1.23

2021年12月28日 星期二　　上午8:53

中国科学技术大学 2003–2004 学年第一学期

数学分析 (I)　期末考试

1. (20 分, 每小题 5 分) 叙述题.

(1) 写出函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分的定义.

(2) 写出带 Lagrange 余项的 Taylor 定理.

(3) 写出关于函数是否 Riemann 可积的 Lebesgue 定理.

(4) 写出微积分基本定理.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^4+1}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$.

3. (20 分, 每小题 5 分) 求下列积分:

(1) $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int\dfrac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^3\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

4. (20 分) 求参数方程 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 为参数, $a>0$ 为常数) 所表示的曲线的弧长和曲率.

5. (10 分) 求满足函数方程:

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

的连续函数 $f(x)$.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导函数, 且 $f(0)=0$. 求证:

$$\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)\,|f'(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

等号成立当且仅当 $f(x)\equiv cx$, 其中 c 为常数.

2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{x^2}\arctan t\,dt}{\sqrt{x^4+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x^2\cdot 2x}{\frac{1}{2}\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x^2}{x^2}\cdot\sqrt{x^4+1}$

$=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\frac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}}{2x}$

$=\dfrac{\pi}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}=\dfrac{\pi}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)\right)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{1}{12}+o(1)=-\dfrac{1}{12}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\sin x}{x}\,dx$

$\exists\,\xi\in[n^2,n^2+n]$, 使 $\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\sin\xi}{\xi}n.$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{\sin x}{x}\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}n=1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}.$

$\cos\left(\frac{k\pi}{2n}-\frac{\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)$

$=\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}$

$=2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(k-1)}{2n}\pi-\cos\frac{(k+1)}{2n}\pi}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(k-1)\pi}{2n}-\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}}{1+\cos\frac{k\pi}{2n}}=$

3. (1) $\int\sqrt{x}\ln^2 x\,dx\overset{t=\sqrt{x}}{=\!=}\int t\ln^2 t^2\,dt^2$

$=\int t(2\ln t)^2\times 2t\,dt=8\int t^2\ln^2 t\,dt$

$=\frac{8}{3}\int\ln^2 t\,dt^3$

$=\frac{8}{3}\left(t^3\ln^2 t-\int t^3\times 2\ln t\times\frac{1}{t}\,dt\right)$

$=\frac{8}{3}\left(t^3\ln^2 t-2\int t^2\ln t\,dt\right)$

$=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{3}\times\frac{1}{3}\int\ln t\,dt^3$

$=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{9}\left(t^3\ln t-\int t^3\times\frac{1}{t}\,dt\right)$

$=\frac{8}{3}t^3\ln^2 t-\frac{16}{9}t^3\ln t+\frac{1}{3}t^3.$

$=\frac{1}{3}t^3(8\ln^2 t-16\ln t+1).$

(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x\sin x}{(1+\sin^2 x)^n}\,dx=\int\frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{\left(\frac{3}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)^n}\,dx$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 x=\frac{\cos 2x}{2}$

$=\displaystyle\frac{1}{2^{n-1}}\int\frac{\sin 2x}{(3-\cos 2x)^n}\,dx$

$=\displaystyle\frac{1}{2^n}\int\frac{\sin 2x}{(3-\cos 2x)^n}\,d2x$

$=\displaystyle\frac{-1}{2^n}\int\frac{d\cos 2x}{(3-\cos 2x)^n}=\frac{1}{2^n}\int\frac{d(3-\cos 2x)}{(3-\cos 2x)^n}$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(3-\cos 2x), & n=1\\ -\frac{1}{n-1}t^{-n+1}, & n\neq 1.\end{cases}$

$\int\frac{dt}{t^n}$

$n\neq 1$ $\int t^{-n}\,dt$

$=-\frac{1}{n-1}t^{-n+1}$

(3) $\displaystyle\int_0^3\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

$t^2=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{1+x}=1-t^2$

$x=\frac{1}{1-t^2}-1=\frac{t^2}{1-t^2}$

$\overset{t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}}{=\!=}\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\arcsin t\,d\frac{1}{1-t^2}$

$=\left(\dfrac{\arcsin t}{1-t^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt3}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)$

$=\left(\dfrac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{3}{4}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt\right)$　　$t=\sin u.$

$=\left(\frac{4}{3}\pi-\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}}\frac{1}{(\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}\,d\sin u\right)$

$=\frac{4}{3}\pi-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos u}{\cos^3 u}\,du$

$=\frac{4}{3}\pi-\tan u\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{3}\pi-\frac{\sqrt3}{3}.$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}\,dx$

$\overset{t=\sqrt{x}}{\underset{x=t^2}{=\!=}}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\times 2t\,dt$

$=2\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt=$

$=-2\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,de^{-t}=-2\left(te^{-t}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt\right)$

$=-2\left(te^{-t}\Big|_0^{+\infty}+e^{-t}\Big|_0^{+\infty}\right)$

$=-2\left(\lim\limits_{t\to+\infty}te^{-t}+\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}-1\right)=2.$

4. 弧长 $l=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(-\sin t+\sin t+t\cos t)^2+a^2(\cos t-(\cos t-t\sin t))^2}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}a\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}\,dt$

$=\displaystyle\int_0^{2\pi}at\,dt=\frac{a}{2}t^2\Big|_0^{2\pi}=2a\pi^2.$

曲率 $k(t)=\dfrac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{at\cos t\cdot a(\sin t+t\cos t)-a(\cos t-t\sin t)\cdot at\sin t}{[a^2(t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t)]^{\frac{3}{2}}}$

$=\dfrac{a^2(t\cos t\sin t+t^2\cos^2 t-t\cos t\sin t+t^2\sin^2 t)}{a^3t^3}$

$=\dfrac{t^2}{at^3}=\dfrac{1}{at}.$

5. $\int_0^x tf(t)\,dt=\frac{1}{2}x\int_0^x f(t)\,dt.$

$F(x)=\int_0^x tf(t)\,dt-\frac{1}{2}x\int_0^x f(t)\,dt$

$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt-\frac{1}{2}x\cdot f(x)$

$=\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)\,dt.$

$F''(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}xf'(x)-\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}xf'(x).$