1°) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique. Puis placer les points A, B et C.

2°) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

3°) Ecrire $\frac{z_3}{z_1}$ sous forme algébrique puis déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

B/ Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$z_1 = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $z_2 = 1-\cos 2\theta - i\sin 2\theta$

1°) a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la nature du triangle OM_1M_2

c) Déterminer θ pour que OM_1M_2 soit isocèle.

2°) a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point que l'on précisera.

b) Montrer que M_1 et M_2 varient sur un même cercle C que l'on précisera.

Exercice 8:

I)On considère dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points $I(1)$, $A(2)$ et $B(\frac{1}{2})$

Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point $M(z)$ distinct de A associe le point $f(M) = M'(z')$ tel que : $z' = \frac{1-2z}{z-2}$. On note N le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

1) a) M que l'ensemble des points M tels que $M' = A$ est la médiatrice de $[AB]$.

b) Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que $M' = N$.

2) Soit $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points M de P tels que $BM = 2AM$

On se propose de construire le point M' pour un point M du cercle $\mathscr{C}$

a) Mque $OM' = \frac{2BM}{AM}$ et en déduire que M' appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ qu'on précisera.

b) Montr.er que $\frac{z'-2}{\bar{z}-2} = \frac{5-4\mathrm{Re}(Z)}{|z-2|^2}$ et en déduire que les points A, N et M' sont alignés tel que : $M' \notin [AN]$.

c) Construire le point M' dans la figure ci-dessous

II) On se propose de déterminer et construire les points invariants par f .

1) Montrer que $M(z)$ est invariant par f si et seulement si z est solution de l'équation : (E) : $z^2 - 2(z - \bar{z}) - 1 = 0$

2) Montrer que (E) admet deux solutions réelles qu'on précisera

3) Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $(z-1)^2 = -2(\overline{z-1})$

4) Soit $M(z)$ un point invariant par f tel que $M \neq I$

a) Montrer que $|z-1| = 2$; interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer alors que dans $C - \{1\}$, l'équation (E) est équivalente à : $(z-1)^3 = -8$

III) On désigne par P^* le plan privée de O . Soit g l'application de P^* vers P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \bar{z} + \frac{z^2}{\bar{z}}$.

1)On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r \in IR_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Donner la forme exponentielle de z'. En déduire que les points O , M et M' sont alignés .

2) Déterminer et construire l'ensemble des points invariants par g.

3) Montrer que le point $I = O*M'$ est le projeté orthogonal de $M_1(\bar{z})$ sur la droite (OM) .

4) Utiliser l'application g pour résoudre dans C l'équation $\bar{z} + \frac{z^2}{\bar{z}} = 4i$.

Exercice :9 :On considère la suite (u_n) définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \le u_n \le 2$.
2) Etudier la monotonie de cette suite.
3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{4}(u_n - 1)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le u_n - 1 \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4) On pose $v_n = \frac{-1+u_n}{2+u_n}$ où $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5) Soit la suite (S_n) définie sur N par : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n}(-1+u_k)$.

Montrer que (S_n) est croissante et majorée.

Exercice 4 :

Questions indépendantes :

1) Montrer que si $\begin{cases}|z| = |z'| = 1\\ |2 + zz'| = 1\end{cases}$ Alors $zz' = -1$

2) Résoudre dans C ; $|z| - 9i = 3z - 7$

3) Soit $z = 1+i\sqrt{3}$. Donner la forme algébrique puis trigonométrique des complexes suivants $\bar{z}$; z^{-1} et z^2

4) Montrer que pour tout $z \in C$, $|z + 1|^2 + |z|^2 = 1 \leftrightarrow (2z + 1)(\overline{2z + 1}) = 1$

5) Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectives θ et θ'.
Démontrer que $|z + z'| = |z - z'| ssi\ \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

6) $\forall n \in$ IN*, on pose $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$
Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels :
a) $S_n = 0$
b) S_n est un entier relatif.

Exercice 5 :

Déterminer les ensembles des points M(z) tels que :

E : $|z - 2i + 1| = |z - 4i|$; F : $\arg(z - 2i) \equiv \arg(1 - z)\ [2\pi]$.

G: $\arg(2z - 2) \equiv \arg(1-\bar{z})[2\pi]$; H : $\left|z + \frac{1}{z}\right| = |z - i|$.

K : $|z| = 1$ et $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$

Exercice 6 :

Le plan Complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$)

1) a) Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.
On désigne par B et C les points d'affixes respectives $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$

b) Mettre chacun des nombre b et c sous forme trigonométrique.

c) En déduire que les points B et C appartiennent au cercle (C) .

d) Construire alors les points B et C

2) a) Montrer que $\frac{c}{b-2} = \frac{2}{c-b} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

3) Soit M_n le point d'affixe b^n où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Déterminer n pour que O, B et M_n soient alignés.

Exercice 7 ;

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct (o, $\vec{u}, \vec{v}$).

A/ On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$Z_1 = 1+ i$, $Z_2 = 1- i$ et $Z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$.

1°) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique. Puis placer les points A, B et C.

2°) Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$.

3°) Ecrire $\frac{Z_3}{Z_1}$ sous forme algébrique puis déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

B/ Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :

$z_1 = 1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta$ et $z_2 = 1 - \cos 2\theta - i\sin 2\theta$

1°) a)Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la nature du triangle OM_1M_2

c) Déterminer θ pour que OM_1M_2 soit isocèle.

2°) a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point que l'on précisera.

b) Montrer que M_1 et M_2 varient sur un même cercle C que l'on précisera.

MR :LATRACH *Pioneer*	***Pour Bien Démarrer*** *Les mathématiques sont la science mère des autres : sans mathématiques, le mot science n'a plus de sens.*	$4^{ème}$ M&SC Sep 2024

Exercice 1 : Questions indépendantes :

1) Soit $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$; $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$.

2) Calculer les limites suivantes :

.a) Si $x \in]0, 1[, et\ S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n)$; caluler $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}$

b) Calculer $\lim_{x\to0}(\frac{2+x-2\sqrt{1+x}\cos x}{x^2})$, $\lim_{x\to1^+}(\frac{\sqrt{x^2-1}}{(x-1)^3})$

3) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (x-1)\sin(\frac{\pi}{x-1})$

b) $\lim_{x\to+\infty} x^2(\cos(\frac{2}{x})-1)$

Exercice 2 :

Soit la fonction g telle que : $g(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de g.
   b) Calculer g(2) puis donner le signe de g(x).

2) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$ où $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé.
   a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Donner les asymptotes à C_f.
   c) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ on a : $f(x) - x = \frac{g(x)}{x^2-1}$.
   d) En déduire la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$ puis construire C_f

3) Montrer que : $f(x) = 1 + \frac{3}{2}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})$ où $\in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

4) On pose $S_n = \sum_{i=2}^{i=n} [1 - f(i)]$ où n entier supérieur à 3.
   a) Etudier les variations de la suite (S_n).
   b) Montrer que : $S_n = -\frac{9}{4} + \frac{3}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$ où n entier supérieur à 3.
   En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geq3}$

5) On pose $X_n = n(n+1)(\frac{9}{4} + S_n)$ où n entier supérieur à 3.

Montrer que (X_n) est une suite arithmétique dont-on précisera la raison puis calculer la limite de la suite $(X_n)_{n\geq3}$

Exercice 3:

Soit la fonction F telle que : $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ où $x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ et C_F sa courbe dans un repère orthonormé.

1) a) Montrer que la droite : $x = 1$ est un axe de symétrie de C_F.
   b) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique de C_F au voisinage de $(+\infty)$.
   c) Etudier la dérivabilité de F à droite en 2.
   d) Dresser le tableau de variations de F (sur$]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$).

2) Tracer Δ. En déduire la construction de l'autre asymptote puis tracer la courbe de F (préciser les tangentes éventuelles).

3) Soit la fonction : $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + 1$ où $x \in [0,2]$.
   a) Montrer que g est bornée.
   b) Dresser le tableau de variations de g.
   c) Tracer la courbe de g dans le même repère (préciser les tangentes éventuelles).

4) Soit la fonction : $h(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \in [0,2] \\ F(x) & si\ x \notin [0,2] \end{cases}$
   a) Etudier la continuité de h en 0 puis en 2.
   b) Etudier la dérivabilité de h en 2.