear programming problem : LP) คือ ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าเหมาะที่สุด โดยที่

ส่วนประกอบของmodel

1) เราจะหาค่ามากที่สุด (maximize) หรือค่าน้อยที่สุด (minimize) ของฟังก์ชันเชิงเส้นของตัวแปร (decision variables) ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective function)
2) ค่าของตัวแปรทุกตัวต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับ (constraints) ที่มี ซึ่งเงื่อนไขเหล่านี้อาจจะเป็นสมการเชิงเส้นหรืออสมการเชิงเส้นก็ได้
3) ตัวแปรแต่ละตัวต้องสอดคล้องกับการจำกัดเครื่องหมาย (sign restriction) ของตัวแปรนั้น ๆ ว่า x_i ต้องไม่เป็นจำนวนลบ หรือ x_i อาจจะเป็นค่าใด ๆ ก็ได้ (unrestricted in sign : urs)

ปกติตัวแปรจะเป็นลบไม่ได้

ตัวแปรที่ติดลบได้

Note 3 step ของกำหนดการเชิงเส้น

1.) รูปแบบ model จากปัญหา ยิ่งซับซ้อนจะยิ่งสมจริง (model คือ สมการ)
2.) ผลเฉลยจาก model
3.) วิเคราะห์ค.อ่อนไหวของผลเฉลย

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งผลิตของเล่นทำจากไม้อยู่ 2 ชนิด ได้แก่ ตุ๊กตาทหาร และรถไฟจำลอง ตุ๊กตาทหารวางขายในราคาตัวละ 27 บาท ใช้มูลค่าวัตถุดิบและค่าแรงในการผลิตตัวละ 10 และ 14 [24] บาทตามลำดับ ในขณะที่รถไฟจำลองวางขายในราคาชิ้นละ 21 บาท ใช้มูลค่าวัตถุดิบ และค่าแรงในการผลิตชิ้นละ 9 และ 10 [19] บาทตามลำดับ ขั้นตอนการผลิตของเล่นมี 2 ขั้นตอน คือ งานไม้และงานทาสี ตุ๊กตาทหารใช้เวลาทำในส่วนงานไม้ 1 ชั่วโมง และทาสีอีก 2 ชั่วโมง ส่วนรถไฟจำลองใช้เวลาทำในแต่ละขั้นตอนขั้นตอนละ 1 ชั่วโมง ในแต่ละสัปดาห์ บริษัทสามารถหาวัตถุดิบได้ไม่จำกัด แต่มีคนทำงานในส่วนงานไม้ได้สูงสุด 80 ชั่วโมง และหาคนทำงานทาสีได้ไม่เกิน 100 ชั่วโมง รถไฟจำลองสามารถขายได้ทั้งหมดที่ผลิตออกมา แต่ตุ๊กตาทหารจะขายได้มากสุดไม่เกิน 40 ตัวต่อสัปดาห์ บริษัทนี้ต้องการทำกำไรต่อสัปดาห์ให้ได้มากที่สุด

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดตัวแปร

ให้ x_1 = จน. ตุ๊กตาทหารที่ผลิตในแต่ละสัปดาห์

x_2 = จน. รถไฟจำลองที่ผลิตในแต่ละสัปดาห์

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดฟังก์ชันเป้าหมาย (max profit) กำไร = รายได้ - ต้นทุน

รายได้ต่อweek = รายได้จากตุ๊กตาทหาร + รายได้จากรถไฟจำลอง = $27(x_1) + 21(x_2)$

ต้นทุนวัตถุดิบ = $10x_1 + 9x_2$

ต้นทุนค่าแรง = $14x_1 + 10x_2$

กำไร = $27x_1 + 21x_2 - (10x_1 + 9x_2) - (14x_1 + 10x_2)$

$= 3x_1 + 2x_2$

$\max z = 3x_1 + 2x_2$

เป้าหมาย กำไร

ขั้นตอนที่ 3 กำหนดเงื่อนไขบังคับ

1.) มีคนทำงานไม้ได้สูงสุด 80 ชม. => $x_1 + x_2 \leq 80$

2.) มีคนทำงานทาสีได้ไม่เกิน 100 ชม. => $2x_1 + x_2 \leq 100$

3.) ตุ๊กตาทหารขายได้ไม่เกิน 40 ตัว per week => $x_1 \leq 40$

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดการกำกัดเครื่องหมาย

$x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$

Linear Programming Problem : LP

↳ $\max z = 3x_1 + 2x_2$

subject to (s.t)

ข้อจำกัด

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 80 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

constraint's right-hand side (rhs)

technological coefficients

Check

feasible/infeasible ทำได้โดยเอาเลขมาแทน แล้วดูว่าทุกเงื่อนไขผ่านมั้ย

(x_1, x_2)

(40, 20) feasible

(15, 70) infeasible

(30, 30) feasible

หมายเหตุ สัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเงื่อนไขบังคับ เรียกว่า technological coefficients

จำนวนทางด้านขวาของแต่ละเงื่อนไข เรียกว่า constraint's right-hand side (rhs)

สมมุติฐานข้อ 1 สมมุติฐานข้อ 2

The Proportionality and Additivity Assumptions

จากการที่ฟังก์ชันเป้าหมายใน LP เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น เราจึงได้ข้อสรุปดังนี้

1. ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายจะต้องเป็นสัดส่วนกับค่าของตัวแปร
2. ค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่เกิดจากตัวแปรหนึ่งจะต้องเป็นอิสระจากค่าของฟังก์ชันเป้าหมายที่เกิดจากตัวแปรอื่น ๆ

ในทำนองเดียวกัน การที่เงื่อนไขบังคับใน LP ก็ต้องเป็นสมการหรืออสมการเชิงเส้น เราก็จะได้ข้อสรุป ดังนี้

1. ค่าที่เกิดจากตัวแปรแต่ละตัวทางซ้ายมือในเงื่อนไขบังคับจะต้องเป็นสัดส่วนกับค่าของตัวแปรนั้น ๆ
2. ค่าที่เกิดจากตัวแปรหนึ่งทางซ้ายมือจะต้องเป็นอิสระจากค่าของตัวแปรตัวอื่น

ทุกส่วนต้องสัดส่วนกัน

หมายเหตุ ข้อสรุป 1. เรียกว่า Proportionality Assumption of LP
ข้อสรุป 2. เรียกว่า Additivity Assumption of LP

สองส่วนต้องไม่เกี่ยวข้องกัน

สมมุติฐานข้อ 3

The Divisibility Assumption

หมายถึง ตัวแปรแต่ละตัวสามารถมีค่าเป็นเศษส่วนได้ ปัญหา LP ที่ตัวแปรต้องเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะเรียกว่า integer programming problem

ในหลาย ๆ กรณี การสมมุตินี้ไม่เป็นจริง จึงใช้วิธีการปัดเศษผลเฉลยที่ได้เพื่อให้ได้คำตอบที่สมเหตุสมผล แต่ถ้าการปัดเศษนั้นทำให้เกิดความแตกต่างมากเกินไป เราจะต้องใช้วิธีของ integer programming แทน

สมมุติฐานข้อ 4

The Certainty Assumption

หมายความว่า แต่ละพารามิเตอร์ (เช่น สัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันเป้าหมาย, rhs และ technological coefficient) จะต้องทราบค่าแน่นอน

บริเวณที่เป็นไปได้และผลเฉลยเหมาะที่สุด

มีมากกว่า 1

นิยาม บริเวณที่เป็นไปได้ (feasible region) สำหรับ LP คือ เซตของทุกจุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับและการกำกัดเครื่องหมายทุกข้อ (ในที่นี้ จุดหมายถึง ค่าเฉพาะเจาะจงของแต่ละตัวแปร) → ค่าที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้ว จุด $(x_1 = 40, x_2 = 20)$ อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ และจุด $(x_1 = 15, x_2 = 70)$ ไม่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้

จุดที่ไม่อยู่ในบริเวณที่เป็นไปได้ของ LP เรียกว่า infeasible point

ใช้กราฟหาได้ best solution

(โดยปกติแล้วจะมี 1 คำตอบ บางครั้งอาจจะไม่มี หรือมีมากกว่า 1

นิยาม สำหรับปัญหาค่ามากสุด ผลเฉลยเหมาะที่สุด (optimal solution) ของ LP คือ จุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงที่สุด

สำหรับปัญหาค่าน้อยสุด ผลเฉลยเหมาะที่สุดของ LP คือ จุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายน้อยที่สุด

LP ส่วนใหญ่มักจะมีผลเฉลยเหมาะที่สุดเพียงผลเฉลยเดียว แต่ก็มีบาง LP ที่อาจจะไม่มีผลเฉลยเลย หรือบาง LP ก็อาจจะมีผลเฉลยมากมายนับไม่ถ้วน

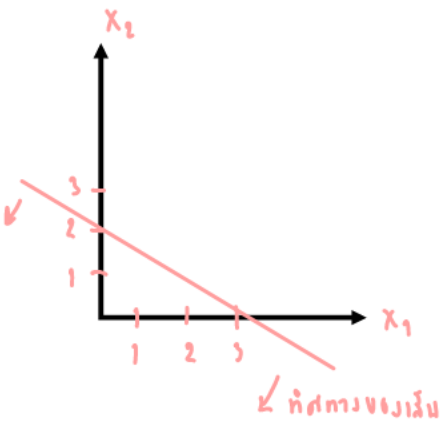
Note ♡

1. ใช้นิยาม convex
- กำหนดจุดให้จุดตัดของ fesible region
- เอาพิกัดของทุกจุดตัดไปแก้สมการ
- แล้วดูว่าค่าตอบไหนดีที่สุด หรือเป็นเป้าหมายของโจทย์

การใช้กราฟเพื่อหาผลเฉลยของปัญหา *LP* ชนิด 2 ตัวแปร

เราจะกำหนดให้ตัวแปร x_1 และ x_2 เป็นแกน x และแกน y ตามลำดับ

ตัวอย่าง จงวาดกราฟของจุดทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $2x_1 + 3x_2 \leq 6$



$2x_1 + 3x_2 = 6$

ได้ 2 จุด

$(0,2) \Rightarrow 2(0)+3(2)=6$

$(3,0) \Rightarrow 2(3)+3(0)=6$

$\therefore (0,2),(3,0)$

และจากสมการมันน้อยกว่า 6 $(2(0)+3(0)<6)$

$\therefore$ ลูกศรชี้ลงข้างล่าง

Step

1.) มอง $\leq$ เป็น =

2.) เอาค่า 2 จุดไปแทนในกราฟ

3.) ลองเอา 0 ไปแทนแล้วดูว่า บน หรือ ล่างที่เป็นจริง

การหาบริเวณที่เป็นไปได้

การแก้ปัญหา *LP* ชนิด 2 ตัวแปรโดยใช้กราฟ เริ่มจากเราจะต้องหาบริเวณที่เป็นไปได้ของปัญหา ซึ่งก็คือเซตของจุดทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทุกข้อของปัญหานั้น

แทน 0 ที่ตัวใดตัวหนึ่งของสมการเหรอ??

แทน (0,0) ลงในสมการ
0+0<100 = True ดังนั้นเอาข้างล่าง
ใช้ลูกศรกำกับ

ตัวอย่าง จากตัวอย่างบริษัทของเล่น เราได้ *LP* ดังนี้

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_1 & +x_2 & \leq 80 \\ 2x_1 & +x_2 & \leq 100 \\ x_1 & & \leq 40 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{array}}$$

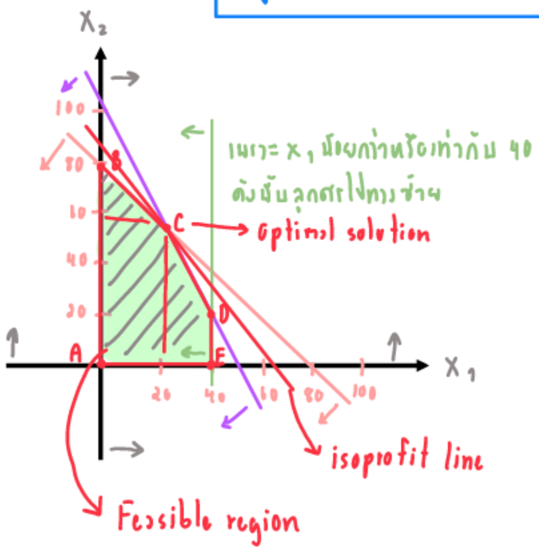
(0,80) ①

(0,100), (50,0) ②

③ $x_1 = 40$

→ อันนี้คือเส้นแนวตั้งกับแนวนอน

เรามีอสมการทั้งหมด 5 อสมการ ใช้อสมการในการplotจุด 5 จุด



Solution (ใช้วิธีoptimal ในการหาค่าสูงสุด (isoprofit)) วิธีที่ 1

	$z = 3x_1 + 2x_2$
A (0,0)	3(0) + 2(0) = 0
B (0,80)	3(0) + 2(80) = 160
C (20,60)	180
D (40,20)	160
E (40,0)	120

→ optimal

Note isoprofit คือเส้นกำไร เอาส่วนมาเลื่อน ↑↓ ตาม z ซึ่งเอาไว้หาจุด optimal

การหาผลเฉลยเหมาะที่สุด ↗ Feasible region

เมื่อเราได้บริเวณที่เป็นไปได้แล้ว ลำดับต่อไปก็คือการหาผลเฉลยเหมาะที่สุด ซึ่งก็คือจุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่าฟังก์ชันเป้าหมายสูงสุดนั่นเอง เราสามารถหาผลเฉลยเหมาะที่สุดได้โดยใช้การลากเส้นวัตถุประสงค์ (*isoprofit* line หรือ *isocost* line) [max] [min]

เป็นเลขอะไรก็ได้ → $z = 3x_1 + 2x_2$

การวาดเส้นวัตถุประสงค์ทำได้โดยเราจะเลือกจุดใด ๆ ในบริเวณที่เป็นไปได้ขึ้นมาจุดหนึ่งแล้วนำไปแทนค่าลงในฟังก์ชันเป้าหมายเพื่อหาค่า z นำค่า z ที่ได้แทนลงในสมการฟังก์ชันเป้าหมาย เราก็จะได้สมการของเส้นวัตถุประสงค์ เนื่องจากเส้นวัตถุประสงค์ทุกเส้นมีความชันเท่ากัน เราจึงสามารถวาดเส้นวัตถุประสงค์เส้นอื่น ๆ ได้โดยเลื่อนเส้นตรงที่เราได้ในทิศทางที่ขนานกับเส้นเดิม

ตัวอย่าง จากตัวอย่างข้างต้น $z = 3x_1 + 2x_2$

วิธีที่ 2 isoprofit ex. ถ้ามีการหา max ของ feasible region

$z = 3x_1 + 2x_2$

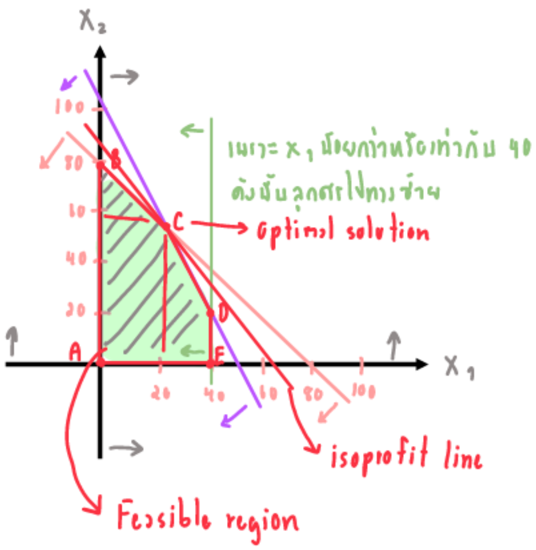
$= 3(0) + 2(60) = 120$

$= 3(40) + 2(0) = 120$

$= (0,60), (40,0)$

ได้มาเป็นจุด plot ไปแล้ว จุดตัด คือ optimal

☆ งง ดังไร ??



เมื่อเราสามารถหาผลเฉลยเหมาะที่สุดได้แล้ว เราก็จะสามารถแยกประเภทของเงื่อนไขบังคับแต่ละเงื่อนไขได้ ดังนี้

นิยาม เงื่อนไขบังคับจะเป็นเงื่อนไขบังคับที่ไม่มีข้อยืดหยุ่นเลย (*Binding constraint*) ถ้าแทนค่าผลเฉลยเหมาะที่สุด(optimal)ลงในเงื่อนไขแล้วค่าทางซ้ายมือของเงื่อนไขเท่ากับค่าทางขวามือ (นั่นคือ แทนค่าแล้วทำให้เงื่อนไขเป็นสมการ)

นิยาม เงื่อนไขบังคับจะเป็นเงื่อนไขบังคับที่มีข้อยืดหยุ่น (*Nonbinding constraint*) ถ้าแทนค่าผลเฉลยเหมาะที่สุดลงในเงื่อนไขแล้วค่าทางซ้ายมือของเงื่อนไขไม่เท่ากับค่าทางขวามือ (นั่นคือ แทนค่าแล้วเงื่อนไขเป็นอสมการ)

$\boxed{\max\ z = 3x_1 + 2x_2}$ object function

$x_1 + x_2 \le 80$

$2x_1 + x_2 \le 100$

$x_1 \le 40$

constraint (ข้อจำกัด)

$x_1, x_2 \ge 0$ sign rest.

optimal = (20, 60)

$x_1 + x_2 \le 80$; $20 + 60 \le 80$ (binding constraint)

$2x_1 + x_2 \le 100$; $2(20) + 60 \le 100$ (binding constraint)

$x_1 \le 40$; $20 \le 40$ (Nonbinding constraint)

Convex

2 จุดใดๆที่วิ่งตรงไปหากันได้แล้วยังอยู่ในรูป

เราจะพบว่าการหาผลเฉลยเหมาะที่สุดด้วยเส้นวัตถุประสงค์บางครั้งก็อาจจะไม่สะดวกนัก เราจึงใช้สมบัติของเซตนูน (convex set) และจุดสุดขีด (extreme point) เพื่อหาผลเฉลยเหมาะที่สุดได้อีกทาง ดังนี้

ลั่นรถที่จุดใดๆ ไม่สามารถไปต่อได้ เป็นจุดสุดขีด

1. สำหรับ LP ใด ๆ บริเวณที่เป็นไปได้ (feasible region) จะเป็นเซตนูนเสมอ (convex เสมอ)
2. สำหรับ LP ใด ๆ บริเวณที่เป็นไปได้จะมีจุดสุดขีดเป็นจำนวนจำกัดเสมอ
3. LP ใด ๆ ที่มีผลเฉลยเหมาะที่สุด (optimal solution) จะมีจุดสุดขีด (EP) เป็นจุดที่เหมาะที่สุด (optimal) เสมอ

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งผลิตรถยนต์และรถแวน บริษัทเชื่อว่าลูกค้าส่วนใหญ่คือผู้ที่มีรายได้สูงทั้งหญิงและชาย ดังนั้นเพื่อที่จะเข้าถึงลูกค้ากลุ่มนี้บริษัทจึงลงทุนกับการโฆษณาโดยตัดสินใจซื้อเวลาโฆษณาจากรายการทีวี 2 รายการ คือ รายการตลกและละคร โฆษณาจากรายการตลกมีผู้ชมที่เป็นหญิง 2 ล้านคนและชาย 12 ล้านคน ส่วนโฆษณาจากละครมีผู้ชมที่เป็นหญิง 7 ล้านคนและชาย 2 ล้านคน รายการตลกคิดค่าโฆษณา 100,000 บาทต่อนาที ส่วนละครคิดค่าโฆษณา 50,000 บาทต่อนาที บริษัทต้องการให้กลุ่มเป้าหมายที่เป็นหญิงเห็นโฆษณานี้อย่างน้อย 28 ล้านคน และกลุ่มเป้าหมายที่เป็นชายอย่างน้อย 24 ล้านคน จงใช้ LP เพื่อให้บริษัทสามารถโฆษณาได้ตามที่ต้องการโดยมีค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด พร้อมทั้งวิเคราะห์ว่า LP นี้สอดคล้องกับการสมมุติทั้ง 4 ก่อนหน้านี้หรือไม่

ให้ x_1 = จำนวนนาทีที่ซื้อโฆษณารายการตลก

x_2 = จำนวนนาทีที่ซื้อโฆษณารายการละคร

min $z = 100,000x_1 + 50,000x_2$

solution

(ญ) $\rightarrow 2x_1 + 7x_2 \geq 28$ (ล้าน)

(ช) $\rightarrow 12x_1 + 2x_2 \geq 24$ (ล้าน)

$x_1, x_2 \geq 0$

สมมุติฐาน

✓1.) ทุกอย่างเป็นสัดส่วนกัน ∴ ไม่สมจริง (มีโอกาสที่เป้าหมายจะไม่ครบ)

= โฆษณาที่ดูเราดูแบบต่อเนื่องนาทีที่ 1-3 เราเป็นคนดูทั้งหมด ไม่ได้เปลี่ยนคน

✓2.) สองส่วนแยกจากกัน ∴ ไม่สมจริง

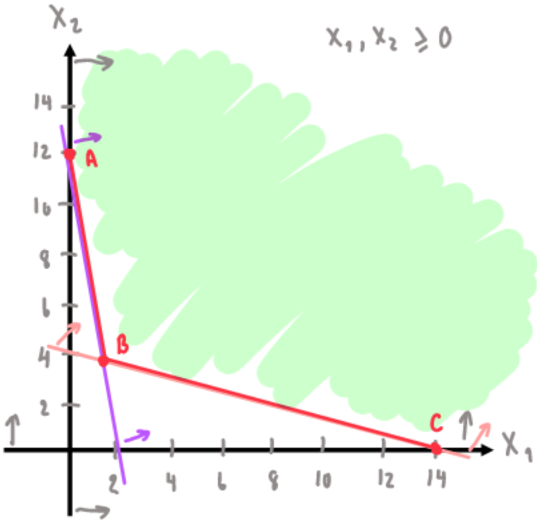
= คนๆเดียวอาจจะดูทั้ง 2 รายการ

✗3.) คำตอบเป็นเศษ ∴ สมจริง

= เพราะเป็นเรื่องของเวลา

✓4.) ทราบค่าที่แน่นอน ∴ ไม่สมจริง

= การที่เรามั่นใจว่าจะมีคนดูเท่าไหร่แต่ค.เป็นจริงเราไม่อาจรู้ได้



เป็น feasible region ในรูปของ open feasible ไม่มีขอบเขตแต่เป็น convex แน่นอน

(ญ) $\rightarrow 2x_1 + 7x_2 = 28$

(14,0), (0,4) ①

(ช) $\rightarrow 12x_1 + 2x_2 = 24$

(2,0), (0,12) ②

แทน (0,0)

$2(0) + 7(0) \geq 28$; False

$12(0) + 2(0) \geq 24$; False

	$z = 100,000x_1 + 50,000x_2$
A(0,12)	10(0) + 5(12) = 60 ; 600,000
B(1.4, 3.6)	140000 + 180000 = 320,000 → optimal
C(14, 0)	100,000(1.4) + 5(0) = 140 ; 1,400,000

หาจุด B

$2x_1 + 7x_2 = 28$; คูณ 6 ไปให้เท่า ②

$\cancel{12x_1} + 42x_2 = 168$

$\cancel{12x_1} + 2x_2 = 24$ } ⊖

$40x_2 = 144$

$x_2 = \frac{144}{40} = 3.6$

แทนค่า

$12x_1 + 2(3.6) = 24$

$12x_1 + 7.2 = 24$

$12x_1 = 16.8$

$x_1 = 1.4$

ปัญหา LP กรณีพิเศษ

จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะพบว่าได้ผลเฉลยเหมาะที่สุดมาเพียงชุดเดียวเท่านั้น แต่บางครั้ง *LP* ก็ไม่ได้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว โดยจะแบ่งได้ *3* ประเภท ดังนี้

1. *LP* ที่มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์ (*alternative or multiple optimal solutions*) มีหลายคำตอบ

★ เวลาซ้ำมันจะซ้ำแค่ 2 จุด

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่งผลิตรถยนต์และรถแวน รถแต่ละคันจะต้องผ่านขั้นตอนการประกอบชิ้นส่วนและพ่นสี ถ้าฝ่ายพ่นสีทำแต่รถแวนเพียงอย่างเดียวจะพ่นสีได้ *40* คันต่อวัน ถ้าทำแต่รถยนต์อย่างเดียวจะพ่นสีได้ *60* คันต่อวัน ★ วันเป็นข้อจำกัด สำหรับฝ่ายประกอบชิ้นส่วนถ้าทำแต่รถยนต์อย่างเดียวทำได้ *50* คันต่อวัน ถ้าประกอบแต่รถแวนอย่างเดียวก็ทำได้ *50* คันต่อวัน รถแวนแต่ละคันทำกำไรให้ได้ *300,000* บาทส่วนรถยนต์ทำกำไรได้คันละ *200,000* บาท จงใช้ *LP* เพื่อหาว่าบริษัทควรจะวางแผนการผลิตอย่างไรให้ได้กำไรสูงสุด

ให้ x_1 = จำนวนรถแวน

x_2 = จำนวนรถยนต์

จัดรูปให้สมการได้โดยนำเลขมา ×, ÷ ตลอดสมการ

$\max z = 3x_1 + 2x_2$ (แสนบาท)

s.t.

(ทำสี) $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$

เพราะ 1 วันทำได้ 40 คัน ∴ 40 คัน = 1 วัน ถ้าเป็น 1 คันจะ = $\frac{1}{40}$

×120 → $3x_1 + 2x_2 \leq 120$ (40,0), (0,60) ①

(ประกอบ) $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$

×50 → $x_1 + x_2 \leq 50$ (50,0), (0,50) ②

$x_1, x_2 \geq 0$

หา C

$3x_1 + \cancel{2x_2} = 120$

$2x_1 + \cancel{2x_2} = \cancel{50}\ 100 \rightarrow \times 2$ } ⊖

$x_1 = 20$

$x_1 + x_2 = 50$

$20 + x_2 = 50$

$x_2 = 30$

	$z = 3x_1 + 2x_2$
A (0,0)	0
B (0,50)	100
C (20,30)	120
D (40,0)	120

โดยสรุป บริษัทนี้มีผลเฉลยเหมาะที่สุดมากมายนับไม่ถ้วน ซึ่งเกิดจากเส้นวัตถุประสงค์ซ้อนทับกับส่วนของเส้นตรงทั้งเส้นที่เป็นด้านของบริเวณที่เป็นไปได้ และจะสังเกตได้ว่า ถ้ามีสองจุดเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดแล้ว ทุก ๆ จุดบนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างสองจุดนั้นก็จะเป็นผลเฉลยเหมาะที่สุดด้วย

เทคนิคที่ใช้เลือกคำตอบในกรณีที่มีผลเฉลยเหมาะที่สุดหลายคำตอบ คือ *Goal programming*

2. LP ที่ไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้เลย (infeasible LP)

ในบางกรณี *LP* อาจจะไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้เลยก็ได้ นั่นคือ ไม่มีจุดใดเลยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบังคับทั้งหมด *LP* แบบนี้จะเรียกว่า *infeasible LP* และเนื่องจากผลเฉลยเหมาะที่สุดก็คือจุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ดีที่สุด ดังนั้น *infeasible LP* จึงไม่มีผลเฉลยเหมาะที่สุด คือ หาบริเวณที่ช่วงของทุกเส้นไม่ได้เลย
วิธีแก้ → ลดเงื่อนไข

ตัวอย่าง จากตัวอย่างที่แล้ว สมมติให้บริษัทผลิตรถยนต์และรถแวนต้องผลิตรถแวนอย่างน้อย 30 คันและรถยนต์อย่างน้อย 20 คัน จงหาผลเฉลยเหมาะที่สุดของ *LP* ใหม่นี้

ให้ x_1 = จำนวนรถแวน

x_2 = จำนวนรถยนต์

max $z = 3x_1 + 2x_2$ (แสนบาท)

s.t.

เพราะ 1 วันทำได้ 40 คัน ∴ 40 คัน = 1 วัน ถ้าเป็น 1 คันจะ = $\frac{1}{40}$

(ทำสี) $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \le 1$

×120 → $3x_1 + 2x_2 \le 120$ (40,0), (0,60) ①

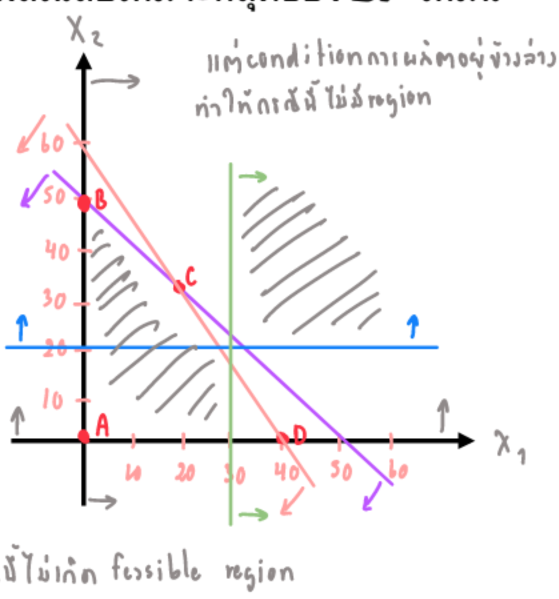
(ประกอบ) $\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \le 1$

×50 → $x_1 + x_2 \le 50$ (50,0), (0,50) ②

$x_1 \ge 30$ (30,0) ✓

$x_2 \ge 20$ (0,20) ✓

$x_1, x_2 \ge 0$



★ กรณีนี้ไม่เกิด feasible region

ในตัวอย่างนี้ *LP* กลายเป็น *infeasible LP* เพราะการผลิตรถแวน 30 คันและรถยนต์ 20 คันนั้นต้องใช้ฝ่ายพ่นสีทำงานให้เกินกว่าที่สามารถทำได้

3. LP ที่ไม่มีขอบเขต (unbounded LP) คือ เป็น open region แล้ว profit เลื่อนไปเรื่อยๆ

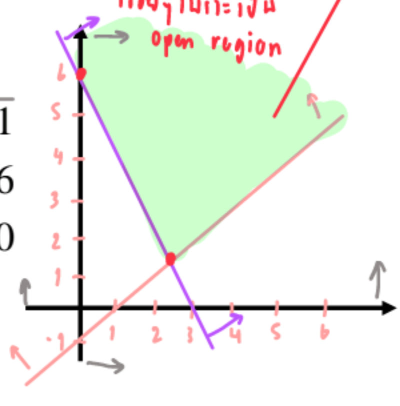
นั่นคือ มีจุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่า z ได้มากขึ้นเป็นอนันต์ สำหรับปัญหาค่ามากสุด *unbounded LP* จะเกิดขึ้นเมื่อเราสามารถหาจุดในบริเวณที่เป็นไปได้ที่ให้ค่ามากขนาดไหนก็ได้ ซึ่งนั่นหมายถึง บริษัทสามารถทำรายได้หรือกำไรได้มากเท่าไหร่ก็ได้ กรณีนี้ไม่ควรจะเกิดขึ้นใน *LP* ที่ถูกต้อง ดังนั้น หากพบว่า *LP* ที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นเป็น *unbounded LP* จึงเป็นไปได้ว่า แบบจำลอง *LP* ที่ใช้นั้นมีข้อผิดพลาดอยู่

tip โจทย์หา max / min ลักษณะแบบนี้ คือ unbounded LP

ตัวอย่าง จงแก้ *LP* ต่อไปนี้โดยใช้กราฟ

$$\begin{array}{lrrl} \max z = & 2x_1 & -x_2 & \\ \hline (1,0),(0,-1) & x_1 & -x_2 & \le 1 \\ (3,0),(0,6) & 2x_1 & +x_2 & \ge 6 \\ & & x_1, x_2 & \ge 0 \end{array}$$

isoprofit จะพุ่งไปเรื่อยๆ เพราะเป็น open region



Note open region เกิดขึ้นได้ แต่มันจะเป็น unbounded ก็ต่อเมื่อเราสามารถเลื่อน iso ได้เรื่อยๆ เมื่อเกิด unbounded = เราทำผิด ดังนั้นๆ ก็คือมันไม่มีจุดที่จะได้กำไรเป็นอนันต์

โดยสรุปแล้ว *LP* ใด ๆ ไม่ว่าจะมีกี่ตัวแปรก็ตาม จะต้องได้ผลลัพธ์อย่างใดอย่างหนึ่งใน *4* กรณีต่อไปนี้

1. *LP* มีผลเฉลยเหมาะที่สุดเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น
2. *LP* มีผลเฉลยเหมาะที่สุดจำนวนมากมายนับไม่ถ้วน
3. *LP* ไม่มีบริเวณที่เป็นไปได้
4. *LP* ไม่มีขอบเขต

Note standard form เขาจะไม่เปลี่ยนเครื่องหมายในบรรทัดสุดท้าย

The Simplex Algorithm → ใช้หลัก ERO

A. วิธีเปลี่ยน *LP* ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

จากตัวอย่างที่ผ่านมา เราจะเห็นว่าเงื่อนไขบังคับใน *LP* นั้นมีทั้งที่เป็นสมการและอสมการ และตัวแปรก็มีทั้งที่ต้องไม่เป็นค่าลบ หรือ *urs* ก่อนที่จะใช้ *simplex algorithm* มาแก้ *LP* ได้นั้น *LP* ของเราจะต้องถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานก่อน นั่นคือ เงื่อนไขบังคับทุก ๆ เงื่อนไขต้องเป็นสมการ และตัวแปรทุกตัวต้องไม่เป็นลบ

ตัวอย่าง ร้านผลิตเครื่องหนังแห่งหนึ่งผลิตเข็มขัดมา *2* แบบ คือ แบบแฟชั่นและแบบธรรมดา เข็มขัดแต่ละแบบใช้หนัง *1* หลา แบบธรรมดาใช้เวลาทำ *1* ชั่วโมง ส่วนแบบแฟชั่นใช้เวลาทำ *2* ชั่วโมง แต่ละสัปดาห์ ร้านหาหนังมาทำเข็มขัดได้ *40* หลาและมีแรงงานทำได้ *60* ชั่วโมง เข็มขัดแบบธรรมดาขายได้เส้นละ *300* บาท ส่วนแบบแฟชั่นขายได้เส้นละ *400* บาท ร้านต้องการรายได้สูงสุดในแต่ละสัปดาห์

ให้ x_1 = จน.ของเข็มขัดแฟชั่นที่ผลิต per week
x_2 = จน.ของเข็มขัดธรรมดาที่ผลิต per week

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 3x_2 \text{ (ร้อยบาท)} \\ \text{s.t. } x_1 + x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + x_2 &\le 60 \\ x_1 + x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{standard form}}$

$$\begin{aligned} \max\ z - 400x_1 - 300x_2 &= 0 && \text{row 0} \\ x_1 + x_2 + s_1 &= 40 && \text{row 1} \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 60 && \text{row 2} \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

step การทำ simplex
1.) เปลี่ยน model ให้อยู่ในรูป standard form
2.) form ตาราง simplex
3.) แทนค่าในตาราง
4.) คิดตามแบบ ERO

ทำ simplex ก็ลบค่าที่ col z ต้องไม่เปลี่ยน ถ้าเปลี่ยนต้องผิด

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs.
1	-400	-300	0	0	0
0	1	1	1	0	40
0	2	1	0	1	60

Col s_1, s_2 เรียกว่า basis variable เป็น col ที่สนใจ
(col ที่มี 1 ตัวเดียวที่เหลือ 0)
$s_1, s_2 \Rightarrow$ basis variable || $x_1, x_2 \Rightarrow$ Nonbasis variable

step การเปลี่ยน model เป็น standard form
1.) เปลี่ยนเครื่องหมายให้หมดยกเว้นบรรทัดสุดท้าย
2.) ย้ายตัวแปรมาอยู่ข้างซ้ายให้หมด

Note s_i → Stack Variable (ตัวแปรส่วนขาด)
กรณีที่ $x_1 + x_2$ แล้วยัง ≤ 40 อยู่ เขาจะใส่ $+s_1$ เข้าไป
แต่ถ้า $x_1 + x_2 = 40$ แล้ว s_1 ก็เป็น 0
e_i → เป็นตัวแปรส่วนเกินใช้กรณี $\ge$

กรณี $\le$	กรณี $\ge$
$\rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 40$	$\rightarrow x_1 + x_2 - e_1 = 40$

ในการเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับแบบน้อยกว่าหรือเท่ากับให้เป็นสมการนั้น เราจะนิยาม ตัวแปรส่วนขาด (*slack variable*) ขึ้นมา เขียนแทนด้วย s_i โดยที่ตัวแปรนี้จะหมายถึงปริมาณทรัพยากรที่ไม่ได้ถูกใช้ไปในเงื่อนไขบังคับที่ i นั่นเอง และต้องเพิ่มการกำกัดเครื่องหมาย $s_i \geq 0$ ด้วยเสมอ

สำหรับการเปลี่ยนเงื่อนไขบังคับแบบมากกว่าหรือเท่ากับให้เป็นสมการนั้น เราจะนิยาม ตัวแปรส่วนเกิน (*excess variable* หรือ *surplus variable*) เขียนแทนด้วย e_i โดยที่ตัวแปรนี้จะหมายถึงปริมาณของทรัพยากรที่ใช้เกินไปในเงื่อนไขบังคับที่ i นั่นเอง และต้องเพิ่มการกำกัดเครื่องหมาย $e_i \geq 0$ ด้วยเสมอ

ถ้าใน *LP* นั้นมีเงื่อนไขบังคับทั้งสองแบบ เราก็แค่เลือกเพิ่มตัวแปรให้เหมาะสมสำหรับแต่ละเงื่อนไขบังคับไป

ตัวอย่าง จงเปลี่ยน *LP* ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

$$
\begin{array}{rrrl}
\max z = & 20x_1 & +15x_2 & \\
 & x_1 & & \leq 100 \\
 & & x_2 & \leq 100 \\
 & 50x_1 & +35x_2 & \leq 6000 \\
 & 20x_1 & +15x_2 & \geq 2000 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

$\max z - 20x_1 - 15x_2 = 0$

s.t. $x_1 + s_1 = 100$

$x_2 + s_2 = 100$

$50x_1 + 35x_2 + s_3 = 6000$

$20x_1 + 15x_2 - e_4 = 2000$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, e_4 \geq 0$

01/03/23 32.00 นาที

B. The Simplex Algorithm

สมมติว่า เรามี *LP* ที่มี m เงื่อนไขบังคับและ n ตัวแปรในรูปมาตรฐาน ดังนี้

สิ่งที่ต้องรู้ก่อนทำ Simplex

① วิธีแปลงอสมการ → standard from (สมการ)

- เปลี่ยนเครื่องหมาย $\geq, \leq \rightarrow =$
  เปลี่ยทุกบรรทัด เว้นบรรทัดล่างสุด
- ย้ายตัวแปรมาฝั่งซ้ายให้หมด
- ถ้า $\leq$ ใช้ $+S$ ถ้า $\geq$ $-e$

$$z + 3x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

② วิธี from initial table (ตารางเริ่มต้น)

- หัวตารางคือ บรรทัดล่างของสมการ
  โดย col แรกต้องเป็น Z
- เอาเลขสัมประสิทธิ์มาใส่

1 อยู่ตรงไหนตัวแปร จะมีค่าเป็นตรงนั้น

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	
Row 0	1	3	1	0	0	6*	$z = 6$
Row 1	0	1	0	1	0	4	$s_1 = 4$
Row 2	0	2	1	0	1	3	$s_2 = 3$

basis variable ที่มีแค่ 0, 1 (ทำเด่นๆ)

③ วิธีทำ Ratio test → $\frac{\text{rhs}}{\text{สปส.}}$

- พิจารณา Row 0 ใน col ที่มีเลขติดลบ

ex

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	Retio Test
R_0	1	-3	-2	0	0	0	—
R_1	0	2	1	1	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
R_2	0	1	1	0	0	40	$\frac{40}{1} = 40$*

จุดตัด

- Retio test ใน R_0 ไม่มีเพราะ R ที่จะเอามาทำ Retio test ได้ สปส. ต้องไม่ติดลบ หรือ เป็น 0

- Retoi test ของ R ไหนน้อยสุด → เราได้จุดตัดแล้ว
- ทำไปทำไม
  → หา entering x_1 เป็น entering
  → เพื่อให้เกิดจุดตัด → จะรู้ว่าต้อง ERO แถวไหนบ้าง → พอ ERO เสร็จ จะเกิดตารางใหม่
- ตารางที่เกิดหลัง initial table คือ Table 1
- ตำแหน่งที่เกิดจุดตัด ต้องเป็น 1 แล้วที่เหลือก็จัดการ ERO ให้เป็น 0 ให้หมด
- หยุดทำ ERO ตอนไหน → ตอนที่ได้ optimal แล้ว

④ จะรู้ได้ไงว่า optimal แล้ว

→ ตอนที่ Row 0 ไม่มีเลขติดลบ

⑤ standard ที่เราเน้นใน ① คือกรณี max กรณี min ให้เอา − คูณเข้า

$$\max \; z - 3x_1 - 2x_2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$\min \; -z + 3x_1 + 2x_2 = 0$$

โดยที่ $-z$ เป็นแค่ ชื่อตัวแปร ค่าสปส. ของ $-z$ ยัง = 1

⑥ อะไรคือคำตอบ

- ค่า z และ BV *Note
- BV ดูยังไง col ที่มี 1 ตัวเดียว ที่เหลือ 0 หมด ไม่นับ col z

$z = 6$

$s_1 = 4$

$s_2 = 3$

BV. → $(s_1, s_2) = (4, 3)$

NBV. → $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Step Simplex Algorithm

① standard from
② initail Table → จะรู้ได้ทันทีว่า optimal ?
ถ้า optimal แล้ว ก็สรุปคำตอบได้เลย
③ Ratio Test
④ เกิดตารางใหม่ → ดูว่า otimal ? ถ้าไม่ก็ทำ ③ ซ้ำ
จนกว่าตารางที่เกิดใหม่จะ optimal

ex 1

Step 1
standard from

$$z + 3x_1 + x_2 = 6 \rightarrow \text{function เป้าหมาย}$$
$$x_1 + s_1 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Step 2
initial Table

optimal ↓

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs.
Row 0	1	3	1	0	0	6*
Row 1	0	1	0	1	0	4
Row 2	0	2	1	0	1	3

สรุปคำตอบ

$z = 6$
$s_1 = 4$
$s_2 = 3$

BV. → $(s_1, s_2) = (4, 3)$
NBV. → $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Note
BV = Basis Variable → คือ col ที่จะพิจารณา , เป็นคำตอบ
NBV = Non Basis Variable → คือ col ที่ = 0 เสมอ ไม่เอามาพิจารณา

ex 2 Step 1

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 2x_2 \quad &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + s_1 \quad &= 100 \\ x_1 + x_2 + s_2 \quad &= 80 \\ x_1 + s_3 \quad &= 40 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

tip: col z จะเป็นแบบเดิมเสมอไม่ว่าจะ ERO กี่รอบ

Step 2-3

entering

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	Retio test
R_0	1	-3	-2	0	0	0	0	–
R_1	0	2	2	1	0	0	100	$\frac{100}{2} = 50$
R_2	0	1	1	0	1	0	80	$\frac{80}{1} = 80$
R_3	0	1	0	0	0	1	40	$\frac{40}{1} = 40$

initial Table

$BV = (s_1, s_2, s_3)$

pivoting

$NBV = (x_1, x_2)$

$R_0 \rightarrow R_0 + 3R_3$

$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_3$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_3$

Step 4

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	Retio test
R_0	1	0	-2	0	0	3	120	–
R_1	0	0	1	1	0	-2	20	20
R_2	0	0	1	0	1	-1	40	40
R_3	0	1	0	0	0	1	40	40

Table 1

$z = 120$

$(s_1, s_2, x_1) = (20, 40, 40)$

$R_0 \rightarrow R_0 + 2R_1$

$R_2 \rightarrow R_2 - R_1$

Step 3

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	R.T.
R_0	1	0	0	2	0	-1	160	–
R_1	0	0	1	1	0	-2	20	–
R_2	0	0	0	-1	1	1	20	20
R_3	0	1	0	0	0	1	40	40

Table 2

$z = 160$

$(x_2, s_2, x_1) = (20, 20, 40)$

$R_0 \rightarrow R_0 + R_2$

$R_1 \rightarrow R_1 + 2R_3$

$R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

Table 3

Step 4

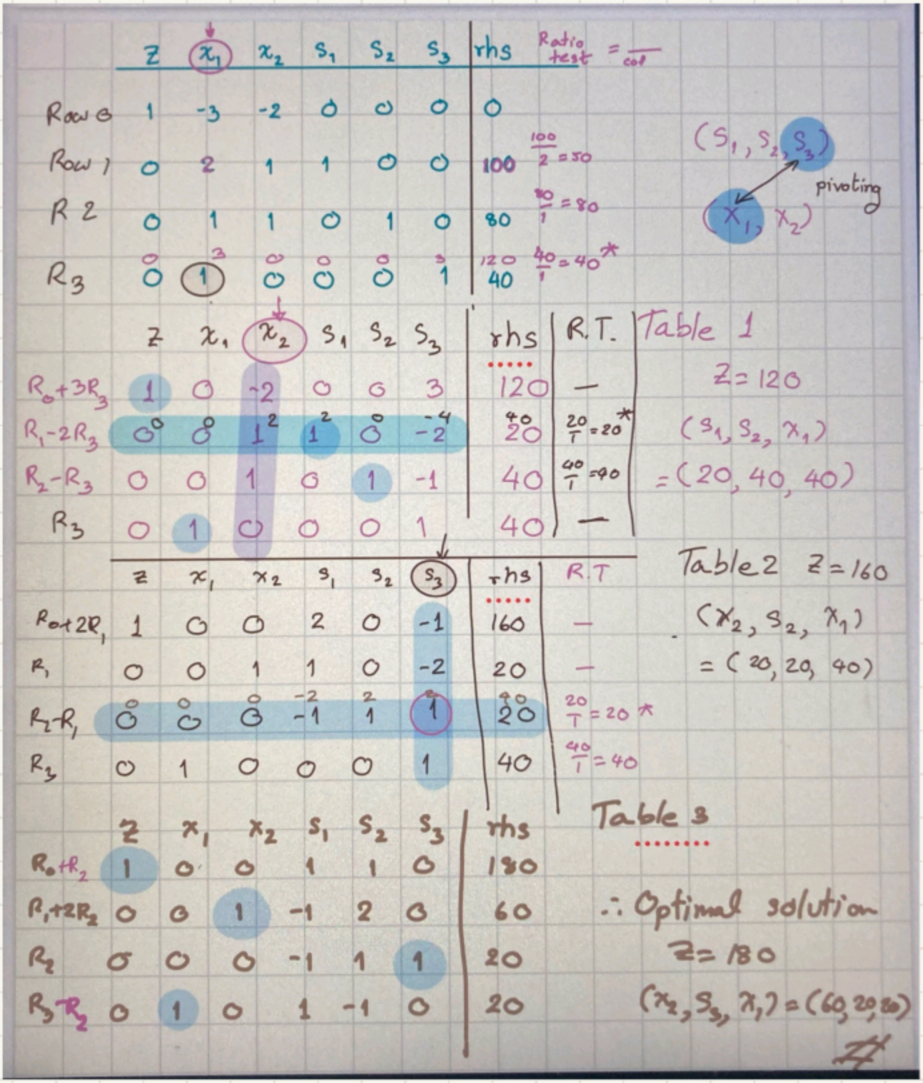
	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	R.T.
R_0	1	0	0	1	1	0	180	
R_1	0	0	1	-1	2	0	60	
R_2	0	0	0	-1	1	1	20	
R_3	0	1	0	1	-1	0	20	

∴ optimal Solution

$z = 180$

$(x_2, s_3, x_1) = (60, 20, 20)$ #

เฉลยของจาร



	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	Ratio test = rhs/col
Row 0	1	-3	-2	0	0	0	0	
Row 1	0	2	1	1	0	0	100	100/2 = 50
R 2	0	1	1	0	1	0	80	80/1 = 80
R_3	0	1	0	0	0	1	40	40/1 = 40*

$(s_1, s_2, s_3) \leftrightarrow (x_1, x_2)$ pivoting

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	R.T.
R_0+3R_3	1	0	-2	0	0	3	120	—
R_1-2R_3	0	0	1	1	0	-2	20	20/1 = 20*
R_2-R_3	0	0	1	0	1	-1	40	40/1 = 40
R_3	0	1	0	0	0	1	40	—

Table 1

$Z = 120$

$(s_1, s_2, x_1) = (20, 40, 40)$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs	R.T
R_0+2R_1	1	0	0	2	0	-1	160	—
R_1	0	0	1	1	0	-2	20	—
R_2-R_1	0	0	0	-1	1	1	20	20/1 = 20*
R_3	0	1	0	0	0	1	40	40/1 = 40

Table2 $Z = 160$

$(x_2, s_2, x_1) = (20, 20, 40)$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs
R_0+R_2	1	0	0	1	1	0	180
R_1+2R_2	0	0	1	-1	2	0	60
R_2	0	0	0	-1	1	1	20
R_3-R_2	0	1	0	1	-1	0	20

Table 3

∴ Optimal solution

$Z = 180$

$(x_2, s_3, x_1) = (60, 20, 20)$ #