

Cours "Pratique de la fiabilité" – Sujet de Projet

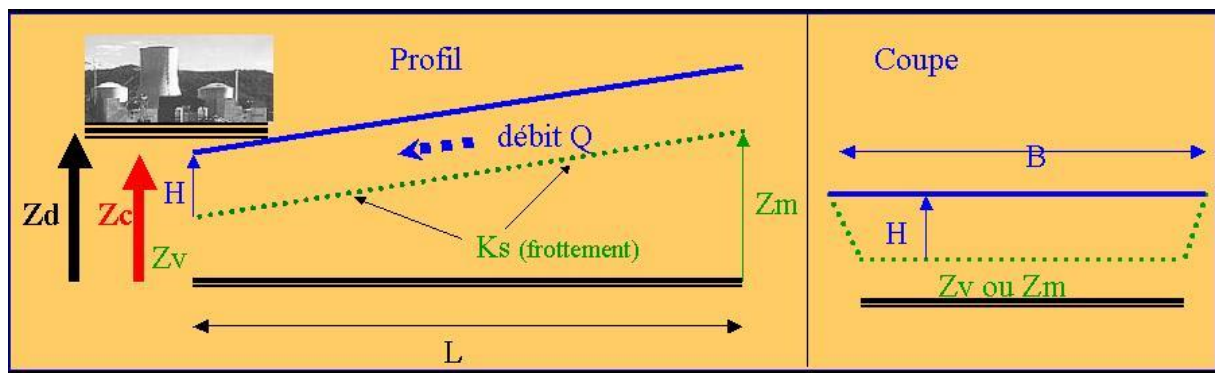
I. PRÉSENTATION DU CAS D'ÉTUDE

I.1. CONTEXTE INDUSTRIEL

On étudie la situation de risque suivante :

- une installation industrielle est située en bordure d'une rivière,
- l'écoulement des crues (de débit aléatoire Q) peut provoquer une hauteur d'eau importante H , susceptible d'inonder l'installation si la cote atteinte pendant un épisode de crue (Z_c) déborde par-dessus la digue de protection (supposée établie à la cote Z_d),
- l'importance des dommages alors occasionnés dans l'installation dépend de la vulnérabilité du site au moment du débordement hypothétique.

Comme nous le verrons par la suite, de nombreuses sources d'incertitudes affectent cette situation.



Le problème décisionnel peut être décrit de la façon suivante :

- soit on souhaite justifier, avec un critère de type "sûreté", que grâce à la digue l'installation est "hautement protégée" contre le risque de surverse.
- soit on cherche à optimiser, avec un critère plus complet de type "sûreté + valeur nette", le dimensionnement de la parade de protection (la digue) face aux coûts d'investissements et de dommages potentiels induits par le débordement.

Dans le premier cas de figure, où l'enjeu premier est relatif à la sûreté, la variable d'intérêt est directement la hauteur de la surverse et on cherche à dimensionner la hauteur de la digue h_d de sorte à minimiser le risque de débordement.

Dans le second cas de figure, associé à un enjeu de nature plus économique, la variable d'intérêt est le coût total (investissement et maintenance de la digue et dommages liés aux éventuels débordements) sur une durée d'exploitation donnée de l'installation. On cherche ici, en plus de la satisfaction d'un niveau de sûreté minimal, à minimiser le coût total.

Dans les deux cas, les grandeurs à évaluer sont incertaines, conséquence directe des incertitudes pesant sur les données d'entrée.

Pour dimensionner au mieux la hauteur de la digue h_d selon les deux objectifs décisionnels précédents, deux sources de connaissances sont disponibles :

- d'une part, un historique de mesures jointes du débit Q et de la hauteur de la crue H (voir paragraphe I.2.),
- d'autre part, un modèle hydraulique simplifié et un modèle économique (voir paragraphes I.3. à I.6.).

I.2. MESURES HISTORIQUES DE DÉBIT ET DE HAUTEUR DE CRUE

On dispose d'une base d'enregistrements historiques, sur 149 années (entre 1849 et 1997), des débits maxima annuels de crue Q et des hauteurs d'eau associées H , certaines données étant manquantes.

| Année | Débit Q (en m^3/s) | Hauteur H (en m) | Année | Débit Q (en m^3/s) | Hauteur H (en m) | Année | Débit Q (en m^3/s) | Hauteur H (en m) |
|-------|-------------------------|--------------------|-------|-------------------------|--------------------|-------|-------------------------|--------------------|
| 1849 | 3854 | | 1899 | 1730 | | 1949 | 635 | 2.4 |
| 1850 | 1256 | 4.0 | 1900 | 1889 | | 1950 | 733 | 2.8 |
| 1851 | 1649 | 4.5 | 1901 | 3320 | | 1951 | 758 | 2.7 |
| 1852 | 1605 | 4.3 | 1902 | 352 | | 1952 | 1368 | 4.5 |
| 1853 | 341 | 1.7 | 1903 | 885 | | 1953 | 935 | 3.2 |
| 1854 | 1149 | 3.4 | 1904 | 759 | | 1954 | 1173 | 3.7 |
| 1855 | 868 | 3.4 | 1905 | 731 | | 1955 | 547 | 2.5 |
| 1856 | 1148 | 4.1 | 1906 | 1711 | | 1956 | 669 | 2.6 |
| 1857 | 1227 | 4.1 | 1907 | 1906 | | 1957 | 331 | 1.8 |
| 1858 | 1991 | 5.3 | 1908 | 1543 | | 1958 | 227 | 1.4 |
| 1859 | 1255 | 4.1 | 1909 | 1307 | | 1959 | 2037 | 5.4 |
| 1860 | 1366 | 3.9 | 1910 | 1275 | | 1960 | 3224 | 6.6 |
| 1861 | 1100 | 3.8 | 1911 | 2706 | | 1961 | 1525 | 4.0 |
| 1862 | 1837 | 5.4 | 1912 | 582 | 2.5 | 1962 | 766 | 2.7 |
| 1863 | 351 | 1.7 | 1913 | 1260 | 4.3 | 1963 | 1575 | 4.9 |
| 1864 | 1084 | 3.7 | 1914 | 1331 | 4.1 | 1964 | 1695 | |
| 1865 | 1924 | 4.9 | 1915 | 1283 | 3.9 | 1965 | 1235 | |
| 1866 | 843 | 3.3 | 1916 | 1348 | 4.1 | 1966 | 1454 | |
| 1867 | 2647 | 6.3 | 1917 | 1048 | 3.6 | 1967 | 2595 | |
| 1868 | 1248 | 4.0 | 1918 | 1348 | 4.1 | 1968 | 706 | |
| 1869 | 2417 | 5.5 | 1919 | 383 | 2.1 | 1969 | 1837 | 5.3 |
| 1870 | 1125 | | 1920 | 1526 | 4.1 | 1970 | 1629 | 5.1 |
| 1871 | 903 | | 1921 | 789 | 3.3 | 1971 | 1421 | 3.8 |
| 1872 | 1462 | | 1922 | 811 | 3.1 | 1972 | 2204 | 5.9 |
| 1873 | 378 | | 1923 | 1073 | 3.6 | 1973 | 956 | 3.1 |
| 1874 | 1230 | | 1924 | 965 | 3.2 | 1974 | 971 | 3.4 |
| 1875 | 1149 | | 1925 | 619 | 2.5 | 1975 | 1383 | 4.1 |
| 1876 | 1400 | 4.0 | 1926 | 3361 | 6.7 | 1976 | 541 | 2.5 |
| 1877 | 2078 | 5.8 | 1927 | 523 | 2.5 | 1977 | 703 | 2.5 |
| 1878 | 1433 | 4.1 | 1928 | 493 | 2.3 | 1978 | 2090 | 4.8 |
| 1879 | 917 | 3.4 | 1929 | 424 | 2.1 | 1979 | 800 | 3.1 |
| 1880 | 1530 | 4.7 | 1930 | 2017 | 4.7 | 1980 | 651 | 2.4 |
| 1881 | 2442 | 6.2 | 1931 | 1958 | 5.1 | 1981 | 1153 | 3.9 |
| 1882 | 2151 | 5.7 | 1932 | 3192 | 6.4 | 1982 | 704 | 2.5 |
| 1883 | 1909 | 5.2 | 1933 | 1556 | 4.9 | 1983 | 1771 | 4.5 |
| 1884 | 630 | 2.6 | 1934 | 1169 | 3.4 | 1984 | 1433 | 4.2 |
| 1885 | 2435 | 5.6 | 1935 | 1511 | 4.8 | 1985 | 238 | 1.5 |
| 1886 | 1920 | 5.5 | 1936 | 1515 | 4.4 | 1986 | 122 | 1.0 |
| 1887 | 1512 | 4.8 | 1937 | 2491 | 5.6 | 1987 | 1306 | 4.0 |
| 1888 | 1377 | 3.9 | 1938 | 881 | 2.9 | 1988 | 733 | 3.1 |
| 1889 | 3330 | 6.7 | 1939 | 846 | 3.3 | 1989 | 793 | 3.0 |
| 1890 | 1858 | 5.3 | 1940 | 856 | 3.2 | 1990 | 856 | 3.0 |
| 1891 | 1359 | 4.2 | 1941 | 1036 | 3.7 | 1991 | 1903 | 5.1 |
| 1892 | 714 | 2.6 | 1942 | 1830 | 5.3 | 1992 | 1594 | 4.5 |

| | | | | | | | | |
|------|------|-----|------|------|-----|------|------|-----|
| 1893 | 1528 | 4.2 | 1943 | 1391 | 4.5 | 1993 | 740 | 3.1 |
| 1894 | 1035 | 3.3 | 1944 | 1334 | 4.0 | 1994 | 3044 | 7.2 |
| 1895 | 1026 | 3.8 | 1945 | 1512 | 4.8 | 1995 | 1128 | 3.5 |
| 1896 | 1127 | 3.5 | 1946 | 1792 | 4.6 | 1996 | 522 | 2.5 |
| 1897 | 1839 | 4.7 | 1947 | 136 | 1.0 | 1997 | 642 | 2.5 |
| 1898 | 771 | | 1948 | 891 | 3.1 | | | |

Tableau 1 : Valeurs historiques mesurées du débit Q et de la hauteur de crue H

I.3. MODÈLE HYDRAULIQUE ET SOURCES D'INCERTITUDES ASSOCIÉES

En plus des mesures historiques, on dispose d'un modèle d'équations hydrauliques permettant d'approcher la variable "hauteur d'écoulement maximale de la crue" H (que l'on exprime ensuite en "hauteur de surverse" S , par différence avec les cotes de référence du fond et de la digue). Cette hauteur dépend de diverses variables physiques, le nombre dépendant de la sophistication du modèle hydraulique choisi.

Un modèle simplifié analytique peut donner un premier ordre de grandeur de la hauteur maximale de la crue H en travaillant sur des informations simplifiées sur le tronçon du cours d'eau situé en amont de l'installation, comme la pente moyenne $\frac{Z_m - Z_v}{L}$, le débit de la crue Q et un coefficient K_s "moyen" de frottement sur la rivière, le célèbre "coefficient de Strickler"¹ :

$$H = \left(\frac{Q}{K_s \sqrt{\frac{Z_m - Z_v}{L}} B} \right)^{3/5} \quad \text{Equation (1)}$$

que l'on peut exprimer en hauteur de surverse :

$$S = Z_c - Z_d = Z_v + H - h_d - Z_b \quad \text{Equation (2)}$$

où :

- Z_d et Z_c désignent respectivement la cote de la digue et la cote maximale de la crue (en m NGF, c'est-à-dire au-dessus du niveau de la mer),
- S désigne la surverse (en m), c'est-à-dire la différence entre la cote maximale de la crue et la cote de la digue,
- H désigne la hauteur d'eau maximale (en m),
- Q désigne le débit maximal du cours d'eau (en m³/s),
- L désigne la longueur du tronçon de cours d'eau étudié (en m),
- B désigne la largeur du cours d'eau (en m),
- Z_m et Z_v désignent la cote du fond du cours d'eau (en m NGF) respectivement en amont et en aval du tronçon,
- K_s désigne le coefficient de frottement du lit du cours d'eau,
- h_d désigne la hauteur de la digue (en m),
- Z_b désigne la cote de la berge (en m NGF).

¹ A noter que ce coefficient K_s est en réalité plutôt de type "conductivité" que "résistance", dans le sens où plus il est fort, plus la vitesse et le débit d'écoulement est important pour une hauteur d'eau donnée

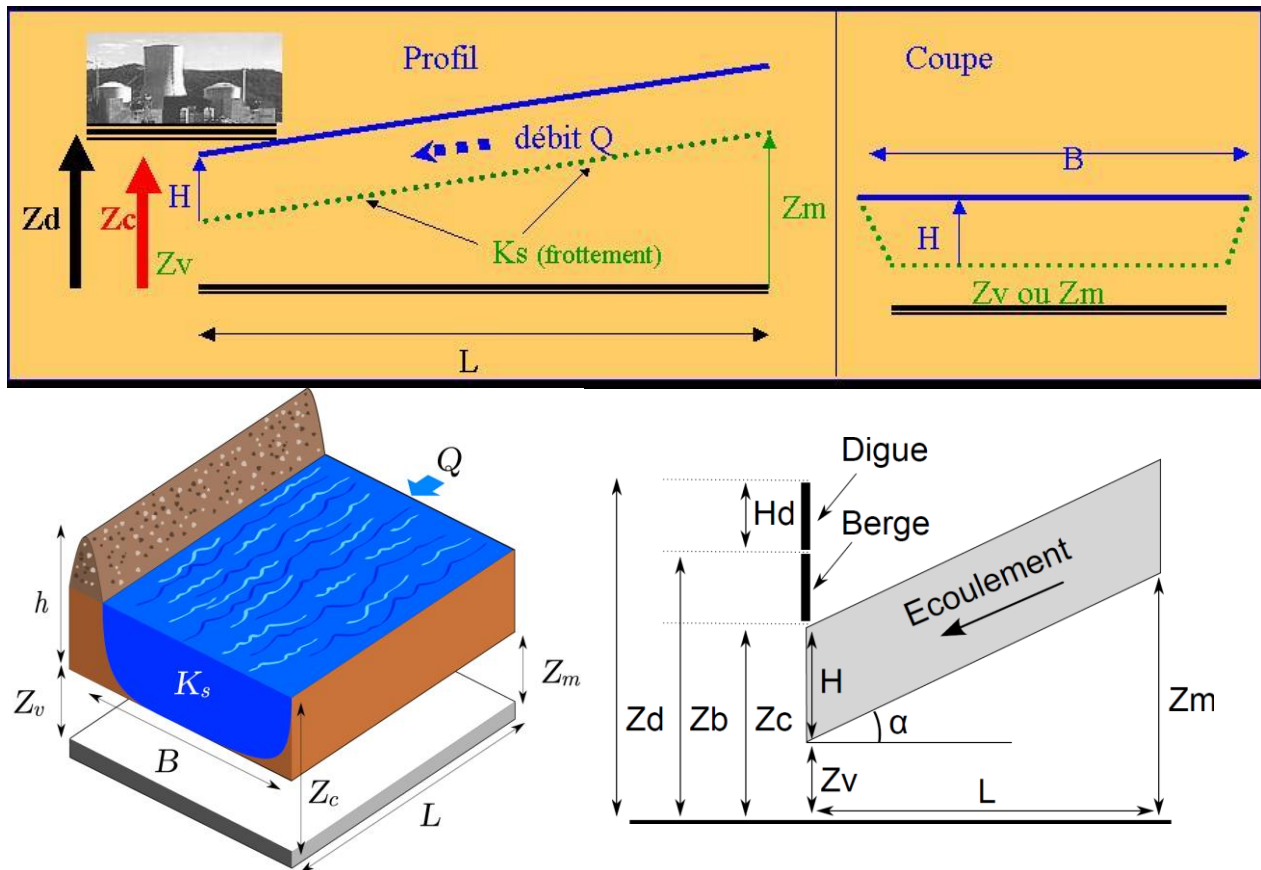


Figure 1 : Exemple de la digue

I.4. IDENTIFICATION DES SOURCES D'INCERTITUDES EN ENTRÉE DU MODÈLE HYDRAULIQUE

Parmi les variables d'entrée du modèle (présenté au travers des équations (1) et (2)), les incertitudes sont nombreuses :

- de par la nature intrinsèquement aléatoire de certains phénomènes : pour des raisons météorologiques, climatiques et sédimentaires, le débit Q et la nature du fond du cours d'eau évoluent au fil du temps (modifiant les cotes Z_m , Z_v et le coefficient de frottement K_s , voire la largeur B). Si l'évolution est en partie déterministe et prédictible à court terme et à une échelle plutôt locale, il est traditionnel de la considérer comme aléatoire, typiquement pour l'étude du risque pluri-annuel.
- du fait d'un manque de connaissance (dite parfois "épistémique") :
 - les relevés topographiques du cours d'eau (et de la digue) sont toujours partiels, ce qui affecte la connaissance de Z_m , Z_v , voire de B et Z_b .
 - les données disponibles pour caractériser les distributions de probabilité des grandeurs aléatoires sont limitées et incomplètes (voire bruitées par des erreurs de mesure), ce qui génère une incertitude de méconnaissance de type "statistique". Cela affecte classiquement la statistique du débit, mais théoriquement aussi celle des autres variables.
 - par ailleurs, dans le modèle simplifié, le coefficient de frottement K_s est en fait un paramètre de modélisation très composite sans signification physique directe, qui d'une certaine manière "intègre" toute sorte de détails de modélisation non représentés (comme l'hétérogénéité du fond et de l'écoulement, la turbulence...) : il faut donc choisir sa valeur à dire d'expert et/ou à partir de la mesure (partielle et bruitée) d'autres grandeurs physiques.

Pour le cas d'étude, on simplifiera le problème en considérant que certaines variables sont connues avec précision (la longueur du tronçon L , la largeur du cours d'eau B et la cote de la berge Z_b), tandis que les variables incertaines Q , K_s , Z_m , Z_v (et donc H , Z_c , S) seront typiquement considérées comme sources d'incertitude principales et modélisées comme des variables aléatoires.

I.5. DONNÉES DE RÉFÉRENCE POUR LE MODÈLE ET LES INCERTITUDES HYDRAULIQUES

Les hypothèses de référence pour les diverses variables du problème sont les suivantes.

| Variable aléatoire | Type de loi | Paramètre 1 | Paramètre 2 |
|-------------------------|--------------|----------------|------------------|
| Q (m ³ /s) | Gumbel | 1013 (mode) | 558 (échelle) |
| K_s (coefficient) | Normale | 30 (espérance) | 7.5 (écart-type) |
| Z_v (m NGF) | Triangulaire | 50 (espérance) | 1 (demi-étendue) |
| Z_m (m NGF) | Triangulaire | 55 (espérance) | 1 (demi-étendue) |

Tableau 2 : Distributions retenues pour les variables d'entrée considérées comme aléatoires

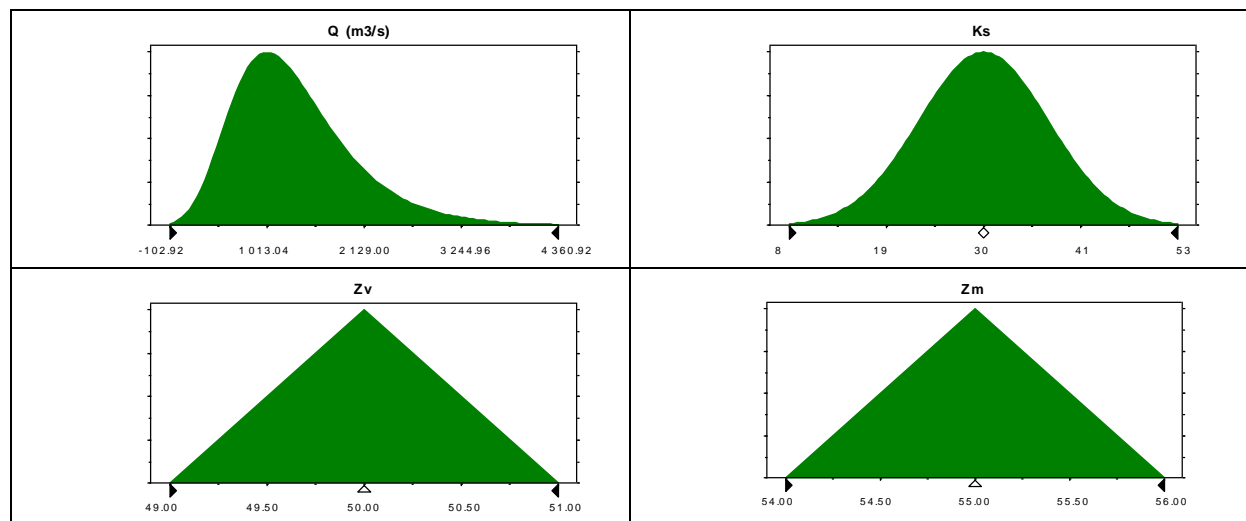


Figure 2 : Densités de probabilité des variables aléatoires d'entrée du modèle

Pour le débit Q , la loi de Gumbel est classique en matière de "statistiques extrêmes" de phénomènes naturels. Pour le coefficient K_s , la loi normale est retenue a priori car ce paramètre s'apparente à un mélange d'incertitudes physiques de type "mesure". Pour les cotes de fond du cours d'eau Z_m et Z_v , les lois triangulaires illustrent une incertitude dans des limites maximales supposées connues (pour des raisons géomorphologiques), avec une probabilité non uniforme, mais plutôt centrée sur l'état moyen, et symétrique.

Globalement, il s'agit d'un modèle stationnaire dans le sens où, sur une durée typique de plusieurs dizaines d'années, les caractéristiques statistiques des différentes variables sont supposées ne pas changer, ce qui est un choix de modélisation simple, évidemment critiquable et améliorable (par exemple effet du changement du climat et de l'évolution sédimentaire, pour des raisons naturelles) ; mais bien entendu, au sein de cette même période, les réalisations sont différentes d'une année à l'autre car il s'agit de variables aléatoires.

Les caractéristiques des variables en entrée du modèle prises déterministes sont les suivantes.

| | | |
|----------------------|-------------------------|------|
| L | Longueur tronçon (m) | 5000 |
| B | Largeur cours d'eau (m) | 300 |
| Z_b | Cote berge (m NGF) | 55.5 |

Tableau 3 : Valeurs fixes retenues pour les variables d'entrée considérées comme déterministes

Ces données sont fictives, mais les ordres de grandeurs sont ceux d'un fleuve français.

I.6. MODÈLE ÉCONOMIQUE ET INCERTITUDES ASSOCIÉES

En s'intéressant également à une évaluation des dommages potentiels et à l'optimisation des coûts d'investissement, on introduit une modélisation schématique des coûts induits, à savoir :

- les coûts de dommages sur l'installation pour une surverse donnée. Représentant à la fois les dommages matériels à l'installation et les pertes de productible (l'installation étant rendue indisponible par l'inondation), ils sont typiquement croissants avec la surverse jusqu'à un palier (où tout est inondé), mais gardent une composante incertaine même si la surverse est parfaitement connue (représentant l'aléa sur l'état de l'installation au moment, inconnu, de la crise).
- les coûts de dommages à la digue elle-même pour une crue donnée. Déterministes, représentant l'endommagement de la digue, ils croissent avec la surverse jusqu'à un endommagement complet et dépendent du coût de la digue elle-même.
- les coûts d'investissement/maintenance de la digue, déterministes et croissants naturellement avec la hauteur de la digue.

On considérera que le coût d'investissement croît avec la hauteur de la digue h_d , pour deux raisons :

1. le coût au mètre linéaire de digue croît avec sa hauteur,
2. la longueur nécessaire à endiguer croît également avec la cote de la digue, jusqu'à une longueur maximale.

Quant au coût de maintenance, il est supposé être proportionnel au coût d'investissement de l'ordre de 1% annuel. On raisonnera généralement sur une période de 30 ans : même si la digue a une durée de vie probablement nettement supérieure, cette durée paraît être un bon ordre de grandeur pour optimiser le risque.

On notera :

- S la surverse (en m), Z_d la cote de la digue (en m NGF) et h_d la hauteur de la digue (en m),
- ℓ_d la longueur de la digue nécessaire pour protéger uniformément à une hauteur moyenne donnée,
- C_i le coût d'investissement de la digue pour une hauteur donnée h_d et C_m le coût de maintenance annuel correspondant,
- C_t le coût total de la digue (investissement et maintenance cumulée sur la période considérée) pour une hauteur donnée h_d ,
- C_s le coût de dommage au site,
- C_g le coût de dommage à la digue, fonction de la surverse S et du coût d'investissement C_i (pour une année),
- C_d le coût total de dommage (pour une année),
- C_c le coût complet, incluant, sur une période donnée, l'investissement/maintenance ainsi que les coûts de dommage à la digue et à l'installation industrielle,
- T la durée sur laquelle est étudié le problème.

On a donc :

$$C_t(T) = C_i(h_d) + T \cdot C_m(h_d) \text{ sur la durée } T \quad \text{Equation (3)}$$

$$C_d = C_s + C_g = C_s(S) + C_g(S, h_d) \text{ sur une année} \quad \text{Equation (4)}$$

$$C_c(T) = C_t(T) + \sum_{j=1}^T C_{d,j}(S_j, h_d) \text{ sur la durée } T \text{ (j est l'indice de l'année)} \quad \text{Equation (5)}$$

$$C_{c,\text{moyenné}} = \frac{C_c(T)}{T} \quad \text{Equation (6)}$$

Voici les valeurs numériques (purement virtuelles) proposées :

| Surverse par rapport à la digue S (en m) | Coût de dommage $C_s(S)$ au site (en M€) | Coût de dommage C_g à la digue (% par rapport au coût d'investissement C_i) |
|---|---|--|
| -0.1 | 0 | 0% |
| 0 | 0 | 10% |
| 0.5 | 150 | 50% |
| 1 | 1500 | 100% |
| 1.5 | 2000 | 100% |
| > 2 | 2000 | 100% |

Tableau 4 : Valeurs retenues pour les coûts liés à la surverse

Le tableau ci-dessous donne les coûts de construction de la digue en fonction de sa hauteur et de sa longueur.

| Hauteur de la digue h_d (en m) | Coût du linéaire (en €/m) | Longueur de la digue ℓ_d (en m) | Coût d'investissement C_i (en k€) |
|-------------------------------------|------------------------------|---|--|
| 0 | - | - | - |
| 0.1 | 100 | 1 000 | 100 |
| 0.5 | 150 | 1 500 | 225 |
| 1 | 424 | 2 437 | 1 034 |
| 2 | 1 200 | 3 959 | 4 750 |
| 3 | 2 205 | 5 000 | 11 023 |
| 4 | 3 394 | 5 000 | 16 971 |
| 5 | 4 338 | 5 000 | 21 692 |
| 6 | 5 302 | 5 000 | 26 509 |
| 7 | 6 282 | 5 000 | 31 408 |
| 8 | 7 275 | 5 000 | 36 377 |
| 9 | 8 282 | 5 000 | 41 409 |
| 10 | 9 300 | 5 000 | 46 498 |

Tableau 5 : Valeurs retenues pour les coûts liés à la construction et la maintenance de la digue

La croissance du coût linéaire est supposée plus forte que linéaire car si la hauteur de la digue augmente, sa largeur également. La longueur de la digue ℓ_d croît avec h_d moins vite que linéairement et plafonne à 5 km, supposé être le périmètre maximal de protection de la digue.

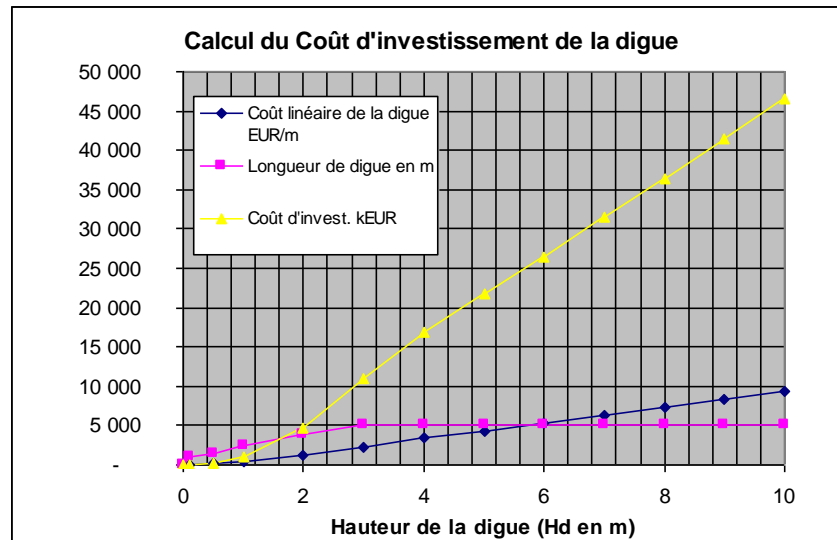


Figure 3 : Calcul du coût d'investissement de la digue C_i en fonction de sa hauteur h_d

II. PREMIÈRE APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DES RELEVÉS DE MESURE HISTORIQUES

A partir des seuls relevés de mesure historiques présentés dans le tableau 1 en paragraphe I.2, proposez une hauteur de digue h_d de façon à "minimiser le risque d'inondation", c'est-à-dire la probabilité que $H - h_d$ soit positive.

III. DEUXIÈME APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DU MODÈLE HYDRAULIQUE

A partir du modèle hydraulique simplifié représenté par les équations (1) et (2) en paragraphe I.3 et des hypothèses de travail précisées dans les paragraphes I.4 et I.5, proposez une hauteur de digue h_d de façon à "minimiser le risque de surverse", c'est-à-dire la probabilité que S définie par l'équation (2) soit positive. Le résultat obtenu pourra être comparé avec celui identifié uniquement à partir de l'exploitation des relevés de mesure historiques (première approche de résolution).

IV. TROISIÈME APPROCHE DE RÉOLUTION DU CAS D'ÉTUDE – DÉTERMINATION DE LA HAUTEUR DE LA DIGUE À PARTIR DU MODÈLE ÉCONOMIQUE

A partir du modèle hydraulique et du modèle économique représenté par les équations (3) à (6) en paragraphe I.6 et des hypothèses de travail précisées dans le même paragraphe, proposez une hauteur de digue h_d de façon à minimiser le "risque économique lié à la surverse", c'est-à-dire minimiser par exemple le coût $C_{c,moyenné}$ défini par l'équation (6). Le résultat obtenu pourra être comparé avec ceux identifiés par les deux autres approches de résolution.

Un rapport de Projet devra être rédigé par les étudiants. Pour chacune des trois approches à traiter, la démarche retenue devra être clairement expliquée et les résultats obtenus devront être argumentés et justifiés. Le choix des outils logiciels est laissé à la discrétion des étudiants (les codes informatiques pourront être joints au rapport). Une restitution du travail de chaque étudiant, sous la forme d'une présentation orale, est à prévoir.