

# Imagerie par ultrason

SIM 202

janvier 2019

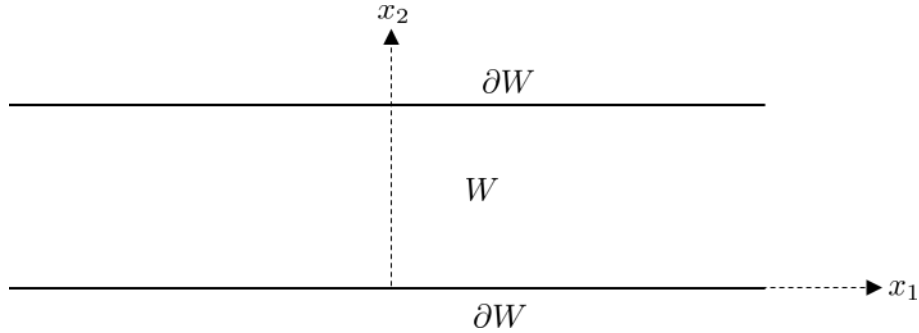
On s'intéresse à un problème d'imagerie par ultrason dans un barreau. L'objectif est d'utiliser une méthode, dite de *linear sampling*, pour fabriquer une "image" permettant de détecter d'éventuels défauts : structures ayant des caractéristiques différentes (vitesse de propagation) du milieu homogène constitutif du barreau. Afin de simplifier, on considèrera ici, un barreau bidimensionnel infini et les équations de l'acoustique en régime harmonique. La situation réelle est un barreau tridimensionnelle et les équations de l'élastodynamique. Le projet se décompose en deux parties : la première partie consiste à réaliser la simulation de la propagation acoustique dans le milieu afin de fabriquer des données (mesures) qui serviront dans la suite. La seconde partie consiste en la réalisation de l'algorithme de sampling permettant de fabriquer une image du milieu à partir de mesures.

## 1 Problème de propagation acoustique

On considère le problème de propagation acoustique en régime harmonique (dépendance en  $e^{-i\omega t}$ ) dans un guide d'onde (2D, coordonnées  $x_1, x_2$ )  $W = ]-\infty, \infty[ \times ]0, h[$  :

$$\begin{cases} \Delta u + k_0^2 u = 0 & \text{sur } W \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial W \end{cases}$$

où  $k_0 = \omega/c_0$  ( $c_0$  célérité du son dans le milieu homogène),  $u$  représente la pression.



### 1.1 Modes guidés

Ce problème admet des solutions particulières, appelées des modes,  $\forall n \geq 0$ :

$$\Phi_n^\pm(x_1, x_2) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right)e^{\pm i\beta_n x_1}$$

avec  $\beta_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}$  ( $\text{Re}(\beta_n) \geq 0$  et  $\text{Im}(\beta_n) \geq 0$ ).

Lorsque  $n \leq \frac{k_0 h}{\pi}$  ( $\beta_n$  réel),  $\Phi_n^+$  (resp.  $\Phi_n^-$ ) est un mode propagatif suivant les  $x_1 > 0$  (resp.  $x_1 < 0$ ) et lorsque  $n > \frac{k_0 h}{\pi}$  ( $\beta_n$  imaginaire pur),  $\Phi_n^+$  (resp.  $\Phi_n^-$ ) est un mode, dit évanescent, exponentiellement décroissant suivant les  $x_1 > 0$  (resp.  $x_1 < 0$ ).  $a_n$  est un coefficient non nul arbitraire. On le choisit de telle sorte que les fonctions

$$c_n(x_2) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{h}x_2\right)$$

soient normalisées dans  $L^2(]0, h[)$  :

$$\|c_n\|_{L^2(]0, h[)} = 1.$$

Par la suite, on notera  $(., .)$  le produit scalaire de  $L^2(]0, h[)$ .

Afin de prendre en compte le caractère "sortant" des ondes, on imposera par la suite à toute solution  $u$  de vérifier le comportement suivant à l'infini :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= \sum_{n \geq 0} \mu_n \Phi_n^+(x_1, x_2) & x_1 \rightarrow +\infty \\ u(x_1, x_2) &= \sum_{n \geq 0} \nu_n \Phi_n^-(x_1, x_2) & x_1 \rightarrow -\infty \end{aligned}.$$

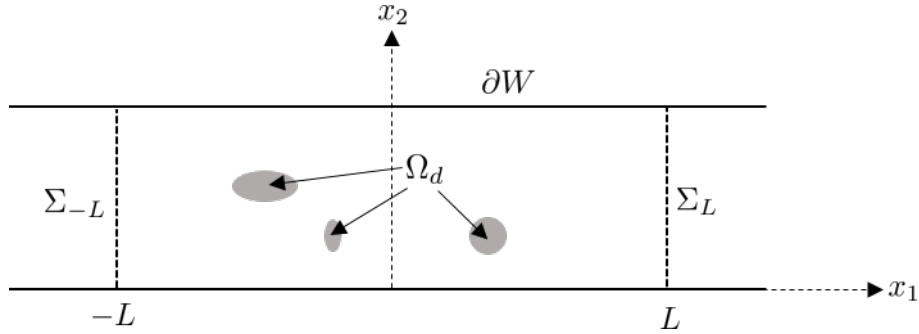
On peut montrer que ce comportement est assuré dès que la fonction  $u$  vérifie les conditions suivantes sur des frontières arbitraires  $\Sigma_{\pm L} = \{\pm L\} \times ]0, h[$  avec  $L > 0$  suffisamment grand,  $n$  normale sortante :

$$\begin{aligned} \partial_n u|_{\Sigma_L} &= \partial_{x_1} u|_{\Sigma_L} = \sum_{n \geq 0} i\beta_n(u|_{\Sigma_L}, c_n)c_n \stackrel{\text{def}}{=} Tu|_{\Sigma_L} \\ \partial_n u|_{\Sigma_{-L}} &= -\partial_{x_1} u|_{\Sigma_{-L}} = -\sum_{n \geq 0} -i\beta_n(u|_{\Sigma_{-L}}, c_n)c_n = Tu|_{\Sigma_{-L}} \end{aligned}$$

L'opérateurs  $T$  s'appelle l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann car il associe à la valeur d'une fonction, la valeur de la dérivée normale du problème extérieur.

## 1.2 Modélisation des défauts

Les défauts sont considérés comme des zones où la vitesse de propagation du son est différente de celle du milieu. Par la suite on la note  $c_d$  et on note  $k_d = \omega/c_d$ . On suppose que les défauts sont localisés dans le domaine borné  $\Omega = ]-L, L[ \times ]0, h[$  et on note  $\Omega_d$  le domaine occupé par les défauts et  $\Gamma_d = \partial\Omega_d$ .



On introduit la fonction discontinue

$$k(x_1, x_2) = \begin{cases} k_d & \text{sur } \Omega_d \\ k_0 & \text{sur } \Omega/\Omega_d \end{cases}$$

et le problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial W \\ \partial_n u = Tu + g^\pm & \text{sur } \Sigma_{\pm L} \\ [u]_{\Gamma_d} = 0, [\partial_n u]_{\Gamma_d} = 0 & \text{cond. transmission} \end{cases} \quad (1)$$

où  $[ ]_{\Gamma_d}$  désigne le saut à travers  $\Gamma_d$  et  $g^\pm \in L^2(\Sigma_{\pm L})$  sont des données du problème qui seront précisées ultérieurement.

Une formulation variationnelle de ce problème est

$$\begin{aligned} &\text{trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \forall v \in H^1(\Omega) : \\ &\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} d\Omega - \int_{\Omega} k^2 u \bar{v} d\Omega - \int_{\Sigma_L} Tu \bar{v} d\Sigma - \int_{\Sigma_{-L}} Tu \bar{v} d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma_L} g^+ \bar{v} d\Sigma - \int_{\Sigma_{-L}} g^- \bar{v} d\Sigma \end{aligned} \quad (2)$$

Ce problème relève de l'alternative de Fredholm (coercif + compact). On peut démontrer qu'il est bien posé hormis quelques fréquences (au plus dénombrable). On peut en faire une approximation par éléments finis.

### 1.3 Diffraction d'un mode propagatif

On peut s'intéresser à des problèmes de diffraction particuliers : ceux où le champ incident est un mode propagatif  $u_i = \Phi_n^\pm$ . Dans ce cas, on a :

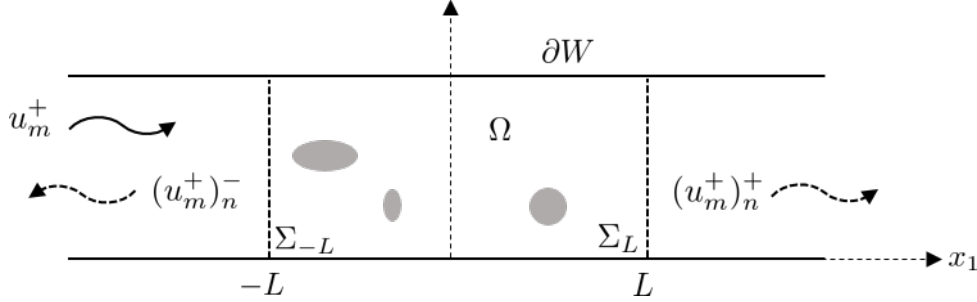
$$g^\pm = \partial_n u_i|_{\Sigma_{\pm L}} - T u_i|_{\Sigma_{\pm L}}$$

Lorsque  $u_i = \Phi_n^+ = c_n(x_2)e^{i\beta_n x_1}$  (mode incident allant vers la droite) on a (orthonormalité des  $c_n$ ) :

$$\begin{aligned} g^+ &= \partial_{x_1} u_i|_{\Sigma_L} - \sum_{n \geq 0} i\beta_n (u_i|_{\Sigma_L}, c_n) c_n = i\beta_n c_n(x_2) e^{i\beta_n L} - i\beta_n c_n(x_2) e^{i\beta_n L} = 0 \\ g^- &= -\partial_{x_1} u_i|_{\Sigma_{-L}} - \sum_{n \geq 0} i\beta_n (u_i|_{\Sigma_{-L}}, c_n) c_n = -i\beta_n c_n(x_2) e^{-i\beta_n L} - i\beta_n c_n(x_2) e^{-i\beta_n L} = -2i\beta_n c_n(x_2) e^{-i\beta_n L} \end{aligned}$$

Lorsque  $u_i = \Phi_n^- = c_n(x_2)e^{-i\beta_n x_1}$  (mode incident allant vers la gauche), on a :

$$\begin{aligned} g^+ &= \partial_{x_1} u_i|_{\Sigma_L} - \sum_{n \geq 0} i\beta_n (u_i|_{\Sigma_L}, c_n) c_n = -i\beta_n c_n(x_2) e^{i\beta_n L} - i\beta_n c_n(x_2) e^{i\beta_n L} = -2i\beta_n c_n(x_2) e^{i\beta_n L} \\ g^- &= -\partial_{x_1} u_i|_{\Sigma_{-L}} - \sum_{n \geq 0} i\beta_n (u_i|_{\Sigma_{-L}}, c_n) c_n = i\beta_n c_n(x_2) e^{-i\beta_n L} - i\beta_n c_n(x_2) e^{-i\beta_n L} = 0 \end{aligned}$$



Dans le cas d'un mode propagatif (le cas intéressant), on peut choisir la phase du champ incident de telle sorte qu'il n'y ait pas les facteurs  $e^{\pm i\beta_n L}$  dans les expressions précédentes. On notera par la suite  $u_n^\pm$  la solution du problème (1) associée au champ incident  $\Phi_n^\pm$  et  $v_n^\pm = u_n^\pm - \Phi_n^\pm$  appelé champ diffracté.

### 1.4 Approximation par éléments finis

Soit  $\mathcal{T} = (T_\ell)_{\ell=1,L}$  une triangulation vérifiant les hypothèses classiques : recouvrement du domaine, non recouvrement des triangles et arêtes partagées de façon unique. Pour simplifier, on suppose par la suite que

$$\bigcup_{\ell=1,L} T_\ell = \Omega.$$

On note  $(M_i^\ell)_{i=1,3}$  les 3 sommets du triangle  $T_\ell$  et  $(M_i^\ell)_{i=4,6}$  les points milieu des arêtes :  $M_4^\ell = \frac{1}{2} (M_1^\ell + M_2^\ell)$ ,  $M_5^\ell = \frac{1}{2} (M_2^\ell + M_3^\ell)$  et  $M_6^\ell = \frac{1}{2} (M_1^\ell + M_3^\ell)$ . L'ensemble de tous les sommets de la triangulation, comptés une seule fois, est noté  $(M_I)_{I=1,N}$ . Par la suite, on note  $\mathcal{L}$  l'application qui au  $i^{ème}$  noeuds du triangle  $\ell$  associe son numéro dans la numérotation globale des sommets :  $\mathcal{L}(\ell, i) = I$ .

On va considérer une approximation par éléments finis  $P^2$  Lagrange. Pour chaque triangle  $T_\ell$  on introduit les fonctions de base locale, régulières et linéairement indépendantes  $(\tau_i^\ell)_{i=1,6} \in P^2[x_1, x_2]$  (polynômes de degré 2) vérifiant  $\tau_i^\ell(M_j^\ell) = \delta_{ij} \forall i, j = 1, 6$ . On définit la fonction de base globale  $w_I$  attachée au sommet  $M_I$  par recollement des fonctions de bases locales  $\tau_i^\ell$  telles que  $\mathcal{L}(\ell, i) = I$  :

$$w_I(x)|_{T_\ell} = \begin{cases} \tau_i^\ell & \text{si } \mathcal{L}(\ell, i) = I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction on a  $w_I(M_J) = \delta_{IJ} \forall I, J$ . On introduit les espaces (vectoriels) d'approximation :

$$V_h = \text{Vect}(w_I)_{I=1,N}$$

Comme les fonctions  $(w_I)_{I=1,N}$  sont continues par construction on a  $V_h \subset H^1(\Omega)$ .

On introduit alors le problème variationnel discret :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } \forall v_h \in V_h : \\ & \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \bar{v}_h d\Omega - \int_{\Omega} k^2 u_h \bar{v}_h d\Omega - \int_{\Sigma_L} T u_h \bar{v}_h d\Sigma - \int_{\Sigma_{-L}} T u_h \bar{v}_h d\Sigma \\ & = \int_{\Sigma_L} g^+ \bar{v}_h d\Sigma + \int_{\Sigma_{-L}} g^- \bar{v}_h d\Sigma \end{aligned} \quad (3)$$

Ce problème est bien posé sous la condition que le problème (2) le soit et on a convergence de la solution approchée si  $u \in H^2$ :

$$\|u_h - u\|_{H^1(T_\ell)} \leq Ch^2$$

## 1.5 Système linéaire

Rappelons que la formulation variationnelle discrète (3) est équivalente à un système linéaire de dimension  $N$ . Si on note  $\mathbb{A}$  la matrice d'ordre  $N$  de coefficient :

$$\mathbb{A}_{IJ} = \int_{\Omega} \nabla w_J \cdot \nabla w_I d\Omega$$

$\mathbb{B}$  la matrice d'ordre  $N$  de coefficient :

$$\mathbb{B}_{IJ} = \int_{\Omega} k^2 w_J w_I d\Omega$$

$\mathbb{T}^\pm$  la matrice d'ordre  $N$  de coefficient :

$$\mathbb{T}_{IJ}^\pm = \int_{\Sigma_{\pm L}} T w_J w_I dx$$

et  $G^\pm$  le vecteur de  $\mathbb{R}^N$  de composantes :

$$G_I^\pm = \int_{\Sigma_{\pm L}} g^\pm w_I d\Sigma$$

alors le vecteur  $U$  de  $\mathbb{R}^N$  de composantes  $u_h(M_I)$  est solution du système linéaire :

$$(\mathbb{A} - \mathbb{B} - \mathbb{T}^+ - \mathbb{T}^-) U = G^+ + G^- \quad (4)$$

Il convient donc de savoir calculer les coefficients des matrices précédentes ainsi que les composantes  $G_I^\pm$ . Compte-tenu de la définition d'une fonction de base globale  $w_I$ , son support est l'ensemble des triangles  $T_\ell$  qui ont le point  $M_I$  pour sommet. Par conséquent  $\mathbb{A}_{IJ} = 0$  dès que  $M_I$  et  $M_J$  n'appartiennent pas à un même triangle. On a les principes d'assemblage suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{IJ} &= \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I \text{ et } \mathcal{L}(\ell,j)=J} \int_{T_\ell} \nabla \tau_j^\ell \cdot \nabla \tau_i^\ell d\Omega \\ \mathbb{B}_{IJ} &= \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I \text{ et } \mathcal{L}(\ell,j)=J} \int_{T_\ell} k^2 \tau_j^\ell \tau_i^\ell d\Omega \\ \mathbb{T}_{IJ}^\pm &= \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I \text{ et } \mathcal{L}(\ell,j)=J} \int_{\partial T_\ell \cap \Sigma_{\pm L}} T \tau_j^\ell \tau_i^\ell d\Sigma \quad \text{pour } I, J \text{ tels que } M_I, M_J \in \Sigma_{\pm L} \\ G_I^\pm &= \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I} \int_{\partial T_\ell \cap \Sigma_{\pm L}} g^\pm(x) \tau_i^\ell d\Sigma \end{aligned}$$

Ces principes d'assemblage sont classiques, hormis pour les termes  $\mathbb{T}^\pm$ . Dans la formule donnant le coefficient  $\mathbb{T}_{IJ}^\pm$  se cache le fait que toute fonction de base associée à un noeud qui n'est pas situé sur  $\Sigma_{\pm L}$  s'annule sur le bord  $\Sigma_{\pm L}$ ! Seules les arêtes des éléments qui appartiennent à  $\Sigma_{\pm L}$  donneront des contributions dans

les matrices  $\mathbb{T}^\pm$ . A d'autres égards, le calcul de ces matrices n'est pas standard. En effet, on a d'après la définition de  $T$  (en tronquant le nombre de modes à  $N$ ) :

$$\mathbb{T}_{IJ}^\pm = \sum_{n=0,N} i\beta_n \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I \text{ et } \mathcal{L}(\ell,j)=J} \int_{\partial T_\ell \cap \Sigma_{\pm L}} \tau_j^\ell c_n d\Sigma \int_{\partial T_\ell \cap \Sigma_{\pm L}} \tau_i^\ell c_n d\Sigma$$

d'où on déduit que :

$$\mathbb{T}^\pm = \mathbb{E} \mathbb{D} \mathbb{E}^t$$

où on a posé :

$$\mathbb{E}_{In} = \sum_{\ell \text{ tq } \mathcal{L}(\ell,i)=I} \int_{\partial T_\ell \cap \Sigma_{\pm L}} \tau_i^\ell c_n d\Sigma \text{ et } D_{nm} = i\beta_n \delta_{nm}.$$

Notons que pour les données incidentes présentées avant, le vecteur  $G$  prend une forme particulière. Par exemple, pour le champ incident  $u_i = \Phi_n^+$  on a :

$$G_I^+ = 0 \text{ et } G_I^- = -2i\beta_n e^{-i\beta_n L} \int_{\Sigma_{\pm L}} c_n w_I d\Sigma = -2i\beta_n e^{-i\beta_n L} \mathbb{E}_{In}$$

## 1.6 Calculs élémentaires

On est ramené au calcul des intégrales élémentaires sur chaque triangle  $T_\ell$  ( $i, j = 1, 3$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ij}^\ell &= \int_{T_\ell} \nabla \tau_j^\ell \cdot \nabla \tau_i^\ell d\Omega \\ \mathbb{B}_{ij}^\ell &= \int_{T_\ell} k^2 \tau_j^\ell \tau_i^\ell d\Omega \\ \mathbb{E}_{in}^\ell &= \int_{\partial T_\ell} \tau_i^\ell c_n d\Sigma \text{ si } \partial T_\ell \subset \Sigma_{\pm L} \\ G_i^\ell &= \int_{\partial T_\ell} g \tau_i^\ell d\Sigma \text{ si } \partial T_\ell \subset \Sigma_{\pm L} \end{aligned}$$

qui, en pratique, sont approchées à l'aide de formules de quadrature sur un triangle de référence après changement de variable. Par exemple sur le triangle rectangle unité  $\hat{T}$  pour une fonction suffisamment régulière  $f$  :

$$\int_{\hat{T}} f(x) dx \simeq \sum_{q=1,Q} \omega_q f(P_q)$$

où  $(\omega_q)_{q=1,Q}$  et  $(P_q)_{q=1,Q}$  désignent respectivement des poids et des points de quadrature.

On pourra utiliser, par exemple, la formule de quadrature à 7 points qui est d'ordre 5 :

$P_q$	$(s_0, s_0)$	$(s_1, s_1)$	$(s_1, s_3)$	$(s_3, s_1)$	$(s_2, s_2)$	$(s_2, s_4)$	$(s_4, s_2)$
$\omega_q$	$\eta_0$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_2$	$\eta_2$

avec  $s_0 = \frac{1}{3}$ ,  $s_1 = \frac{6-\sqrt{15}}{21}$ ,  $s_2 = \frac{6+\sqrt{15}}{21}$ ,  $s_3 = \frac{9+2\sqrt{15}}{21}$ ,  $s_4 = \frac{9-2\sqrt{15}}{21}$ ,  $\eta_0 = \frac{9}{80}$ ,  $\eta_1 = \frac{155-\sqrt{15}}{2400}$ ,  $\eta_2 = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}$ .

En dimension 1 (termes de bord), on utilisera, par exemple, la formule de quadrature suivante sur le segment  $[-1, 1]$  (Gauss-Legendre) :

$P_q$	$-\sqrt{3/5}$	0	$\sqrt{3/5}$
$\omega_q$	$5/9$	$8/9$	$5/9$

## 1.7 Mise en oeuvre

On dispose de tous les ingrédients pour décrire la mise en oeuvre de la partie simulation.

On développera, en adaptant l'existant, une classe **vecteur** et une classe **matrice** à coefficients complexes (utiliser la programmation générique). La classe matrice devra gérer des *matrices pleines* et des *matrices profils* (voir poly MA201) et proposer les opérations algébriques de base (+, -, \*). On prévoiera également

la possibilité de réaliser des produits matrice×vecteur et on développera une fonctionnalité permettant de résoudre des systèmes linéaires (élimination de Gauss avec pivot).

On devra également disposer d'une classe **maillage** permettant de gérer des maillages. Ces maillages pourront être générés par le mailleur *gmsh* qui produit des fichiers de maillages au format msh. En utilisant, la notion de sous-domaine des mailleurs, on peut ainsi préciser des zones de défaut ainsi que des points se trouvant au bord. Votre classe **maillage** disposera de fonctionnalités de lecture des fichiers de maillage produit par *gmsh*. Attention, ces derniers sont des triangulations ne fournissant que les sommets des triangles. Il faudra donc générer les points milieux des arêtes pour mettre en oeuvre des EF P2. Concrètement, votre classe **maillage** doit contenir une liste de triangles. Chaque **triangle** (classe) est constitué de 6 points (3 sommets et 3 points milieux), d'un indicateur du milieu (défaut ou non), d'une liste de numérotation globale et d'un indicateur permettant de détecter sur quel bord se situe une arête (0 si elle n'est pas située sur un bord). Rappelons qu'avec le mailleur *gmsh* il est facile d'attribuer des numéros de référence à des zones différentes du maillage et donc de repérer les triangles qui sont dans le défaut.

On développera, la fonction qui à partir d'un maillage et des données construit le système linéaire attaché au problème. On utilisera à cette fin un processus d'assemblage s'appuyant sur une boucle sur les triangles et une boucle sur les points de quadrature. On pourra à cette occasion développer des classes utiles (formule de quadrature par exemple).

On développera également des fonctionnalités supplémentaires, telles que l'écriture des résultats sur un fichier pouvant être relu dans Matlab pour générer des dessins du champ de pression acoustique ou le calcul d'une erreur  $L^2$  : norme  $L^2$  de l'écart entre la solution calculée (vecteur  $U_h$ ) et approximation d'une solution exacte  $\bar{U}_h$ :

$$\|U_h - \bar{U}_h\|_{L^2} = (\mathbb{M} (U_h - \bar{U}_h), (U_h - \bar{U}_h))$$

avec  $\mathbb{M}$  la matrice de masse :

$$\mathbb{M}_{IJ} = \int_{\Omega} w_J w_I d\Omega$$

On validera chacune des briques élémentaires à l'aide de tests significatifs et on procédera à une évaluation globale de l'outil de simulation en considérant le cas où  $k_d = k_0$  et des champs incidents de la forme  $\Phi_n^\pm$  car dans ce cas  $\Phi_n^\pm$  est la solution. On pourra ensuite valider le cas général où  $k_d \neq k_0$  en analysant les champs obtenus en diminuant progressivement le pas du maillage (pas de solution exacte !).

## 2 Imagerie par linear sampling

L'idée de la *linear sampling* consiste à évaluer en différents points du domaine à imager, noté  $D$  par la suite, une fonction caractéristique des défauts. La difficulté consiste à construire une telle fonction et surtout à prouver qu'elle est bien caractéristique des défauts. Bien évidemment, il faut disposer de mesures : réponses des défauts à diverses sollicitations. On utilisera, le simulateur développé dans la partie précédente pour générer ces mesures avec éventuellement un ajout de bruit gaussien pour coller un peu plus à une expérience réelle.

### 2.1 Fondement de la méthode

La *linear sampling* repose sur la résolution de l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \text{Pour } z \in D \text{ trouver } h(., z) \in L^2(\hat{\Sigma}) \\ Fh(., z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\hat{\Sigma}} u^s(x, y) h(y, z) ds(y) = G(x, z) \quad \forall x \in \hat{\Sigma} \end{aligned} \quad (5)$$

où  $G(., z)$  désigne la fonction de Green sortante du guide (sans défaut) dont la source est située en  $z$  :

$$\begin{cases} \Delta G(., z) + k_0^2 G(., z) = \delta_z & \text{sur } W \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \partial W \end{cases} ,$$

$\hat{\Sigma}$  désigne la zone d'émission et de mesure, par exemple  $\hat{\Sigma} = \Sigma_L \cup \Sigma_{-L}$  (full scattering) ou  $\hat{\Sigma} = \Sigma_L$  (back scattering).

$u^s(., y)$  est le champ diffracté par le milieu avec les défauts issu d'une source située en un point  $y \in \hat{\Sigma}$ , c'est-à-dire  $u^s(., y) = H(., y) + G(., y)$  avec

$$\begin{cases} \triangle H(., y) + k^2 H(., y) = \delta_y & \text{sur } \Omega \\ \partial_n H(., y) = 0 & \text{sur } \partial W \\ \partial_n u^s(., y) = T u^s(., y) & \text{sur } \Sigma_{\pm 2L} \\ [H(., y)]_{\Gamma_d} = 0, [\partial_n H(., y)]_{\Gamma_d} = 0 & \text{cond. transmission} \end{cases}.$$

L'idée sous-jacente à l'introduction du problème (5) est la suivante : par construction les champs diffractés  $u^s(., y)$  sont réguliers et par conséquent,  $Fh(., z)$  l'est aussi. Par contre, la fonction de Green  $G(., z)$  est singulière au point  $x = z$ . Dès lors que  $z \notin \Omega_d$  (défaut), on ne peut pas avoir la relation (5). En réalité, la situation est nettement plus compliquée car l'équation (5) n'a en général pas de solution. Il faut donc utiliser un procédé de régularisation (dit de Tichonov) et résoudre le problème régularisé :

$$F^* Fh(., z) + \varepsilon h(., z) = F^* G(x, z) \quad (6)$$

qui admet une unique solution  $h_\varepsilon(., z)$ . On est alors en mesure d'établir (la démonstration sort largement du cadre de ce cours) le résultat qualitatif :

- Si  $z \in \Omega_d$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$  il existe  $h_\varepsilon(., z) \in L^2(\hat{\Sigma})$  tel que

$$\|Fh_\varepsilon(., z) - G(., z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon$$

De plus,  $\forall \varepsilon$ ,  $h_\varepsilon(., z)$  vérifie

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma_d} \|h_\varepsilon(., z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = \infty.$$

- Si  $z \notin \Omega_d$  alors toute solution  $h_\varepsilon(., z) \in L^2(\hat{\Sigma})$  telle que

$$\|Fh_\varepsilon(., z) - G(., z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} \leq \varepsilon$$

vérifie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(., z)\|_{L^2(\hat{\Sigma})} = \infty.$$

Ces résultats fournissent une caractérisation "approximative" des défauts. En pratique, on résout le problème régularisé (6) pour différents points  $z \in D$  et on représente les lignes de niveau de la fonction  $z \rightarrow \log(1/\|h_\varepsilon(z)\|)$  qui fournit une image du milieu dans laquelle on espère retrouver les défauts.

## 2.2 Forme modale

Dans le cas des guides d'ondes, on peut tirer partie de l'existence de mode pour projeter l'équation (6) sur les  $N + 1$  premiers modes et obtenir ainsi l'équation matricielle  $\forall z = (z_1, z_2)$  :

$$\mathbb{F}^* \mathbb{F} H_z + \varepsilon H_z = G_z \quad (7)$$

avec :

$$H_z = \left( (h_n^+)_{n=0,N}, (h_n^-)_{n=0,N} \right) \text{ où } h_n^\pm = (h_n^\pm, c_n)_{\Sigma_{\pm L}}$$

$$\mathbb{F} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{++} & \mathbb{F}_{+-} \\ \mathbb{F}_{-+} & \mathbb{F}_{--} \end{bmatrix} \text{ et } \begin{aligned} (\mathbb{F}_{++})_{mn} &= \frac{e^{i\beta_n L}}{i\beta_n} (U_n^-)_m^+ \\ (\mathbb{F}_{+-})_{mn} &= \frac{e^{i\beta_n L}}{i\beta_n} (U_n^+)_m^+ \\ (\mathbb{F}_{-+})_{mn} &= \frac{e^{i\beta_n L}}{i\beta_n} (U_n^-)_m^- \\ (\mathbb{F}_{--})_{mn} &= \frac{e^{i\beta_n L}}{i\beta_n} (U_n^+)_m^- \end{aligned}$$

où  $(U_n^\pm)_m^\pm$  désigne la composante sur le mode  $m$  du champ diffracté  $u_{sn}^\pm = u_n^\pm - \Phi_n^\pm$  sur l'interface  $\Sigma_{\pm L}$  :

$$(U_n^\pm)_m^\pm = \left( u_{n|\Sigma_{\pm L}}^\pm, c_m \right).$$

$G_z$  est le vecteur de composante  $(G_z^+, G_z^-)$  avec  $(G_z^\pm)_m = \frac{e^{i\beta_m(L \pm z_1)}}{i\beta_m} c_m(z_2)$ .

Le cas précédent correspond au cas du "full scattering" ( $\hat{\Sigma} = \Sigma_L \cup \Sigma_{-L}$ ). Dans le cas du "back scattering" ( $\hat{\Sigma} = \Sigma_L$ ) le système (7) se simplifie en :

$$\mathbb{F}_{++}^* \mathbb{F}_{++} H_z + \varepsilon H_z = G_z^+ \quad (8)$$

### 2.3 Mise en oeuvre

Il s'agit de développer un code permettant de construire en différents points d'une grille régulière ( $z_{pq}$ ) du domaine d'intérêt  $D$ , la norme de la solution  $H_{z_{pq}}$  des systèmes linéaires (7) ou (8). Il s'agit essentiellement de construire la matrice  $\mathbb{F}$  du système (indépendante du point  $z$ ), de la factoriser  $LU$ , puis de réaliser une boucle sur tous les points de la grille dans laquelle on construit le second membre  $G_z$  et on réalise l'inversion du système linéaire ainsi que le calcul de la norme de  $H_{z_{pq}}$ . On générera un fichier contenant les coordonnées des points  $z_{pq}$  de la grille et la valeur de la norme de la solution qui sera exploitée dans Matlab pour fabriquer l'image du milieu. Le calcul de la matrice  $\mathbb{F}$  requiert la connaissance de la décomposition modale sur  $\Sigma_{\pm L}$  des solutions  $u_n^{\pm}$ . On construit simplement ces décompositions modales, en observant que si  $U_n^{\pm}$  désigne l'approximation éléments finis de  $u_{sn}^{\pm}$ , alors le vecteur des coefficients de sa décomposition modale  $(U_n^{\pm})^{\pm} = ((U_n^{\pm})_m^{\pm})_{m=0,N}$  est donné par :

$$(U_n^{\pm})^{\pm} = \mathbb{E}^t U_n^{\pm}$$

On pourra encapsuler le développement de la méthode de linear sampling dans une classe **linear\_sampling** et développer, si besoin est, des classes annexes utiles.

## 3 Organisation du travail (3p)

Compte-tenu du travail qu'il y a à réaliser, voici une suggestion pour organiser le partage des tâches.

- Un premier élève E1 prendra en charge le développement des classes de vecteurs et de matrices. La définition de ces classes doit être réalisée rapidement et une version même incomplète doit être rapidement opérationnelle. L'élève E1 continuera le développement des fonctionnalités plus avancées dans un deuxième temps.
- En parallèle, un autre élève E2, développera la classe maillage et les classes annexes avec la procédure de lecture de maillages générés avec gmsh. Il développera également les outils permettant de visualiser dans Matlab les champs acoustiques.
- Dans le même temps, le troisième élève E3, s'occupera du développement de la partie élément fini en s'appuyant sur la définition des classes maillage et matrice en cours de développement.
- Chacun effectuera les validations élémentaires de son propre développement.
- A l'issue de cette première phase, deux élèves pourront procéder à l'assemblage des divers développements pour réaliser le simulateur et le valider tandis que le troisième se consacrera au développement de la partie imagerie.
- En final vous devriez être en mesure de réaliser quelques expériences d'imagerie.