ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Управление по прогнозирующей модели, известное в англоязычной литературе как Model Predictive Control (MPC) представляет собой один из современных методов теории управления. Популярность этого метода в математических приложениях вызвана прежде всего тем, что в нём присутствуют математические модели объектов управления в пространстве состояний, в том числе нелинейные, достаточно просто учитываются ограничения на управляющие и фазовые переменные, принимаются во внимание качественные требования к процессу управления.

Классической областью применения MPC до недавнего времени были задачи стабилизации и отслеживания в технических приложениях, особенно в управлении химическими процессами, механическими объектами, робототехнике.

За последние годы фокус исследований MPC сместился в сторону приложений, в которых экономика процесса важнее стабилизации некоторого положения равновесия. Известны примеры из практики, в которых переодические решения дают на выходе больший объём полезного продукта, чем функционрование в окрестности положения равновесия.

Новое направление MPC получило название экономического MPC (EMPC). В силу основных свойств экономического MPC, естественной областью его применения являются задачи математической экономики, теории экономического роста, другие динамические задачи микро- и макроэкономики.

Цель работы — изучить идеи MPC и EMPC для решения задачи с неоклассической моделью оптимального экономического роста.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Теория управления по прогнозирующей модели

Управление по прогнозирующей модели(MPC) — это продвинутый метод управления, который используется для управления процессом при одновременном удовлетворении набора ограничений. Главная идея MPC — использование математической модели управляемого процесса в пространстве состояний для предсказания и оптимизации будущего поведения системы. Он используется в перерабатывающей промышленности на химических и нефтеперерабатывающих заводах с 1980-х годов. В последние годы он также используется в моделях балансировки энергосистем и в силовой электронике. Основным преимуществом MPC является тот факт, что он позволяет оптимизировать текущий временной интервал, учитывая при этом будущие временные интервалы. Это достигается за счет оптимизации конечного временного горизонта, но только на текущем временном интервале. Модели используемые в MPC обычно призваны показать поведение сложных динамических систем. Модели MPC предсказывают изменение в зависимых переменных моделируемой системы, которое будет вызвано изменениями в независимых переменных. Независимые переменные, которые не связаны с управлением, воспринимаются как возмущения. Зависимыми переменными в этих процессах представляют либо задачи управления, либо ограничения на процесс. MPC использует текущие значения переменных, текущее динамическое состояние процесса, модель, а также значение эталона (reference) и ограничения переменных для расчета будущих изменений зависимых переменных. Эти изменения рассчитаны так, чтобы держать зависимые переменные близко к эталону, соблюдая ограничения как для независимых, так и для зависимых переменных. MPC обычно вычисляет только первое изменение в каждой независимой переменной, и повторяет вычисление, когда требуется следующее изменение.

Многие реальные процессы нелинейны, но их можно считать линейными на маленьком рабочем диапазоне. Линейный подход используется в большиснтве приложений с механизмом обратной связи MPC, компенсирующим ошибки прогнозирования из-за структурного несоответствия между моделью и процессом. В управлениях, которые состоят только из линейных моделей, принцип суперпозиции линейной алгебры позволяет суммировать эффект изменений нескольких независимых переменных для прогнозирования реакции зависимых переменных. Это упрощает задачу управления до ряда прямых матричных вычислений, которые быстры и безошибочны. Когда линейные модели недостаточно точны для представления реальных нелинейных процессов, можно использовать несколько подходов. В некоторых случаях переменные процесса могут быть преобразованы до и / или после линейной модели MPC, чтобы уменьшить нелинейность. Процесс может контролироваться с помощью нелинейного MPC, который использует нелинейную модель непосредственно в приложении управления. Нелинейная модель может быть в форме эмпирического подбора данных (например, искусственных нейронных сетей) или динамической модели высокой точности, основанной на фундаментальных балансах массы и энергии.

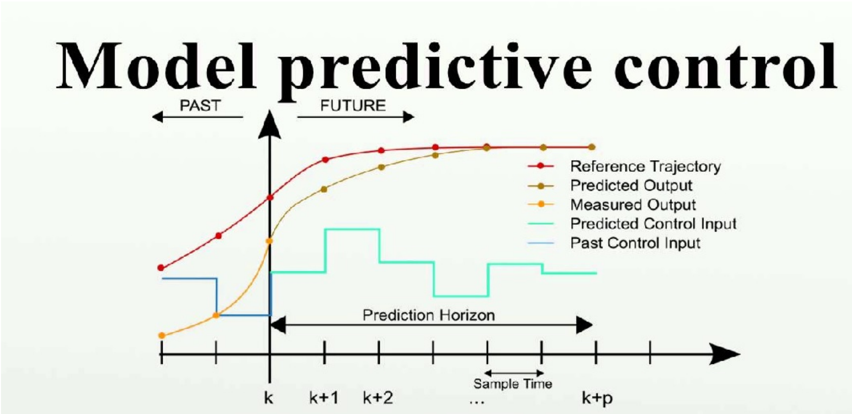
MPC основан на пошаговой оптимизации модели с конечным горизонтом. В момент времени t замеряется текущее состояние и вычисляется стратегия управления с минимальными затратами (с помощью алгоритма численной минимизации) для относительно короткого горизонта в будущем: $[t, t+T]$. В частности, онлайн-вычисления или вычисления «на лету» используются для изучения траекторий состояния, которые исходят из текущего состояния, и находят (посредством решения уравнений Эйлера – Лагранжа) стратегию с минимальными затратами до времени $t+T$. Реализуется только первый шаг стратегии управления, затем снова производится измерение состояния, и вычисления повторяются, начиная с нового текущего состояния. Получается новый элемент управления и новый прогнозируемая траектория состояния. Горизонт прогнозирования продолжает смещаться вперед, и по этой причине MPC также называют управлением скользящим горизонтам.

MPC использует:

- Внутренняя динамическая модель процесса.
- Функция затрат J над горизонтом прогнозирования.
- Оптимизационный алгоритм минимизирующий функцию стоимости J используя управляющее воздействие.

В западной литературе управление в реальном времени представлено теорией управления по прогнозирующей модели — Model Predictive Control (MPC), также называемая Receding Horizon Control (RHC). Основными приложениями теории являются задачи стабилизации динамических систем. Современная теория нелинейного MPC предлагает основанные на решении задач оптимального управления методы построения обратных связей для нелинейных объектов.

Нелинейное управление по прогнозирующей модели Нелинейное управление по прогнозирующей модели — это оптимизационный метод для управления нелинейными системами по принципу обратной связи. Его основные приложения — это задача стабилизации и задача отслеживания (stabilization and tracking problems).



Предположим, что нам дан управляемый процесс, состояние которого $x(n)$ измеряется в дискретные моменты времени t_n, $n = 0, 1 \ldots$ «Управляемый» означает, что в каждый момент времени мы можем выбрать управляющее воздействие $u(n)$, которое влияет на будущее поведение состояния системы. В следящем (tracking) управлении задача состоит в том, чтобы определить управляющее воздействие $u(n)$ таким образом, чтобы $x(n)$ следовало заданному эталону $x^{ref}(n)$ настолько точно, насколько это возможно. Это значит, что если текущее состояние далеко от эталонного, то мы должны управлять системой в направлении эталонного состояния, а если текущее состояние уже близко к эталону, то мы стараемся удержать его там.

Для простоты будем считать, $x(n) \in X = R^d$ и $u(n) \in U = R^m$, более того, считаем эталон константой и равным $x_* = 0$, т.е, $x^{ref}(n) = x_* = 0$ для всех $n \geqslant 0$. С таким константным эталоном задача отслеживания упрощается до задачи стабилизации.

Так как мы хотим иметь возможность влиять на отклонение $x(n)$ от эталонного значения $x_* = 0$, нам бы хотелось иметь $u(n)$ виде обратной связи, т.е. в виде $u(n) = \mu(x(n))$, где отображается некоторое состояние $x \in X$ во множество значений управления U. Идея управления по прогнозирующей модели — как использовать модель процесса с целью предсказания и оптимизации будущего поведения системы.

Будем рассматривать модели вида

$$x^+ = f(x, u) \tag{1.1}$$

где $f : X \times U \to X$ это известная, вообще говоря, нелинейная функция, которая ставит в соответствие состоянию x и значению управления u последовательное значение (successor state) x^+ в следующий момент времени. Начиная с текущего состояния x(n), для любой последовательности управлений $u(0), \ldots, u(N-1)$ с длиной горизонта $N \geqslant 2$, мы можем совершать итерации (1.1) с целью составления прогнозируемой траектории x_u определённой как

$$x_u(0) = x(n), x_u(k+1) = f(x_u(k), u(k)), k = 0, \ldots, N-1. \tag{1.2}$$

Этим способом мы получаем прогнозы $x_u(k)$ для состояния системы $x(n+k)$ в момент времени t_{n+k} в будущем. Таким образом, мы получаем прогноз поведения системы на дискретном интервале $t_n, \ldots, t_{n+N}$ в зависимости от выбранной последовательности управлений $u(0), \ldots, u(N-1)$.

Теперь мы используем оптимальное управление для определения $u(0), \ldots, u(N-1)$ таким образом, чтобы x_u было как можно ближе к $x_* = 0$. С этой целью мы измеряем расстояние между $x_u(k)$ и $x_* = 0$ для $k = 0, \ldots, N-1$ с помощью функции $\ell(x_u(k), u(k))$. То есть мы не только вводим штраф за отклонение состояния от эталона, но также – если хотим – расстояние значений управления $u(k)$ до эталонного управления u_*, которое мы здесь также выбираем u_*=0. Стандартныйи выбор для этой цели – это квадратичная функция

$$\ell(x_u(k), u(k)) = ||xu(k)||^2 + \lambda||u(k)||^2$$

где $||\cdot||$ обозначает обычную евклидову норму, а $\lambda \geqslant 0$ это весовой параметр управления, который также может быть принят равным 0, если мы желаем вводить штраф.

Теперь задача оптимального управления выглядит так:

$$minimize J(x(n), u(\cdot)) := \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_u(k), u(k))$$

Будем считать, что ЗОУ имеет решение, которое получается в результате минимизации последовательности управлений $u*(0), \ldots, u*(N-1)$, то есть

$$\min J(x(n), u(.)) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x_{u^*}(k), u^*(k))$$

Чтобы получить желаемое значение величины обратной связи $\mu(x(n))$, мы теперь устанавливаем $\mu(x(n)) := u^*(0)$, то есть, мы используем первый элемент последовательности оптимальных управлений.

В следующие моменты времени $t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots$ мы повторяем процедуру с новыми измерениями $x(n+1), x(n+2), \ldots$ с целью получения переменных обратной связи $\mu(x(n+1)), \mu(x(n+2)), \dots$ Другими словами, мы получаем закон обратной связи μ с помощью итерационной онлайн оптимизации над прогнозами, полученными с помощью нашей модели (1.1). Это первая ключевая характеристика управления по прогнозирующей модели.

С точки зрения горизонта планирования, при выполнение этих итераций, траектории $x_u(k), k = 0, \dots N$ обеспечивают прогноз на дискретном интервале $t_n, \dots t_{n+N}$ в момент времени t_n, на интервале $t_{n+1}, \dots t_{n+N+1}$ в момент времени t_{n+1}, на интервале $t_{n+2}, \dots t_{n+N+2}$ в момент времени t_{n+2} и т. д. Следовательно, горизонт планирования скользит, и этот движущийся горизонт является второй ключевой характеристикой управления по прогнозирующей модели.

1.2 Экономический MPC

Экономический MPC это вид MPC, в котором, в отличие от обычного, задача управления связана не со стабилизацией априори заданной точки (или траектории), а с оптимизацией некоторого общего критерия эффективности, относящегося к экономике рассматриваемой системы. Обычно в качестве целевой функции используется некоторая экономическая цель.

Предположение 1 Штрафная функция (функция цены) стандартного MPC

$$0 = \ell(x_s, u_s) \leq \ell(x, u) \text{ для всех допустимых } (x, u) \tag{1.3}$$

где $\ell \colon \mathbb{X} \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{X}$ множество допустимых состояний, а $\mathbb{U}$ — множество допустимых управлений.

В EMPC издержки при управлении предприятием используется как цена этапа в целевой функции MPC. Так как издержки при управлении предприятием могут не быть нулевыми даже при оптимальных устойчивых условиях, (1.3) в общем случае не верно. Более того, может так случиться, что $\ell(x_s, u_s) \geq \ell(x, u)$, для некоторой допустимой пары (x, u), которая не является устойчивым состоянием.

Также определим дискретную конечномерную нелинейную систему в виде

$$x^+ = f(x, u) \tag{1.4}$$

где $x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ — состояние, $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ — управление и $f \colon \mathbb{X} \times \mathbb{U} \mapsto \mathbb{X}$.

Целевая функция определяется таким образом:

$$\sum_k \ell(x(k), u(k)) \tag{1.5}$$

при этом

$$(x(k), u(k)) \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R}_0^+ \tag{1.6}$$

где $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{U}$.

Определим стоимость с конечным горизонтом:

$$V_N(x, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell(x(k), u(k)) \tag{1.7}$$

где $\mathbf{u} = [u(0), u(1), ..., u(N-1)]$ и $x(0) = x$. Задача оптимизации с конечным горизонтом решается способом скользящего горизонта, когда используется первый элемент последовательности оптимальных управлений, ожидается следующее измерение или подсчёт, а потом задача решается ещё раз используя новое значение. Формально, в каждый момент времени k решается следующая задача:

$$\min_{\mathbf{u}} V_N(x, \mathbf{u})$$

$$\begin{cases} x^+ = f(x, u), \\ (x(k), u(k)) \in \mathbb{Z} k \in 0, 1, \ldots, N-1, \\ x(N) = x_s, x(0) = x. \end{cases} \tag{1.8}$$

где мы добавили краевую константу $x(N) = x_s$. Далее определяем множество $\mathbb{Z}_N$ как множество (x,$\mathbf{u}$) пар, удовлетворяющих ограничениям:

$$\begin{gathered} \mathbb{Z}_N = \{(x, \mathbf{u}) | \exists x(1), \ldots, x(N) : x^+ = f(x, u), \\ (x(k), u(k)) \in \mathbb{Z}, \forall k \in 0, 1, \ldots, N-1, x(N) = x_s, x(0) = x\} \end{gathered} \tag{1.9}$$

После этого определяем множество допустимых состояний $\mathscr{X}_N$ как проекцию $\mathbb{Z}_N$ на $\mathbb{X}$

$$\mathscr{X}_N = \{x \in \mathbb{X} | \exists \mathbf{u} : (x, \mathbf{u}) \in \mathbb{Z}_N\} \tag{1.10}$$

Последовательность управлений $\mathbf{u} = u(0), u(1), ...u(N-1)$ называется допустимой, для начального состояния x если $(x, u) \in \mathbb{Z}_N$.

Формально определим оптимальное устойчивое состояние как пару (x_s, u_s), которая удовлетворяет

$$\ell(x_s, u_s) = min_{x,u}\{\ell(x, u)|(x, u) \in \mathbb{Z}, x = f(x, u)\} \tag{1.11}$$

Строго говоря, (1.11) может состоять более чем из одной пары, но для простоты считаем, что эта пара уникальна. Оптимизационная задача (1.8) определяет неявный закон обратной связи $\mathcal{K}_N\colon \mathscr{X}_N \mapsto \mathbb{U}$ который мы обозначаем как

$$u = \mathcal{K}_N = u^0(0; x)x \in \mathscr{X}_N \tag{1.12}$$

где $\mathbf{u}^0(x)$ — оптимальное решение (1.8) для начального состояния x, и $u^0(k; x)$ обозначает оптимльное решение в момент времени $k \in 0, 1, \ldots, N-1$. Без ограничения общности полагаем, что $\mathbf{u}^0(x)$ однозначно определено.

Предположение 2

1. $f(\cdot)$ и $\ell(\cdot)$ непрерывны. Множество $\mathscr{X}_N$ состоит из x_s
2. Существует $\gamma\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}$ такая, что для каждого $x \in \mathscr{X}_N$ существует допустимое $\mathbf{u}$ с

$$|\mathbf{u} - [u_s, \ldots, u_s]^T| \leq \gamma(|x - x_s|).$$

Установив экономическую основу мы можем рассмотреть интересную особенность EMPC:

Теорема Пусть $x(0) \in \mathscr{X}_N$. Тогда существует по меньшей мере одна допустимая последовательность управлений, которая приводит систему в состояние x_s за время N оставаясь в пределах $\mathscr{X}_N$ и замкнутой системы (1.4) и (1.12) имеет асимптотическую среднюю эффективность не хуже, чем у лучшего устойчевого состояния.

1.3 Численные методы решения задач оптимального управления и программные средства

1.3.1 Численные методы решения задач оптимального управления

Рассмотрим некоторые методы решения задач оптимального управления.

Метод штрафных функций

Изложение метода Основная задача метода штрафных функций состоит в преобразовании задачи минимизации функции $z = f(x)$ с соответствующими ограничениями, наложенными на , в задачу поиска минимума без ограничений функции $Z = f(x) + P(x)$. Функция $P(x)$ является штрафной. Необходимо, чтобы при нарушении ограничений она «штрафовала» функцию Z, т.е. увеличивала её значение. В этом случае минимум функции Z будет находиться внутри области ограничений. Функция $P(x)$, удовлетворяющая этому условию, может быть не единственной. Задачу минимизации можно сформулировать следующим образом:

минимизировать функцию $z = f(x)$ при ограничениях $c_j(x), j = 1, 2, \ldots, m$.

Функцию P(x) удобно записать следующим образом:

$$P(x) = r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x)},$$

где r – положительная величина. Тогда функция $Z = \varphi(x, r)$ принимает вид

$$Z = \varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j(x)}$$

Если принимает допустимые значения, т.е. значения, для которых $c_j \geq 0$, то Z принимает значения, которые больше соответствующих значений f(x) (истинной целевой функции данной задачи), и разность можно уменьшить за счет того, что r может быть очень малой величиной. Но если принимает значения, которые хотя и являются допустимыми, но близки к границе области ограничений, и по крайней мере одна из функций $c_j(x)$ близка к нулю, тогда значения функции $P(x)$, и следовательно значения функцииZ станут очень велики. Таким образом, влияние функции $P(x)$ состоит в создании «гребня с крутыми краями» вдоль каждой границы области ограничений. Следовательно, если поиск начнется из допустимой точки и осуществляется поиск минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений, то минимум, конечно, будет достигаться внутри допустимой области для задачи с ограничениями. Полагая r достаточно малой величиной, для того чтобы влияние $P(x)$ было малым в точке минимума, мы можем сделать точку минимума функции $\varphi(x, r)$ без ограничений совпадающей с точкой минимума задачи с ограничениями.

Алгоритм метода штрафных функций Пусть имеется следующая задача: Минимизировать f(x) при ограничениях $g_i(x) \geq 0 i = \overline{1,m}$

Начальный этап Выбрать $\epsilon \geq 0$ в качестве константы остановки, начальную допустимую точку $x^0 \in R^n$, для которой $g_i(x^0) \geq 0, i = \overline{1,m}$, скаляр r_0 и $0 \leq \beta \leq 1$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап При исходной точке x_k решить следующую задачу безусловной оптимизации: $P(x,r) = f(x) + r\sum_{i=1}^{m} R_i(g_i(x))\omega_i$ минимизировать, где

$r \geq 0$ - параметр, значения которого убывают с каждой итерации $R_i(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0; \omega_i$ - положительные весовые коэффициенты.

Примерами штрафных функций являются:

- обратная функция$R_i(g_i(x)) = \frac{1}{g_i(x)}$
- логарифмическая функция $R_i(g_i(x)) = -ln(g_i(x))$

Положить x_{k+1} равным оптимальному решению задачи минимизации и перейти ко второму шагу.

Минимизация штрафной функцию может быть выполнена любым методом безусловной оптимизации, например, градиентным.

Если $r_k \sum R(g_i(x_{k+1}))\omega_i < \epsilon$, то остановиться. Решение является искомым.

В противном случае положить $r_{k+1} = \beta r_k$. Изменить $k = k + 1$ и перейти к первому шагу (k+1)-й итерации.

Метод сопряжённых градиентов

Метод сопряжённых градиентов — итерационный метод для безусловной оптимизации в многомерном пространстве. Основным достоинством метода является то, что он решает квадратичную задачу оптимизации за конечное число шагов. Поэтому, сначала описывается метод сопряжённых градиентов для оптимизации квадратичного функционала, выводятся итерационные формулы, приводятся оценки скорости сходимости. После этого показывается, как метод сопряжённых обобщается для оптимизации произвольного функционала, рассматриваются различные варианты метода, обсуждается сходимость.

Постановка задачи оптимизации Пусть задано множество $X \subset R^n$ и на этом множестве определена целевая функция (objective function) $f\colon R^n \mapsto R$. Задача оптимизации состоит в нахождении на множестве X точной верхней или точной нижней грани целевой функции. Множество точек, на которых достигается нижняя грань целевой функции обозначается X_* . Если $X = R^n$, то задача оптимизации называется безусловной. Если $X \neq R^n$, то задача оптимизации называется условной.

Будем решать задачу: $F(x) \to min, \quad x \in R^n$. F(x) - непрерывно дифференцируемая в R^n функция. Чтобы модифицировать метод сопряжённых градиентов для решения этой задачи необходимо получить для p_k, α_k, β_k формулы, в которые не входит матрица A:

$\alpha_k = argmin \lim_{\alpha_k} F(x_{k-1} + \alpha_k p_k)$ $p_{k+1} = -F'(x_k) + \beta_k p_k$ β_k можно вычислять по одной из трёх формул:

- $\beta_k = -\frac{\langle F'(x_k), F'(x_k)\rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1})\rangle}$ - Метод Флетчера - Ривса.
- $\beta_k = \frac{\langle F'(x_k), F'(x_k) - F'(x_{k-1})\rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1})\rangle}$ - Метод Полака - Райбера.
- $\beta_k = \frac{\langle F''(x_k)p_k, F'(x_k)\rangle}{\langle F''(x_{k-1})p_k, p_k\rangle}$

Если функция $F(x)$ - квадратичная и строго выпуклая, то все три формулы дают одинаковый результат. Если F(x) - произвольная функция, то каждой из формул соответствует своя модификация метода сопряжённых градиентов. Третья формула используется редко, так как она требует, чтобы функция $F(x) \in C^2(R^n)$ и вычисления гессиана функции $F(x)$ на каждом шаге метода.

Анализ метода Если функция $F(x)$ - не квадратичная, метод сопряжённых градиентов может и не сходиться за конечное число шагов. Кроме того, точное вычисление α_k на каждом шаге возможно только в редких случаях. Поэтому накопление погрешностей приводит к тому, что вектора p_k перестают указывать направление убывания функции $F(x)$. Тогда на каком-то шаге полагают $\beta_k = 0$. Совокупность всех номеров k, при которых принимается $\beta_k = 0$, обозначим за I_0. Номера $k \in I_0$ называются моментами обновления метода. На практике часто выбирают $I_0 = \{n, 2n, 3n, \dots\}$, где n - размерность пространства.

Сходимость метода Для метода Флетчера - Ривса существует теорема о сходимости, накладывающая не слишком жёсткие условия на минимизируемую функцию F(x): Теорема.

Пусть $F(x) \in C^1(R^n)$ и выполняются следующие условия:

α_k удовлетворяет строгим условиям Вольфа: $F(x_{k-1}+\alpha_k p_k) \leq F(x_{k-1})+ c_1\alpha_k\langle F'(x_{k-1}), p_k\rangle |\langle F'(x_{k-1}+\alpha_k p_k), p_k\rangle \leq c_2|\langle F'(x_{k-1}), p_k\rangle|$ где $0 < c_1 < c_2 < 1/2$ Множество $M = \{x|F(x) \leq F(x_0)\}$ ограничено Производная F'(x) удовлетворяет условию Липшица с константой L в некоторой окрестности N множества $M : ||F'(x_1) - F'(x_2)|| \leq L||x_1 - x_2|| \quad \forall x_1, x_2 \in N$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} inf||F'(x_k)| = 0$ Для метода Полака-Райбера доказана сходимость в предположении, что F(x) - строго выпуклая функция. В общем случае доказать сходимость метода Полака - Райбера невозможно. Напоротив, верна следующая теорема:

Предположим, что в методе Полака-Райбера значения α_k на каждом шаге вычисляются точно. Тогда существует функция $F : R^3 \mapsto R, \quad F(x) \in C^2(R^3)$, и начальное приближение x_0 , такие что $\exists\delta > 0, \forall k = 0, 1, 2, ... \quad ||f(x_k)|| > \delta$.

Тем не менее, на практике метод Полака-Райбера работает лучше. Наиболее распространённые критерии останова на практике: Норма градиента становится меньше некоторого порога Значение функции в течении m последовательных итераций почти не изменилось

1.3.2 Программные средства решения задач оптимального управления

Существуют встроенные средства и специализированные пакеты для Matlab (YALMIP, ACADO, CasADi) и Pyton (CasADi) для моделирования и численного решения задач оптимизации и оптимального управления.

ГЛАВА 2

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

2.1 Построение математической модели и формулировка задачи оптимального управления

Неоклассическая модель оптимального экономического ростаописывает замкнутую агрегированную экономику, производящую в каждый момент времени $t \geq 0$ единственныйоднородный продукт (капитал)со скоростью $Y(t) > 0$ В каждыймомент времени t величина $Y(t)$ является функцией текущих значений капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$; трудовые ресурсы также предполагаются однородными. Таким образом,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)) \text{ для любого } t \geq 0 \tag{2.1}$$

Функция F обычно называется производственной функцией. Относительно производственной функции F предполагается, что она определена и непрерывна на положительном квадранте

$$G = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 \colon K > 0, L > 0\}$$

, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет следующим "неоклассическим" условиям для всех $K > 0$, $L > 0$:

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0, \qquad \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \tag{2.3}$$

$$\lim_{K \to +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \infty \qquad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = 0 \tag{2.4}$$

$$\lim_{K \to +0} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \infty \qquad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = 0 \tag{2.5}$$

Наконец, предполагается, что F положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ для любых } \lambda > 0, K > 0, L > 0 \tag{2.6}$$

Последнее условие означает, что объем производства в каждую единицу времени прямо пропорционален величинам имеющихся вэту единицу времени производственных факторов. В качестве производственной функции F может фигурировать, например, стандартная функция Кобба–Дугласа вида

$$F(K, L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},$$

где $A > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

В замкнутой экономике произведенный продукт либо инвестируется в основные производственные фонды (капитал), либо потребляется. Предположим, что в каждый момент времени $t \geq 0$ минимально возможная часть потребляемого продукта есть $\epsilon Y(t) > 0$, где $0 < \epsilon < 1$ — некоторая постоянная, а доля продукта $(1 - \epsilon)Y(t)$ может быть распределена между производством и потреблением произвольным образом.

Пусть в момент времени $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), 0 \leq u(t) \leq 1 - \epsilon, \tag{2.7}$$

произведенного продукта инвестируется в основные производственные фонды, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t) \tag{2.8}$$

потребляется. В дальнейшем величина $u(t) \in [0, 1 - \epsilon]$ будет трактоваться как значение управления в момент времени t.

В данной модели амортизации капитала не предполагается. Поэтому в силу равенства (2.7) динамика изменения капитала может быть описана при помощи следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{K}(t) = I(t) = u(t)Y(t) \tag{2.9}$$

Считаем, что в начальный момент времени $K(0) = K_0 > 0$.

Пусть трудовые ресурсы удовлетворяют условию экспоненциального роста, т.е.

$$\dot{L}(t) = \mu L(t) \tag{2.10}$$

где $\mu > 0$ — некоторая постоянная. Аналогично будем считать, что $L(0) = L_0 > 0$.

Пусть $\rho > 0$ — параметр дисконтирования и в каждый момент времени $t \geq 0$ мгновенная полезность g(K(t),L(t),u(t)) текущего процесса управления есть логарифм полного потребления C(t), т.е. (см. (2.1), (2.8))

$$g(K(t), L(t), u(t)) = lnC(t) = ln(1 - u(t)) + lnF(K(t), L(t)).$$

Неоклассическая модель оптимального экономического роста (с логарифмической функцией мгновенной полезности) формулируется в виде следующей задачи оптимального управления $(P_\epsilon), 0 < \epsilon < 1$:

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon],$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t),\ K(0) = K_0, L(0) = L_0,$$

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-pt}[\ln(1 - u(t)) + lnF(K(t), L(t))]dt \to \max \qquad (2.11)$$

Задача (P_ϵ) является частным случаем задачи (P). При исследовании неоклассической задачи оптимального экономического роста обычно, используя условие однородности (2.6), понижают размерность системы и переходят к вспомогательной фазовой переменной $x = K/L$ (величине капитала, приходящегося на единицу рабочей силы) и однофакторной производственной функции f вида $f(x) = F(x, 1), x > 0$. В этом случае в силу условий (2.1) и (2.6) для любого $t \geq 0$

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{1}{L(t)}F(K(t), L(t)) = F(\frac{K(t)}{L(t)}, 1) = f(x(t)).$$

Функция f определена и непрерывна на $\tilde{G} = (0, \infty)$. В силу условий (2.2) для всех $x > 0$

$$\frac{d}{dx}f(x) > 0, \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0 \qquad (2.12)$$

и вследствие (2.2)–(2.6)

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0, \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \to +0} \frac{d}{dx}f(x) = \infty, \lim_{x \to \infty} \frac{d}{dx}f(x) = 0 \qquad (2.13)$$

Для переменной x(t)=K(t)/L(t) в силу равенств (2.9) и (2.10) имеем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = \dot{K}(t)\frac{1}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - \mu\frac{K(t)}{L(t)},$$

откуда в силу определения переменной x и условий (2.1) и (2.6) вытекает равенство

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t) - \mu x(t))$$

.

Величина мгновенного потребления на единицу трудовых ресурсов в момент времени $t \geq 0$ есть c(t)=C(t)/L(t). Согласно (2.1) и (2.8) получаем

$$c(t) = (1 - u(t))\frac{Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)).$$

Заметим, что в силу равенства (2.10) трудовые ресурсы L в рассматриваемой модели подчиняются заранее заданной динамике. Поэтому максимизация интегрального функционала (2.11) эквивалентна задаче максимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-pt} \ln c(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt,$$

характеризующего агрегированную удельную скорость роста потребления на единицу рабочей силы. Таким образом, в терминах фазовой переменной x задача оптимального управления(P_ϵ), $0 < \epsilon < 1$, переписывается в виде следующей задачи $(\tilde{P}_\epsilon)$:

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-pt}[\ln(1 - u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max.$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$.

2.2 Аналитическое решение задачи, магистрали

Неоклассическая модель оптимального экономического роста с логарифмической функцией мгновенной полезности формулируется как следующая задача оптимального управления $(P_\epsilon), 0 < \epsilon < 1$ (см. предыдущий пункт):

$$\dot{K}(t) = u(t)F(K(t), L(t)), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1 - \epsilon], \tag{2.14}$$

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \tag{2.15}$$

$$K(0) = K_0, L(0) = L_0, \tag{2.16}$$

$$J(K, L, u) = \int_0^\infty e^{-pt}[\ln(1 - u(t)) + lnF(K(t), L(t))]dt \to \max \tag{2.17}$$

Здесь $K \in \mathbb{R}^1$ и $L \in \mathbb{R}^1$ — фазовые переменные (капитал и рабочая сила); $\mu > 0; \rho > 0; K_0 > 0, L_0 > 0$ — заданные начальные состояния системы; u — управление, характеризующее долю $u(t)F(K(t), L(t))$ произведенного продукта, инвестируемую в основные производственные фонды (капитал) в единицу времени, следующую за моментом времени $t \geq 0$; F — производственная функция. Максимум в задаче (P_ϵ) ищется в классе измеримых функций $u\colon [0, \infty) \to U_\epsilon$.

Функция мгновенной полезности

$$g(K, L, u) = \ln(1-u) + \ln F(K, L), K > 0, L > 0, u \in U_\epsilon,$$

вогнутая по переменной u.

Вариант принципа максимума Понтрягина для задачи (P_ϵ).

Теорема 2.1. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче $((P_\epsilon)$ и (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая сопряженная переменная $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ (соответствующая тройке (K_*, L_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

1. оптимальная тройка (K_*, L_*, u_*) вместе с сопряженной переменной $\psi = (\psi^1, \psi^2)$ удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме:

$$\dot{\psi}^1(t) = -u_*(t)\frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K}\psi^1(t) - \\ - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))}\frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial K}, \tag{2.18}$$

$$\dot{\psi}^2(t) = -u_*(t)\frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L}\psi^1(t) - \mu\psi^2(t) - \\ - \frac{e^{-\rho t}}{F(K_*(t), L_*(t))}\frac{\partial F(K_*(t), L_*(t))}{\partial L}, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{H}(K_*(t), L_*(t), t, u_*(t), \psi(t)) = H(K_*(t), L_*(t), t, \psi(t)); \tag{2.20}$$

2. для любого $t \geq 0$ имеем

$$\psi^1(t) > 0, \psi^2(t) > 0 \tag{2.21}$$

3. если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau ge0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \geq \theta \tag{2.22}$$

то выполняется условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} \psi^1(t)K_*(t) = 0 \tag{2.23}$$

Здесь

$$\mathcal{H}(K, L, t, u, \psi) = uF(K, L)\psi^1 + \mu L\psi^2 + e^{-\rho t}[ln(1-u) + \ln F(K, L)],$$

$$H(K, L, t, \psi) = \max_{u\in U_\epsilon} \mathcal{H}(K, L, t, u, \psi)$$

— функция Гамильтона–Понтрягина и гамильтониан в нормальной форме.

Перейдя в задаче (P_ϵ) к фазовой переменной $x(t) = K(t)/L(t)$, $t \geq 0$, получим следующую эквивалентную ей задачу $(\tilde{P}_\epsilon), 0 < \epsilon < 1$ (см. предыдущий пункт):

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - \mu x(t), u(t) \in U_\epsilon = [0, 1-\epsilon] \tag{2.24}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.25}$$

$$J(x, u) = \int_0^\infty e^{-pt}[\ln(1-u(t)) + \ln f(x(t))]dt \to \max \tag{2.26}$$

Здесь $x_0 \in \tilde{G} = (0, \infty)$ и $f(x) = F(x, 1)$ для любого $x \in \tilde{G}$

Следующий вариант принципа максимума Понтрягина для задачи $\tilde{P}_\epsilon$ в терминах текущеё сопрянной переменной p, текущей функции Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{M}$ и текущего гамильтониана M.

Теорема 2.2. Пусть u_* — оптимальное управление в задаче $\tilde{P}_\epsilon$ и x_* — соответствующая оптимальная траектория. Тогда существует такая текущая сопряженная переменная p (соответствующая паре (x_*, u_*)), что выполняются следующие условия:

1. оптимальная пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряженной переменной p удовлетворяют на бесконечном полуинтервале времени $[0, \infty)$ основным соотношениям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме:

$$\dot{p}(t) = [p + \mu - u_*(t)\frac{d}{dx}f(x_*(t))]p - \frac{1}{f(x_*(t))}\frac{d}{dx}f(x_*(t)) \tag{2.27}$$

$$\mathcal{M}(x_*(t), u_*(t), p(t)) = M(x_*(t), p(t)) \tag{2.28}$$

2. для любого $t \geq 0$ имеем

$$p(t) > 0 \tag{2.29}$$

3. если существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau > 0$ выполняется неравенство

$$u_*(t) \geq \theta \tag{2.30}$$

то выполняется условие трансверсальности

$$\lim_{t\to\infty} e^{\rho t} p(t) x_*(t) = 0 \tag{2.31}$$

Здесь текущие функция Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{M}$ и гамильтониан M для задачи $(\tilde{P}_\epsilon)$ в нормальной форме определяются стандартным образом:

$$\mathcal{M}(x, u, p) = (uf(x) - \mu x)p + \ln(1 - u) + \ln f(x),$$

$$M(x, p) = \max_{u \in U_\epsilon} \mathcal{M}(x, u, p). \tag{2.32}$$

Ниже нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.1. Пусть $\phi_1 \colon \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ и $\phi_2 \colon \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$ — две такие вогнутые функции, что

$$\phi_1(x) \geq \phi_2(x) \text{ для любого } x \in \tilde{G}. \tag{2.33}$$

Пусть, кроме того, существует такая точка $\xi \in \tilde{G}$, что

$$\phi_1(\xi) = \phi_2(\xi) \tag{2.34}$$

Тогда функции $\eta_1, \eta_2 \colon \tilde{G} \mapsto \mathbb{R}^1$, определённые равенствами

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \phi_1(x), & \text{если } x \le \xi, \\ \phi_2(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \eta_2(x) = \begin{cases} \phi_2(x), & \text{если } x \le \xi, \\ \phi_1(x), & \text{если } x > \xi, \end{cases} \tag{2.35}$$

являются вогнутыми.

Лемма 2.2. Для любого $p > 0$ текущий гамильтониан M задачи $(\tilde{P}_\epsilon)$ является вогнутой функцией фазовой переменной x на множестве $\tilde{G}$. Из этого вытекают 2 результата

Следствие 2.1. Пусть допустимая пара (x_*, u_*) вместе с текущей сопряженной переменной p удовлетворяют условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи $(\tilde{P}_\epsilon)$ и существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \ge 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \ge \theta$. Тогда пара (x_*, u_*) оптимальная в задаче $\tilde{P}_\epsilon$.

Следствие 2.2. Пусть для допустимой пары (x_*, u_*) существует такое число $\theta > 0$, что начиная с некоторого момента времени $\tau \ge 0$ выполняется неравенство $u_*(t) \ge \theta$. Тогда для оптимальности пары (x_*, u_*) в задаче $(\tilde{P}_\epsilon)$ необходимо и достаточно, чтобы вместе с некоторой текущей сопряженной переменной p она удовлетворяла условиям принципа максимума Понтрягина в нормальной форме.

Любая пара (x_*, p_*) принимает значение в

$$\Gamma = \{(x, p) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, p > 0\}.$$

Максимум в (2.32) достигается в точке

$$u(x, p) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < p < \frac{1}{f(x)} \\ 1 - \frac{1}{f(x)p}, & \text{если } \frac{1}{f(x)} \le p \le \frac{1}{\epsilon f(x)} \\ 1 - \epsilon, & \text{если } p > \frac{1}{\epsilon f(x)}. \end{cases} \tag{2.36}$$

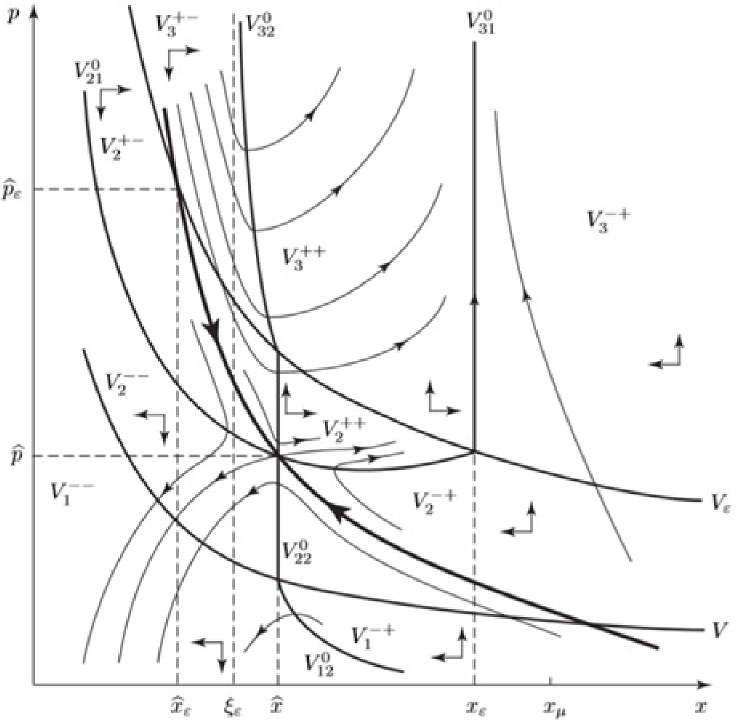
и всюду в множестве Γ имеем

$$M(x, p) = (u(x, p)f(x) - \mu x)p + \ln(1 - u(x, p)) + \ln f(x)$$

Определим множества $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$:

$$\Gamma_1 = \{(x, p) \in \Gamma \colon = 0 < p < \tfrac{1}{f(x)}\},$$
$$\Gamma_2 = \{(x, p) \in \Gamma \colon \tfrac{1}{f(x)} < p < \tfrac{1}{\epsilon f(x)}\},$$
$$\Gamma_3 = \{(x, p) \in \Gamma \colon p > \tfrac{1}{\epsilon f(x)}\}.$$

$\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$



Теперь мы рассматриваем поведение гамильтоновой системы принципа максимума в каждом из множеств. После этого мы можем сделать некоторые выводы.

В силу проведенного анализа необходимым условиям оптимальности (теорема 2.2) для любого начального состояния x_0 удовлетворяет единственная траектория гамильтоновой системы принципа максимума. В зависимости от начального условия x_0 это либо правая равновесная траектория, либо левая равновесная траектория, либо стационарная траектория $(\hat{x}, \hat{p})$. Все остальные траектории гамильтоновой системы не удовлетворяют условиям теоремы 2.2, поскольку либо у них на конечном интервале времени координата p обращается в нуль и они покидают множество Γ, либо на некотором интервале времени они имеют направление движения, противоположное направлению движения левой равновесной или правой равновесной траектории (см. рис.), либо они асимптотически приближаются при $t \to \infty$ к прямой V_{32}^0 (или движутся по ней) и при этом нарушается условие трансверсальности (2.19).

Таким образом, необходимые условия оптимальности (теорема 2.2) однозначно характеризуют оптимальное управление в задаче $(\tilde{P}_\epsilon)$ в терминах левой и правой равновесных траекторий $p_1(x)$ и $p_2(x)$. В случае, когда левая равновесная траектория пересекает кривую V_ϵ в единственной точке $(\hat{x}_\epsilon, \hat{p}_\epsilon)$, а правая равновесная траектория пересекает кривую V в единственной точке $(\tilde{x}, \tilde{p})$, мы имеем

$$u_*(x)=\begin{cases}1-\epsilon, & \text{при } x\in(0,\hat{x}_\epsilon),\\ 1-\frac{1}{p_1(x)f(x)}, & \text{при } x\in[\hat{x}_\epsilon,\hat{x}),\\ 1-\frac{1}{f(\hat{x})\hat{p}}, & \text{при } x=\hat{x},\\ 1-\frac{1}{p_2(x)f(x)}, & \text{при } x\in(\hat{x},\tilde{x}),\\ 0, & \text{при } x\in[\tilde{x},\infty).\end{cases}$$

Для произвольного начального состояния $x_0 > 0$ оптимальный синтез $u_*(x), x \in (0,\infty)$, однозначно определяет оптимальную траекторию x_* в задаче $(\tilde{P}_\epsilon)$ как решение задачи Коши

$$x(t) = u_*(x(t))f(x(t)) - \mu x(t), x(0) = x_0$$

и соответствующее оптимальное управление u_* как функцию $u_*(t) = u_*(x_*(t)), t \in [0,\infty)$.

2.2.1 Магистрали

Основы магистральной теории были заложены в тридцатые года прошлого века Джоном Нейманом. В магистральной теории изучается модель расширяющейся экономики.

Магистраль – это траектория пропорционального сбалансированного роста экономики с технологическим (максимальным) темпом $x*$. Начальное L_{*0} и конечное L_{*t} состояния экономики при отыскании магистрали не задают. Пропорциональный рост означает, что соотношение (пропорции) между объемами затрат или выпуска разных видов продукции в разные элементарные отрезки времени не изменяется. Магистральная теория позволяет вычислять оптимальные траектории экономического роста. Доказано, что оптимальный путь проходит хотя бы частично по магистральной траектории. Эта теория дала основу для создания прикладных методов решения задач оптимального экономического роста.

Магистральная теория строится на основе следующей аксиоматики.

1. Аксиома невозможности производства. При отсутствии затрат производство невозможно.

2. Аксиома преобразуемости. При определенных технологических способах любой набор затрат можно преобразовать в другой набор выпуска.

3. Аксиома продуктивности Все продукты можно произвести при помощи технологий.

Пусть u_* — оптимальное управление в задаче (P_ε) (или, что то же самое, в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$), (K_*, L_*) — соответствующая оптимальная траектория. Тогда $x_*(t) = K_*(t)/L_*(t), t \geq 0$, есть соответствующая u_* оптимальная допустимая траектория в задаче $(\tilde{P}_\varepsilon)$).

$x_*(t) = x_*^1, x_*^2, ..., x_*^m$ - множество оптимальных траекторий. Рост экономики ограничен наиболее сдерживающим темпом, который определяется показателем

$$\bar{x} = \min_{i=1,m} x_*^i$$

Показатель $\bar{x}$ является условно минимальным темпом роста производства. Условность состоит в том, что из множества Z применяется одна из существующих групп технологий $Z^r \in Z, r = 1, 2, \ldots, s$. Значение показателя $\bar{x}$ может быть увеличено применением других групп технологий из множества z. Тогда оптимизация выполняется по Парето. Критерием оптимизации становится достижение равенства

$$x* = \max_{r=1,s} \min_{i=1,m} x_*^i$$

Показатель $x*$ называется технологическим темпом роста. В магистральной теории доказано, что с таким темпом происходит максимально возможный рост производства продукции. Магистраль же строится по следующей формуле:

$$L*_t = x * L*_{t-1}$$

Магистраль, которая проходит через точки $L*_0$ и $L*_t$, как правило не проходит через точку фактического начала $L_*(0)$ и желаемого конечного состояния экономики $L_*(t)$.

Поэтому наилучшая стратегия экономического роста состоит в разделении реальной траектории на три участка. В начальном участке экономика из точки фактического состояния $L_*(0)$ выходит на магистраль, затем она движется по магистрали и на третьем участке выходит в заданную точку состояния экономики $L_*(t)$. В частных случаях участки могут быть нулевыми. Магистраль не зависит от горизонта планирования (числа элементарных отрезков времени).

2.3 Применение методов EMPC

.....

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был проведён обзор метода управления по прогнозирующей модели (MPC) и его другого подхода — метода управления по прогнозирующей модели для экономических задач (EMPC).

Рассмотрена задача оптимального экономического роста для неоклассической модели. Задача исследована и решена аналитически. Применена магистральная теория.

В результате был построен и запрограммирован алгоритм EMPC. Проведены численные эксперименты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1 Rawlings, J.B. Model Predictive Control: Theory and Design / J.B. Rawlings, D.Q. Mayne. – Madison: Nob Hill Publishing, 2009. – 576 p.

2 Асеев С. М., Кряжимский А. В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2007. – Т. 257. – №. 0. – С. 3-271.