Les Finombres : Étude d'une dynamique arithmétique

Romain Bietrix
Candidat : 53747
Classe préparatoire scientifique
Lycée Camille Guérin

Résumé

Ce rapport explore une dynamique arithmétique fondée sur une opération de renversement des chiffres d'un entier. En étudiant les suites itératives associées, nous introduisons les notions de *Finombres* et *Infinombres*, et proposons une classification basée sur l'atteinte du zéro dans la dynamique. L'étude s'accompagne de résultats théoriques, d'implémentations algorithmiques et d'analyses empiriques.

Table des matières

1 Définitions **2**

2 Cadre théorique de l'étude **2**
2.1 Divisibilité par 9 3
2.2 Stabilité modulo 11 3
2.3 Caractérisation de d'autres diviseurs stables 3
2.4 Caractérisation des Finombres 4
2.5 Les entiers négatifs 4

3 Implémentation algorithmique **6**
3.1 Choix de l'opérateur renversement 6

1 Définitions

Définition 1 (Opération *reverse*)**.** Soit $b \geq 2$ un entier représentant la base d'écriture. Pour un entier naturel n écrit en base b sous la forme

$$n = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot b^k,$$

avec $c_k \in [\![0, b-1]\!]$ et $c_{m-1} \neq 0$ (si $n \neq 0$), on définit l'opération *reverse* par :

$$\operatorname{rev}(n) := \sum_{k=0}^{m-1} c_{m-1-k} \cdot b^k.$$

Cette opération inverse l'ordre des chiffres de n dans la base b. Par exemple, en base 10, $\operatorname{rev}(100) = 1$ et $\operatorname{rev}(1) = 1$. m représente ici le nombre de chiffre de n. De plus, on peut étendre la définition aux entiers négatifs avec $\operatorname{rev}(n) = -\operatorname{rev}(-n)$

Définition 2 (Suite renversielle)**.** Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on définit la suite $(r_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ dite *suite renversielle* par récurrence :

$$r_n(0) = n, \quad \text{et} \quad r_n(k+1) = \left|\operatorname{rev}\big(r_n(k)\big) - r_n(k)\right|, \quad \forall k \geq 0.$$

Définition 3 (Ensembles associés à la suite renversielle)**.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.

— $Y(n) := \{k \in \mathbb{N} \mid r_n(k) \neq 0\}$, l'ensemble des indices pour lesquels la suite renversielle est non nulle.

— $V(n) := \{r_n(k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, l'ensemble des valeurs prises par la suite renversielle.

Définition 4 (Finombres et Infinombres)**.** On définit les ensembles suivants :

$$\mathbb{F} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N}, r_n(k) = 0\} = \{n \mid 0 \in V(n)\},$$

appelé l'ensemble des *Finombres*, et son complémentaire dans $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{I} := \mathbb{Z} \setminus \mathbb{F},$$

appelé l'ensemble des *Infinombres*.

Définition 5 (Palindromes)**.** L'ensemble des palindromes est défini par :

$$\mathbb{A} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{rev}(n) = n\}.$$

Remarque. Sauf indication contraire, toutes les considérations se feront en base décimale ($b = 10$).

2 Cadre théorique de l'étude

Dans cette section, nous étudions les propriétés arithmétiques de la suite reversielle $(r_n(k))_k$, définie par :

$$r_n(0) = n, \quad r_n(k+1) = \left|\operatorname{rev}(r_n(k)) - r_n(k)\right|, \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

2.1 Divisibilité par 9

Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\text{rev}(n) - n| \equiv 0 \mod 9.$$

Démonstration. Soit $n = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot 10^k$ sa décomposition en base 10. Son renversé est :

$$\text{rev}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot 10^{m-1-k}.$$

D'où :

$$\text{rev}(n) - n = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \left(10^{m-1-k} - 10^k\right). \tag{1}$$

Or, $10^k \equiv 1 \mod 9$, donc chaque terme est congru à $0 \mod 9$, et la somme l'est aussi. □

Corollaire 1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq 1$,

$$r_n(k) \equiv 0 \mod 9.$$

Corollaire 1.2 Pour tout n, il existe au plus un $k \in V(n)$ qui n'est pas divisible par 9.

Corollaire 1.3 Pour tout n, si $\exists k \in V(n)$ n'est pas divisible par 9, alors $k = r_n(0) = n$,

Remarque. Cette propriété permet de réduire l'étude aux seuls entiers multiples de 9, car les termes suivants dans les *suites reversielles* sont toujours divisibles par 9.

2.2 Stabilité modulo 11

Proposition 2. Si $n \equiv 0 \mod 11$, alors :

$$|\text{rev}(n) - n| \equiv 0 \mod 11.$$

Démonstration. On utilise que $10^k \equiv (-1)^k \mod 11$. Si $n = \sum c_k \cdot 10^k$, alors :

$$n \equiv \sum c_k(-1)^k \equiv 0 \mod 11 \tag{2}$$

$$\text{rev}(n) \equiv \sum c_{m-1-k}(-1)^k \equiv \sum c_k(-1)^{m-1-k} \equiv (-1)^{m-1} \sum c_k(-1)^{-k} \mod 11$$

Mais $(-1)^{-k} = (-1)^k$ donc avec la relation (2) :

$$\text{rev}(n) \equiv (-1)^{m-1} \sum c_k(-1)^k \equiv 0 \mod 11 \Rightarrow \text{rev}(n) \equiv n \mod 11.$$

D'où la différence est nulle modulo 11. □

Corollaire 2. Si un terme de la suite est divisible par 11, tous les termes suivants le seront également.

Remarque. On dit que la divisibilité par 11 est stable à partir de son apparition dans la suite.

2.3 Caractérisation de d'autres diviseurs stables

Proposition 3. Si $\text{rev}(m) \equiv 0 \mod m$, alors :

$$|\text{rev}(m) - m| \equiv 0 \mod m.$$

Démonstration. En effet, si $\text{rev}(m)$ est divisible par m, alors $\text{rev}(m) = k \cdot m$, et $|\,\text{rev}(m) - m| = |km - m| = m|k-1|$, divisible par m. □

Remarque. Cette propriété est satisfaite par les *palintiples*, c'est-à-dire les entiers m tels que $\text{rev}(m) = k \cdot m$. Voir pour une étude approfondie.

2.4 Caractérisation des Finombres

Proposition 4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, on a :

$$r_n(k) = 0 \iff r_n(k-1) \in \mathbb{A}.$$

Informellement, une *suite reversielle* ne peut s'annuler que postérieurement à un palindrome.

Démonstration. On a :

$$r_n(k) = 0 \iff |\operatorname{rev}(r_n(k-1)) - r_n(k-1)| = 0 \iff \operatorname{rev}(r_n(k-1)) = r_n(k-1),$$

ce qui signifie que $r_n(k-1)$ est un palindrome. □

Proposition 5. Un entier n est un Finombre si et seulement si :

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \geq k_0,\ r_n(k) = 0.$$

Informellement, il y a équivalence entre être un Finombre et posséder une *suite renversielle* nulle à partir d'un certain rang.

Démonstration. Par définition, $n \in \mathbb{F} \iff \exists k_0,\ r_n(k_0) = 0$. Or, par récurrence, dès que $r_n(k) = 0$, tous les termes suivants sont également nuls, car :

$$r_n(k_0 + 1) = |\operatorname{rev}(0) - 0| = 0.$$

□

Corollaire 3. Ainsi, n est un Finombre si et seulement si $Y(n)$ est de cardinal fini.
Proposition 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors :

$$n \in \mathbb{F} \setminus \{0\} \iff \exists k \in \mathbb{N},\ r_n(k) \in \mathbb{A} \setminus \{0\}.$$

Informellement, un entier non nul est un Finombre si et seulement si il possède un palindrome non nul dans sa *suite reversielle*

Démonstration. Si $n \in F$, alors d'après le *corollaire 3*, $Y(n)$ est de cardinal fini. Or $n = r_n(0)$ est non nul donc $0 \in Y(n)$ (par définition de $Y(n)$).

Ainsi, $Y(n)$ est une partie non vide et fini de $\mathbb{N}$, et admet un maximum k. Donc $r_n(k+1) = 0$ (car $(k+1) \notin Y(n)$). D'après la *Proposition 4*, $r_n(k)$ est un palindrome.

Réciproquement, si $r_n(k)$ est un palindrome non nul, alors $r_n(k+1) = |\operatorname{rev}(r_n(k)) - r_n(k)| = 0$. Donc n est bien un Finombre. □

2.5 Les entiers négatifs

Proposition 7. Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\exists (k_0, p_0) \in \mathbb{N}^2, r_n(k_0) = r_m(p_0 + k_0) \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq k_0, r_n(k) = r_m(p_0 + k)$$

Informellement, si deux suites reversielles atteingnent un même nombre, alors les termes suivants sont exactement les mêmes.

Démonstration. Soit $(k_0, p_0) \in \mathbb{N}^2$ tels que $r_n(k_0) = r_m(p_0 + k_0)$. On montre alors

$$r_n(k_0+1) = |\operatorname{rev}(r_n(k_0)) - r_n(k_0)| = |\operatorname{rev}(r_m(p_0+k_0)) - r_m(p_0+k_0)| = r_m(p_0 + (k_0+1))$$

Puis par récurrence, on montre la proposition □

Remarques. Ceci permet de réduire de temps de calcul algorithmique. Si dans une suite, on atteint un nombre dont on a déjà calculer sa suite reversielle, on connait exactement la suite de son comportement dans la suite initiale

Corollaire 4.1. $\exists k_0 \in \mathbb{N}, r_n(k_0) \in \mathbb{F}, \quad \Leftrightarrow \quad n \in \mathbb{F}.$
Informellement, il y a équivalence entre être un Finombre, et en posséder un dans sa suite reversielle (le sens reciproque est évident, car la suite reversielle d'un Finombre atteint $0 \in \mathbb{F}$)

Corollaire 4.2. $n \in \mathbb{F} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, r_n(k) \in \mathbb{F}.$
Informellement, un nombre est un Finombre si et seulement si tous les termes de sa suite reversielle sont des Finombres

Corollaire 4.3. $n \in \mathbb{I} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, r_n(k) \in \mathbb{I}.$
Informellement, un nombre est un Infinombre si et seulement si tous les termes de sa suite reversielle sont des Infinombres
Remarque. On sait par définition que $\mathbb{I} \cap \mathbb{F} = \emptyset$. Donc il nous suffit de savoir la nature d'un nombre de la suite pour connaître la nature de tous les autres.

Proposition 8. Soit $n \in \mathbb{Z}$

$$n \in \mathbb{F} \Rightarrow (-n) \in \mathbb{F}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{F}$, alors d'après le **Corollaire 4.2**, $\forall k \in \mathbb{N}, r_n(k) \in \mathbb{F}$. On a également :

$$r_{-n}(1) = |\operatorname{rev}(-n) - (-n)| = |-\operatorname{rev}(n) + n| = |\operatorname{rev}(n) - n| = r_n(1) \in \mathbb{F}$$

Donc $r_{-n}(1) \in \mathbb{F}$, ce qui d'après le **Corollaire 4.1** montre que $(-n) \in \mathbb{F}$ □

Remarque. Ainsi, étudier les entiers naturels suffit à étudier tous les entiers. On pouvait s'en douter en remarquant que $\forall n \in \mathbb{Z}, r_n(1) \geq 0$ ainsi que tous les termes suivants. On concidèrera alors par la suite, indépendament $n \in \mathbb{N}$ ou $n \in \mathbb{Z}$

Proposition 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et m son nombre de chiffres.

$$\forall k \in \mathbb{N}, r_n(k) \leq 10^m - 1$$

Informellement, aucun termes de la suite ne peut posséder plus de chiffre que le premier terme.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, et notons m son nombre de chiffre. On peut remarquer que le nombre de chiffres de $\operatorname{rev}(n) \leq m$ (l'inégalité intervient quand le chiffre des unités de n est nul) Ainsi :

$$n = \sum_{k=0}^{m-1} c_k 10^k \leq \sum_{k=0}^{m-1} 9 \cdot 10^k = 9 \sum_{k=0}^{m-1} 10^k = (10^m - 1) \cdot \frac{9}{10-1} = 10^m - 1$$

Mais on obtient également

$$\operatorname{rev}(n) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k 10^{m-1-k} \leq 9 \sum_{k=0}^{m-1} 10^{m-1-k} = \sum_{k=0}^{m-1} 9 \cdot 10^k = 10^m - 1$$

Enfin

$$|\operatorname{rev}(n) - n| \leq \max(n, \operatorname{rev}(n)) \leq 10^m - 1$$

Or $10^m - 1$ possède m chiffres. Donc par récurrence, on prouve la proposition. □

Corollaire 5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(r_n(k))_k$ est bornée

Corollaire 5.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(r_n(k))_k$ prend un nombre fini de valeurs (bornée et à valeurs entières), d'au maximum 10^m - 1 + 2 (en comptant le 0 et le permier terme si négatif)

Proposition 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(r_n(k))_k$ est périodique à partir d'un certain rang sur un cycle fini de nombres.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ $(r_n(k))_k$. Le **Corollaire 5.2** nous donne que $V(n)$ est de cardinal inférieur ou égale à $v = 10^m + 1$ Ainsi, sur les $10^m + 2$ premiers termes, le caractère bornée nous empêche d'obtenir $10^m + 2$ valeurs distincts. Et donc :

$$\exists (k_0, k_1) \in \mathbb{N}^2, \quad k_0 \leq k_1 \leq 10^m + 2, \quad r_n(k_0) = r_n(k_1)$$

En notant $d = k_1 - k_0 = d > 0$, $r_n(k_0) = r_n(k_0 + d)$. Or d'après la **Proposition 7.** les suites $(r_n(k_0 + k))_k$ et $(r_n(k_0 + d + k))_k$ sont les mêmes.

Ainsi, soit $m \in \mathbf{N}$. Notons $m = qd + r$ avec $0 \leq r < d$ et $q \in \mathbb{N}$ la division euclidienne de m par d. Par récurrence décroissante finie sur q que $r_n(k_0 + m) = r_n(k_0 + r)$.

Donc la suite boucle sur l'ensemble $\{r_n(k_0), r_n(k_0 + 1), \ldots, r_n(k_0 + d - 1)\}$ de cardinal au plus d. □

Proposition 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si la suite $(r_n(k))_k$ converge, alors elle tend vers 0 (en base 10).

Démonstration. Nous allons proposer ici une démonstration partielle, car nous avons besoin de la notion de *graphes d'Young* pour conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(r_n(k))_k$ converge, la suite possède alors une limite que nous allons noter l.

D'après la **Proposition 10.**, la suite $(r_n(k))_k$ devient périodique à partir d'un certain rang k_0. Si le cycle n'est pas constant (au moins deux valeurs distincts dans une période), alors elle possède deux valeurs d'adhérence et diverge.

Donc la suite $(r_n(k))_k$ est constante à partir du rang k_0. Ainsi, :

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(k) = r_n(k_0) = l$$

Or

$$l = r_n(k_0) = r_n(k_0 + 1) = |\text{rev}(r_n(k_0)) - r_n(k_0)| = |\text{rev}(l) - l|$$

Et donc on obtient la relation $l = |\,\text{rev}(l) - l|$:

- Si $rev(l) \leq l \quad \Rightarrow \quad l = |\,\text{rev}(l) - l| = l - \text{rev}(l) \quad \Rightarrow \quad \text{rev}(l) = 0$
  Or si $n \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \text{rev}(n) \neq 0$ donc par contraposée, $\text{rev}(l) = 0 \Rightarrow l = 0$
- Si $rev(l) > l \quad \Rightarrow \quad l = |\,\text{rev}(l) - l| = \text{rev}(l) - l \quad \Rightarrow \quad \text{rev}(l) = 2l$
  Nous devons prouver qu'il n'existe pas d'entier non nul tel que $\text{rev}(l) = 2l$. C'est ici que la notion de *graphes d'Young* nous sera utile (démonstration laissée en suspent)

□

3 Implémentation algorithmique

3.1 Choix de l'opérateur renversement

Notre implémentation pour étudier les suites reversielles repose sur la manipulation des chiffres d'un entier en base décimale. Nous utiliserons des divisions euclidiennes successives afin de récupérer les chiffres un à un.

Cependant, on peut également définir le renversé d'un nombre par un polynome comme suit : Soit $n \in \mathbb{N}$ et b la base de numérotation :

$$P_{n,m,b}(X) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot X^k \quad \text{avec} \quad P_{n,m,b}(b) = n$$

Les (c_k) représentent les chiffres de n en base b et m le nombre de coefficients du polynome. Alors en posant le polynome inversant les coefficients :

$$Pr_{n,m,b}(X) = X^{m-1} P_{n,m,b}(\frac{1}{X})$$

On obtient

$$\mathrm{rev_m}(k) = Pr_{k,m,b}(b)$$

On fera attention à la différence entre $\mathrm{rev}(n)$ et $\mathrm{rev_m}(n)$

Il y a deux grandes différences entre ces deux définitions :

— (1) $\mathrm{rev_n}$ est symétrique quand rev ne l'est pas
(Exemple : $\mathrm{rev}_{100}(100) = 1$, $\mathrm{rev}_{100}(1) = 100$. Mais $\mathrm{rev}(100) = 1, \mathrm{rev}(1) = 1$)

— (2) $\mathrm{rev_n}$ est un opérateur qui dépend du m choisi (Donc du nombre de coefficients du polynomes)
(Exemple :
$\mathrm{rev}_3(1) = 100$, où on concidère $1 = 001$,
$\mathrm{rev}_4(1) = 1000$ où on concidère $1 = 0001$)

Ce deuxième point montre alors une différence de comportement pour un nombre tel que 1, en fonction du nombre de zeros que l'on concidère.

Cela créé alors de multiples suites différentes, en fonction du m concidèré pour un même nombre initiale, ce qui justifie notre choix de la restriction de notre étude à rev, moins dépendantes de paramètres.