1120期中考

2021年11月27日 星期六 上午9:33

T7. $f(x)\in[a,b]$. $\forall x,y\in[a,b]$, $|f(x)-f(y)|<|x-y|$

[illegible]

(1) x_n 单调.

(2) $\{x_n\}$ 收敛于 $c\in[a,b]$, 且 $f(c)=c$.

(3) $f(x)=x$ 的 x 唯一.

(1) $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}+f(x_n)-f(x_{n-1}))$

与 $x_{n-1}-x_n \dots x_2-x_1$ 同号

(2) $x_n\in[a,b]$ $\{x_n\}$ 单调. $\{x_n\}$ 收敛.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$, $c\in[a,b]$

$|f(x)-f(y)|<|x-y| \Rightarrow f(x)$ 连续.

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$, $c=\frac{1}{2}(c+f(c))$

$\therefore f(c)=c$

(3) $c_1\in[a,b]$, $c_1\neq c$, $f(c_1)=c_1$. 假设

$|c_1-c|=|f(c_1)-f(c)|<|c_1-c|$

T9. f 在 $(-\infty,\infty)$ 上有任意 n 阶导数, $\forall x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$,

$|f^{(n)}(x)|\le n!|x|$. 证明: $f(x)=0$.

使用 Taylor. 在 $0\to x$ 展.

$f^{(n)}(0)=0$.

① $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$

$=\frac{f^{(n)}(\theta x)x^n}{n!}\le\frac{n!|\theta x|x^n}{n!}\le|\theta x||x^n|\le|x^{n+1}|$.

令 $n\to\infty$, $f(x)=0$,

$x\in(-1,1)$, f 在 $[-1,1]$ 上连续, $\therefore f(x)=0$ 在 $[-1,1]$

② 设 $f(x)=0$ 在 $[-k,k]$ 成立.

$g(x)=f(x+k)$, $h(x)=f(x-k)$.

$\exists\theta_1,\theta_2\in(0,1)$, s.t. $g(x)=\frac{g^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta_1x+k)}{n!}x^n$

$h(x)=\frac{h^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\frac{f^{(n)}(\theta_2x+k)}{n!}x^n$

$\therefore |g(x)|\le|\theta_1x+k||x^n|\le|x^{n+1}|$. $|h(x)|\le|x|^{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}h(x)=0$. 在 $(-1,1)$ 成立 $\to[-1,1]$.

$f(x)=0$ 在 $[-k-1,k+1]$ 上成立.

归纳可得在 $(-\infty,+\infty)$ 成立.