

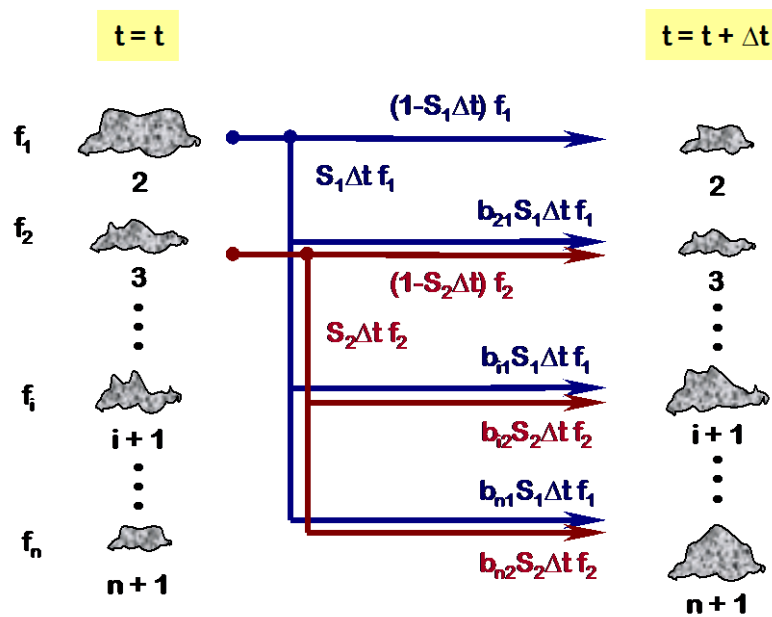
## Contents

Moagem .....	2
Hidrociclone .....	5
Célula de flotação .....	7
Britagem – Whiten .....	8
Britagem – Whiten Modificado.....	9
Peneiramento – Karra .....	10

## Moagem

Para a simulação do moinho de bolas o modelo baseia-se na chamada Teoria do Modelo Populacional. Esta teoria introduziu dois conjuntos de parâmetros: a Função de Seleção  $S$  e a função de quebra  $B$ . O primeiro conjunto refere-se à cinética de moagem de cada partícula independente do segundo conjunto, que caracteriza a distribuição do tamanho dos fragmentos produzidos como resultado de um evento de quebra.

A Figura abaixo ajuda a definir ambos os conceitos com maior clareza. Considere que em qualquer instante  $t$ , a distribuição de tamanho do sólido em um moinho é quantificada pelas frações  $f_i$  ( $i = 1, n$ ) retida nas  $n$  malhas diferentes representadas à esquerda dessa figura. Após um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a distribuição de tamanho resultante é representada à direita da mesma figura. Durante este intervalo algumas partículas serão fraturadas e seus fragmentos redistribuídos para as malhas inferiores. Para as partículas retidas na malha ' $i + 1$ ' (a fração ' $i$ '), a função de seleção  $S_i$  ( $\text{min}^{-1}$ ) representa a velocidade de quebra, ou seja, a fração das partículas na faixa de tamanho  $[d_{i+1}, d_i]$  que são fraturadas, por unidade de tempo. Portanto, o produto  $(S_i \Delta t)$  representa a fração do material retido na malha ' $i + 1$ ', no tempo  $t$ , que será fraturada pela ação da carga moedora, durante o período de tempo  $\Delta t$ . A Função de Quebra  $b_{ij}$  denota a distribuição dos fragmentos decorrentes da quebra das partículas retida na malha ' $j + 1$ ' para retidas na malha inferior ' $i + 1$ '.



Com relação à figura acima, é possível estabelecer, para cada fração de tamanho  $i$ , o seguinte balanço populacional de partículas:

[Partículas na fração  $i$  no tempo  $(t + \Delta t)$ ] =

[Partículas na fração  $i$  no instante  $t$ ]

- [Partículas na fração  $i$  quebradas durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ ]

+ [Somatório de partículas adicionadas à fração  $i$  como resultado da quebra de partículas nas frações mais grossas ( $j = 1, i-1$ )]

então, se  $W$  representa a massa do minério no moinho:

$$f_i(t + \Delta t)W = f_i(t)W - S_i \Delta t f_i(t)W + b_{i1} S_1 \Delta t f_1(t)W + b_{i2} S_2 \Delta t f_2(t)W + \dots b_{i,i-1} S_{i-1} \Delta t f_{i-1}(t)W$$

Considerando a condição limite quando  $\Delta t$  se aproxima de zero, a expressão acima reduz-se ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d(f_i)}{dt} = -S_i f_i + \sum_{j=i-1}^1 b_{ij} S_j f_j$$

A solução analítica deste complexo sistema de equações diferenciais é dada pela solução do sistema matricial expresso como:

$$f = (TJT^{-1})f^o$$

Onde,

$f = \{f_i   i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ do produto do moinho.
$f^o = \{f_i   i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da a distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ da alimentação do moinho
$T = \{T_{ij}   i = 1, 2, \dots, n\}$	Matriz triangular inferior de valores $T_{ij}$ definida como: $T_{ij} = 0$ quando $i < j$ $T_{ij} = 1$ quando $i = j$ $T_{ij} = \sum_{k=j}^{i-1} \frac{b_{ik} S_k T_{kj}}{(S_i - S_j)}$ quando $i > j$ .

E,

$J = \{J_{ij}   i = 1, 2, \dots, n\}$	Matriz diagonal definida como: $J = \left(1 + \frac{S_i \tau}{N}\right)^{-N}$ quando $i = j$ $J = 0$ quando $i \neq j$
---------------------------------------	--

onde  $\tau$  é o tempo de residência médio e  $N$  o números de misturadores perfeitos em série. O método para determinar o valor deste parâmetro pode ser baseado na relação entre comprimento e diâmetro do moinho ou considerar ainda a viscosidade da polpa e velocidade de rotação, entretanto o valor de  $N = 3$  misturadores perfeitos é usualmente válido na maioria dos casos.

O modelo para a Função Seleção e Quebra é representado pelas seguintes relações:

- Para a função de seleção

$$S_i = [1/(1 + \alpha_{02}/\alpha_{01})] \{ \alpha_{01}(d_i^*) \alpha_{11} / [1 + d_i^* / (d_{crit}) \alpha_2] + \alpha_{02}(d_i^*) \alpha_{12} \}$$

E

$$d_i^* = (d_i * d_{j+1})^{0.5}$$

$$d_{crit} = \exp(7.27 + 0.5 * d_{mu})$$

Onde,

$d_{mu}$	Diâmetro em polegada do <i>top-size</i> de reposição da carga de bolas.
$\alpha_{02}, \alpha_{01}, \alpha_{011}, \alpha_2, \alpha_{12}$	Parâmetros de ajuste da Função Seleção.

- Para a função quebra:

$$B_{ij} = \beta_{0j} \left( \frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_1} + (1 - \beta_{0j}) \left( \frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_2}$$

E

$$\beta_{0j} = \beta_{00} \left( \frac{d_{j+1}}{1000} \right)^{-\beta_{01}}$$

$\beta_{00}, \beta_{01}, \beta_1, \beta_2$	parâmetros da função quebra determinados a partir de teste de laboratório.
--	--

A abordagem energética da moagem é introduzida para possibilitar o cálculo da energia consumida pelo moinho em função de suas características, utilizando a fórmula empírica dada por Hogg & Fuerstenau ("Power Relations for Tumbling Mills", Trans. SME-AIME, Vol. 252, pp. 418-432, 1972), aqui expandida a partir de sua formulação original para considerar a contribuição de cada componente da carga do moinho (bolas e polpa) na energia total.

O escalonamento da função seleção é feito através do consumo específico de energia (kWh/tonelada) pela relação:

$$S_i \tau = S_i^E * P/W$$

Onde,

$W$ : Taxa de sólidos da descarga do moinho.

$$P = \eta P_{gross} = 0.238 D^{3.5} \left( \frac{L}{D} \right) N_c \rho_{ap} (J - 1.065 J^2) \sin(\alpha)$$

Onde,

$P_{gross}$	Energia bruta do moinho (kW) = Pnet / $\eta$ .
$\eta$	eficiência elétrica e de transmissão de energia, ° / 1.
$D$	diâmetro interno efetivo do moinho, pés.
$L$	comprimento interno efetivo do moinho, pés.
$N_c$	velocidade de rotação; expresso como fração (° / 1) da velocidade crítica
$J$	enchimento volumétrico aparente do moinho fracionário, ° / 1 (incluindo as bolas e os vazios intersticiais).
$\alpha$	ângulo de elevação de carga (define o posicionamento do centro de gravidade da carga do moinho (o 'feijão') em relação à direção vertical. Tipicamente na faixa de 30 ° a 35 °.

e

$$\rho_{ap} = \{(1 - f_v) \rho_b J_b + \rho_p J_p f_v J_b + \rho_p (J - J_b)\} / J$$

e  $\rho_{ap}$  representa a densidade aparente da carga (tonelada / m<sup>3</sup>), que pode ser determinada com base nos componentes de carga (bolas, preenchimento intersticial e polpa em suspensão ou *overflowing*).

Onde,

$f_v$	fração de volume (° / 1) de vazios intersticiais entre as bolas (tipicamente assumido como sendo 40% do volume aparentemente ocupado pelas bolas).
$J_b$	preenchimento de bolas aparentes (° / 1) (incluindo bolas, polpa e os vazios intersticiais entre as bolas).
$J_p$	enchimento de polpa intersticial (° / 1), correspondente à fração dos vazios intersticiais (entre a carga de bola) realmente ocupada pela polpa.
$\rho_p$	densidade da polpa (tonelada / m <sup>3</sup> ).

## Hidrociclone

O modelo de hidrociclone está baseado nos trabalhos de Rao and A. J. Lynch em "Modelling and Scale-up of Hydrocyclone Classifiers", XI Int. Min. Proc. Congress II, 1-25, 1975. Além de L. R. Plitt "A Mathematical Model for the Hydrocyclone Classifier", CIM Bulletin, p.114, December 1976.

O modelo estabelece a curva de partição  $E_i$  (ou classificação, ou curva de eficiência), definida como a recuperação em massa de sólido para o fluxo de *underflow* em função do tamanho de partícula.

$$p_{UF} = E_i f^o$$

$$p_{OF} = (E_i f^o) - f^o$$

Onde,

$p_{UF} = \{p_{UF_i}   i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ do <i>overflow</i> do hidrociclone.
$p_{OF} = \{p_{OF_i}   i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ do <i>underflow</i> do hidrociclone.
$f^o = \{f_i^o   i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da a distribuição massa de partículas na classe de tamanho $i$ da alimentação do hidrociclone

Essa curva é decomposta para considerar o efeito de curto-circuito (ou by-pass) da fração ( $B_{pf}$  e  $B_{pc}$ ) do fluxo alimentado que não sofre efeito de classificação ( $E_{ic}$ ), assim temos:

$$E_i = B_{pf} + (1 - B_{pf} - B_{pc}) E_i^c$$

Onde:

$E_i$	Eficiência de classificação real do ciclone para partículas de tamanho $d_i$ .
$E_i^c$	Eficiência de classificação corrigida para partículas de tamanho $d_i$ , excluindo o by-pass.
$B_{pf}$	Fração da alimentação que sofre by-pass.
$B_{pc}$	Fração de grossos que sofre by-pass para o <i>overflow</i> (em geral $B_{pc} = 0$ ).

A curva de partição corrigida é calculada como:

$$E_i^c = 1 - \exp [ - 0.693 (d_i/d_{50}^c)^m ]$$

Onde,

$d_{50}^c$	Tamanho de corte corrigido $d_{50}^c$ .
$d_i$	Tamanho de partícula na classe de tamanho $i$ .

Onde,

$$d_{50}^c = a1 * [(DC)^{0.44} (DI)^{0.58} (DO)^{1.91} \exp( 11.12 \phi )] / [(DU)^{0.80} h^{0.37} Q^{0.44} ( \rho_s - 1 )^{0.5}]$$

Onde,

a1	Parâmetro de ajuste do d50.
DC	Diâmetro do corpo do hidrociclone em polegadas.
DI	Diâmetro do <i>inlet</i> em polegadas.
DO	Diâmetro do <i>vortex finder</i> em polegadas.
$\phi$	Fração de sólidos em volume.
DU	Diâmetro do apex em polegadas.
h	Altura livre (parte baixa do <i>vortex finder</i> ao <i>apex</i> ) do hidrociclone em polegadas.
Q	Fluxo de alimentação de polpa em m <sup>3</sup> /h
$\rho_s$	Densidade do sólido em t/m <sup>3</sup> .

O expoente  $m$  da relação da curva de partição corrigida ( $E_i^c$ ) é dado por:

$$m = \exp [ a2 - 1.58 S/(S+1) ] [ (DC)^2 h / Q ]^{0.15}$$

onde,

a2	Parâmetro de ajuste.
S	Partição de fluxo

A partição de fluxo  $S$  é definida como a relação entre a vazão de polpa direcionada ao *underflow* e a vazão de polpa direcionada ao *overflow*. Essa relação é modelada como:

$$S = a3[h^{0.19} (DU/DO)^{2.64} \exp(-4.33\phi + 8.77\phi^2)]/[H^{0.54} (DC)^{0.38}]$$

Onde,

a3	Parâmetro de ajuste.
H	Pressão de alimentação em kPa.

A pressão de alimentação  $H$  é fornecida pela relação:

$$H = a4 [Q^{1.46} \exp(-7.63\phi + 10.79 \phi^2)]/[(DC)^{0.20} h^{0.15} (DI)^{0.51} (DO)^{1.65} (DU)^{0.53}]$$

Onde,

a4	Parâmetro de ajuste.
----	----------------------

A fração de polpa não classificada, by-pass, é relacionada com a recuperação de água para o *underflow* e modelada como:

$$B_{pf} = \lambda B_{pw}$$

Onde,

$\lambda$	Parâmetro de ajuste.
$B_{pw}$	Recuperação de água para o <i>underflow</i> .

A recuperação de água para o *underflow* é dada pela relação:

$$B_{pw} = [S/(S+1) - \phi R_s^c] / 1 - \phi [1 - \phi (1 - R_s^c)]$$

Onde,

$R_s^c$	Recuperação de sólidos hipotética dada pela curva de partição corrigida.
---------	--

A recuperação de sólidos hipotética é dada pela relação:

$$R_s^c = \sum_{i=1}^n f_i E_c$$

Onde,

$f_i$	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do hidrociclone.
-------	--

## Célula de flotação

O modelo é baseado na representação da flotação como um fenômeno cinético de primeira ordem.

Uma constante cinética é calculada partículas de cada componente  $i$  e classe de tamanho  $j$  de acordo com a formulação de King (*Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems 2nd Edition, 2012, by R.P. King*)

$$k_{ij} = a_i/d_j^{0.5} \left[ 1 - (d_j/d_{\max i})^{1.5} \right] \exp(-(d_{\text{opt}i}/2d_j)^2)$$

Onde,

$a_i$	Parâmetro de ajuste para partículas do componente $i$ .
$d_j$	Média geométrica entre partícula na classe $j$ e $j+1$ . $d_j = (d_j * d_{j+1})^{0.5}$
$d_{\max i}$	Tamanho de partícula máximo flotável de partículas do componente $i$ .
$d_{\text{opt}i}$	Tamanho de partícula mais facilmente flotável do componente $i$ .

Cada banco de flotação é representado por um misturador perfeito, onde para cada célula temos:

$$Q_{cij} = Q_{fij} \left[ 1 - \frac{1}{1 + k_{ij}\tau} \right]$$

Onde,

$Q_{cij}$	Taxa de partículas do componente $i$ na classe de tamanho $j$ no flotado.
$Q_{fij}$	Taxa de partículas do componente $i$ na classe de tamanho $j$ na alimentação.
$\tau$	Tempo médio de residência na célula, calculado a partir da razão entre o volume efetivo da célula e a taxa de alimentação.

## Britagem – Whiten

Este modelo representa a britagem por meio das funções de quebra e classificação propostas por W.J. Whiten et al. em "A breakage function suitable for crusher models". Fourth Tewksbury, Symposium, Melbourne, February, 1979.

O produto do britador é dado pelo sistema matricial:

$$f = (I - C) * (I - B * C)^{-1} f^o$$

Onde,

$p$	Vetor da distribuição granulométrica do produto do britador.
$f^o$	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do britador
$I$	Matriz identidade.
$C$	Matriz de classificação de Whiten.
$B$	Matriz de quebra.

A função de classificação de Whiten descreve a probabilidade de as partículas de classe de tamanho  $d_i$  serem classificadas para quebra como função do tamanho de partícula por:

0 se  $d_i < k_1$

1 se  $d_i < k_2$

$C(d_i)$  se  $k_1 < d_i < k_2$

$$C(d_i) = 1 - \left[ \frac{d_i - k_2}{k_1 - k_2} \right]^2$$

$$k_1 = 0.67G$$

$$k_2 = 1.121G + 2.31Q + T(t)$$

Em que  $T(t)$  é uma função spline cúbica da taxa de alimentação  $t$  em t/h passando pelos pontos (100;-0.0486), (250;-0.085), (400;-0.259).

Onde,

$G$	Abertura do Gap (mm)
$Q$	Fração da alimentação maior que uma polegada.
$T(t)$	Função spline cúbica da taxa de alimentação $t$ em t/h passando pelos pontos (100;-0.0486), (250;-0.085), (400;-0.259).

A função quebra é dada pela matriz:

$$B_{ij} = \alpha B_1 + (1 - \alpha) B_2$$

Onde,

$$\alpha = 0.8723 + 0.0045G$$

E,

$$B_{1ij} = (1 - \exp(-d_i/d_j)^u) / (1 - \exp(-1))$$

$$B_{2ij} = 1 - \exp(-d_i/s'')^v$$

$u$	Expoente da quebra por tração.
$v$	Expoente da quebra por compressão.



## Britagem – Whiten Modificado

Este modelo representa a britagem por meio de adaptações das funções de quebra e classificação propostas por W.J. Whiten et al. em "A breakage function suitable for crusher models". Fourth Tewksbury, Symposium, Melbourne, February, 1979.

O produto do britador é dado pelo sistema matricial:

$$f = (I - C) * (I - B * C)^{-1} f^o$$

Onde,

$p$	Vetor da distribuição granulométrica do produto do britador.
$f^o$	Vetor da a distribuição granulométrica da alimentação do britador
$I$	Matriz identidade.
$C$	Matriz de classificação de Whiten.
$B$	Matriz de quebra.

A função de classificação de Whiten descreve a probabilidade de as partículas de classe de tamanho  $d_i$  serem classificadas para quebra como função do tamanho de partícula por:

0 se  $d_i < k_1$

1 se  $d_i < k_2$

$C(d_i)$  se  $k_1 < d_i < k_2$

$$C(d_i) = 1 - \left[ \frac{d_i - k_2}{k_1 - k_2} \right]^{k_3}$$

$$k_1 = \alpha C_{ss}$$

$$k_2 = \beta C_{ss} + \gamma$$

Onde,

$C_{ss}$	Abertura na posição fechada (mm) ( <i>Closed Side Setting - CSS</i> )
$\alpha$	Multiplicador do CSS para determinar o tamanho inferior ao qual não ocorrerá mais quebra (mm).
$\beta$	Multiplicador do CSS para determinar o tamanho superior ao qual ocorrerá quebra de todo material (mm).
$\gamma$	Correção do tamanho superior ao qual ocorrerá quebra de todo material (mm).
$k_3$	Inclinação da curva de probabilidade de quebra de Whiten.

A função quebra é dada pela matriz:

$$B_{ij} = \varphi \left( \frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_1} + (1 - \varphi) \left( \frac{d_i}{d_{j+1}} \right)^{\beta_2}$$

$\varphi$	Fração de quebra por tração.
$\beta_1$	Expoente da quebra por tração.
$\beta_2$	Expoente da quebra por compressão.

## Peneiramento – Karra

O modelo é baseado no trabalho de V.K Karra ("Development of a model for predicting the screening performance of a vibrating screen", CIM Bulletin, April 1979). O modelo estabelece a curva de partição  $E_i$  (ou classificação, ou curva de eficiência), definida como a recuperação em massa de sólido para o fluxo de *oversize* em função do tamanho de partícula.

$$p_{OS} = E_i f^o$$

$$p_{US} = (E_i f^o) - f^o$$

Onde,

$p_{OS} = \{p_{UF_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ do <i>undersize</i> da peneira.
$p_{US} = \{p_{OF_i} \mid i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da distribuição de massa de partículas na classe de tamanho $i$ do <i>oversize</i> da peneira.
$f^o = \{f_i^o \mid i = 1, 2, \dots, n\}$	Vetor da a distribuição massa de partículas na classe de tamanho $i$ da alimentação da peneira

A massa de sólido dirigida para o fluxo de *oversize* pode ser influenciada pela quantidade de água remanescente nesse fluxo. Isso se deve devido ao fato de o material fino frequentemente permanecer aderido ao material grosso, efeito denominado de curto-circuito ou by-pass. A curva de partição é decomposta para considerar o efeito do by-pass do fluxo alimentado que não sofre efeito de classificação ( $E_{ic}$ ), assim temos:

$$E_i = E_i^c + R_f(1 - E_i^c)$$

Onde:

$E_i$	Eficiência de classificação real da peneira para partículas de tamanho $d_i$ .
$E_i^c$	Eficiência de classificação corrigida para partículas de tamanho $d_i$ , excluindo o by-pass.
$R_f$	Fração do líquido da alimentação remanescente no <i>oversize</i> .

A curva de partição corrigida é calculada como:

$$E_i^c = 1 - \exp [ - 0.693 (d_i/d_{50}^c)^{5.846} ]$$

Onde,

$d_{50}^c$	Tamanho de corte corrigido $d_{50}^c$ .
$d_i$	Tamanho de partícula na classe de tamanho $i$ .

Onde,

$$d_{50}^c = h_T * (W_{US}/LW * ABCDEFG)$$

Onde,

$h_T$	Corte calculado.
$W_{US}$	Massa de sólido na alimentação menor que corte calculado ( <i>undersize</i> teórico).
$LW$	Área de peneiramento em m <sup>2</sup> . Comprimento (W) * Largura (L) da tela da peneira.
ABCDEFG	Fatores de ajuste.

Onde,

$$h_T = (h + d) \cos \varphi - d$$

Onde,

$h$	Abertura equivalente da tela quadrada (mm).
$d$	Diâmetro do fio da tela (mm).
$\varphi$	Ângulo da tela com a horizontal.

Os fatores de ajuste de A a G são dados pela tabela:

<b>Fator A.</b>	$h_T < 50.8\text{mm}$	$A = 12.1286 * (h_T)^{0.3162} - 10.2991$
	$h_T \geq 50.8\text{mm}$	$A = 0.3388 * h_T + 14.4122$
<b>Fator B.</b>	Onde Q - % Oversize na alimentação da peneira.	
	$Q \leq 87$	$B = 1.6 - 0.012 * Q$
	$Q > 87$	$B = 4.275 + 0.0425 * Q$
<b>Fator C</b>	Onde R - % ao meio tamanho do corte na alimentação da peneira.	
	$R \leq 30$	$C = 0.012 * R + 0.7$
	$30 < R < 55$	$C = 0.1528 (R)^{0.564}$
	$55 \leq R < 80$	$C = 0.0061 (R)^{1.37}$
	$R \geq 80$	$C = 0.05 * R - 1.5$
<b>Fator D.</b>	Onde S é a posição do deck, deck superior S = 1, segundo deck S = 2	
		$D = 1.1 - 0.1 * S$
<b>Fator E.</b>	Fator de umidade, $T = 1.26 * h_T$	
	$T < 1$	$E = 1.0$
	$1 \leq T \leq 2$	$E = T$
	$2 < T < 4$	$E = 1.5 + 0.25T$
	$4 \leq T \leq 6$	$E = 2.5$
	$6 < T \leq 10$	$E = 3.25 - 0.125T$
	$10 < T < 12$	$E = 4.5 - 0.25T$
	$12 \leq T \leq 16$	$E = 2.1 - 0.05T$

	$16 < T < 24$	$E = 1.5 - 0.125T$
	$24 \leq T \leq 32$	$E = 1.35 - 0.00625T$
	$T > 32$	$E = 1.15$
<b>Fator F</b>		$F = U/1602$ , onde $U$ = densidade do sólido ( $\text{kg/m}^3$ )
<b>Fator G</b> Fator de tamanho crítico		$G = 0.844 * (1.0 - X_n/100)^{3.453}$ , onde $X_n$ = % da alimentação entre o intervalo de tamanho $1.25h_T$ a $0.75h_T$