力学小论文

一维文丘里管的流动模拟和探究

学　　院：工程科学学院

专　　业：近代力学系

学生姓名：陈煜晴

学　　号：PB21051131

指导教师：卢荣德

2023年12月11日

摘要

文丘里管是一段先收缩后扩张的变截面管道，可以用于测量流过流体的流量。通过测量不同截面面积处的压强（差），利用伯努利方程可以计算出管内的流量。

对于文丘里管中的控制体，列出连续性方程、动量方程、能量方程，利用麦考马克方法可以列出有限差分方程，设定初值条件与边值条件之后，可以使用matlab进行数值求解。求解后可以得出流动趋于定常，从而计算出质量流量。

关键词：文丘里管，伯努利方程，麦考马克方法，matlab数值计算

1 背景

1.1 简介

测量流体流量的仪表统称为流量计或流量表。流量计是工业测量中重要的仪表之一，随着工业的发展，生产中对流量测量的准确度和范围的要求越来越高。为了适应各种用途，各种类型的流量计相继问世，大致可分为差压式流量计、转子流量计、容积流量计、电磁流量计、超声波流量计等等。其中，最普通也最重要的是差压式流量计，它根据安装在管道中的流量检测件产生的差压，结合已知流体条件和装置几何尺寸来计算流量。根据检测件形式，可以分为孔板流量计、文丘里流量计、均速管流量计等[1]。

文丘里管（Venturi tube）是一段先收缩后扩张的变截面直管道，由收缩段、喉道段、扩张段组成，如图1所示

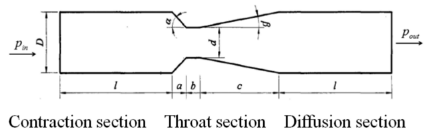


图 1: 文丘里管示意图

管道截面面积的变化将会引起流体流速改变，从而导致压强改变。流体流过喉部时，收缩的横截面使流体流速增加、压力降低，这种现象被称为文丘里效应，发生在文丘里管中。通过测量管道不同截面的压强差，利用伯努利方程可以计算出管内的流量。

1.2 基本原理

假设流动为定常流动，流过管道的液体为不可压缩的流体，且黏性可忽略，同时整个装置的截面符合缓变流条件[2]，则该简化模型满足伯努利方程适用条件。

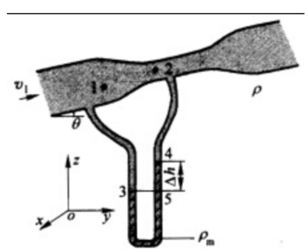


图 2: 文丘里管原理图

取管道喉段、扩张段截面积分别为A_1，A_2，平均流动速度v_1，v_2，流体密度为ρ。由伯努利方程可得

$$\frac{{v_1}^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{{v_2}^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \tag{1.2.1}$$

由于管道截面上为缓变流，截面上的压强分布规律与U形管内的静止液体一样。设U形管内液体

密度为ρ_m，两边液面高度差为Δh，根据压强计算公式可得

$$p_1 = p_3 - \rho g(z_1 - z_3) \quad p_2 = p_5 - \rho_m g \Delta h \rho g(z_2 - z_4) \tag{1.2.2}$$

同时$p_3 = p_5$，$\Delta h = z_4 - z_3$，代入移项可得

$$\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2} = (\frac{\rho_m}{\rho} - 1)g\Delta h \tag{1.2.3}$$

根据连续性方程

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{1.2.4}$$

代入（1.2.3）式可得

$$v_1 = k\sqrt{2g\Delta h} \tag{1.2.5}$$

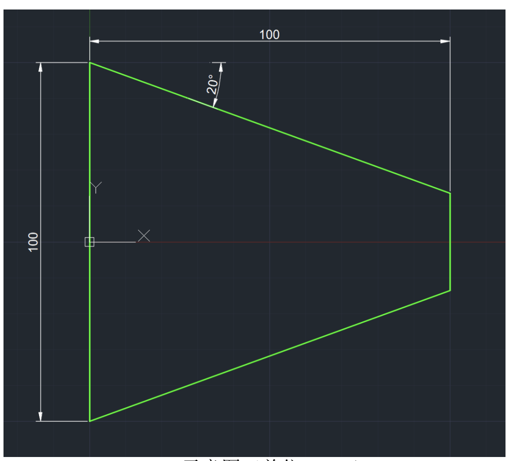
其中$k = \sqrt{\frac{(\rho_m/\rho)-1}{(A_1/A_2)^2-1}}$，称为流速系数，则文丘里管的流量公式为

$$Q = kA_1\sqrt{2g\Delta h} \tag{1.2.6}$$

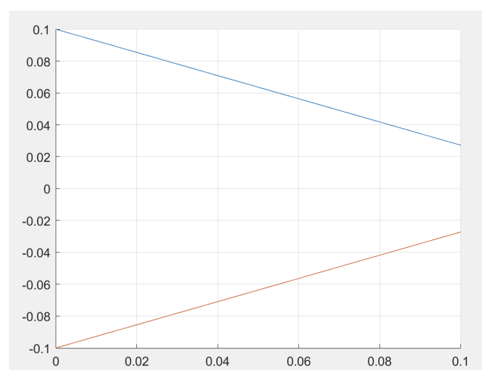
2 模拟过程

2.1 模型建立

由于流速测量仅涉及收缩段与喉部，故设计文丘里管部分尺寸如图



(a) CAD示意图（单位：mm）



(b) matlab示意图（单位：m）

图 3: 文丘里管设计图

取距离最左端平面x处、左端截面面积为A、长为dx的控制体，假设任意给定截面上流动参数均匀，即将流体流动简化为一维流动。

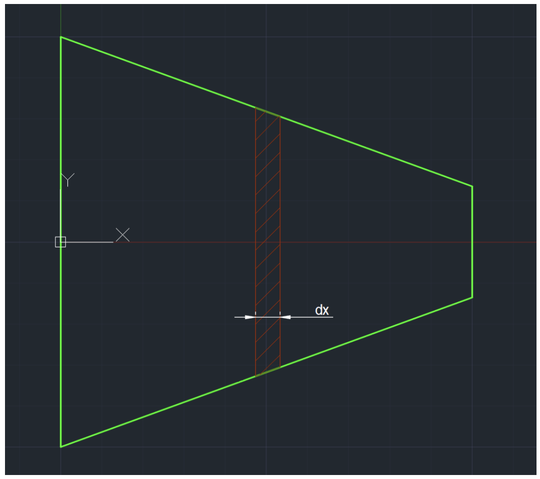


图 4: 控制体示意图

2.2 基本方程

将质量守恒、牛顿第二定律、能量守恒运用在控制体上，推导出控制体满足的方程。

连续性方程

积分形式的连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV + \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{2.2.1}$$

对于图4dx足够小的控制体，方程2.2.1左边第一项可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) \tag{2.2.2}$$

方程2.2.1左边第二项可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A dx) = d(\rho A v) \tag{2.2.3}$$

代入2.2.1，两边同时除以dx并使dx趋于0，可得

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial x} = 0 \tag{2.2.4}$$

动量方程

对于没有体积力作用的无黏流，动量方程的积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V (\rho u) dV + \iint_S \rho(\rho u \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S (p d\mathbf{S}) \tag{2.2.5}$$

dx足够小时，将方程两边同时除以dx，得到一维流动动量方程的守恒形式

$$\frac{\partial(\rho v A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 A)}{\partial x} = -A\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{2.2.6}$$

非守恒形式动量方程

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.2.7}$$

能量方程

对于没有体积力作用也没有粘性效应的绝热流，能量方程的积分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho(e+\frac{v^2}{2})dV + \iint_S \rho(e+\frac{v^2}{2})\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} = -\iint_S (p\mathbf{v})\cdot d\mathbf{S} \tag{2.2.8}$$

dx足够小时，将方程两边同时除以dx，得到一维流动能量方程的守恒形式

$$\frac{\partial(\rho(e+\frac{v^2}{2})A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(e+\frac{v^2}{2})A)}{\partial x} = -A\frac{\partial \rho A v}{\partial x} \tag{2.2.9}$$

非守恒形式能量方程

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t} + \rho v\frac{\partial e}{\partial x} = -p\frac{\partial v}{\partial x} - pv\frac{\partial(\ln A)}{\partial x} \tag{2.2.10}$$

整理

利用状态方程

$$p = \rho R T \tag{2.2.11}$$

及其微分

$$\frac{\partial p}{\partial x} = R(\rho\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial \rho}{\partial x}) \tag{2.2.12}$$

以及完全气体满足

$$e = c_v T \tag{2.2.13}$$

可以消去方程2.2.4、2.2.7、2.2.10中的压力，得

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + vA\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho A\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \\ \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -R(\rho\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial \rho}{\partial x}) \\ \rho c_v\frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v v\frac{\partial T}{\partial x} = -\rho R T[\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial(\ln A)}{\partial x}] \end{cases} \tag{2.2.14}$$

定义无量纲量，

$$T' = \frac{T}{T_0} \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad x' = \frac{x}{L} \quad v' = \frac{v}{v_0} \quad t' = \frac{t}{L/v_0} \quad A' = \frac{A}{A*} \tag{2.2.15}$$

同时

$$v_0 = \sqrt{\gamma R T_0} \quad \frac{R}{c_v} = \frac{R}{R/(\gamma-1)} = \gamma - 1 \tag{2.2.16}$$

将方程无量纲化，可得方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = -v'\frac{\partial \rho'}{\partial x'} - \rho'\frac{\partial v'}{\partial x'} - \rho v'\frac{\partial(\ln A')}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} = -v'\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma}(\frac{\partial T'}{\partial x'} + \frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho'}{\partial x'}) \\ \frac{\partial T'}{\partial t'} = -v'\frac{\partial v'}{\partial x'} - (\gamma-1)T[\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial(\ln A')}{\partial x'}] \end{cases} \tag{2.2.17}$$

根据该方程组可以求得流体在管中流动速度v、密度ρ、温度T等物理量的数值解。

定义无量纲量压强系数

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho_0 {v_0}^2} \tag{2.2.18}$$

则可将伯努利方程1.2.1无量纲化为

$$C_p = 1 - \rho' {v'}^2 \tag{2.2.19}$$

从而也可以求出流动过程中压强p的数值解。

2.3 计算方法

为数值求解方程组2.2.17，采用麦考马克方法建立有限差分表达式[3]，对方程进行时间推进，使用matlab进行模拟计算。

部分参数设置如下：

```
r(1,:)=1-0.03146*x;
T(1,:)=1-0.02314*x;
v(1,:)=(0.1+1.09*x).*(1-0.02314*x).^0.5;%初值条件
```

核心有限差分代码如下：

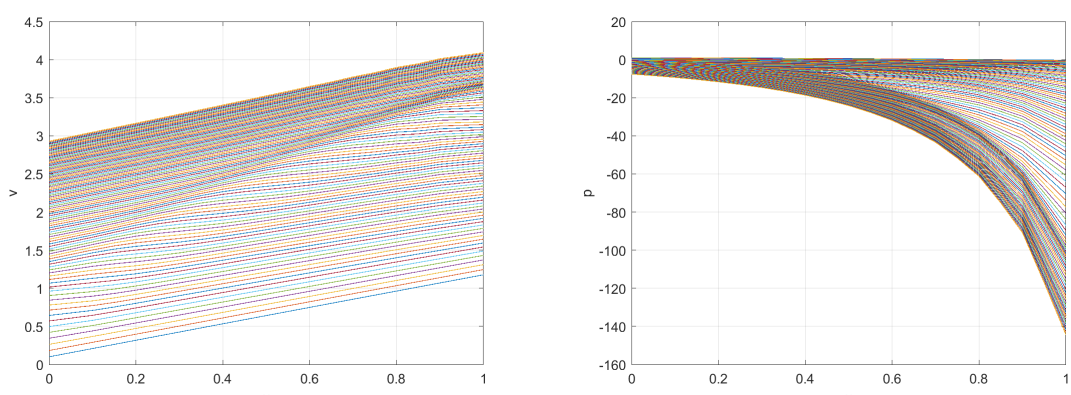
```
for k=1:Nt-1%各k时刻计算i点值
  %预估步计算偏导数（向前差分）
  r_t(1:Nx-1)=-v(k,1:Nx-1).*(r(k,2:Nx)-r(k,1:Nx-1))./dx
              -r(k,1:Nx-1).*(v(k,2:Nx)-v(k,1:Nx-1))/dx
              -r(k,1:Nx-1).*v(k,1:Nx-1).*log(A(2:Nx)./A(1:Nx-1))/dx;
  v_t(1:Nx-1)=-v(k,1:Nx-1).*(v(k,2:Nx)-v(k,1:Nx-1))./dx
              -1/g.*((T(k,2:Nx)-T(k,1:Nx-1))/dx
              +T(k,1:Nx-1)./r(k,1:Nx-1).*(r(k,2:Nx)-r(k,1:Nx-1))./dx);
  T_t(1:Nx-1)=-v(k,1:Nx-1).*(T(k,2:Nx)-T(k,1:Nx-1))./dx
              -(g-1).*T(k,1:Nx-1).*((v(k,2:Nx)
              -v(k,1:Nx-1))/dx+v(k,1:Nx-1).*log(A(2:Nx)./A(1:Nx-1))/dx);
  %求取内部网格点处最小时间步长
  t=C*dx./(v(k, 2:Nx-1)+sqrt(T(k, 2:Nx-1)));
  dt(k)=min(t);
  %预估步计算预估值
  r1(1:Nx-1)=r(k,1:Nx-1)+r_t(1:Nx-1)*dt(k);
  v1(1:Nx-1)=v(k,1:Nx-1)+v_t(1:Nx-1)*dt(k);
  T1(1:Nx-1)=T(k,1:Nx-1)+T_t(1:Nx-1)*dt(k);
  %校正步计算偏导（向后差分）
  r_t_1(2:Nx-1)=-v1(2:Nx-1).*(r1(2:Nx-1)-r1(1:Nx-2))./dx
                -r1(2:Nx-1).*(v1(2:Nx-1)-v1(1:Nx-2))./dx
                -r1(2:Nx-1).*v1(2:Nx-1).*log(A(2:Nx-1)./A(1:Nx-2))./dx;
  v_t_1(2:Nx-1)=-v1(2:Nx-1).*(v1(2:Nx-1)-v1(1:Nx-2))./dx
                -1/g.*(T1(2:Nx-1)-T1(1:Nx-2)./dx
                +T1(2:Nx-1)./r1(2:Nx-1).*(r1(2:Nx-1)-r1(1:Nx-2))./dx);
  T_t_1(2:Nx-1)=-v1(2:Nx-1).*(T1(2:Nx-1)-T1(1:Nx-2))./dx
                -(g-1).*T1(2:Nx-1).*((v1(2:Nx-1)-v1(1:Nx-2))./dx
                +v1(2:Nx-1).*log(A(2:Nx-1)./A(1:Nx-2))./dx);
  %偏导数平均值
  r_t_av(2:Nx-1)=0.5*(r_t(2:Nx-1)+r_t_1(2:Nx-1));
  v_t_av(2:Nx-1)=0.5*(v_t(2:Nx-1)+v_t_1(2:Nx-1));
```

```
    T_t_av(2:Nx-1)=0.5*(T_t(2:Nx-1)+T_t_1(2:Nx-1));
    %校正步计算校正值（内部点）
    r(k+1,2:Nx-1)=r(k,2:Nx-1)+r_t_av(2:Nx-1)*dt(k);
    v(k+1,2:Nx-1)=v(k,2:Nx-1)+v_t_av(2:Nx-1)*dt(k);
    T(k+1,2:Nx-1)=T(k,2:Nx-1)+T_t_av(2:Nx-1)*dt(k);
    %出口边界值
    r(k+1,Nx)=2*r(k+1,Nx-1)-r(k+1,Nx-2);
    v(k+1,Nx)=2*v(k+1,Nx-1)-v(k+1,Nx-2);
    T(k+1,Nx)=2*T(k+1,Nx-1)-T(k+1,Nx-2);
    %入口边界值
    r(k+1,1)=1;
    v(k+1,1)=2*v(k+1,2)-v(k+1,3);
    T(k+1,1)=1;
end
```

2.4 运行结果

用matlab运行代码，进行数值求解。将计算所得的二维数组（矩阵）v、p的数值，绘制成不同时间下的v-x、p-x分布图，结果如下：

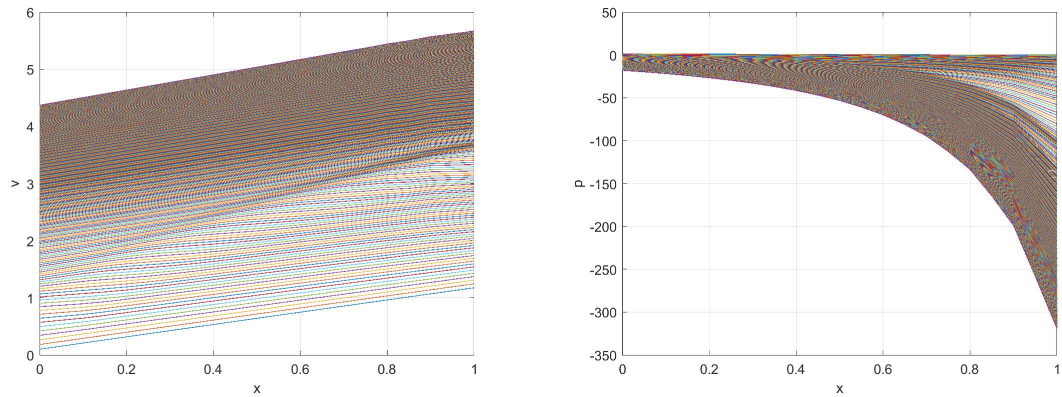
时间步数Nt=101时，



(a) v-x数值解　(b) p-x数值解

图 5: Nt=101数值解

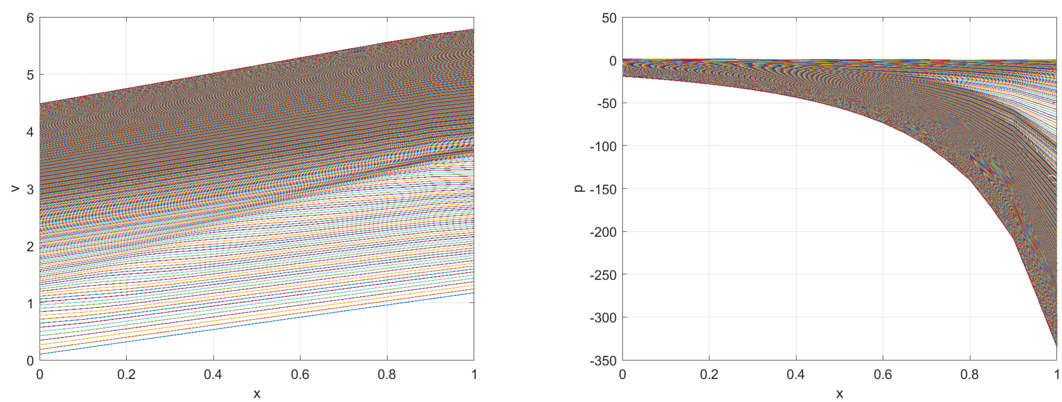
时间步数Nt=501时，



(a) v-x数值解　(b) v-x数值解

图 6: Nt=501数值解

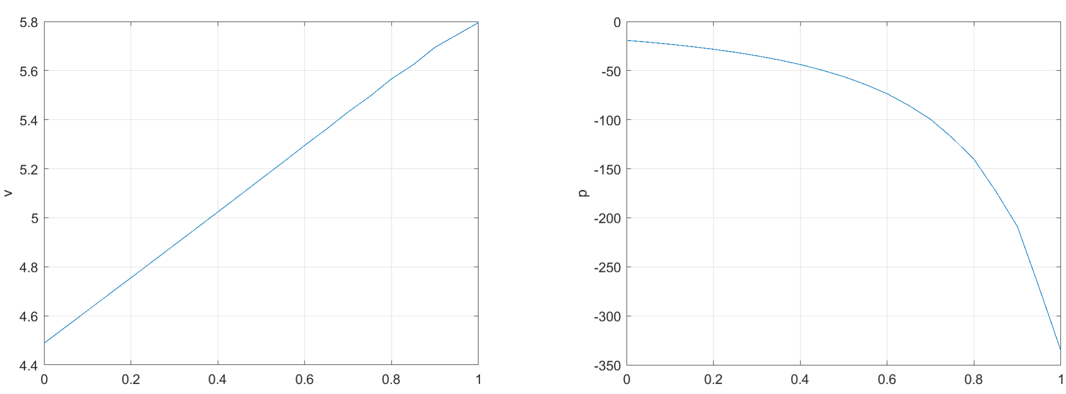
时间步数Nt=1001时，



(a) v-x数值解　(b) v-x数值解

图 7: Nt=1001数值解

取v、p收敛极限，则最终计算结果



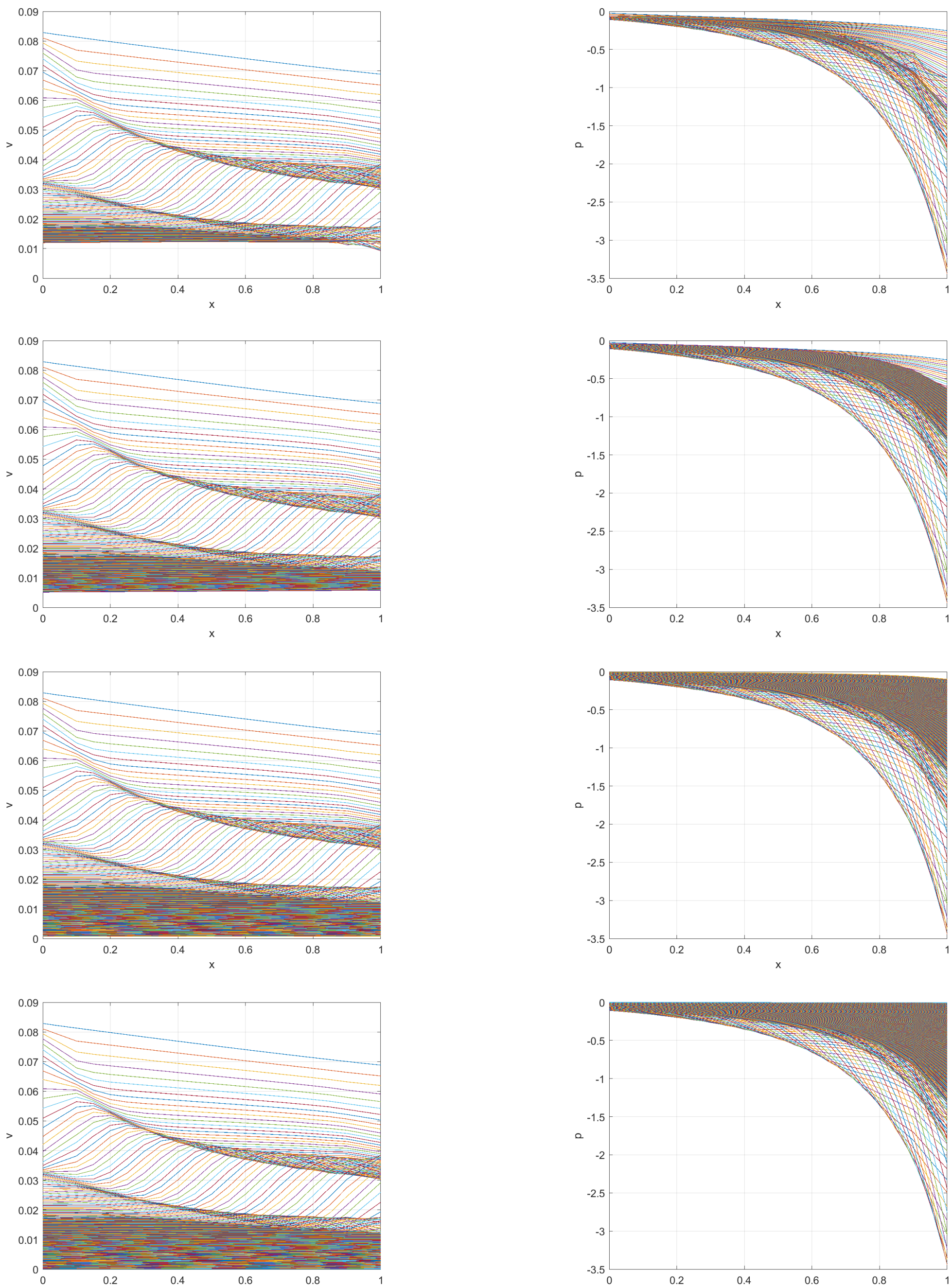
(a) v-x数值解　(b) v-x数值解

图 8: 最终数值解

3 分析与探究

3.1 结果分析

在matlab数值求解过程中，随着时间推进，各物理量趋近于一个稳定值，这一点通过观察物理量的时间导数更为直观。计算v、p在时间步数Nt=101，201，501，1001下的时间导数：



(a) v-x时间导数

(b) p-x时间导数

图 9: 部分物理量时间导数

可以发现，在时间步数较小的情况下（v-x图的上部与p-x图的下部），图线较为稀疏，时间导数值较大，物理量的变化情况较大，并且伴随有振荡；在时间步数较大的情况下（v-x图的底部与p-x图的顶部），图线密集，时间导数值趋于零，物理量的变化情况越来越小，趋于一个定常值。经过1260个时间步左右，p的时间导数已经均小于10^{-3}的数量级；经过460个时间步左右，p的时间导数已经均小于10^{-3}的数量级。因此理论上，时间无穷大时，时间导数变为零，流动达到定常状态。

3.2 实际探究

对于文丘里管，使用定常喷管流动计算公式

$$\rho A v = Q \tag{3.2.1}$$

计算其质量流量：

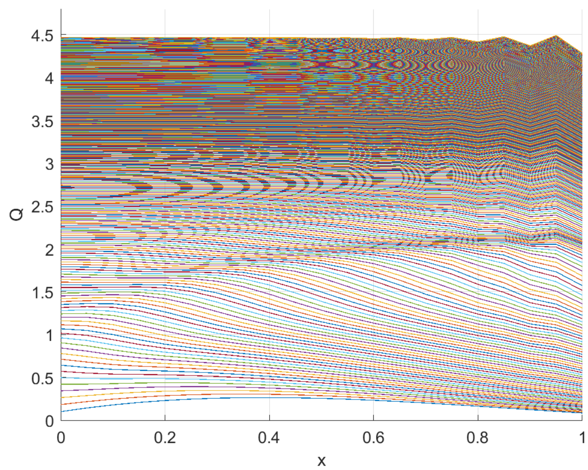


图 10: 质量流量

可知随着时间推进，质量流量趋于一个定常值，且各个位置的流量趋于同一个常数。这一结果与定常喷管流动的结果$\rho v A = Const$一致。

参考文献

[1] 知乎-一文看懂各种流量计工作原理及优缺点[EB/OL]. https://zhuanlan.zhihu.com/p/343922400

[2] 丁祖荣.流体力学[M].北京：高等教育出版社，2018：158

[3] John D.Anderson. Computational Fluid Dynamics-Principles and Applications. 机械工业出版社，2007：163-165