1.15

2021年11月16日 星期二　　下午4:42

中国科学技术大学 2019–2020 学年第一学期
数学分析 (B1)　期中考试

2019 年 11 月 16 日

1. (36 分, 每小题 6 分) 计算题 (给出必要的计算步骤).

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为正的有界数列, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)=0$, 求 a, b 的值.

(3) 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$, 求 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$.

(4) 设由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(5) 设函数 $f(x)=x^2\ln(1-x^2)$, 求当 $n>2$ 时, $f^{(n)}(0)$ 的值.

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

2. (12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导, 满足 $f(0)=0,\ f'(0)=1$, 并且 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$, 求 $f(x^2)$ 和 $g(x^2)$ 在 $x=0$ 处的关于 x 的二阶导数的值.

3. (18 分, 每小题 6 分) 设 α 为实数, 函数 $f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0.\end{cases}$

解答下列问题: (需说明理由)

(1) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 但不可导?

(2) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续?

(3) 问当且仅当 α 取何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\{x_n\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的点列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, 证明: 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=A$.

5. (12 分, 每小题 6 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有有界的导函数, 证明:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

6. (12 分, 每小题 6 分)

(1) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一阶可导, $f(0)=1, f'(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导, $f(0)=1, f'(0)\leqslant 1, f''(x)<f(x)$, 证明: 当 $x>0$ 时, $f(x)<\mathrm{e}^x$.

---

1. (1) a_n有界，则 $\exists M>0$，对 $\forall n$，有 $a_n<M$. 且 $a_n>0$

记 $a^*=\max\{a_1,\dots a_n\}$, $a_*=\min\{a_1,\dots a_n\}$.

则 $\dfrac{a_n}{na^*}\leqslant\dfrac{a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\dfrac{a_n}{na_*}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{na^*}=\dfrac{1}{a^*}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}>\dfrac{1}{a^*}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0}{n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{na_*}=\dfrac{1}{a_*}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{1}{a_*}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M}{n}=0$

根据夹逼，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}=0$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}+ax+b\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+2-a^2x^2-2abx-b^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-a^2)x^2+(3-2ab)x+2-b^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{a^2x^2+2abx+b^2}}=0.$

$\therefore 1-a^2=0,\ 3-2ab=0.$ $\therefore \begin{cases}a=1\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}$ (舍) 或 $\begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$.

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+3x+\frac{9}{4}}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x-\frac{3}{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+3x+\frac{9}{4}}\right)=0.$

即 $a=-1,\ b=-\frac{3}{2}$ 符合题意.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}-\dfrac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)f'(x_0)-[f(x)-f(x_0)]}{[f(x)-f(x_0)](x-x_0)f'(x_0)}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)\left[f'(x_0)-\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]}{[f(x)-f(x_0)](x-x_0)f'(x_0)}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)[f'(x_0)-f'(x)]}{[f(x)-f(x_0)](x-x_0)f'(x_0)}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x_0)-f'(x)}{(x-x_0)}\times\dfrac{1}{[f'(x_0)]^2}$

$=-\dfrac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}.$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\times\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=1.$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dt}{dx}=1+t^2.$

(5) $f^{(n)}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(x^2)^{(k)}(\ln(1-x^2))^{(n-k)}$.

$=x^2(\ln(1-x^2))^{(n)}+2nx(\ln(1-x^2))^{(n-1)}+n(n-1)(\ln(1-x^2))^{(n-2)}$

$g(x)=\ln(1-x^2)$, $g^{(n-2)}(0)=-2(n-3)!\dfrac{1+(-1)^n}{2(1-0)^{n-2}}$

$g'(x)=[\ln(1-x^2)]'=\dfrac{-2x}{1-x^2}$

$g''(x)=-2\dfrac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=-2\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

$g'''(x)=-2\dfrac{2x(1-x^2)^2-(1+x^2)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}$

$=-4\dfrac{x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^3}$

$=-4x\dfrac{1-x^2+2+2x^2}{(1-x^2)^3}=-4\dfrac{3x+x^3}{(1-x^2)^3}$

$g^{(4)}(x)=-4\dfrac{(3+3x^2)(1-x^2)^3-(3x+x^3)3(1-x^2)^2(-2x)}{(1-x^2)^6}$

$=-4\times3\dfrac{(1+x^2)(1-x^2)+(3x+x^3)2x}{(1-x^2)^4}$

$=-12\dfrac{x^4+6x^2+1}{(1-x^2)^4}$

$\therefore f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-3)![1+(-1)^n]$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{\sin^2x}{2}+\frac{\sin^4x}{24}+o(\sin^4x)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{24}(x-\frac{x^3}{6})^4+o(x^4)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{6}+o(1)=\frac{1}{6}.$