15～16

2022年6月20日 星期一　　上午9:07

中国科学技术大学 2015–2016 学年第二学期
数学分析 (B2)　期末考试

1. (15 分) 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是由下面的方程

$$\begin{cases} u^2+v^2+x^2+y^2=1 \\ u+v+x+y=0 \end{cases}$$

所确定的函数. 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

2. (15 分) 计算积分:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin(xy)\,\mathrm{d}x.$$

3. (10 分) 设 D 是由直线 $x=0$, $y=x$, $y=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的区域. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. (15 分) 求第二型曲线积分

$$\iint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中曲面 S 是上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 法向朝上.

5. (15 分) 求常数 a 使得向量场 $\boldsymbol{F}=(x^2+5ay+3yz, 5x+3axz-2, (a+2)xy-4z)$ 是有势场, 并求出此时的势函数.

6. (15 分) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数, 且 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = n$. 用 Lagrange 乘数法证明:

$$\prod_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \leqslant n,$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时成立.

7. (15 分) 求证: $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 在 $0<x<+\infty$ 可导且满足微分方程

$$f(x)-f'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4. $\iint_S x^3 dy\,dz + y^3 dz\,dx + z^3 dx\,dy$　　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$　$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$= \iint_S \begin{vmatrix} x^3 & y^3 & (1-x^2-y^2)^{\frac32} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix}$

$= \iint_S \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + (1-x^2-y^2)^{\frac32}\, dx\,dy$　　$x=r\cos\theta$　$y=r\sin\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{\sqrt{1-r^2}} + (1-r^2)^{\frac32}\right] r\,dr\,d\theta$

$= \frac12 \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{\sqrt{1-r^2}}\, dr^2\, d\theta + \pi\int_0^1 (1-r^2)^{\frac32}\, dr^2$
　　$m^{\frac32}$　dm

$= \frac12\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t}}\,dt \int_0^{2\pi} \cos^4\theta+\sin^4\theta\, d\theta + \pi\int_0^1 (1-t)^{\frac32}\, dt$

$= \frac12 B(3,\frac12) \times 4\times 2 \times \frac{3\times1}{4\times2} \times \frac{\pi}{2} + \pi\,\frac25 m^{\frac52}\Big|_0^1$

$= \frac34\pi \times 3! \times \cdots + \frac25.$