

ОГЛАВЛЕНИЕ

С.

ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	2
1.1 Теория управления по прогнозирующей модели.	2
1.2 Экономический МРС	5
1.3 Задачи оптимального управления	6
1.4 Численные методы решения задач оптимального управления и программные средства	8
ГЛАВА 2 Задача оптимального экономического роста	13
2.1 Построение математической модели и формулировка задачи оптимального управления	13
2.2 Аналитическое решение задачи, магистрали	16
2.3 Применение методов ЕМРС	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	21
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	22

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Управление по прогнозирующей модели (МРС) — это продвинутый метод управления, который используется для управления процессом при одновременном удовлетворении набора ограничений. Главная идея МРС — использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Он используется в перерабатывающей промышленности на химических и нефтеперерабатывающих заводах с 1980-х годов. В последние годы он также используется в моделях балансировки энергосистем и в силовой электронике. Основным преимуществом МРС является тот факт, что он позволяет оптимизировать текущий временной интервал, учитывая при этом будущие временные интервалы. Это достигается за счет оптимизации конечного временного горизонта, но только на текущем временном интервале. Модели используемые в МРС обычно призваны показать поведение сложных динамических систем. Модели МРС предсказывают изменение в зависимых переменных моделируемой системы, которое будет вызвано изменениями в независимых переменных. Независимые переменные, которые не могут быть [скорректированы? связаны с? adjusted by управлением], воспринимаются как возмущения. Зависимыми переменными в этих процессах представляют либо задачи управления, либо ограничения на процесс. МРС использует текущие значения переменных, текущее динамическое состояние процесса, модель, а также значение эталона? reference и ограничения переменных для расчета будущих изменений зависимых переменных. Эти изменения рассчитаны так, чтобы держать зависимые переменные близко к эталону, соблюдая ограничения как для независимых, так и для зависимых переменных. МРС обычно вычисляет только первое изменение в каждой независимой переменной, и повторяет вычисление, когда требуется следующее изменение.

Многие реальные процессы нелинейны, но их можно считать линейными на маленьком рабочем диапазоне. Линейный подход используется в большинстве приложений с механизмом обратной связи МРС, компенсирующим ошибки прогнозирования из-за структурного несоответствия между моделью и процессом. В управлениях, которые состоят только из линейных моделей,

принцип суперпозиции линейной алгебры позволяет суммировать эффект изменений нескольких независимых переменных для прогнозирования реакции зависимых переменных. Это упрощает задачу управления до ряда прямых матричных вычислений, которые быстры и безошибочны. Когда линейные модели недостаточно точны для представления реальных нелинейных процессов, можно использовать несколько подходов. В некоторых случаях переменные процесса могут быть преобразованы до и / или после линейной модели МРС, чтобы уменьшить нелинейность. Процесс может контролироваться с помощью нелинейного МРС, который использует нелинейную модель непосредственно в приложении управления. Нелинейная модель может быть в форме эмпирического подбора данных (например, искусственных нейронных сетей) или динамической модели высокой точности, основанной на фундаментальных балансах массы и энергии.

МРС основан на пошаговой оптимизации модели с конечным шагом/горизонтом??? В момент времени t замеряется текущее состояние? и вычисляется стратегия управления с минимальными затратами (с помощью алгоритма численной минимизации) для относительно короткого горизонта в будущем: $[t, t + T]$. В частности, онлайн-вычисления или вычисления «на лету» используются для изучения траекторий состояния, которые исходят из текущего состояния, и находят (посредством решения уравнений Эйлера – Лагранжа) стратегию с минимальными затратами до времени $t + T$. Реализуется только первый шаг стратегии управления, затем снова производится измерение состояния, и вычисления повторяются, начиная с нового текущего состояния. Получается новый элемент управления и новый прогнозируемая траектория состояния. Горизонт прогнозирования продолжает смещаться вперед, и по этой причине МРС также называют управлением по смещаемому горизонту.

МРС — многомерный алгоритм управления, который использует:

- Внутренняя динамическая модель процесса.
- Функция затрат J над смещаемым горизонтом.
- Оптимизационный алгоритм минимизирующий функцию стоимости J используя управляющее воздействие.

В западной литературе управление в реальном времени представлено теорией управления по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (МРС), также называемая Receding Horizon Control (RHC). Основными приложениями теории являются задачи стабилизации динамических систем. Современная теория нелинейного МРС предлагает основанные на решении за-

дач оптимального управления методы построения обратных связей для нелинейных объектов.

Нелинейное управление по прогнозирующей модели Нелинейное управление по прогнозирующей модели — это оптимизационный метод для управления по обратной связи нелинейных систем. Его основные приложения — это [стабилизационная задача и задача отслеживания?? stabilization and tracking problems]. Предположим, что нам дан контролируемый процесс, состояние которого $x(n)$ измеряется в дискретные моменты времени t_n $n = 0, 1 \dots$. «Контролируемый» означает, что в каждый момент времени мы можем выбрать управляющее воздействие $u(n)$, которое влияет на будущее поведение состояния системы. В [следающем?? tracking] управлении задача состоит в том, чтобы определить управляющее воздействие $u(n)$ таким образом, чтобы $x(n)$ следовало заданному эталону $x^{ref}(n)$ настолько точно, насколько это возможно. Это значит, что если текущее состояние далеко от эталонного, то мы должны управлять системой в направлении эталонного состояния, а если текущее состояние уже близко к эталону, то мы стараемся удержать его там. Для простоты будем считать, $x(n) \in X = R^d$ и $u(n) \in U = R^m$, более того считаем эталон константой и равным $x_* = 0$, т.е. $x^{ref}(n) = x_* = 0$ для всех $n \geq 0$. С таким константным эталоном задача отслеживания упрощается до задачи стабилизации. Так как мы хотим иметь возможность влиять на отклонение $x(n)$ от эталонного значения $x_* = 0$, нам бы хотелось иметь $u(n)$ в [обратном? feedback] виде, т.е. в виде $u(n) = \mu(x(n))$, где некоторое отображение μ отображает состояние $x \in X$ во множество значений управления U . Идея управления по прогнозирующей модели — как использовать модель процесса с целью предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Будем рассматривать модели вида $x^+ = f(x, u)$ (1.1) где $f : X \times U \rightarrow X$ это известная, вообще говоря, нелинейная функция, которая ставит в соответствие состоянию x и значению управления u [последовательное значение? successor state] x^+ в следующий момент времени. Начиная с текущего состояния $x(n)$, для любой последовательности управлений $u(0), \dots, u(N-1)$ с длиной горизонта $N \geq 2$, мы можем совершать итерации (1.1) с целью составления прогнозируемой траектории x_u определённой как $x_u(0) = x(n)$, $x_u(k+1) = f(x_u(k), u(k))$, $k = 0, \dots, N-1$ (1.2) Этим способом мы получаем прогнозы $x_u(k)$ для состояния системы $x(n+k)$ в момент времени t_{n+k} в будущем. Таким образом, мы получаем прогноз поведения системы на дискретном интервале t_n, \dots, t_{n+N} в зависимости от выбранной последовательности управлений $u(0), \dots, u(N-1)$. Теперь мы используем оптимальное управление для определения $u(0), \dots, u(N-1)$ таким образом, чтобы x_u было как

можно ближе к $x_* = 0$. С этой целью мы измеряем расстояние между $x_u(k)$ и $x_* = 0$ для $k = 0, \dots, N - 1$ с помощью функции $\ell(x_u(k), u(k))$. То есть мы не только вводим штраф за отклонение состояния от эталона, но также – если хотим – расстояние значений управления $u(k)$ до эталонного управления u_* , которое мы здесь также выбираем $u_* = 0$. Стандартный и популярный выбор для этой цели – это квадратичная функция $\ell(x_u(k), u(k)) = \|x_u(k)\|^2 + \lambda \|u(k)\|^2$ где $\|\cdot\|$ обозначает обычную Евклидову норму, а $\lambda \geq 0$ это весовой параметр управления, который также может быть принят равным 0, если мы желаем вводить штраф. Теперь задача оптимального управления выглядит так:

$$\text{minimize } J(x(n), u(\cdot)) := \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_u(k), u(k))$$

Для всех допустимых последовательностей управления $u(0), \dots, u(N - 1)$ с x_u вычисленными по формулам (1.2). Будем считать, что ЗОУ имеет решение, которое получается в результате минимизации последовательности управлений $u^*(0), \dots, u^*(N - 1)$, то есть

$$\min J(x(n), u(\cdot)) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_{u^*}(k), u^*(k))$$

Чтобы получить желаемое значение величины обратной связи $\mu(x(n))$, мы теперь устанавливаем $\mu(x(n)) := u^*(0)$, то есть, мы используем первый элемент последовательности оптимальных управлений. В следующие моменты времени t_{n+1}, t_{n+2}, \dots мы повторяем процедуру с новыми измерениями $x(n + 1), x(n + 2), \dots$ с целью получения переменных обратной связи $\mu(x(n + 1)), \mu(x(n + 2)), \dots$. Другими словами, мы получаем закон обратной связи μ с помощью итерационной онлайн оптимизации над прогнозами, полученными с помощью нашей модели (1.1). Это первая ключевая характеристика управления по прогнозирующей модели.

С точки зрения горизонта планирования, при выполнении этих итераций, траектории $x_u(k), k = 0, \dots, N$ обеспечивают прогноз на дискретном интервале t_n, \dots, t_{n+N} в момент времени t_n , на интервале $t_{n+1}, \dots, t_{n+N+1}$ в момент времени t_{n+1} , на интервале $t_{n+2}, \dots, t_{n+N+2}$ в момент времени t_{n+2} и т. д. Следовательно, горизонт планирования движется, и этот движущийся горизонт является второй ключевой характеристикой управления по прогнозирующей модели.

1.2 Экономический МРС

Экономический МРС это вид МРС, в котором, в отличие от обычного, задача управления не обязательно связана со стабилизацией априори заданной точки [значения?] (или траектории), а с оптимизацией некоторого общего критерия эффективности, возможно относящегося к экономике рассматри-

ваемой системы. В связи с использованием общего критерия эффективности оптимальный режим работы рассматриваемой системы может быть не стационарным, а циклическим или даже более сложным. Отсюда возникает вопрос, как узнать, каков оптимальный режим работы данной системы и данной функции стоимости. Более того, желательно гарантировать, чтобы замкнутая система [система с обратной связью??] возникающая в результате применения схемы экономического МРС, «находила» оптимальное рабочее поведение, то есть сходилась к оптимальной траектории.

1.3 Задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления относятся к теории экстремальных задач, то есть задач определения максимальных и минимальных значений. Постановка любой конкретной задачи оптимального управления включает в себя ряд факторов: математическую модель управляемого объекта, цель управления (именуемую иногда критерием качества), различного рода ограничения на траекторию системы, управляющее воздействие, длительность процесса управления, класс допустимых управлений и т.д.

1.3.1 Постановка задач оптимального управления

Модели объекта

В зависимости от вида рассматриваемого явления и желаемой степени детализации его изучения могут быть использованы различные типы уравнений: обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с последействием, стохастические уравнения, уравнения в частных производных и т.д. Предположим ради определенности, что эволюция объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, t_0 \leq t \leq T \quad (1)$$

Здесь $u \in R^m$ — управление, $x \in R^n$ — фазовый вектор системы, $f \in R^n$ — заданная функция, R^n — евклидово пространство размерности n . Придавая управлению u различные возможные значения, получаем различные состояния объекта, среди которых выбирается оптимальное.

Критерий качества

Управление системой (1) осуществляется для достижения некоторых целей, которые формально записываются в терминах минимизации по u

функционалов J , определяемых управлением u и траекторией x , где $J = \int_{t_0}^T (F(t, x(t), u) dt) + \varphi(T, x(T)) \rightarrow \min$ (2)

Здесь F и φ – заданные скалярные функции. Задача (1), (2) в общем виде называется задачей Больца. Если $F = 0$, то её называют задачей Майера, а если $\varphi = 0$, то это задача Лагранжа.

Ограничения на траекторию

Иногда в реальных ситуациях траектория не может принадлежать какой-либо части пространства R^n . Тогда указывают, что $x(t) \in G(t)$, где $G(t)$ -заданная область в R^n . В зависимости от типа ограничений выделяют различные классы задач управления. В задачах с фиксированными концами начальное состояние $x(t_0)$ и конечное состояние $x(T)$ заданы. Если $x(t_0)(x(T))$ не задано, то получаем задачу со свободным левым(правым) концом. Также ограничения могут быть интегрального характера: $\int_{t_0}^T F(t, x(t), u) dt \leq 0$

Если в задаче (1),(2) начальное и конечное положение задано, моменты начала и конца движения свободны, функция $\varphi = 0$, а $F = 1$, то получаем задачу оптимального быстродействия.

Ограничения на управление

Ограничения на управление зависят от того, какая информация о системе (1) доступна в момент выработки управляющего воздействия. Если $x(t)$ недоступен, то оптимальное управление ищется в классе функций $u(t)$, зависящих только от t . Тогда оптимальное управление называется программным. Если $x(t)$ известен при $t_0 \leq t \leq T$, то оптимальное управление ищется в классе функционалов $u(t, x_{t_0}^t)$ и называется управлением по обратной связи. $x_{t_0}^t$ означает всю траекторию движения на отрезке $t_0 \leq s \leq T$

1.3.2 Условия оптимальности, принцип максимума

Сформулируем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи Майера

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0, \\ u(t) &\in U, J = F(x(t)) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (3)$$

$U \subset R^m$ — заданное множество, x_0 — заданное начальное положение системы. Введём в рассмотрение скалярную функцию H и вектор сопряжённых переменных $\psi \in R^n$ с помощью соотношений

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t)f(t, x(t), u(t)),$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ \psi(T) &= -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x},\end{aligned}\tag{4}$$

где ' — знак транспонирования.

Предположим, что $u(t)$ — оптимальное управление, а $x(t)\psi(t)$ — соответствующие траектория и вектор сопряжённых переменных, удовлетворяющие уравнениям (3) (4). Тогда функция $H(t, x(t), u, \psi(t))$ достигает своего максимума по $u \in U$ в точке $u(t)$

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} H(t, x(t), u, \psi(t)).\tag{5}$$

Из (5) найдём зависимость u от t, ψ, x , то есть

$$u = u(t, x(t), \psi(t))\tag{6}$$

Далее подставим (6) в (3) и (4). В результате получим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $x(t)$ и $\psi(t)$. Только среди её решений может находиться оптимальная траектория. Если $x(t)$ и $\psi(t)$ найдены, то оптимальное управление находится из (6). Однако не стоит забывать, что (3)-(5) являются необходимыми условиями оптимальности, а значит, необходимо дополнительно подтвердить, что найденные траектории и управление являются оптимальными

1.4 Численные методы решения задач оптимального управления и программные средства

1.4.1 Численные методы решения задач оптимального управления

Рассмотрим некоторые методы решения задач оптимального управления.

Метод штрафных функций

Изложение метода Основная задача метода штрафных функций состоит в преобразовании задачи минимизации функции $z = f(x)$ с соответствующими ограничениями, наложенными на x , в задачу поиска минимума без ограничений функции $Z = f(x) + P(x)$. Функция $P(x)$ является штрафной. Необходимо, чтобы при нарушении ограничений она «штрафовала» функцию Z , т.е. увеличивала её значение. В этом случае минимум функции Z будет находиться внутри области ограничений. Функция $P(x)$, удовлетворяющая этому условию, может быть не единственной. Задачу минимизации можно сформулировать следующим образом:

минимизировать функцию $z = f(x)$ при ограничениях $c_j(x), j = 1, 2, \dots, m$.

Функцию $P(x)$ удобно записать следующим образом: $P(x) = r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)}$, где r – положительная величина. Тогда функция $Z = \varphi(x, r)$ принимает вид $Z = \varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^m \frac{1}{c_j(x)}$

Если x принимает допустимые значения, т.е. значения, для которых $c_j \geq 0$, то Z принимает значения, которые больше соответствующих значений $f(x)$ (истинной целевой функции данной задачи), и разность можно уменьшить за счет того, что r может быть очень малой величиной. Но если x принимает значения, которые хотя и являются допустимыми, но близки к границе области ограничений, и по крайней мере одна из функций $c_j(x)$ близка к нулю, тогда значения функции $P(x)$, и следовательно значения функции Z станут очень велики. Таким образом, влияние функции $P(x)$ состоит в создании «гребня с крутыми краями» вдоль каждой границы области ограничений. Следовательно, если поиск начнется из допустимой точки и осуществляется поиск минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений, то минимум, конечно, будет достигаться внутри допустимой области для задачи с ограничениями. Полагая r достаточно малой величиной, для того чтобы влияние $P(x)$ было малым в точке минимума, мы можем сделать точку минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений совпадающей с точкой минимума задачи с ограничениями.

Алгоритм метода штрафных функций Пусть имеется следующая задача: Минимизировать $f(x)$ при ограничениях $g_i(x) \geq 0, i = \overline{1, m}$

Начальный этап Выбрать $\epsilon \geq 0$ в качестве константы останова, начальную допустимую точку $x^0 \in R^n$, для которой $g_i(x^0) \geq 0, i = \overline{1, m}$, скаляр r_0 и $0 \leq \beta \leq 1$. Положить $k=1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап При исходной точке x_k решить следующую задачу безусловной оптимизации: $P(x, r) = f(x) + r \sum_{i=1}^m R_i(g_i(x))\omega_i$ минимизировать, где

$r \geq 0$ - параметр, значения которого убывают с каждой итерации $R_i(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$; ω_i - положительные весовые коэффициенты.

Примерами штрафных функций являются:

- обратная функция $R_i(g_i(x)) = \frac{1}{g_i(x)}$
- логарифмическая функция $R_i(g_i(x)) = -\ln(g_i(x))$

Положить x_{k+1} равным оптимальному решению задачи минимизации и перейти ко второму шагу.

Минимизация штрафной функции может быть выполнена любым методом безусловной оптимизации, например, градиентным.

Если $r_k \sum R(g_i(x_{k+1}))\omega_i < \epsilon$, то остановиться. Решение является искомым.

В противном случае положить $r_{k+1} = \beta r_k$. Изменить $k=k+1$ и перейти к первому шагу $(k+1)$ -й итерации.

Метод сопряжённых градиентов

Метод сопряжённых градиентов — итерационный метод для безусловной оптимизации в многомерном пространстве. Основным достоинством метода является то, что он решает квадратичную задачу оптимизации за конечное число шагов. Поэтому, сначала описывается метод сопряжённых градиентов для оптимизации квадратичного функционала, выводятся итерационные формулы, приводятся оценки скорости сходимости. После этого показывается, как метод сопряжённых обобщается для оптимизации произвольного функционала, рассматриваются различные варианты метода, обсуждается сходимость.

Постановка задачи оптимизации Пусть задано множество $X \subset R^n$ и на этом множестве определена целевая функция (objective function) $f: R^n \mapsto R$. Задача оптимизации состоит в нахождении на множестве X точной верхней или точной нижней грани целевой функции. Множество точек, на которых достигается нижняя грань целевой функции обозначается X_* . Если $X = R^n$, то задача оптимизации называется безусловной. Если $X \neq R^n$, то задача оптимизации называется условной.

Будем решать задачу: $F(x) \rightarrow \min, \quad x \in R^n$. $F(x)$ - непрерывно дифференцируемая в R^n функция. Чтобы модифицировать метод сопряжённых градиентов для решения этой задачи необходимо получить для p_k, α_k, β_k формулы, в которые не входит матрица A :

$\alpha_k = \arg\min \lim_{\alpha_k} F(x_{k-1} + \alpha_k p_k)$ $p_{k+1} = -F'(x_k) + \beta_k p_k$ β_k можно вычислять по одной из трёх формул:

- $\beta_k = -\frac{\langle F'(x_k), F'(x_k) \rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1}) \rangle}$ - Метод Флетчера - Ривса.
- $\beta_k = \frac{\langle F'(x_k), F'(x_k) - F'(x_{k-1}) \rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1}) \rangle}$ - Метод Полака - Райбера.

- $\beta_k = \frac{\langle F''(x_k)p_k, F'(x_k) \rangle}{\langle F''(x_{k-1})p_k, p_k \rangle}$

Если функция $F(x)$ - квадратичная и строго выпуклая, то все три формулы дают одинаковый результат. Если $F(x)$ - произвольная функция, то каждой из формул соответствует своя модификация метода сопряжённых градиентов. Третья формула используется редко, так как она требует, чтобы функция $F(x) \in C^2(R^n)$ и вычисления гессиана функции $F(x)$ на каждом шаге метода.

Анализ метода Если функция $F(x)$ - не квадратичная, метод сопряжённых градиентов может и не сходиться за конечное число шагов. Кроме того, точное вычисление α_k на каждом шаге возможно только в редких случаях. Поэтому накопление погрешностей приводит к тому, что вектора p_k перестают указывать направление убывания функции $F(x)$. Тогда на каком-то шаге полагают $\beta_k = 0$. Совокупность всех номеров k , при которых принимается $\beta_k = 0$, обозначим за I_0 . Номера $k \in I_0$ называются моментами обновления метода. На практике часто выбирают $I_0 = \{n, 2n, 3n, \dots\}$, где n - размерность пространства.

Сходимость метода Для метода Флетчера - Ривса существует теорема о сходимости, накладывающая не слишком жёсткие условия на минимизируемую функцию $F(x)$: Теорема.

Пусть $F(x) \in C^1(R^n)$ и выполняются следующие условия:

α_k удовлетворяет строгим условиям Вольфа: $F(x_{k-1} + \alpha_k p_k) \leq F(x_{k-1}) + c_1 \alpha_k \langle F'(x_{k-1}), p_k \rangle$ и $\langle F'(x_{k-1} + \alpha_k p_k), p_k \rangle \leq c_2 \langle F'(x_{k-1}), p_k \rangle$ где $0 < c_1 < c_2 < 1/2$ Множество $M = \{x | F(x) \leq F(x_0)\}$ ограничено Производная $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L в некоторой окрестности N множества M : $\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in N$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|F'(x_k)\| = 0$ Для метода Полака-Райбера доказана сходимость в предположении, что $F(x)$ - строго выпуклая функция. В общем случае доказать сходимость метода Полака - Райбера невозможно. Напротив, верна следующая теорема:

Предположим, что в методе Полака-Райбера значения α_k на каждом шаге вычисляются точно. Тогда существует функция $F : R^3 \mapsto R$, $F(x) \in C^2(R^3)$, и начальное приближение x_0 , такие что $\exists \delta > 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad \|f(x_k)\| > \delta$.

Тем не менее, на практике метод Полака-Райбера работает лучше. Наиболее распространённые критерии останова на практике: Норма градиента

становится меньше некоторого порога. Значение функции в течении m последовательных итераций почти не изменилось.

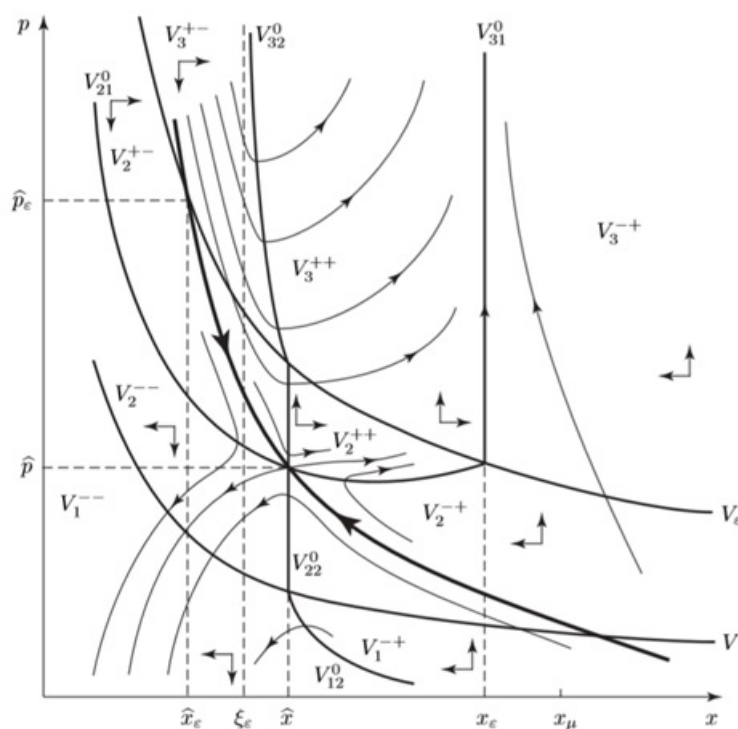
ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

2.1 Построение математической модели и формулировка задачи оптимального управления

Неоклассическая модель оптимального экономического роста описывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственный однородный продукт (капитал) со скоростью $Y(t) > 0$. В каждый момент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \text{ для любого } t \geq 0 \quad (1)$$



Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2: K > 0, L > 0\},$$

дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим “неоклассическим” условиям (условиям Инады) для всех $K > 0, L > 0$:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \quad (3)$$

$$\lim_{K \rightarrow +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{K \rightarrow +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0 \quad (5)$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ для любых } \lambda > 0, K > 0, L > 0. \quad (6)$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся в эту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа вида

$$F(K, L) = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2},$$

где $A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\epsilon Y(t) > 0$, где $0 < \epsilon < 1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1 - \epsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), 0 \leq u(t) \leq 1 - \epsilon, \quad (7)$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t) \quad (8)$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t) \in [0, 1 - \epsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t .

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (7) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t). \quad (9)$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad (10)$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность $g(K(t), L(t), u(t))$ текущего процесса управления есть логарифм полного потребления $C(t)$, т.е. (см. (1), (8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = \ln C(t) = \ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t)).$$

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления $(P_\epsilon), 0 < \epsilon < 1$:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= u(t)F(K(t), L(t)), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon], \dot{L}(t) = \mu L(t), \\ K(0) &= K_0, L(0) = L_0, \\ J(K, L, u) &= \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))] dt \rightarrow \max \end{aligned} \quad (11)$$

Задача (P_ϵ) удовлетворяет условиям (A1)–(A3) и является частным случаем задачи (P). При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1), x > 0$. В этом случае в силу условий (1) и (6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)} F(K(t), L(t)) = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (2) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx} f(x) > 0, \frac{d^2}{dx^2} f(x) < 0 \quad (12)$$

и вследствие (2)–(6)

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow +0} \frac{d}{dx} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad (13)$$

Для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ в силу равенств (9) и (10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t) \frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)} \dot{L}(t) = u(t) \frac{Y(t)}{L(t)} - \mu \frac{K(t)}{L(t)},$$

откуда в силу определения переменной x и условий (1) и (6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t) - \mu x(t)).$$

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть $c(t) = C(t)/L(t)$. Согласно (1) и (8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t)) \frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-pt} \ln c(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы. Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления (P_ϵ) , $0 < \epsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи (\tilde{P}_ϵ) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon], x(0) = x_0, \\ J(x, u) &= \int_0^\infty e^{-pt} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$.

2.2 Аналитическое решение задачи, магистрали

Неоклассическая модель оптимального экономического роста с логарифмической функцией мгновенной полезности формулируется как следующая задача оптимального управления (P_ϵ) , $0 < \epsilon < 1$ (см. предыдущий пункт):

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon], \quad (2.1)$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \quad (2.2)$$

$$K(0) = K_0, L(0) = L_0, \quad (2.3)$$

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-pt} [\ln(1 - u(t)) + \ln F(K(t), L(t))] dt \rightarrow \max \quad (2.4)$$

Здесь $K \in \mathbb{R}^1$ и $L \in \mathbb{R}^1$ — фазовые переменные (капитал и рабочая сила); $\mu > 0; \rho > 0; K_0 > 0, L_0 > 0$ — заданные начальные состояния системы; u — управление, характеризующее долю $u(t)F(K(t), L(t))$ произведенного продукта, инвестируемую в основные производственные фонды (капитал) в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$; F — производственная функция. Максимум в задаче (P_ϵ) ищется в классе измеримых функций $u: [0, \infty) \rightarrow U_\epsilon$. Функция мгновенной полезности

$$g(K, L, u) = \ln(1 - u) + \ln F(K, L), K > 0, L > 0, u \in U_\epsilon,$$

вогнутая по переменной u .

Вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P_ϵ) .

Теорема 2.1. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче $((P_\epsilon)$ и (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ (соответствующая тройке (K_*, L_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

1. оптимальная тройка (K_*, L_*, u_*) вместе с сопряженной переменной $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме:

$$\dot{\psi}^1(t) = -u_*(t) \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K} \psi^1(t) - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))} \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K}, \quad (2.5)$$

$$\dot{\psi}^2(t) = -u_*(t) \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L} \psi^1(t) - \mu \psi^2(t) - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))} \frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{H}(K_*(t), L_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = H(K_*(t), L_*(t), t, \psi(t)); \quad (2.7)$$

2. для любого $t \geq 0$ имеем

$$\psi^1(t) > 0, \psi^2(t) > 0 \quad (2.8)$$

3. если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \geq \theta, \quad (2.9)$$

то выполняется условие трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi^1(t) K_*(t) = 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\mathcal{H}(K, L, t, u, \psi) = uF(K, L)\psi^1 + \mu L\psi^2 + e^{-\rho t}[\ln(1 - u) + \ln F(K, L)],$$

$$H(K, L, t, \psi) = \max_{u \in U_\epsilon} \mathcal{H}(K, L, t, u, \psi)$$

— функция Гамильтона-Понтрягина и гамильтониан в нормальной форме.

Перейдя в задаче (P_ϵ) к фазовой переменной $x(t)=K(t)/L(t)$, $t \geq 0$, получим следующую эквивалентную ей задачу (\tilde{P}_ϵ) , $0 < \epsilon < 1$ (см. предыдущий пункт):

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon], \quad (2.11)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2.12)$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} [\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))] dt \rightarrow \max. \quad (2.13)$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$ и $f(x)=F(x,1)$ для любого $x \in \tilde{G}$

Следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи \tilde{P}_ϵ в терминах текущей сопряжённой переменной p , текущей функции Гамильтона-Понтрягина \mathcal{M} и текущего гамильтониана M .

Теорема 2.2. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче \tilde{P}_ϵ и x_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая текущая сопряжённая переменная p (соответствующая паре (x_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

1. оптимальная пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряжённой переменной p удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме:

$$\dot{p}(t) = [p + \mu - u_*(t) \frac{d}{dx} f(x_*(t))]p - \frac{1}{f(x_*(t))} \frac{d}{dx} f(x_*(t)) \quad (2.15)$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) = M(x_*(t), p(t)); \quad (2.16)$$

2. для любого $t \geq 0$ имеем

$$p(t) > 0; \quad (2.17)$$

3. если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \geq \theta, \quad (2.18)$$

то выполняется условие трансверсальности

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\rho t} p(t) x_*(t) 0 = \quad (2.19)$$

Здесь текущие функция Гамильтона–Понтрягина \mathcal{M} и гамильтониан M для задачи (\tilde{P}_ϵ) в нормальной форме определяются стандартным образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x, u, p) &= (uf(x) - \mu x)p + \ln(1 - u) + \ln f(x), \\ M(x, p) &= \max_{u \in U_\epsilon} \mathcal{M}(x, u, p). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ниже нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.1. Пусть $\phi_1: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ и $\phi_2: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ — две такие вогнутые функции, что

$$\phi_1(x) \geq \phi_2(x) \text{ для любого } x \in \tilde{G}. \quad (2.21)$$

Пусть, кроме того, существует такая точка $\xi \in \tilde{G}$, что

$$\phi_1(\xi) = \phi_2(\xi) \quad (2.22)$$

Тогда функции $\eta_1, \eta_2: \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$, определённые равенствами

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & \text{если } x \leq \xi, \\ \phi_2(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \quad \eta_2(x) = \begin{cases} \phi_2(x), & \text{если } x \leq \xi, \\ \phi_1(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \quad (2.23)$$

являются вогнутыми.

Лемма 2.2. Для любого $\rho > 0$ текущий гамильтониан M задачи (\tilde{P}_ϵ) является вогнутой функцией фазовой переменной x на множестве \tilde{G} .

Из этого вытекают 2 результата

Следствие 2.1. Пусть допустимая пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряженной переменной p удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (\tilde{P}_ϵ) и существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \geq \theta$. Тогда пара (x_*, u_*) оптимальная в задаче \tilde{P}_ϵ

Следствие 2.2. Пусть для допустимой пары (x_*, u_*) существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \geq 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \geq \theta$. Тогда для оптимальности пары (x_*, u_*) в задаче (\tilde{P}_ϵ) необходимо и достаточно, чтобы вместе с некоторой текущей сопряженной переменной p она удовлетворяла условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме.

2.3 Применение методов ЕМРС

.....

Не забываем делать выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Агаев, Р.П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р.П. Агаев, П.Ю. Чеботарев // УБС. – 2010. – Вып. 30.1. – С. 470–505.
- 2 Асеев С. М., Кряжковский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.
- 3 Балашевич, Н.В. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, № 2. – С. 265-286.
- 4 Балашевич, Н.В. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления / Н.В. Балашевич, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, № 6. – С. 838-859.
- 5 Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
- 6 Данциг, Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
- 7 Дмитрук Н.М., Габасов Р., Калинин А.И. Децентрализованные стратегии в задачах оптимального управления и стабилизации взаимосвязанных динамических систем: отчет о НИР (заключительный) / НИИ ППМИ; науч. рук. Дмитрук, Н.М. – 71 с.
- 8 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 147-154.
- 9 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление мультиагентными динамическими системами в условиях неопределенности / Н.М. Дмитрук // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 2. – С. 11-15.
- 10 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Во Тхи Тань Ха. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 121–135.

- 11 Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15-18.
- 12 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление динамическими системами в условиях неопределенности / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2011. – Т. 51, № 7. – С. 1209-1227.
- 13 Габасов, Р. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Н.С. Павленок // Докл. Академии наук. – 2012. – Т. 444, № 4. – С. 371-375.
- 14 Габасов, Р. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов / Р. Габасов, Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2008. – Т. 48, № 4. – С. 593-609.
- 15 Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Оптимизация линейных систем: Методы функционального анализа. – Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.
- 16 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Павленок Н.С. Оптимальное управление динамическим объектом по совершенным измерениям его состояний // Доклад Академии
- 17 Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1992. – Т. 4. – С. 3-19.
- 18 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костина Е.А. Замыкаемые обратные связи по состоянию для оптимизации неопределенных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1996
- 19 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное наблюдение за нестационарными системами // Известия РАН. Теория и системы управления. № 3, 2002. С. 35 – 46.
- 20 Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48. – №. 1. – С. 15-18.
- 21 Габасов Р., Кириллова Ф.М., Поясок Е.И. Оптимальное наблюдение в реальном времени линейного динамического объекта // Доклады Академии наук. 2013. Т. 448, № 3. С. 145–148.
- 22 Габасов Р., Н.М. Дмитрук, Ф.М. Кириллова. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т.10, №2, 2004. С. 33-57.
- 23 Каляев И. А., Гайдук А. Р., Капустян С. Г. Модели и алгоритмы

коллективного управления в группах роботов // М.: Физматлит. – 2009. – Т. 280.

24 Кириллова, Ф.М. Синтез оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени / Ф.М. Кириллова, Н.М. Дмитрук, Р. Габасов // В сборнике "Динамика систем и процессы управления Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского". – Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург, 2015. – С. 208-219

25 Кряжковский, А.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы / А.В. Кряжковский, Н.В. Стрелковский // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т.20, № 3. – С. 132–147.

26 Куржанский, А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения / А.Б. Куржанский // Доклады РАН. – 2009. – Т. 426, № 1. – С. 20–25.

27 Куржанский, А.Б. О задаче группового управления в условиях препятствий / А.Б. Куржанский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург. – 2014. – Т. 20, № 3. – С. 166-179.

28 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения – М., Наука, 1966

29 Петрикевич Я. И. Линейные алгоритмы управления геометрическим расположением объектов в многоагентной системе // Управление большими системами: сборник трудов. – 2010. – №. 30-1.

30 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 392 с.

31 Сетевые модели в управлении / Сборник статей (под ред. Д.А. Новикова, О.П. Кузнецова, М.В. Губко). – М.: Эгвес, 2011. – 443 с.

32 Фельдбаум А.А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 5. С. 712–728.

33 Constrained model predictive control: Stability and optimality / D.Q. Mayne [et. al] // Automatica. – 2000. – Vol. 36, no. 6. – P. 789-814.

34 Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions / P.D. Christofides [et. al] // Computers & Chemical Eng. – 2013. – Vol. 51. – P. 21–41.

35 Distributed model predictive control / E. Camponogara [et. al] // IEEE Control Systems Magazine. – 2002. – Vol. 22, no. 1. – P. 44-52.

- 36 Dmitruk, N.M. Optimal Measurement Feedback Control of Finite-time Continuous Linear Systems / N.M. Dmitruk, R. Findeisen, F. Allgöwer // 17th IFAC World Congress. Seoul, 2008.
- 37 Dmitruk, N. Robust Optimal Control of Dynamically Decoupled Systems via Distributed Feedbacks / N. Dmitruk // Optimization in the Natural Sciences. Communications in Computer and Information Science. – Springer, 2015. – Vol. 499. – P. 95-106.
- 38 Farina, M. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems / M. Farina, R. Scattolini // Automatica. – 2012. – Vol. 48, no. 6. – P. 1088-1096.
- 39 Grune L., Pannek J. Nonlinear model predictive control. – Springer London, 2011.
- 40 Gabasov R., Kirillova F. M., Prischepova S. V. Optimal feedback control. – Springer, 1995.
- 41 Hopkin A.M. A phase plan approach to the compensation of saturating servomechanisms // Trans. AIEE. 1951. Pt. 1, Vol. 70. P. 631–639.
- 42 Jia, D. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication / D. Jia, B. Krogh // Proc. American Control Conference, 2002. – P. 4507-4512.
- 43 Karmarkar, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming / N. Karmarkar // Combinatorica. – 1984. – Vol. 4, no. 4. – P. 373-395.
- 44 Keerthi, S.S. Optimal, infinite horizon feedback laws for a general class of constrained discrete time systems: Stability and moving-horizon approximations / S.S. Keerthi, E.G. Gilbert // Journal of Optimization Theory and Application. – 1988. – Vol. 57, no. 2. – P. 265-293.
- 45 Keviczky, T. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems / T. Keviczky, F. Borrelli, G.J. Balas // Automatica. – 2006. – Vol. 42. – P. 2105-2115.
- 46 Kostina E., Kostyukova O. Worst-case control policies for (terminal) linear-quadratic control problems under disturbances // Int. J. of Robust and Nonlinear Control, 2009
- 47 Magni, L. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems / L. Magni, R. Scattolini // Automatica. – 2006. – Vol. 43, no. 7. – P. 1231–1236.
- 48 Mehrotra, S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method / S. Mehrotra // SIAM Journal on Optimization. – 1992. – Vol. 2. – P. 575–601.

- 49 Müller, M.A. Cooperative control of dynamically decoupled systems via distributed model predictive control / M.A. Müller, M. Reble, F. Allgöwer // Internat. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2012. – Vol. 22, no. 12. – P. 1376-1397.
- 50 Nocedal, J. Numerical Optimization / J. Nocedal, S.J. Wright. – Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, 2006.
- 51 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.
- 52 Richards, A. Robust distributed model predictive control / A. Richards, J.P. How // Internat. Journal of Control. – 2007. – Vol. 80, no. 9. – P. 1517-1531.
- 53 Scattolini, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control — a review / R. Scattolini // Journal of Process Control. – 2009. – Vol. 19, no. 5. – P. 723-731.
- 54 Siljak, D.D. Decentralized control of complex systems / D.D. Siljak. – London: Academic Press, 1991. – 525 p.
- 55 Trodden, P. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints / P. Trodden, A. Richards // Automatica. – Vol. 49, no. 2. – P. 479-487.
- 56 Trodden, P. Distributed model predictive control of linear systems with persistent disturbances / P. Trodden, A. Richards // Internat. Journal of Control. – 2010. – Vol. 83, no. 8. – P. 1653-1663.