Les Finombres : Démonstrations Annexes

Romain Bietrix
Candidat : 53747
Classe préparatoire scientifique
Lycée Camille Guérin

1 Infinité de palindromes

Proposition 1 *Il existe une infinité de palindromes en base 10.*

Démonstration : Un palindrome est un entier qui est égal à son renversé :

$$\mathrm{rev}(n) = n \quad \Longleftrightarrow \quad n \text{ est un palindrome.}$$

Considérons la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n-1} 9 \times 10^k = 10^n - 1$$

Chaque b_n est un entier constitué uniquement du chiffre 9, donc son renversé est également b_n :

$$\mathrm{rev}(b_n) = b_n$$

Les b_n étant tous distincts pour n différent, on en déduit l'existence d'une infinité de palindromes.

$\blacksquare$

2 La suite (a_n) respecte les critères de la proposition 2

Rappelons la Proposition 2 du rapport :

Proposition 2 (Proposition 2) *Soit* $n \in \mathbb{Z}^*$ *tel que* $\text{rev}(2n) = 8n$ *et* $\text{rev}(6n) = 4n$*, alors* $2n$ *est un Infinombre (et initie une boucle).*

Ainsi que la suite suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} 1089 \times 10^{4k}$$

Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition 3 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $\text{rev}(2a_n) = 8a_n \quad et \quad \text{rev}(6a_n) = 4a_n$

Démonstration (du cas $\text{rev}(2a_n) = 8a_n$) : Commençons par écrire explicitement a_n :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} 1089 \times 10^{4k}$$

Chaque terme de la somme est un bloc de 4 chiffres, correspondant à 1089, suivi de $4k$ zéros. Par linéarité, on peut calculer :

$$2a_n = \sum_{k=0}^{n} 2 \times 1089 \times 10^{4k} = \sum_{k=0}^{n} 2178 \times 10^{4k}$$

De même,

$$8a_n = \sum_{k=0}^{n} 8 \times 1089 \times 10^{4k} = \sum_{k=0}^{n} 8712 \times 10^{4k}$$

On observe que $2 \times 1089 = 2178$ et $8 \times 1089 = 8712$.
Regardons la structure des chiffres :

$$2178 = \underbrace{2}_{\text{milliers}} \ \underbrace{1}_{\text{centaines}} \ \underbrace{7}_{\text{dizaines}} \ \underbrace{8}_{\text{unités}}$$

Le renversé de 2178 est donc 8712, c'est-à-dire :

$$\text{rev}(2178) = 8712$$

Ainsi, chaque bloc de 4 chiffres 2178 utilisé dans la décomposition de $2a_n$ produit un bloc 8712 dans $8a_n$ lorsqu'on renverse les chiffres.

On va maintenant formaliser cela. Soit q_i les chiffres de $2a_n$, écrits en base 10. Chaque bloc 2178×10^{4k} contribue aux positions $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ avec les chiffres $(8, 7, 1, 2)$ placés dans cet ordre (le chiffre des unités en premier, comme toujours dans les puissances de 10). Autrement dit :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad \begin{cases} q_{4i} = 8 \\ q_{4i+1} = 7 \\ q_{4i+2} = 1 \\ q_{4i+3} = 2 \end{cases}$$

Ainsi,

$$2a_n = \sum_{i=0}^{4n+3} q_i \cdot 10^i$$

Pour renverser ce nombre, on lit les chiffres dans l'ordre inverse :

$$\text{rev}(2a_n) = \sum_{i=0}^{4n+3} q_{4n+3-i} \cdot 10^i$$

On veut maintenant identifier les blocs renversés dans $\text{rev}(2a_n)$.
Décomposons cette somme par groupes de 4 indices. Pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, on considère :

$$\begin{aligned} q_{4n+3-4i} &= q_{4(n-i)+3} = 2 \\ q_{4n+3-(4i+1)} &= q_{4(n-i)+2} = 1 \\ q_{4n+3-(4i+2)} &= q_{4(n-i)+1} = 7 \\ q_{4n+3-(4i+3)} &= q_{4(n-i)} = 8 \end{aligned}$$

Donc,

$$\text{rev}(2a_n) = \sum_{i=0}^{n} \left[2 \cdot 10^{4i} + 1 \cdot 10^{4i+1} + 7 \cdot 10^{4i+2} + 8 \cdot 10^{4i+3}\right] = \sum_{i=0}^{n} 8712 \cdot 10^{4i} = 8a_n$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien :

$$\text{rev}(2a_n) = 8a_n$$

Remarque : La démonstration du cas $\text{rev}(6a_n) = 4a_n$ suit exactement le même raisonnement, avec $6 \times 1089 = 6534$ et $4 \times 1089 = 4356$, et le fait que $\text{rev}(6534) = 4356$.

■

3 Divisibilité par 11 des nombres à 4 chiffres

Proposition 4 *Soit abcd un entier à 4 chiffres. Alors :*

$$abcd \equiv 0 \mod 11 \iff a - b + c - d \equiv 0 \mod 11$$

Démonstration : Un nombre $abcd$ s'écrit :

$$abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$

Or,

$$10 \equiv -1 \mod 11 \quad \Rightarrow \quad 10^n \equiv (-1)^n \mod 11$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} abcd &\equiv 10^3 a + 10^2 b + 10^1 c + 10^0 d \mod 11 \\ &\equiv (-1)^3 a + (-1)^2 b + (-1)^1 c + (-1)^0 d \mod 11 \\ &\equiv -a + b - c + d \mod 11 \\ &\equiv a - b + c - d \equiv 0 \mod 11 \end{aligned}$$

■