1.2

2021年11月2日 星期二　　下午5:20

中国科学技术大学 2011–2012 学年第一学期
数学分析 (B1)　第二次测试

1. (50 分) 计算题.

(1) 求函数 $f(x)=xe^{-x^2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值, 最小值和凸凹区间;

(2) 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}e^{-x}$;

(3) 计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-\sqrt{1+6x}-e^{-3x}}{\ln(1-x^2)}$;

(4) 计算 $\sqrt[4]{2}$, 精确到 10^{-3}. (注意: 要求给出计算过程, 不允许使用计算器)

(5) 水果公司在对其最新电子产品 iDayDream 售前市场调研发现, 如以 3000 元的价格出售 iDayDream, 会有一百万顾客有购买意向, 此时每台 iDayDream 会有 1000 元的利润; 而每当价格提升或降低 100 元, 潜在顾客会在原来基础上降低或增加 5%. 试求对水果公司而言 iDayDream 的最佳定价以及此时的利润. (在计算中, 你可以使用: 当 x 靠近 0 时, $\ln(1+x)\approx x$)

2. (10 分) 设多项式 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}$, 其中 $k\geqslant2$, $n_1,\cdots,n_k$ 为正整数, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n$, $x_1<x_2<\cdots<x_k$. 证明: 对于 $1\leqslant i\leqslant k-1$, 存在 $x_i<\xi_i<x_{i+1}$, 使得

$$f'(x)=n\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod_{i=1}^{k-1}(x-\xi_i).$$

3. (10 分) 设 p,q 为正实数且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 求证: 对于 $x_1,x_2>0$, $x_1x_2\leqslant\dfrac{x_1^p}{p}+\dfrac{x_2^q}{q}$.

4. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-A,A]$ (A 为正常数) 上满足 $f''=-f$. 证明.

$$f(x)=f(0)\cos x+f'(0)\sin x.$$

5. (20 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $a<\xi_1<\xi_2<b$, $f'(\xi_1)=f(\xi_1)$, $f'(\xi_2)=f(\xi_2)$;

(3) 存在 $\eta\in(a,b)$, $f''(\eta)=f(\eta)$.

---

1. (1) $f'(x)=e^{-x^2}\times(-2x)\times x+e^{-x^2}=e^{-x^2}(1-2x^2)$

$=-2e^{-x^2}(x-\frac{\sqrt2}{2})(x+\frac{\sqrt2}{2})$

有驻点 $x_1=\frac{\sqrt2}{2}$, $x_2=-\frac{\sqrt2}{2}$.

$f(\frac{\sqrt2}{2})=\frac{\sqrt2}{2}e^{-\frac12}$, $f(-\frac{\sqrt2}{2})=-\frac{\sqrt2}{2}e^{-\frac12}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0^-$.

$f''(x)=e^{-x^2}(-2x)(1-2x^2)+e^{-x^2}(-4x)$

$=-2xe^{-x^2}(2x^2+3)$

x	$(-\infty,-\frac{\sqrt2}{2})$	$(-\frac{\sqrt2}{2},0)$	$(0,\frac{\sqrt2}{2})$	$(\frac{\sqrt2}{2},+\infty)$
$f''(x)$	>0		<0	
$f'(x)$	<0	>0		<0
$f(x)$	减, 凸	增, 凸	增, 凹	减, 凹

$\therefore x=\frac{\sqrt2}{2}$ 时取到最大值 $\frac{\sqrt2}{2}e^{-\frac12}$,

$x=-\frac{\sqrt2}{2}$ 时取到最小值 $-\frac{\sqrt2}{2}e^{-\frac12}$.

凸区间 $(-\infty,0)$. 凹区间 $(0,+\infty)$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac1x)^{x^2}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2\ln(1+\frac1x)}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x^2\ln(1+\frac1x)-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln(1+\frac1x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x[x\ln(1+\frac1x)-1]$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac1t\ln(1+t)-1}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-1-t}{(t+1)2t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-t}{(t+1)2t}=-\frac12$. 原式 $=e^{-\frac12}$.

(3). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-\sqrt{1+6x}-e^{-3x}}{\ln(1-x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1+6x}+\cos x-e^{-3x}}{\ln(1-x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\frac12\frac{1}{\sqrt{1+6x}}+\sin x+3e^{-3x}}{\frac{-2x}{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2-1)[2\sin x-\frac12\frac{1}{\sqrt{1+6x}}+3e^{-3x}]}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{2\sin x-\frac12(1+6x)^{-\frac12}+3e^{-3x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}-\dfrac{2\cos x+\frac14(1+6x)^{-\frac32}\times6-9e^{-3x}}{2}$

$=\lim\limits_{x\to0}-\frac12(2+\frac34\times1-9)=\frac{27}{8}$ ✗

(4) $\sqrt[4]{2}=(1+1)^{\frac14}=$

$2^{\frac14}\to f(x)=x^{\frac14}=(1+x-1)^{\frac14}$

$=1+\frac14(x-1)+\dfrac{(\frac14)(-\frac34)}{2}(x-1)^2+\cdots+\dfrac{\frac14\cdots(\frac14-n+1)}{n!}(x-1)^n$

$+\dfrac{\frac14\cdots(\frac14-n)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}(1+\theta(x-1))$

$x=2$, $2^{\frac14}=1+\frac14+\frac12\times(-\frac{3}{16})+\cdots+\dfrac{\frac14\cdots(\frac14-n+1)}{n!}+\dfrac{\frac14\cdots(\frac14-n)}{(n+1)!}(1+\theta)$.

$\dfrac{\frac14(\cdots)}{(n+1)!}(1+\theta)<\dfrac{1}{4(n+1)!}<10^{-3}$. $\therefore$ ~~n~~ 取 n 还.

$2^{\frac14}=1+\frac14+\frac12\times(-\frac{3}{16})+\frac16\times(\frac{21}{64})+\frac{1}{4!}(\frac{21}{64})(-\frac{10}{3})+\frac{1}{5!}(\cdots)$

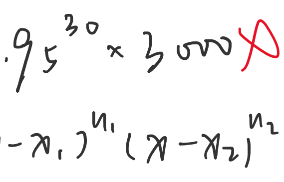
(5) 3000 → 1000　　价格 $(3000+100x)$　1万 $\times(1-5\%)^x(1000+100x)$

100 0000

$W=0.95^x(1000+100x)=f(x)$.

$f'(x)=0.95^x\ln0.95\,(1000+100x)+0.95^x\times100$

$=0.95^x\times100\,[\ln0.95\,(10+x)+1]$

$(10+x)\ln0.95+1$　　$(10+x)=-\frac{1}{\ln0.95}$, $x=-\frac{1}{\ln0.95}-10$.

$\ln0.95=\ln(1-0.05)\approx-0.05$

最佳定价: $1000-100(\frac{1}{-0.05}+10)=2000$

利润: $W=0.95^{30}\times3000$ ✗

2. $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}=(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k}$

$f'(x)=n(x-x_1)^{n_1-1}(x-x_2)^{n_2-1}\cdots(x-x_k)^{n_k-1}$

3. $x_1x_2\le\dfrac{x_1^p}{p}+\dfrac{x_2^q}{q}\iff1\le\dfrac{x_1^{p-1}}{px_2}+\dfrac{x_2^{q-1}}{qx_1}$.

$\iff\dfrac1p+\dfrac1q\le\dfrac1p\cdot\dfrac{x_1^{p-1}}{x_2}+\dfrac1q\cdot\dfrac{x_2^{q-1}}{x_1}=\dfrac{qx_1^p+px_2^q}{pqx_1x_2}$.

$\iff\dfrac1p(\dfrac{x_1^{p-1}}{x_2}-1)+\dfrac1q(\dfrac{x_2^{q-1}}{x_1}-1)\ge0$

$\iff q(\dfrac{x_1^{p-1}}{x_2}-1)\ge-p(\dfrac{x_2^{q-1}}{x_1}-1)$

$\iff\dfrac{\frac{x_1^{p-1}}{x_2}-1}{\frac{x_2^{q-1}}{x_1}-1}\ge-\dfrac{p}{q}\iff\dfrac{x_1^p-x_1x_2}{x_2^q-x_1x_2}\ge-\dfrac{p}{q}$.