1.9

2021年11月11日 星期四　　上午8:55

中国科学技术大学 2003–2004 学年第一学期
数学分析 (I)　期中考试

1. (15 分, 每小题 5 分)

(1) 用 $\varepsilon - N$ 语言表达 "数列 $\{a_n\}$ 不以实数 a 为极限" 这一陈述;

(2) 讨论函数 $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的一致连续性;

(3) 用极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$.

2. (20 分, 每小题 5 分) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - \mathrm{e}\right)$.

3. (20 分, 每小题 5 分) 求下列导数:

(1) $\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'$;

(2) $\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$;

(3) $(\sqrt{1-x^2})'$

(4) $(x\mathrm{e}^x)^{(n)}$.

4. (12 分) 设 x_1 是一个正数, 并归纳地定义 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. 求证: 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

5. (13 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是严格凸的并有二阶导函数, 又 $f(0) = f'(0) = 0$. 求证: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.

6. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的导函数, 且 $f(0) = 1$. 又当 $x \geqslant 0$ 时, $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. 求证: 存在 $x_0 > 0$, 使得 $f'(x_0) = -\mathrm{e}^{-x_0}$.

7. (10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且满足 $|f'(x)| \leqslant 1$ 及 $f(0) = f(1) = 1$. 求证: 对 $\forall x \in (0, 1]$, 有 $f(x) > \frac{1}{2}$.

1. (1) $\exists \varepsilon > 0$, 对 $\forall N$, $\exists n_i > N$, $|a_{n_i} - a| \geq \varepsilon$.

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$, 对 $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, $\exists |x - x_0| < \delta$,

使 $\left|\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.

$\left|2\sin\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right| < \left|2\times 1\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right| < \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \left|\frac{\delta}{x x_0}\right|$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 对 $\forall x_0 \in (0, +\infty)$, $\exists |x - x_0| < \delta$,

使 $\left|\cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x_0}\right| = 2\left|\sin\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}}{2}\sin\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right| < \left|2\times 1\times\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{2}\right|$

$< \left|\frac{x - x_0}{x x_0}\right| < \left|\frac{\delta}{x x_0}\right| = \left|\frac{\delta}{(x_0 + \delta)x_0}\right| = \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta}\right|$

(3). 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, 当 $n > N$ 时,

$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right| < \left|\frac{1}{N}\right| < \varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n} = 0$.

2. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}\frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2 + (\sqrt[3]{n})^2 + \sqrt[3]{n(n+1)}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\frac{n+1}{n})^{\frac{2}{3}} + (\frac{n+1}{n})^{\frac{1}{3}} + 1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{n+1}{n} - 1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{n}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - (1+\frac{1}{n+1})^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^{-\frac{2}{3}}\times\frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4}$

$[x] \leq x < [x] + 1$.

$\frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4} \leq \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{(x-1)^2 - 4}{x^2 - 4} = 1$.

$\frac{[x]^2 - 4}{x^2 - 4} > \frac{(x-1)^2 - 4}{x^2 - 4}$

$= \frac{(x-1-4)(x-1+4)}{(x+2)(x-2)}$

$= \frac{(x-5)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 4}$

$= \frac{x^2 - 4 - 2x - 11}{x^2 - 4} = 1 - \frac{2x + 11}{x^2 - 4}$

(3). $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(\frac{x+1}{x+2})}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{(x+2)(x+1)} = -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{1}{x})}$

$= -\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+3} = -\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{2x+3}\right) = -1$

(4). $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left((1+\frac{1}{x})^x - e\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{((1+\frac{1}{x})^x - e)}{\frac{1}{x}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - e\right)$

3. (1) $\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\times\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}$

$= \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\times\frac{1}{(1+\cos x)} = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}(1+\cos x)}$

(2) $\left(\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}\times\frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\times\frac{-2x(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{1+x^2}{2x}\times\frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$

(3) $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\times(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(4) $(xe^x)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^{(k)}(e^x)^{(n-k)}$　　$x^{(0)} = x$, $x^{(1)} = 1$, $x^{(2)} = 0$

$= C_n^0 x^{(0)}(e^x)^{(n)} + C_n^1 x^{(1)}(e^x)^{(n-1)}$

$= xe^x + ne^x$

4. $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} > 0$, $x_1 > 0$, $\therefore x_n > 0$.

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{6 + x_n} - x_n$, 令 $f(x) = \sqrt{x+6} - x$,

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+6}}{2\sqrt{x+6}} < 0$ 恒成立, $f(x)\downarrow$,

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n$

x_n 单减有下界, $\therefore$ 收敛.

5. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 严格凸, $\therefore f''(x) > 0$ 在 $[0, +\infty)$ 恒成立.

$\therefore f'(x)$ 在 $x \geq 0$ 单调递增, $f'(x) \geq f'(0) = 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, $f(x) \geq f(0) = 0$

即 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$.