Upplaga: 2022-10-31-129

TATB04: UPPGIFTER

Inledande matematisk analys

David Rule

Innehåll

Anvisningar 3

A Logik och aritmetik 5
- A.1 Logik och räkneoperationer . . . 5
- A.2 Upprepade aritmetiska operationer . . . 5

B Verktyg för bevisföring 8
- B.1 Mängder, följder och induktion . . . 8
- B.2 Reella tal . . . 9

C Funktioner och former 10
- C.1 Funktioner: begrepp och egenskaper . . . 10
- C.2 Former, längd och area . . . 10

D Kvadratrötter och andra inversa funktioner 12
- D.1 Inversa funktioner och irrationella tal . . . 12
- D.2 En ny algebraisk operation: rot av tal . . . 13

E Trigonometri 15
- E.1 Definitioner och formler . . . 15
- E.2 Olikheter och arcusfunktioner . . . 16

F Den naturliga exponentialfunktionen och sin invers 18
- F.1 Exponentialfunktion . . . 18
- F.2 Den naturliga logaritmfunktionen och irrationella potenser . . . 19

G Komplexa tal 21
- G.1 Algebraiska operationer . . . 21
- G.2 Funktioner och geometri . . . 22

Litteraturförteckning 24

Anvisningar

Självstudieuppgifter

Självstudieuppgifter är uppgifter man gör på eget initiativ. Man får gärna jobba tillsammans, men ni ordnar själva hur ni vill arbeta. Kom ihåg att ni har många självstudie timmer som räknas som en del av kursen. Var inte oroligt om ni ibland kör fast. Till skillnad från många uppgifter man träffar i gymnasiet kan man inte alltid förvänta sig att lösa de rakt av och det är aldrig fel att satsa tid på ett problem man inte har förstått än. Studenterna förväntas ha jobbat på uppgifterna innan motsvarade lektionen men ställ gärna frågor om uppgifterna i lektionerna!

Grupparbete

Första delen i varje lektionen kommer bestå av *grupparbete*. De är uppgifter man förväntas lösa i små grupper (3–6 personer). Sedan presenterar en grupp eller några grupper sitt arbete fram för alla andra. Ni som lyssnar till presentationer får ställa frågor och ge konstruktiv feedback till de som presenterar. Hur övertygad är ni av deras lösning? Hur tydliga är förklaringarna? Det är ingen tävling för att bestämma vem är bäst, hellre är syftet att alla hjälper varandra att förstå problemet och sitt lösning och lära hur man kommunicerar matematik.

Under kursens gång ska varje student redovisa en lektions grupparbete skriftligt och lämnar in det till sin lektionsledare för att rätta. Det räknas som en av de obligatoriska inlämningsuppgifterne. Se nedan och i kurs-PM för mer information.

Vinjetter

I varje modul följs grupparbete i andra lektionen av en vinjett. Varje vinjett är en fråga eller en problemställning som är mer öppen i karraktär. I första hand är det IT studenter som kommer jobba med de i en andra kurs, men jag hoppas även andra studenter är intresserade att studera de på eget initiativ. Vinjetter är inte ett examinerat moment i TATA79.

Inlämningsuppgifter

I varje modul får man två inlämningsuppgifter att göra, en för varsin avsnitt. Syftet är att de ger både studenter och lärare feedback. Alla inlämningsuppgifterna är obligatoriska.

Inlämningsuppgifterna för varje modul lämnas in till din handledare eller i gruppens fack som ligger i korridoren 2A, B-huset, mellan ingångar 21 och 23. Inlämningsuppgifterna för varje modul har en deadline som finns i både kurs-PM och ovanför själva uppgiften. Glöm inte ditt personligt omslag när du lämnar in dina lösningar (OBS: Omslaget har två sidor!). Du får återkoppling senast två arbetsdagar efter första inlämningsdeadline. Kolla facket om du har inget handledningstillfälle på samma dag! Inlämning av eventuell komplettering samt hämtning av återkoppling skes på samma sätt fram till kompletteringsdeadlinen som också finns i både kurs-PM och ovanför uppgiften.

All referenser till ekvationer, satser, med mera är från *Ge svar på tal* [2] om ingen annan referens ges. Uppgifter markerade med:

- $*$ får ni hoppa över om ni inte hinner;
- † tas helt eller delvis från Henrik Peterssons *Undersökande matematik* [1] och reproduceras här enligt BONUS-avtalet;
- ‡ inspirerades av Joel W. Robbin (`https://people.math.wisc.edu/~robbin/461dir/bizarre.gif`).
- ★ inspirerades av Mathologer (`https://youtu.be/ZIQQvxSXLhI`).

MODUL A

Logik och aritmetik

A.1 Logik och räkneoperationer

Självstudieuppgifter

A.1-1 Uppgifter 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 och 1.6 från *Ge svar på tal* [2].

∗ A.1-2 Vilka av påståendena i uppgift 1.5 är sanna? Motivera i varje fall ditt svar.

Grupparbete

A.1-3 Betrakta equationen

$$(x-4)(x-3)^2 = (x-5)(x^2-5x+7) - \frac{2}{3}. \tag{A-1}$$

(a) Visa att det finns högst en lösning x till (A-1).

(b) Visa att den finns minst en lösning x till (A-1).

(c) Visa att ekvationen

$$(x-4)(x-3)^2 = (x-5)(x^2-5x+8) - \frac{2}{3}.$$

inte har någon lösning x.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 9:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

A.1-4 Visa att om

(a) n_1 delat med 88 har rest 24, och

(b) n_2 delat med 88 har rest 15,

så har $n_1 n_2$ delat med 88 rest 8.

A.2 Upprepade aritmetiska operationer

Självstudieuppgifter

A.2-1 Uppgifter 1.8, 1.9, 1.10 och 1.11 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

A.2-2 Kom ihåg sats 1.13. Den sa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{A-2}$$

för varje positiv heltal n. Det är även lätt att räkna

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n. \tag{A-3}$$

Därför ser vi att vi har en formel för att räkna

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\ell} \tag{A-4}$$

i två fall: Fallet $\ell = 0$ (där vi kan använda (A-3)) och fallet $\ell = 1$ (där (A-2) gäller). Syftet av den här uppgiften är att utreda om det är möjligt att hitta en formel för andra positiva heltal ℓ.

Vi börjar med någonting som kan kännas orelaterat.

(a) Förenkla

$$\sum_{k=1}^{4} (a_{k+1} - a_k)$$

för givna tal a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

(b) Utred en formel för

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) \tag{A-5}$$

där $a_1, \ldots, a_{n+1}$ är givna tal och n är ett positivt heltal.

Nu försöker vi relatera det vi har lärt oss till själva uppgiften.

(c) Använd (A-2), (A-3) och räkneregler för summor för att visa

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \tag{A-6}$$

för alla positiva heltal n.

(d) Med hjälp av (A-6) och formeln för (A-5) ge ett bevis formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}. \tag{A-7}$$

[Ge *inte* ett induktionsbevis!] Observera att (A-7) är en formel för (A-4) när $\ell = 2$!

(vinga129)

Vinjett

A.2-3 [Insats $\approx$ 2h.] I avsnitt 1.2 såg vi ett par olika talsystem. Alla talsystem har för- och nackdelar och många talsystem är intressanta från ett historiskt perspektiv.

Läs om en eller två andra talsystem på nätet eller i böcker. Sammanfatta det ni upptäcker.

Förslag till talsystem ni kan utreda:

- Babyloniska talsystemet;
- Romerska siffror;
- Mayakulterens talsystem;
- Katovik siffersystem;
- Cisterciens talsystem.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 9:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

A.2-4 För naturliga tal n och m säger man att n är *(jämnt) delbart* med m om resten av n delat med m är 0 (se definition 1.4).

Anta att positiva heltalet n skrivs i det hindu-arabiska talsystemet som $n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0$ för siffrorna $n_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ och $i = 0, 1, \ldots, k$. Visa att n är jämnt delbart med 2 om och endast om

$$n_0 \text{ är jämnt delbart med } 2.$$

MODUL B

Verktyg för bevisföring

B.1 Mängder, följder och induktion

Självstudieuppgifter

B.1-1 Uppgifter 2.1, *2.2, 2.3, 2.4, 2.5, *2.6 och 2.7 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

† B.1-2 Vi kommer här arbeta med ett mått på hur pass delbart ett givet heltal är. Låt $n \geq 2$ vara ett givet heltal. Låt nu $S(n)$ vara summan av alla positiva delare d till n sådana att $d \neq n$. Ett tal n kallas *perfekt* då $S(n) = n$ ($n = 6$ är ett exempel på ett perfekt tal då $S(6) = 1 + 2 + 3 = 6$). Ett tal kallas nu *rikt* då $S(n) > n$, det vill säga då

$$\frac{S(n)}{n} > 1.$$

Att n är rikt innebär att talet har många (stora) delare i förhållande till talets storlek. Inget primtal är rikt, snarare väldigt fattigt, då $S(p) = 1$ för varje primtal p, så $S(n)/n = 1/p < 1$ för varje primtal p. Det här problemet handlar om att undersöka rika tal på formen $2^n 3^m$ där n och m är icke-negativa heltal.

(a) Utred vilka av talen 2, 4 och 8 som är rika.

(b) Utred om 2^{10} är rikt.

(c) Utred vilka tal på formen 2^n, där n är ett positivt heltal, som är rika.

(d) Utred vilka tal på formen 3^n, där n är ett positivt heltal, som är rika.

(e) Utred vilka av talen $3 \cdot 2$, $3 \cdot 2^2$, $3 \cdot 2^3$ som är rika.

(f) Utred vilka tal på formen $3 \cdot 2^n$, där n är ett icke-negativt heltal som är rika.

∗ (g) Utred vilka tal på formen $3^n \cdot 2^n = 6^n$, där n är ett icke-negativt heltal som är rika.

∗ (h) Utred möjliga rika tal på formen $3^n \cdot 2^m$ där n och m är incke-negativa heltal.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 16:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

B.1-3 Bevisa

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}{7}$$

B.2 Reella tal

Självstudieuppgifter

B.2-1 Uppgifter 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 och 2.15 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

B.2-2 Visa aritmetiska operationer kan man även utföra på följder. Till exempel kan men definiera *summan* av två följder $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ att vara följden

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}.$$

Det vill säga, summan av två följder är följden man får genom att addera elementen parvis. Till exempel, summan av följden av alla positiva jämna tal $(2, 4, 6, \dots)$ med följden av alla positiva heltal delbart med tre $(3, 6, 9, \dots)$ är följden av alla positiva heltal delbart med fem:

$$(2 + 3, 4 + 6, 6 + 9, \dots) = (5, 10, 15, \dots)$$

(ty $2n + 3n = 5n$). I den här uppgiften jämför vi supremum av två följder med supremum av deras summa.

(a) Vad är supremum av följande följderna?
   i. $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ där $a_n = \frac{n-1}{n}$.
   ii. $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ där $b_n = \frac{4n-2}{n}$.
   iii. $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ där $c_n = \frac{1-3n}{n}$.

(b) Vad är $\sup_{n\in\mathbf{Z}_+}(a_n + b_n)$?

(c) Kan formeln

$$\sup_{n\in\mathbf{Z}_+}(a_n + b_n) = \sup_{n\in\mathbf{Z}_+} a_n + \sup_{n\in\mathbf{Z}_+} b_n \qquad \text{(B-1)}$$

gäller för godtyckliga följder $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$ och $(b_n)_{n\in\mathbf{Z}_+}$?

Vinjett

B.2-3 [Insats ≈ 2h.] Den här uppgiften är en fortsättning av uppgift A.2-2 och uppgift B.1-3.

(a) Vi har nu sett formler för summan (A-4) i fallen $\ell = 0$, $\ell = 1$ och $\ell = 2$. Kan ni härleda en formel för $\ell = 3$?

(b) . . . Och vad gäller för andra ℓ?

∗ (c) Jämför er olika versioner av uppgift B.1-3. Se ni något mönster?

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 16:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

B.2-4 Skriv decimalutvecklingen $x = 0.\overline{131}$ (där siffrorna 131 upprepas i evighet) som ett bråk.

`(vinga129)`

MODUL C

Funktioner och former

C.1 Funktioner: begrepp och egenskaper

Självstudieuppgifter

C.1-1 Uppgifter 2.8, 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.7 och 3.8 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

† C.1-2 Ett polynom p av grad m kallas för ett *nollställepolynom* då dess koefficient framför varje x^n, där $n = 0, 1, \ldots, m$, är ett nollställe till polynomet. Det här problem handlar om att undersöka nollställepolynom av grad två, det vill säga polynom

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

där a, b och c är alla nollställen till p och $a \neq 0$.

(a) Undersök nollställepolynom av grad två, på formen $p(x) = ax^2 + c$.

(b) Undersök nollställepolynom av grad två, på formen $p(x) = ax^2 + bx$.

(c) Undersök nollställepolynom på formen $p(x) = x^2 + bx + c$.

∗ (d) Utred hur många nollställepolynom det finns av grad två.

[Notera att $p(x) = -x - 1$ är det enda nollställepolynom av grad ett.]

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 30:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

C.1-3 Hitta ett andragradspolynom p så att

$$p(-1) = 19, \quad p(0) = 11 \quad \text{and} \quad p(1) = 11.$$

C.2 Former, längd och area

Självstudieuppgifter

C.2-1 Uppgifter 3.9, 3.10, 3.11 och 3.12 från *Ge svar på tal* [2].

C.2-2 Gör uppgifter 1.23, 1.24 och 1.25 i *Problem för envar* [3].

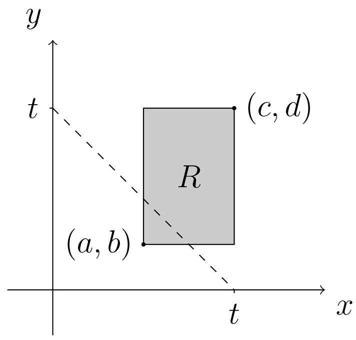
Grupparbete

C.2-3 Betrakta en rektangel R med hörnpunkter i koordinaterna (a,b) och (c,d) med sidor parallella till koordinataxlerna. Beräkna arean $A(t)$ som en funktion av t av snittet mellan R och $\{(x,y)\colon x+y\le t\}$ i tre följande fall:

(a) $(a,b)=(1,1)$ och $(c,d)=(4,4)$;

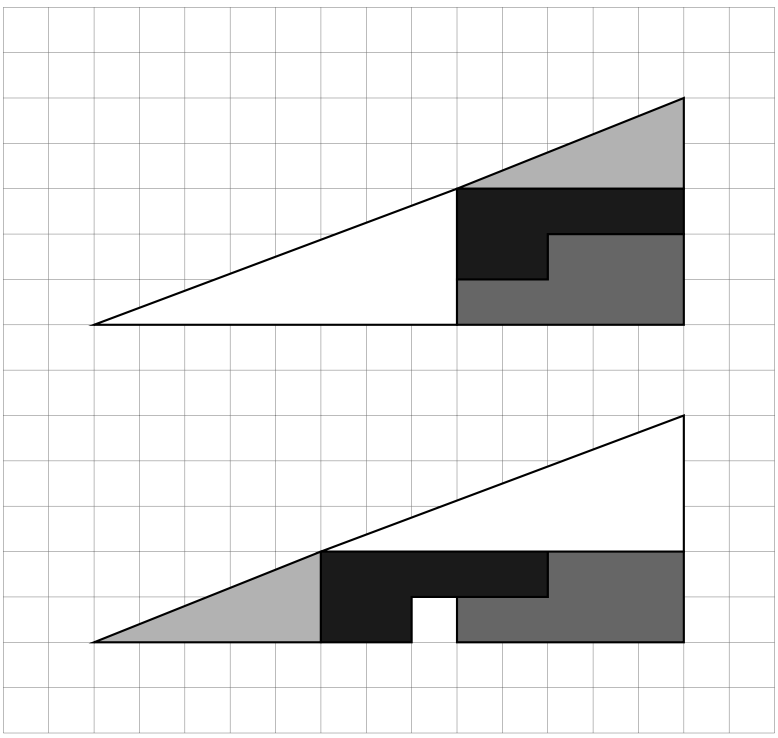
(b) $a=b$, $c=d$ och $0<a<c$; och

(c) $(a,b)=(1,1)$ och $(c,d)=(3,4)$.



Vinjett

‡ C.2-4 [Insats ≈ 1h.] Finns det något problem med bilden?



Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 30:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

C.2-5 Bevisa genom lämpliga uppskattningar med enkla mängder att mängden

$$P=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 0\le y<x^3 \text{ och } 0\le x<h\}$$

har arean $h^4/4$. Formeln i uppgift 2.3(b) kan vara till nytta här.

MODUL D

Kvadratrötter och andra inversa funktioner

D.1 Inversa funktioner och irrationella tal

Självstudieuppgifter

D.1-1 Uppgifter 4.1, 4.2, 4.3 och 4.4 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

D.1-2 Betrakta en function definierad enligt uttrycket

$$f(x) = \frac{5x - 7}{x - 3}. \tag{D-1}$$

I där här uppgiften undersöker vi x- och y-värden som löser ekvationen

$$f(x) = y. \tag{D-2}$$

(a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är uttrycket i (D-1) definierat? För vilka $x \in \mathbf{R}$ är uttrycket odefinierad? Avgör därifrån vad är den största delmängd av $\mathbf{R}$ som kan vara f:s definitionsmängd. Vi kallar den där mängden för D.

(b) För vilka $y \in \mathbf{R}$ finns det (minst) en lösning $x \in D$ till (D-2)? För vilket eller vilka $y \in \mathbf{R}$ finns det inget lösning $x \in D$ till (D-2)? Avgör utifrån er svar f:s målmängd (som vi betecknar M).

(c) Kan det finnas två olika $x \in D$ som uppfyller (D-2) för en och samma $y \in M$?

(d) Är $f\colon D \to M$ inverterbar eller inte? Motivera er svar.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 30:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

D.1-3 Betrakta funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definierat enligt

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{om } x < 2; \\ -2x + 9 & \text{om } 2 \leq x \leq 3; \\ 3x - 4 & \text{om } x > 3. \end{cases}$$

(a) Rita grafen av f.

(b) Bevisa att f är inverterbar och hitta inversfunktionen f^{-1}.

D.2 En ny algebraisk operation: rot av tal

Självstudieuppgifter

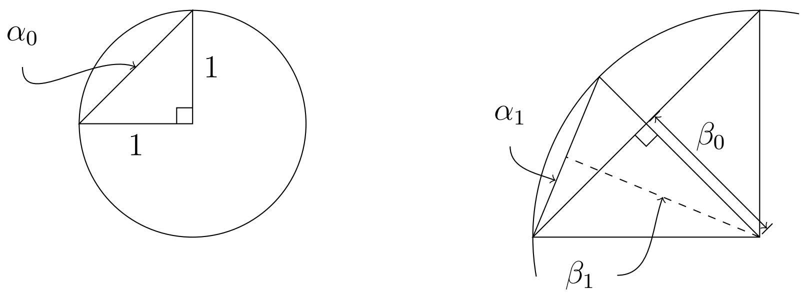
D.2-1 Lös problem 2.1(a), (c) och (d) från *Problem för envar* [3].

D.2-2 Lös problem 2.4 från *Problem för envar* [3].

D.2-3 Uppgifter 4.6 och 4.7 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

D.2-4 Betrakta en cirkel med radian 1 och en rätvinklig triangel med en hörnpunkt i cirkelns medelpunkt vems hypotenusa sammanbinder två punkter på cirkeln. Se bilden nedan till vänster.



(a) Vad är längden α_0? Om vi betrakta sidolängd α_0 som triangelns bas vad är triangelns höjd? Vi betecknar höjden β_0.

(b) Nu ritar vi en linje från cirkelns medelpunkt som skär basen α_0 i en rät vinkel och fortsätter linjen till den träffar cirkeln. Linjen både delar triangeln i två lika stora delar och skapar en likbent triangel men bas α_1 och höjd β_1 – se bilden ovan till höger. Den streckade linjen delar även den nya likbenta triangeln i två lika stora delar. Med hjälp av Pythagoras sats (sats 3.17) och symmetri beräkna längderna α_1 och β_1.

(c) Beräkna arean och omkretsen av en regelbunden oktagon vems alla hörn går genom en enhetscirkel.

$*$ (d) Vad är arean och omkretsen av en regelbunden oktagon vems alla hörn går genom en cirkel av radian r.

Vinjett

D.2-5 [Insats $\approx$ 3h.] Denna uppgift är en fortsättning av uppgift D.1-2. Betrakta istället för (D-1) en mer allmän formel

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{D-3}$$

där vi nu har coefficienter $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 30:e november 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

D.2-6 Betrakta ekvationen

$$\sqrt{5x+1} = 1 - x \tag{D-4}$$

där $x \in \mathbf{R}$ är okänt.

(a) Hitta två kandidater till lösningar x till (D-4).

(b) Visa att precis en av kandidaterna x du har hittat faktiskt löser (D-4).

(c) Förklara varför det var inte motsägelsefullt att du kom fram till två kandidater x även om bara ett var faktiskt en lösning.

MODUL E

Trigonometri

E.1 Definitioner och formler

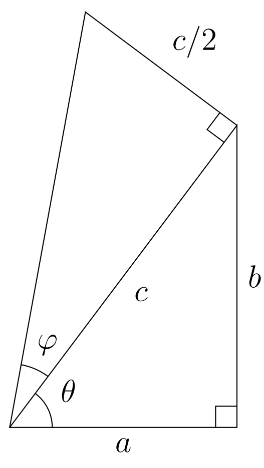
Självstudieuppgifter

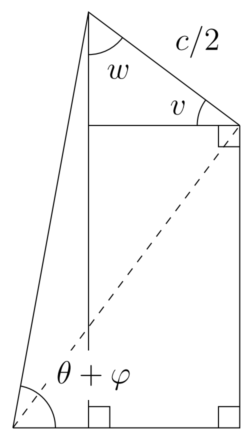
E.1-1 Uppgifter 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 och 5.5 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

E.1-2 CORDIC (COordinate Rotation DIgital Computer) är en metod som vissa miniräknare använder för att beräkna värden av trigonometriska funktioner. Idén bakom metoden är att konstruera en rätvinklig triangel med den önskade vinkeln genom att sammanlägga en följd av mer och mer spetsiga trianglar med en känd rätvinklig triangel. Två fördelar med metoden är att den kräver relativt lite datorkraft, eftersom de operationer som utförs är mest addition och subtraktion, och den inte kräver mycket minne, eftersom datorn räknar ut värden från ett fåtal kände rätvinkliga trianglar.

I bilden nedan till vänster sammanlägger vi två trianglar.





(a) Beräkna vinklarna v och w i bilden ovan till höger.

(b) Beräkna sidolängderna av den rätvinkliga triangeln i bilden ovan till höger som innehåller vinkeln $\theta + \varphi$.

(c) Vad är $\cos(\theta + \varphi)$, $\sin(\theta + \varphi)$ och $\tan(\theta + \varphi)$ uttryckt i a, b och c?

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 7:e december 2022.

Komplettering: kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

E.1-3 Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$0 = \cos(2\theta) - 3\cos\theta + 2.$$

E.2 Olikheter och arcusfunktioner

Självstudieuppgifter

E.2-1 Lös problem 2.46 och 2.47 från *Problem för envar* [3].

E.2-2 Lös problem 2.71 och 2.74 från *Problem för envar* [3].

E.2-3 Uppgifter 5.6, 5.7 och 5.9 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

E.2-4 I kapitel 5 har vi med hjälp av geometri beräknat vissa exakta värden för trigonometriska funktioner. I den här uppgiften tar vi en mer algebraisk approach för att beräkna exakta värden för vinkeln $\pi/10$.

(a) Kom ihåg från kapitel 5 att vi har visat

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

På ett liknande sätt visa att

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta).$$

(b) Visa att $\sin(2\theta) = \cos(3\theta)$ om $\theta = \frac{\pi}{10}$.

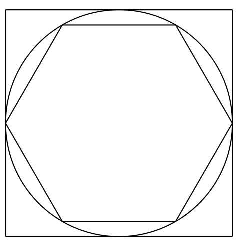
(c) Med hjälp av likheterna från (a) och (b) visa att $\theta = \frac{\pi}{10}$ är en lösning till

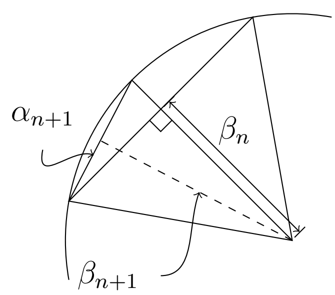
$$2\sin\theta = 1 - 4\sin^2\theta.$$

(d) Beräkna värdet av $\sin(\pi/10)$.

Vinjett

E.2-5 [Insats $\approx$ 3h.] Använd bilden nedan till vänster för att beräkna grova uppskatningar av π.





Kan ni förbättra underskattningen med hjälp av en oktagon eller andra polygoner, idéer från uppgift D.2-4 och bilden till höger?

(vinga129)

Inlämningsuppgift

Deadlines:

> **Första inlämning:** kl. 12.30, den 7:e december 2022.
> **Komplettering:** kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

E.2-6 Skriv om

$$65\cos\theta + 65\sqrt{3}\sin\theta$$

som ett utryck i $\theta \in \mathbf{R}$ som innehåller högst en trigonometrisk function.

MODUL F

Den naturliga exponentialfunktionen och sin invers

F.1 Exponentialfunktion

Självstudieuppgifter

F.1-1 Uppgifter 6.1, 6.2, 6.3 och 6.4 från *Ge svar på tal* [2].

Grupparbete

F.1-2 Vi definierar två funktioner med hjälp av den naturliga exponentialfunktionen:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{för } x \in \mathbf{R}.$$

Funktonerna kallas för *hyperboliska funktioner* och är nära besläktade med de trigonometriska funktionerna cosinus och sinus.

(a) Visa att de hyperboliska funktionerna lyder följande likheter:

i. $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$;

ii. $\cosh(-x) = \cosh x$; och

iii. $\sinh(-x) = -\sinh x$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Utred om det är möjligt att hitta additionsformler för de hyperboliska funktionerna som motsvarar (5.9) och (5.10) för trigonometriska funktioner.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 21:e december 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

F.1-3 Stora numeriska fel kan uppstå när man försöker beräkna (eller närmare sagt uppskatta) $\exp(x) - 1$ på en dator när x är nära 0 eftersom det riktiga svaret är nära 0. Därför implimenterar vissa dator en dedicerad rutin för att beräkna $\exp(x) - 1$. En möjlighet är att använder likheten

$$\exp(x) - 1 = \frac{2\tanh(x/2)}{1 - \tanh(x/2)} \tag{F-1}$$

där tanh är en annan hyperbolisk funktion (jämför med uppgift F.1-2) eftersom högerledet har en bra exakthet på en dator när x är nära 0. *Hyperbolisk tangens* är definierad enligt formeln

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}.$$

Bevisa (F-1).

F.2 Den naturliga logaritmfunktionen och irrationella potenser

Självstudieuppgifter

F.2-1 $*2.7$, 2.8, $*2.9$, 2.11 och $*2.14$ från *Problem för envar.*

F.2-2 Uppgifter 6.5, 6.6 och 6.7 från *Ge svar på tal* [2].

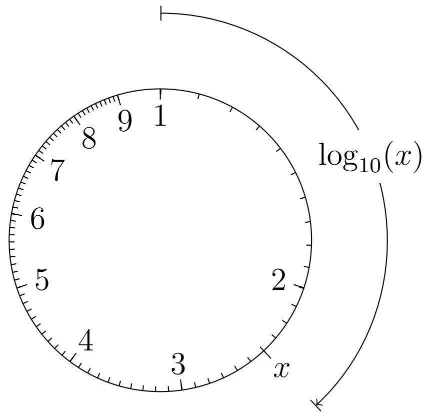
F.2-3 $*2.28$, $*2.35$ och 2.36(a) från *Problem för envar.*

Grupparbete

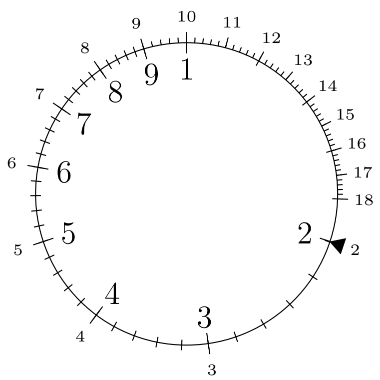
★ F.2-4 Den här uppgiften handlar om funktionen $\log_{10}$, det vill säga logaritm bas 10 (se uppgift 6.7), så

$$\log_{10}(x) = y \iff 10^y = x.$$

Betrakta en cirkel med en omkrets av längd 1. På cirkelns överstä punkt skriver vi talet 1. Vi placerar andra tal $x > 0$ enligt regeln att avståndet från 1 till x medurs längs omkretsen är $\log_{10}(x)$.[1] I bilden till höger visar vi placeringarna av heltalen 1 till 9 (med icke-heltal naturligtvis däremellan). Placeringen av högre heltal försätter att varva runt cirkeln.



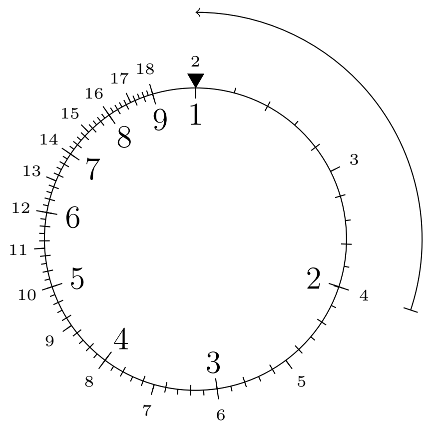
(a) Vilka andra tal läser vi av på samma punkt som talet 1?



I bilden till vänster har vi ritat en annan varv av skalen på utsidan av cirkeln, den här gången från 2 till 18.

[1] När $\log_{10}(x) < 0$ mätar vi avståndet från 1 moturs istället (på liknande sätt till det vi gör för negativa vinklar).

I bilden till höger har vi roterat den yttre skalan så att vi läsa av måttet 2 på yttre skalen på samma punkt som läsa av talet 1 på den inre skalan.



(b) Finns det i sista bilden ett samband mellan placeringen av talen på inre skalen och på yttre skalan?

(c) Vad kunde man säger om vi istället roterar yttre skalan så att vi läser av talet 3 på samma plats som talet 1 på inre skalan? Motivera ert svar.

Vinjett

F.2-5 [Insats ≈ 1h.] Med utgångspunkt i uppgift F.2-4, utforska mer om räknestickor.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 21:e december 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

F.2-6 Visa att $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som är definierade enligt formeln

$$f(x) = 25e^{x} - e^{-x} \quad \text{för } x \in \mathbf{R},$$

är en bijektiv funktion. Räkna ut dess invers.

MODUL G

Komplexa tal

G.1 Algebraiska operationer

Självstudieuppgifter

G.1-1 Uppgifter 7.1 och 7.2 från *Ge svar på tal* [2].

G.1-2 1.66, 1.68, 1.69, 1.70 (det vill säga bevisa del (c) av sats 7.6) från *Problem för envar* [3].

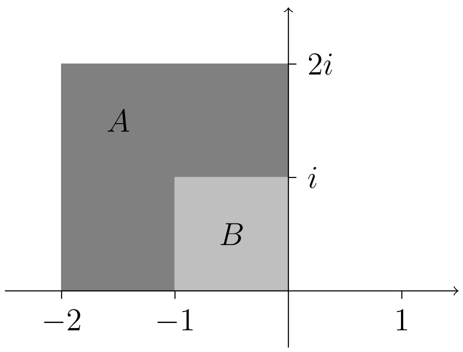
G.1-3 1.71, 1.73, och 1.79 från *Problem för envar* [3].

Grupparbete

† G.1-4 Det här problemet handlar om att undersöker var i det komplexa talplanet rötterna till ekvationen

$$z^2 + 2az + 4 = 0$$

ligger för olika värden på det reella talet a. Genom figuren nedan har vi definerat två områden A och B i den andra kvadranten i det komplexa talplanet. Begränsningslinjerna för de båda omradena, som alla är parallella med koordinataxlarna, tillhör inte respektive område. (Speciellt har A och B inga gemensamma punkter.)



(a) Avgör om ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har någon lösning i område A eller B i fallen då $a = -1, 0, 1$.

(b) Undersök villkor för a så att ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har en lösning med positiv imaginärdel.

(c) Undersök villkor för a så att ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har en lösning med negativ realdel och positiv imaginärdel.

(d) Undersök villkor för a så att ekvationen

$$z^2 + 2az + 4 = 0$$

har en lösning i A respektive i B.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 21:e december 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

G.1-5 (a) Hitta alla komplexa tal $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = 16 + 12i$.

(b) Hitta alla komplexa tal så att $z^2 + (6 + 10i)z - (32 - 18i) = 0$.

G.2 Funktioner och geometri

Självstudieuppgifter

G.2-1 Uppgifter 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 och 7.8 från *Ge svar på tal* [2].

G.2-2 2.65, *2.67 och 2.81 från *Problem för envar.*

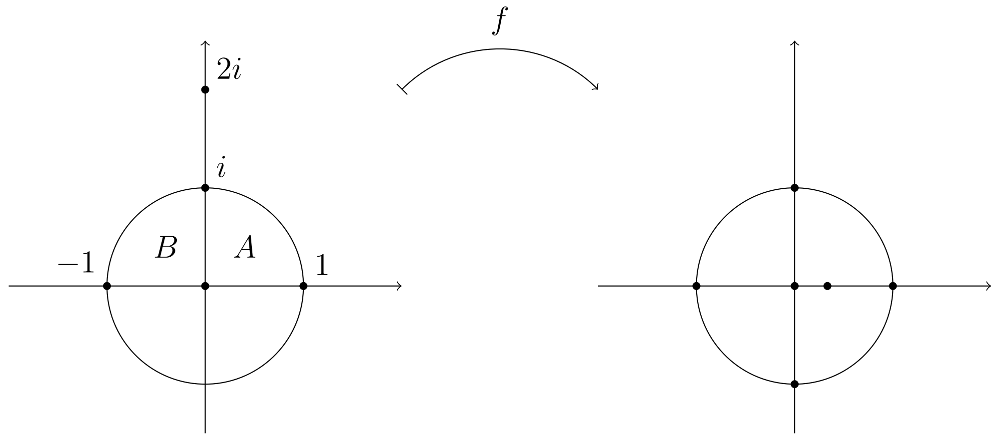
Grupparbete

† G.2-3 I den här uppgiften betraktar vi *Möbiusavbildningen*

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Utgångspunkten i den här uppgiften är det vi såg i exempel 7.18: att avbildningen av varje cirkel eller linje i f:s definitionsmängd är en cirkel eller linje i f:s målmängd.

(a) Beräkna $f(0)$, $f(1)$, $f(i)$, $f(-1)$ och $f(2i)$.



(b) Vad är avbildningen under f av följande mängder?

i. Cirkeln som går igenom punkterna 1, i och -1.

ii. Reellaxeln.

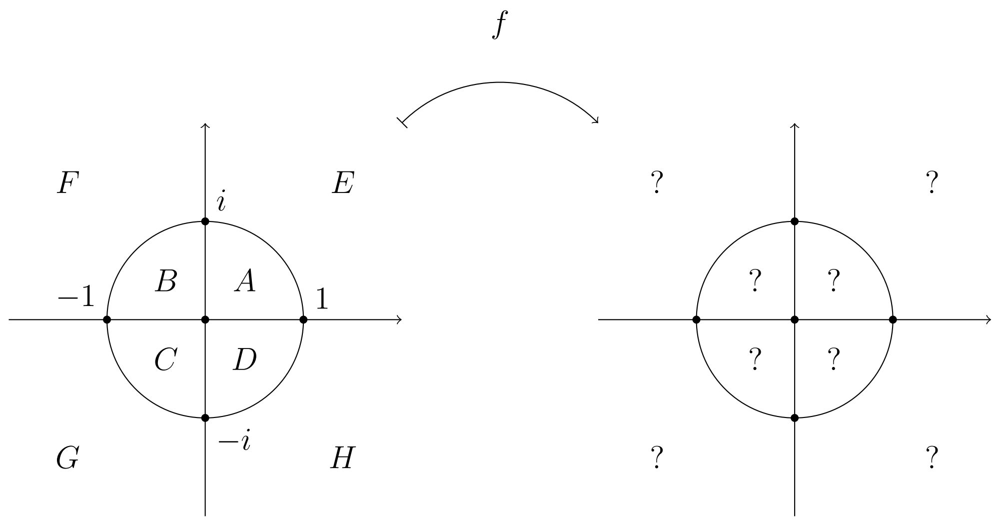
iii. Imaginäraxeln.

(c) Vad är avbildningen under f av mängderna A och B i bilden ovan?

(vinga129)

Vinjett

† G.2-4 [Insats $\approx$ 2h.] Utforska vidare avbildning f från uppgift G.2-3.



Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 21:e december 2022.
Komplettering: kl. 12.30, den 18:e januari 2023.

G.2-5 Förenkla $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} e^{\pi i k/3}$.

Litteraturförteckning

[1] Henrik Petersson, *Undersökande matematik: Differentierade problem*, Studentliteratur AB, Lund 2017.

[2] David Rule, *Ge svar på tal*, Studentliteratur AB, Lund 2021.

[3] *Problem för envar*, Sammanställd vid Matematiska institutionen, 2019.