ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET BEOGRAD
**Praktikum iz Fizike 2**
02.04.2020.

Uneti ime, prezime i broj indeksa:
Никола Радојевић 2019/176

Word fajl obavezno poslati na email adresu zeljkoj@etf.bg.ac.rs nakon završetka časa.
Uz word poslati i finalne MATLAB kodove. U svaki .m fajl u vidu komentara uneti ime, prezime i broj indeksa.

---

LABORATORIJSKE VEŽBE NA RAČUNARU
**FIZIČKI MODELI EPIDEMIJE**

---

**Zadatak:** Deterministički SIR model epidemije je predstavljen sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda koje opisuju odgovarajuće kompartmane:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

gde je $S$ broj jedinki podložnih obolevanju, $I$ broj zaraženih jedinki, $R$ broj uklonjenih jedinki, $\alpha$ konstanta brzine infekcije i $\beta$ konstanta brzine oporavka.

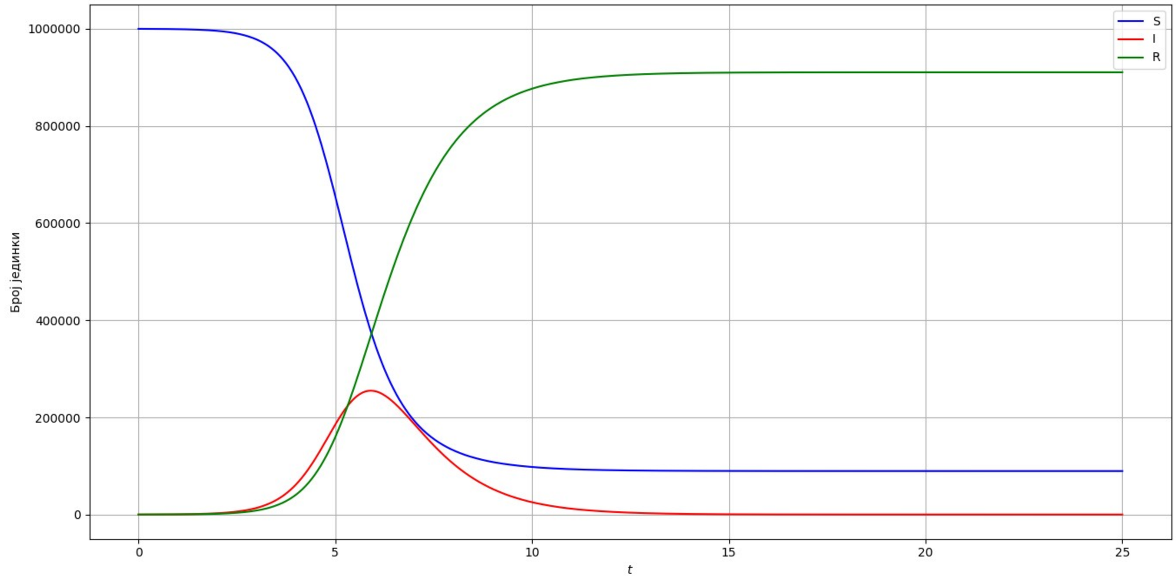
Na početku epidemije, 100 jedinki zaraženih virusom SARS-CoV-2 ulazi u izolovanu podložnu populaciju od $10^6$ jedinki. Konstante brzine koje definišu širenje virusa su $\alpha = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$ i $\beta = 1$ i definišu se na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi.

a) Formirati MATLAB funkciju (`SIR.m`) koja opisuje navedeni sistem diferencijalnih jednačina i zadati joj odgovarajuće pozivne parametre $\alpha$ i $\beta$ kao argumente.

b) U glavnom programu (`SIRepidemija.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina na domenu od 0 do 25 nedelja sa početnim uslovima koji su naznačeni u opisu početka epidemije. Nacrtati zavisnosti $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Koliko nedelja je potrebno da epidemija dostigne svoj maksimum? Koliko iznosi maksimalni broj zaraženih jedinki za date parametre? Koliko vremena mora proteći da bi samo 0,5% populacije ostalo zaraženo?

   **Hint:** Za nalaženje maksimuma koristiti ugrađenu MATLAB funkciju *max*.

**Slika:**



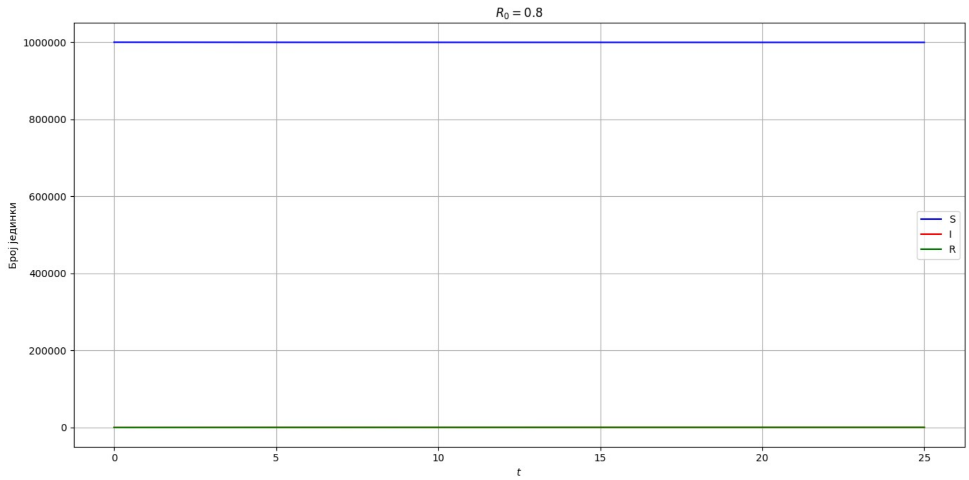

**Odgovori:**

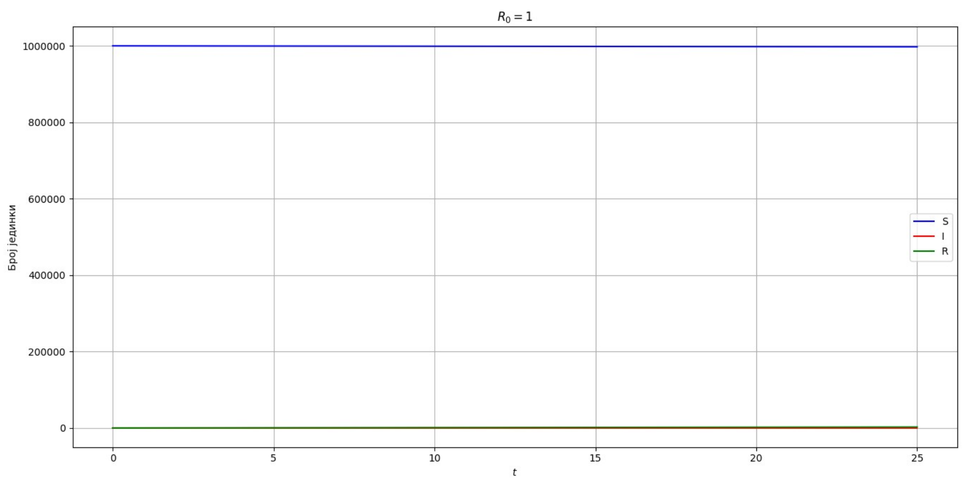
Потребно је око 5,91 недеља да би епидемија достигла максимум.
Највећи број заражених јединки је 254982.
Да би само 0,5% становништва било заражено, потребно је 12,19 недеља.

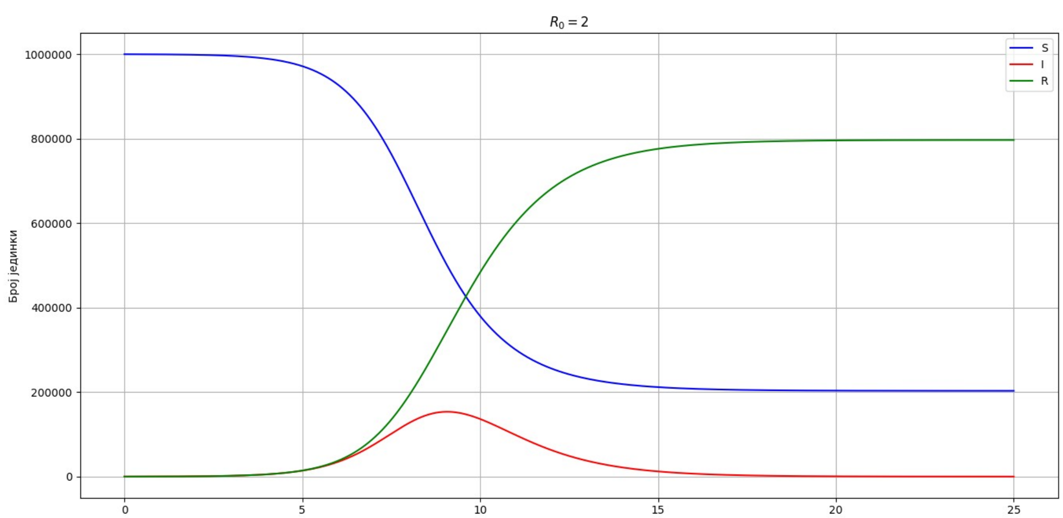
c) Ilustrovati i komentarisati evoluciju epidemije počevši od stanja potpune podložnosti populacije za tri različita slučaja koji oslikavaju karakteristične opsege osnovnog reprodukcionog broja ($R_0 < 1$, $R_0 = 1$ i $R_0 > 1$). U glavnom programu (`SIR_R0opseg.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina. Domenreturn [-alfa*S*I, alfa*S*I - beta*I, beta * I ] rešavanja prilagoditi dinamici evolucije epidemije. Nacrtati krive evolucije epidemije $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku za pojedinačne slučajeve. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Svakoj slici pridružiti odgovarajuću vrednost osnovnog reprodukcionog broja kao naslov grafika. Za koje vrednosti reprodukcionog broja možemo reći da dovode do epidemije? Da li u slučaju endemije postoji prenošenje bolesti ili uvek iste jedinke ostaju zaražene? Kako se to može proveriti na osnovu krive evolucije epidemije $R$(t)?

**Hint:** Videti slajd 19 za parametre koji definišu $R_0$. U skladu sa vrednostima $R_0$ menjati vrednost parametra $\alpha$ u programskom kodu.

# Slike:


$R_0 = 0.8$
1000000
800000
600000
400000
200000
0
Број јединки
0
5
10
15
20
25
$t$
S
I
R


$R_0 = 1$
1000000
800000
600000
400000
200000
0
Број јединки
0
5
10
15
20
25
$t$
S
I
R


$R_0 = 2$
1000000
800000
600000
400000
200000
0
Број јединки
0
5
10
15
20
25
$t$
S
I
R

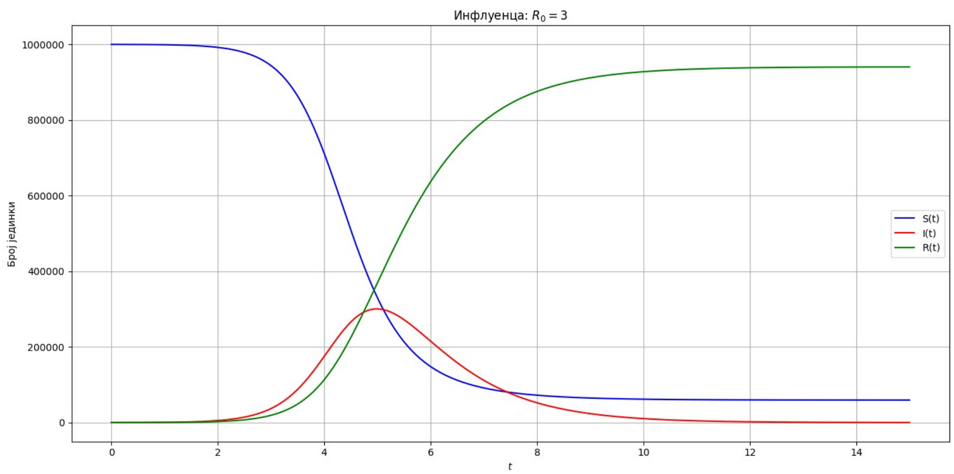
**Odgovori:**

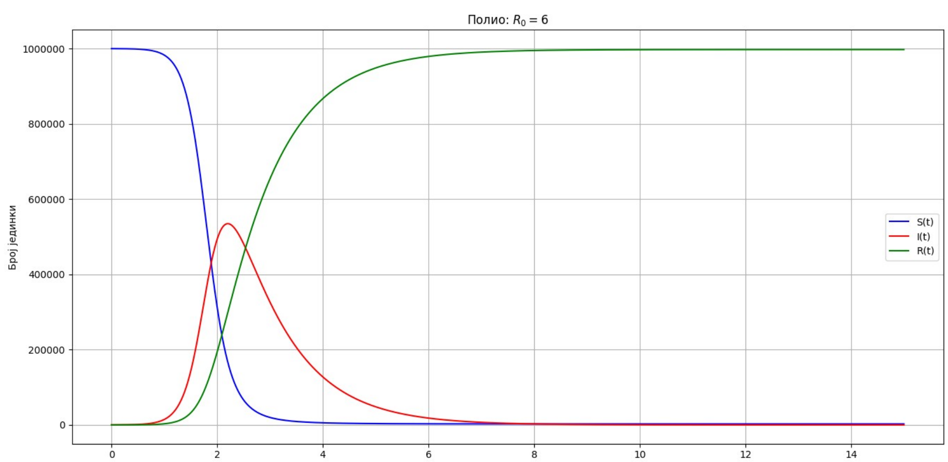
За вредности $R_0$ веће од 1 можемо рећи да доводе до епидемије.

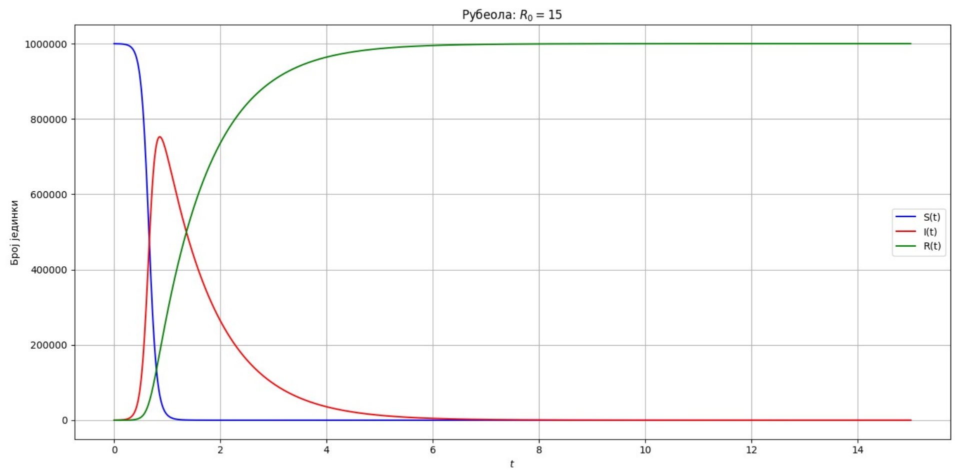
У случају ендемије долази до преношења болести, а то се може зато што R вредност расте током симулације.

d) Naći maksimalan broj zaraženih tokom evolucije epidemije koja polazi iz stanja potpune podložnosti populacije (isti početni uslovi kao na početku zadatka), ukoliko je u pitanju širenje tri tipa virusa: influence (gripa) ($R_0 = 3$), polia ($R_0 = 6$) i rubeola ($R_0 = 15$). Odgovarajuće sisteme jednačina rešavati na domenu od 0 do 15 nedelja u glavnom programu (`SIR_R0virus.m`). Priložiti dobijene vrednosti i nacrtati grafike vremenskih evolucija različitih kompartmana populacije $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku za pojedinačne slučajeve. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Svakoj slici pridružiti naziv virusa i odgovarajuću vrednost osnovnog reprodukcionog broja kao naslov grafika. Kako vrednost $R_0$ utiče na dinamiku epidemije?

**Slike:**






| **Odgovor:** |
| --- |
| Што је већа вредност $R_0$, то је већи врх графика, а сам график је ужи. То значи да се већи број људи зарази за мање времена. |

e) Koje procentualne udele populacije jedinki je neophodno imunizovati da bi se sprečilo širenje virusa iz tačke d) u navedenoj izolovanoj populaciji? **Hint:** Videti slajd 20.

| **Odgovori i proračun:** |
| --- |
| $v > 1 + \frac{\beta}{\alpha N}$<br>Инфлуенца 66,67%<br>Полио 83,33%<br>Рубеола 93,33% |

**Zadatak:** Modifikacijom SIR modela epidemije moguće je konstruisati SIRS model epidemije koji uključuje i mogućnost gubitka imuniteta jedinki, npr. usled mutacija virusa tokom epidemije. U tom slučaju, dodaje se još jedna konstanta brzine $\gamma$ koja opisuje gubitak imuniteta, i tada se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koji opisuje kompartmane izražava na sledeći način:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R$$

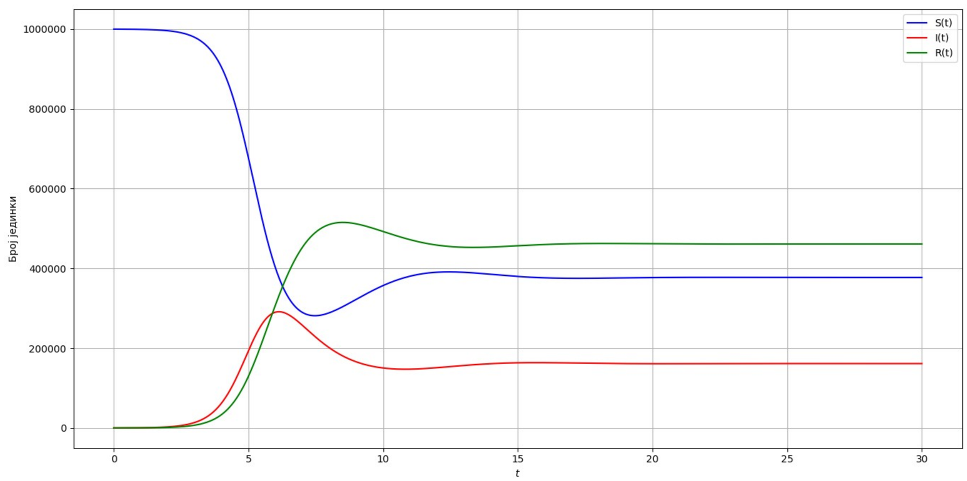
gde je $S$ broj jedinki podložnih obolevanju, $I$ broj zaraženih jedinki, $R$ broj uklonjenih jedinki, $\alpha$ konstanta brzine infekcije, $\beta$ konstanta brzine oporavka i $\gamma$ konstanta brzine gubitka imuniteta.

Na početku epidemije, 100 jedinki zaraženih virusom SARS-CoV-2 ulazi u izolovanu podložnu populaciju od $10^6$ jedinki. Konstante brzine koje definišu širenje virusa su $\alpha = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 1$ i $\gamma = 0{,}35$ i definišu se na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi.

a) Formirati MATLAB funkciju (`SIRS.m`) koja opisuje navedeni sistem diferencijalnih jednačina i zadati joj odgovarajuće pozivne parametre $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ kao argumente.

b) U glavnom programu (`SIRSepidemija.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina na domenu od 0 do 30 nedelja sa početnim uslovima koji su naznačeni u opisu početka epidemije. Nacrtati zavisnosti $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Koliko nedelja je potrebno da epidemija dostigne stacionarno stanje? Koji broj jedinki će ostati zaražen tokom stacionarnog stanja?

**Slika:**




**Odgovori:**

Број инфицираних је 161425
а потребно је око 20 недеља.

c) Variranjem vrednosti parametra $\gamma$ u glavnom programu b) uočiti njegov uticaj na stabilizaciju broja zaraženih tokom evolucije epidemije. Kom fizičkom parametru vezanom za proces oscilacija približno odgovara parametar $\gamma$? Ukoliko je potrebno, obrazloženje potkrepiti graficima.

**Odgovor i obrazloženje:**

Параметар γ приближно одговара фактору пригушења α код осцилација. У зависности од овог параметра зависи колико ће бити потребно времена да се достигне стационарно стање.

**Zadatak:** Modifikacijom SIR modela epidemije moguće je konstruisati i SIRQ model epidemije koji uključuje mogućnost kontinualnog sprovođenja mera karantina nad određenim brojem zaraženih jedinki na nedeljnoj bazi tokom epidemije. Tada se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koji opisuje kompartmane izražava na sledeći način:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + q) I$$

$$\frac{dR}{dt} = (\beta + q) I$$

gde je $S$ broj jedinki podložnih obolevanju, $I$ broj zaraženih jedinki, $R$ broj uklonjenih jedinki, $\alpha$ konstanta brzine infekcije, $\beta$ konstanta brzine oporavka i $q$ konstanta brzine uklanjanja zaraženih jedinki iz populacije putem preventivnih mera u vidu karantina.

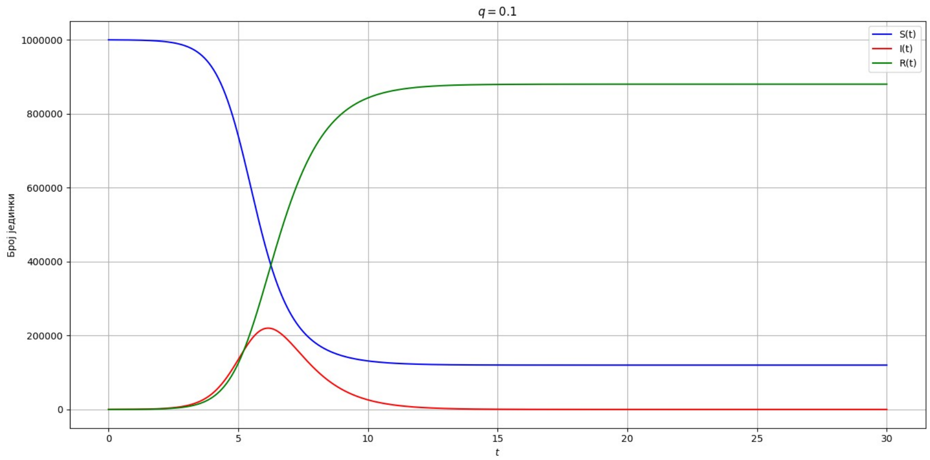
Na početku epidemije, 100 jedinki zaraženih virusom SARS-CoV-2 ulazi u izolovanu podložnu populaciju od $10^6$ jedinki. Konstante brzine koje definišu širenje virusa bez sprovođenja mera karantina su $\alpha = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$ i $\beta = 1$ i definišu se na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi.

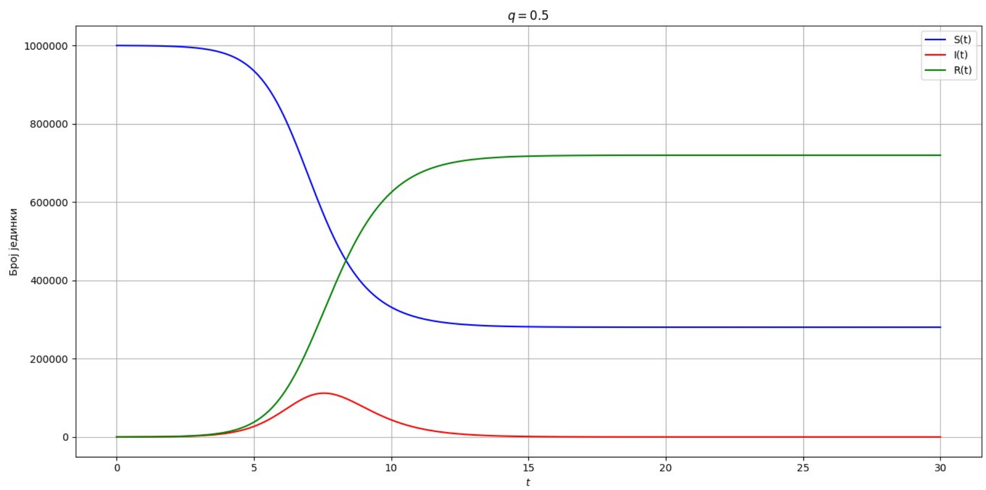
a) Formirati MATLAB funkciju (`SIRQ.m`) koja opisuje navedeni sistem diferencijalnih jednačina i zadati joj odgovarajuće pozivne parametre $\alpha$, $\beta$ i $q$ kao argumente.

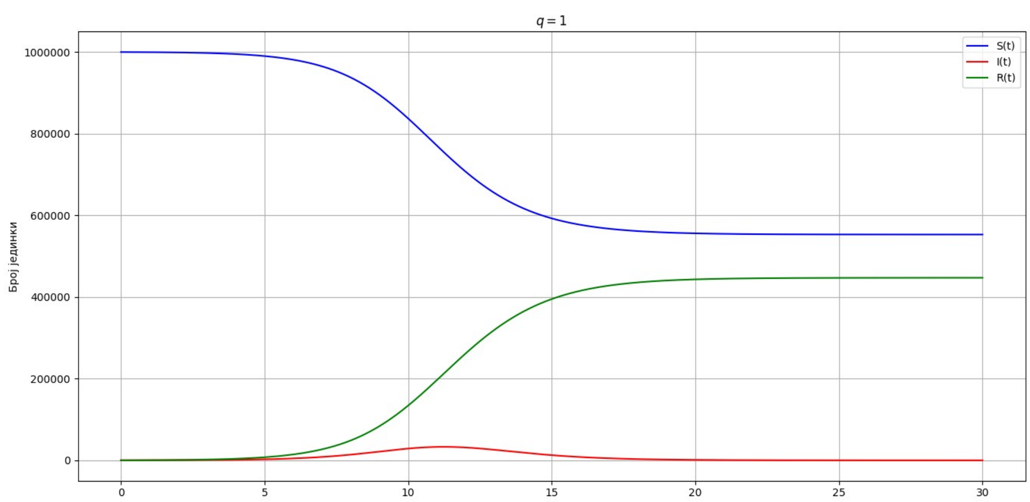
b) U glavnom programu (`SIRQepidemija.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina na domenu od 0 do 30 nedelja sa početnim uslovima koji su naznačeni u opisu početka epidemije za tri vrednosti konstante $q$ ($q$ = 0,1, $q$ = 0,5 i $q$ = 1). Nacrtati zavisnosti $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Na osnovu analiza vremenskih evolucija epidemije, obrazložiti kako vrednost konstante brzine uklanjanja zaraženih jedinki iz populacije putem preventivnih mera u vidu karantina $q$ utiče na trajanje epidemije, maksimalan broj zaraženih jedinki tokom epidemije i vreme od početka epidemije kada broj zaraženih jedinki dostiže maksimum. Koji procenat jedinki u populaciji ostaje podložan tokom epidemija u analiziranim slučajevima?

**Hint:** Epidemija se može smatrati završenom u trenutku kada je $I < 0.5$ (nakon dostizanja maksimuma).

| **Slika:** |
| --- |




| **Odgovor i obrazloženje:** |
| --- |
| Повећавањем параметра q, епидемија траје дуже, али највећи број заражених је мањи.<br>Проценат подлижних за q=0,1 на крају епидемије је 12,2%, за q=0,5 је 28,54% и за q=1 је 56,72%. |

**Zadatak:** Modifikacijom SIR modela epidemije moguće je konstruisati i unapređeni ISIR model epidemije koji uključuje mogućnost prenosa informacija o epidemiji što dovodi do preduzimanja osnovnih preventivnih mera (npr. samoizolacije) od strane određenog broja podložnih jedinki na nedeljnoj bazi tokom epidemije. U ISIR modelu se smatra da se sa povećanjem broja zaraženih jedinki ubrzava širenje informacija o epidemiji i time pojačavaju osnovne preventivne mere, što se opisuje sledećom funkcijom:

$$\alpha(I) = \frac{\alpha_0}{1 + kI}$$

gde je $\alpha_0$ početna konstanta brzine infekcije, $I$ broj zaraženih jedinki, $k$ konstanta koja opisuje uticaj prenosa informacija o epidemiji i $\alpha(I)$ konstanta brzine infekcije koja zavisi od trenutne vrednosti $I$.

Tada se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koji opisuje kompartmane izražava na sledeći način:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha(I)SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(I)SI - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

gde je $S$ broj jedinki podložnih obolevanju, $R$ broj uklonjenih jedinki i $\beta$ konstanta brzine oporavka.

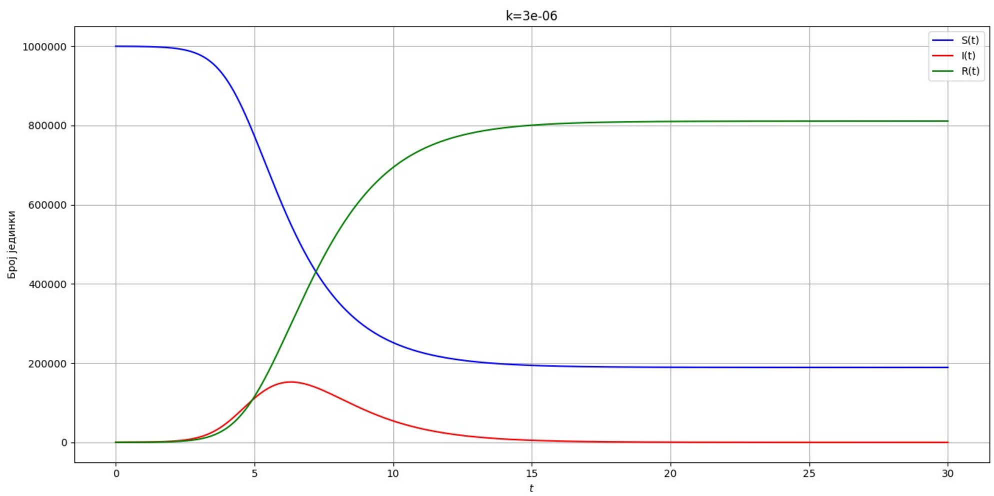
Na početku epidemije, 100 jedinki zaraženih virusom SARS-CoV-2 ulazi u izolovanu podložnu populaciju od $10^6$ jedinki. Od samog početka epidemije kreće se sa informisanjem populacije što se opisuje konstantom $k$ na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi. Konstante brzine koje definišu širenje virusa bez preduzimanja preventivnih mera su $\alpha_0 = 2{,}65 \cdot 10^{-6}$ i $\beta = 1$ i takođe se definišu na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi.

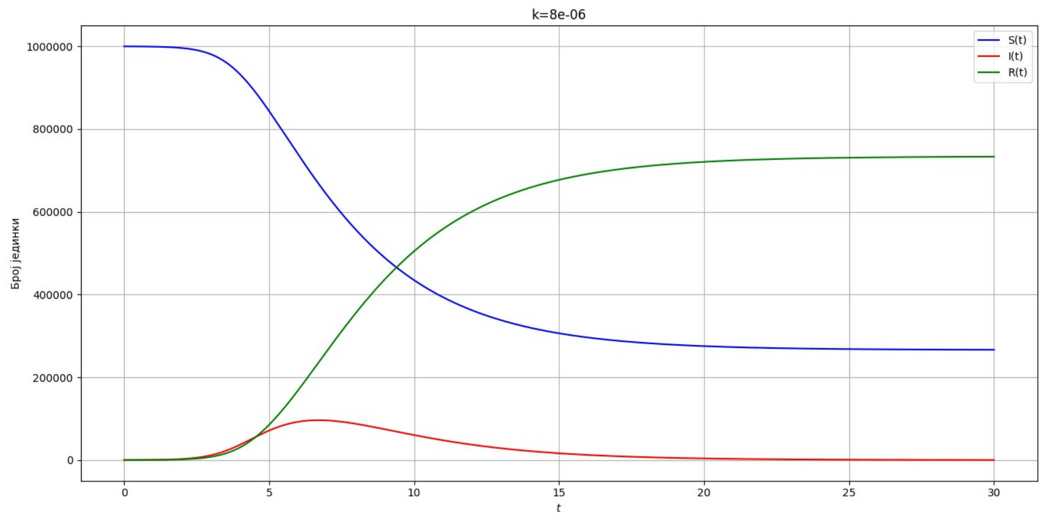
a) Formirati MATLAB funkciju (`ISIR.m`) koja opisuje navedeni sistem diferencijalnih jednačina i zadati joj odgovarajuće pozivne parametre $\alpha$, $\beta$ i $k$ kao argumente.

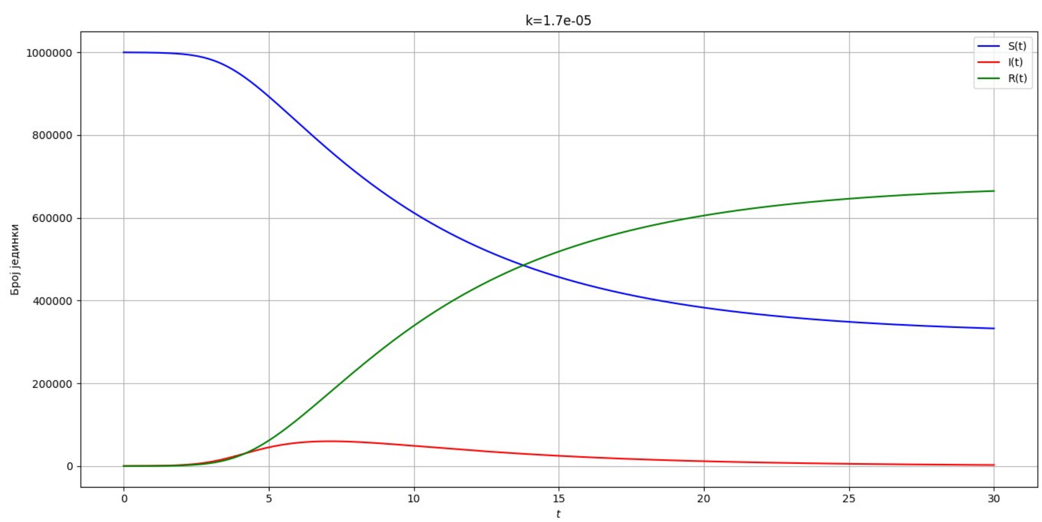
b) U glavnom programu (`ISIRepidemija.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina na domenu od 0 do 30 nedelja sa početnim uslovima koji su naznačeni u opisu početka epidemije za tri vrednosti konstante $k$ ($k = 0{,}3 \cdot 10^{-5}$, $k = 0{,}8 \cdot 10^{-5}$ i $k = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$). Nacrtati zavisnosti $S$(t) (plavom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Na osnovu analiza vremenskih evolucija epidemije, obrazložiti kako vrednost konstante širenja informacija $k$ utiče na trajanje epidemije, maksimalan broj zaraženih jedinki tokom epidemije i vreme od početka epidemije kada broj zaraženih jedinki dostiže maksimum. Koji procenat jedinki u populaciji ostaje podložan tokom epidemija u analiziranim slučajevima?

   **Hint:** Epidemija se može smatrati završenom u trenutku kada je $I < 0.5$ (nakon dostizanja maksimuma).

**Slike:**




**Obrazloženje i odgovori:**

Повећавањем параметра k, епидемија траје знатно дуже, али највећи број заражених је мањи. Проценат подлижних за $k$ = 0,3·$10^{-5}$ на крају епидемије је 19,42%, за $k$ = 0,8·$10^{-5}$ је 27,81% и за $k$ = 1,7·$10^{-5}$ је 34,64%.

**Zadatak:** Modifikacijom SIR modela epidemije moguće je konstruisati i kompleksniji SEIR model epidemije koji uračunava efekat perioda inkubacije na širenje bolesti. U tom slučaju se mora uvesti dodatni kompartman za izložene jedinke koje još uvek nisu postale infektivne i konstanta brzine prelaska jedinki iz izložene u zaraženu (infektivnu) populaciju. Tada se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda koji opisuje kompartmane proširuje i izražava na sledeći način:

$$\frac{dS}{dt}=-\alpha SI$$

$$\frac{dE}{dt}=\alpha SI-\delta E$$

$$\frac{dI}{dt}=\delta E-\beta I$$

$$\frac{dR}{dt}=\beta I$$

gde je $S$ broj jedinki podložnih obolevanju, $E$ broj izloženih jedinki koje nisu infektivne, $I$ broj zaraženih jedinki koje su postale infektivne, $R$ broj uklonjenih jedinki, $\alpha$ konstanta brzine infekcije, $\beta$ konstanta brzine oporavka i $\delta$ konstanta brzine prelaska jedinki iz izložene u zaraženu (infektivnu) populaciju.

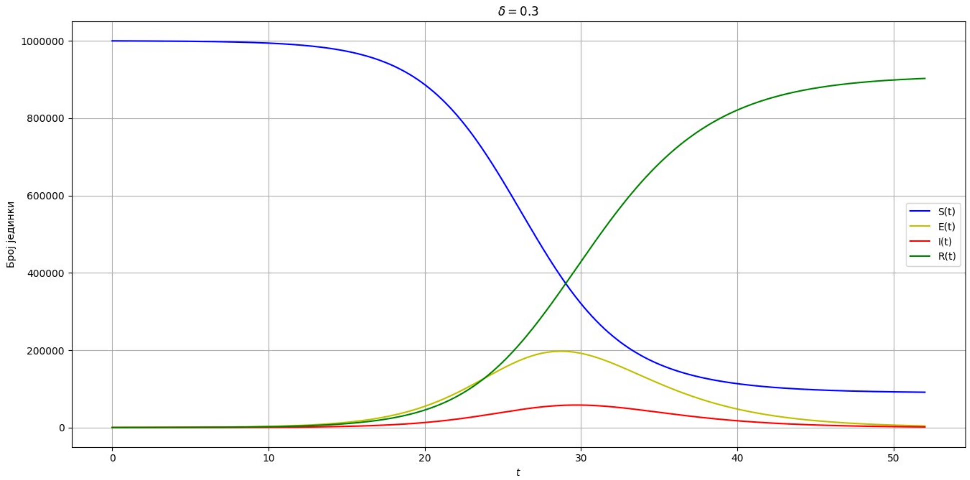
Na početku epidemije, 100 jedinki zaraženih virusom SARS-CoV-2 ulazi u izolovanu podložnu populaciju od $10^6$ jedinki. Konstante brzine koje definišu širenje virusa bez uračunatog perioda inkubacije su $\alpha$ = 2,65·$10^{-6}$ i $\beta$ = 1 i definišu se na nedeljnoj (sedmičnoj) bazi.

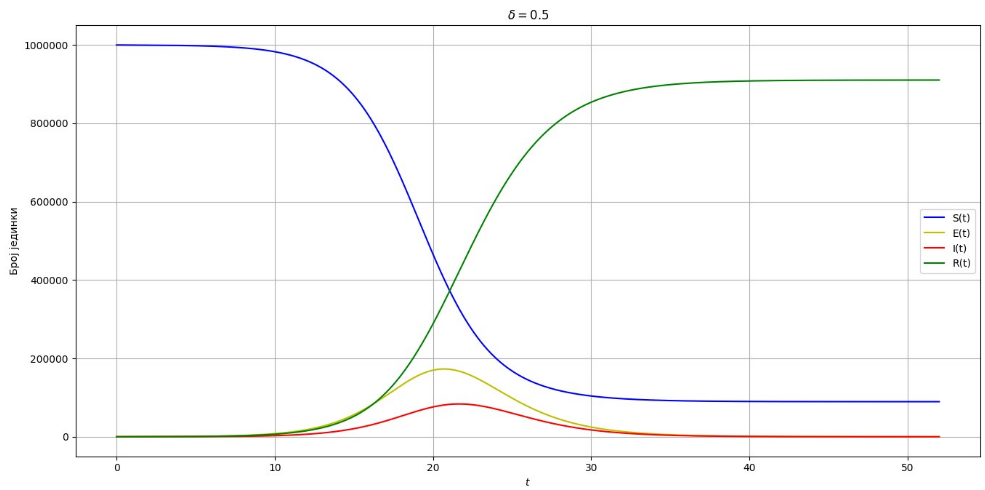
a) Formirati MATLAB funkciju (`SEIR.m`) koja opisuje navedeni sistem diferencijalnih jednačina i zadati joj odgovarajuće pozivne parametre $\alpha$, $\beta$ i $\delta$ kao argumente.

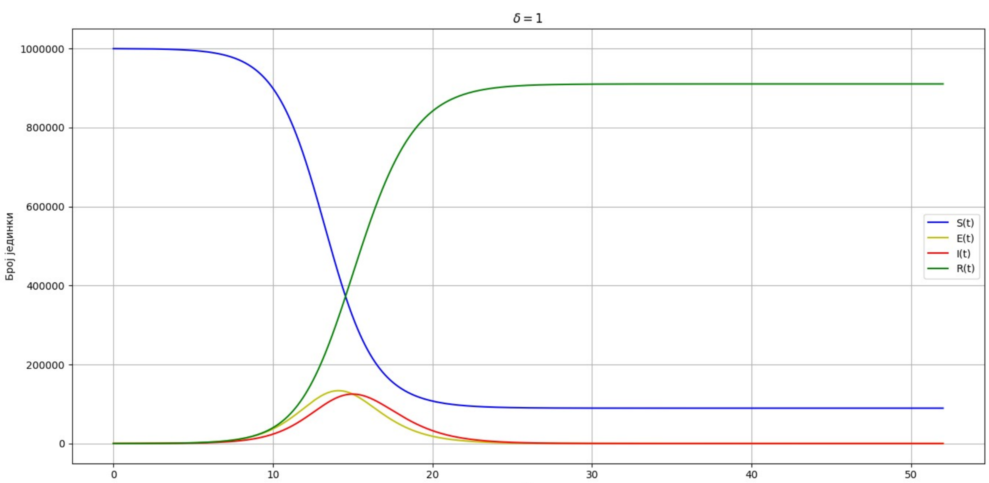
b) U glavnom programu (`SEIRepidemija.m`) rešiti sistem diferencijalnih jednačina na domenu od 0 do 52 nedelje sa početnim uslovima koji su naznačeni u opisu početka epidemije za tri vrednosti konstante $\delta$ ($\delta$ = 0,3, $\delta$ = 0,5 i $\delta$ = 1). Nacrtati zavisnosti $S$(t) (plavom bojom), $E$(t) (žutom bojom), $I$(t) (crvenom bojom) i $R$(t) (zelenom bojom) na istom grafiku. Označiti ose grafika i identifikovati krive zavisnosti dodavanjem odgovarajuće legende. Na osnovu analiza vremenskih evolucija epidemije, obrazložiti kako vrednost konstante brzine prelaska jedinki iz izložene u zaraženu (infektivnu) populaciju $\delta$ utiče na trajanje epidemije, maksimalan broj obolelih jedinki tokom epidemije (infektivnih i neinfektivnih) i vreme od početka epidemije kada broj obolelih jedinki dostiže maksimum u izloženoj i zaraženoj populaciji. Koji procenat jedinki u populaciji ostaje podložan tokom epidemija u analiziranim slučajevima? Uporediti karakteristike maksimuma krivih $E$(t) i $I$(t) i objasniti njihovu međusobnu vezu.

   **Hint:** Epidemija se može smatrati završenom u trenutku kada je $I$ < 0.5 (nakon dostizanja maksimuma).

**Slika:**




**Odgovor i obrazloženje:**

Епидемија траје дуже ако је вредност параметра δ мања. Такође, што је мањи параметар δ то је већи однос неинфективних и инфективних јединки. Ипак, укупан број заражених расте како се повећава параметар δ. Ако се повећава δ тако се и смањује време трајања епидемије, а подложан удео популације остаје приближно исти, независно од параметра δ.