

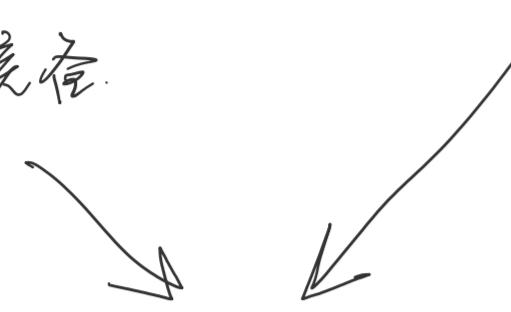
自然数 — 加乘封闭



整数 — 加减乘封闭

有理数 — 加减乘除封闭,
稠密性, 但不连续.

实数 — 封闭且完备



数列收敛与实数完备性

① 实数完备性公理.

对 $\forall X \subset \mathbb{Q}$, $\exists c \in \mathbb{Q}$, 对 $\forall n \in X$, $y \in Y$,
 $\exists x \leq y$, 都 $\exists c \in X$, 使 $x \leq c \leq y$.

② 索罗原理

有上/下界必有上/下确界.

③ 单调有界必收敛.

④ 列恩特拉定理.

任何有界数列必存在收敛子列.

⑤ 区间套定理.

对 $\forall [a_1, b_1] = [a_2, b_2] > \dots > [a_n, b_n]$,满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 > b_2 > \dots > b_n$,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则 $[a_i, b_i]$ 有交集中仅有唯一一点 ξ .

⑥ Cauchy 收敛准则.

对 $\forall \varepsilon$, $\exists N$, 当 $n > N$, 对 $\forall p$, 都有 $|a_{np} - a_m| < \varepsilon$, 则 a_n 为基本列 \Leftrightarrow 收敛.

数列 — 极限

极限 $\varepsilon-N$ 定义.

性质 (唯一性 (公理))

唯一性 (反证).

局部保序性 (正数有限项)

 $a_n > c, a \geq c$. $n > b, a_n > b_n$.

四则运算 (公理)

有界 (定义 + 反证)

夹逼 (简单证明) (公理)

一般 (构造) (构造 \rightarrow 简单).

柯西.

子列. 与原数列同极限.

计算. (公理).

夹逼.

单调有界.

SAOB.

函数

极限

 $\varepsilon-S/X$ 定义. $\forall \varepsilon$

性质 (连续性 (公理))

唯一性 (反证).

保序性 (公理)

有界性 (公理)

四则运算 (公理)

夹逼 (简单 \rightarrow 例)

蕴含函数极限 (公理)

蕴含数列极限 (公理, 反证+构造)

柯西收敛 (公理, 构造+反证).

计算.

单调有界.

夹逼.

(几个重要极限)

连续性 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. $\varepsilon-S$.性质 (局部有界性: 连续 \rightarrow 邻域有界, 公理).

四则运算.

蕴含函数连续.

反函数连续.

初等函数连续.

概念: 间断.

间断点 (简单 (公理)).

性质 (高数 (公理))

性质 (高数 (公理))