1.1

2021年11月2日 星期二　　上午9:28

第 1 部分　数学分析 (B1)

中国科学技术大学 2011–2012 学年第一学期

数学分析 (B1)　第一次测试

1. (10 分) 用数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+\sin n}=\dfrac{1}{2}$.

2. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 有定义, 请叙述极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有限的 Cauchy 收敛准则.

3. (40 分, 每小题 10 分) 求下列极限 (其中 n 均为正整数):

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

4. (10 分) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\leqslant ba_n$, $n=1,2,\cdots$, 其中 $0<b<1$. 求证: 数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 收敛.

5. (10 分) 设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+\sin a_n}{2}$, $n=1,2,\cdots$. 讨论数列 $\{a_n\}$ 的收敛性和极限.

6. (10 分) 设 E 是非空有上界的数集, 且它的上确界 a 不在 E 中. 求证: E 中存在数列 $\{x_n\}$ 严格递增趋于 E 的上确界.

7. (10 分) 设 $f(x)$ 是定义在实轴 $\mathbb{R}$ 上的函数且对任意 x,y 有

$$|xf(x)-yf(y)|\leqslant M|x|+M|y|,$$

其中 $M>0$. 求证:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 收敛;

(2) 存在常数 a 使得对任意 x, 有 $|f(x)-ax|\leqslant M$.

1. 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

有 $\left|\frac{n}{2n+\sin n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-2n-\sin n}{2(2n+\sin n)}\right|$

$=\left|\frac{\sin n}{2n+\sin n}\right|\times\frac{1}{2}=\left|\frac{1}{\frac{2n}{\sin n}+1}\right|\times\frac{1}{2}$

$\left|\frac{n}{\sin n}\right|\geq|n|$, $\left|\frac{1}{\frac{2n}{\sin n}+1}\right|\times\frac{1}{2}\leq\left|\frac{1}{2n+1}\right|\times\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2N+1}\right|=\varepsilon$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sin n}=\frac{1}{2}$

2. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X$, 当 $x>X$ 时, 对 $\forall p>0$,

有 $|f(x)-f(x+p)|<\varepsilon$, 则 $f(x)$ 为柯西列, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在.

3. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}-\sqrt{n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}\left(\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sin\frac{1}{n}}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}}+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2(x-1)+2(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[3^n\left((\frac{2}{3})^n+1\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}3\left(1+(\frac{2}{3})^n\right)^{\frac{1}{n}}=3.$

(4) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(2-\cos x)}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2-\cos x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{2-\cos x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2(2-\cos x)}$

$=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ 原极限为 $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

4. $a_{n+1}\leq ba_n$, $a_n>0$, $0<b<1$, $\therefore a_{n+1}>0$,

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0$, $\therefore\{S_n\}$ 单调递增.

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leq a_1+ba_1+\cdots+b^na_1=\frac{a_1(1-b^n)}{1-b}<\frac{a_1}{1-b}$.

$\therefore\{S_n\}$ 有上界. $\therefore\{S_n\}$ 收敛.

5. $a_{n+1}=\frac{a_n+\sin a_n}{2}\leq\frac{a_n+a_n}{2}=a_n$,

$\therefore\{a_n\}$ 单调递减, $a_n<1$.

$\because a_{n+1}=\frac{a_n+\sin a_n}{2}$,

$\therefore$ 对 $\forall n\in N^*$, 都有 a_{n+1} 与 $(a_n+\sin a_n)$ 同号.

$n=1$, $1+\sin\frac{\pi}{4}<a_n+\sin a_n<1+\sin\frac{\pi}{2}$,

$\therefore a_n+\sin a_n>0$, $\therefore a_{n+1}>0$.

$\therefore\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

对原条件两边取极限,

得 $a=\frac{a+\sin a}{2}$, $a=\sin a$, 得 $a=0$.

6. 取 E 中 n 个元素 $a_1, a_2\ldots a_n$,

按大小关系排列为 $a_{j_1}<a_{j_2}<\cdots<a_{j_n}$.

$\therefore$ 数列 $\{a_{j_n}\}$ 严格单增.

又 $a_{j_1}<a_{j_2}<\cdots<a_{j_n}<a$,

$\therefore$ 数列 $\{a_{j_n}\}$ 有界.

$\therefore\{a_{j_n}\}$ 存在一个收敛子列 $\{a_{j_{n_k}}\}$, 记为 $\{x_n\}$.

$\because a$ 为 E 的上确界,

$\therefore$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 使 $n>N$ 时, 有 $a-\varepsilon<x_n<a$.

即 $0<|x_n-a|<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$\therefore\{x_n\}$ 严格递增且收敛于 E 的上确界.

7. (1) $|xf(y)-yf(x)|\leq M(|x|+|y|)$

$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\leq M\left(\frac{|x|+|y|}{|xy|}\right)=M\left(\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|}\right)$.

取数列 $x_n=n$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{x_n}\right|=0$.

对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 对 $\forall p$,

$\frac{1}{|x_{n+p}|}+\frac{1}{|x_n|}=\frac{1}{n+p}+\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{M}$.

$\therefore\left|\frac{f(x_{n+p})}{x_{n+p}}-\frac{f(x_n)}{x_n}\right|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,

$\therefore\left\{\frac{f(x_n)}{x_n}\right\}$ 为柯西列, 收敛.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 收敛.

(2) 对 $|xf(y)-yf(x)|\leq M|x|+M|y|$,

取 $x=0$, $y\neq0$, 有 $|yf(0)|\leq M|y|$, $|f(0)|\leq M$.

$\therefore x=0$ 时, $|f(0)-0|\leq M$ 成立.

$x\neq0$ 时, 对 $\forall x_1, x_2\neq0$,

有 $\big||x_1f(x_2)|-|x_2f(x_1)|\big|\leq|x_1f(x_2)-x_2f(x_1)|\leq M|x_1|+M|x_2|$.

$\therefore|x_1|(|f(x_2)|-M)\leq|x_2|(|f(x_1)|+M)$

$\therefore\frac{|f(x_2)|-M}{|x_2|}\leq\frac{|f(x_1)|+M}{|x_1|}$.

即 $\exists a$, 使 $\frac{|f(x_2)|-M}{|x_2|}\leq a\leq\frac{|f(x_1)|+M}{|x_1|}$.

$\therefore a|x_1|\leq|f(x_1)|+M$, $a|x_2|\geq|f(x_2)|-M$.

$|f(x_1)|-|ax_1|\geq-M$, $|f(x_2)|-a|x_2|\leq M$.

$\therefore\big||f(x_1)|-|ax_1|\big|\leq M$, $\big||f(x_2)|-a|x_2|\big|\leq M$.

$\therefore$ 对 $\forall x$, $\exists a$, 使 $|f(x)-ax|\leq\big||f(x)|-|ax|\big|\leq M$.