图像增强：直方图均衡化

2019年10月14日 19:57

简介

图像直方图描述图像中各灰度级出现的相对频率，基于直方图的灰度变换，可调整图像直方图到一个预定的形状。例如，一些图像由于其灰度分布集中在较窄的区间，对比度很弱，图像细节看不清楚。此时，可采用图像灰度直方图均衡化处理，使得图像的灰度分布趋向均匀，图像所占有的像素灰度间距拉开，进而加大图像反差，改善视觉效果，达到增强的目的。从人眼视觉特性来考虑，一幅图像的直方图如果是均匀分布的，该图像色调给人的感觉会比较协调。

原理

设$f(x,y)$为一个灰度级在范围$[0,L-1]$的数字图像，其直方图为

$$\mathrm{P}(\mathrm{r_k})=\frac{\mathrm{n_k}}{\mathrm{n}},\qquad \mathrm{k}=0,1,2,\dots,\mathrm{L}-1$$

n为图像的像素总数

n_k为图像中第k个灰度级的像素个数

r_k为第k个灰度级对应的灰度

将r_k归一化为r

对r进行如下变换

$$s=T(r)$$

该变换式应满足如下条件

（1）对于$0\le r\le 1$，有$0\le s\le 1$

（2）在$0\le r\le 1$区间内，s单调递增

以下部分用连续型随机变量解释

从s到r的反变换用下式表示

$$r=T^{-1}(s)$$

r的概率密度为$P_r(r)$；s的概率密度可由$P_r(r)$求出（证明文末给出）

$$P_s(s)=\left(P_r(r)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)\bigg|_{r=T^{-1}(s)}$$

假定变换函数为

$$s=T(r)=\int_0^r P_r(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

式中：ω是积分变量，$\int_0^r P_r(\omega)\,\mathrm{d}\omega$是$r$的分布函数

对r求导，则

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}T(r)}{\mathrm{d}r}=P_r(r)$$

把结果代入前面公式，有：

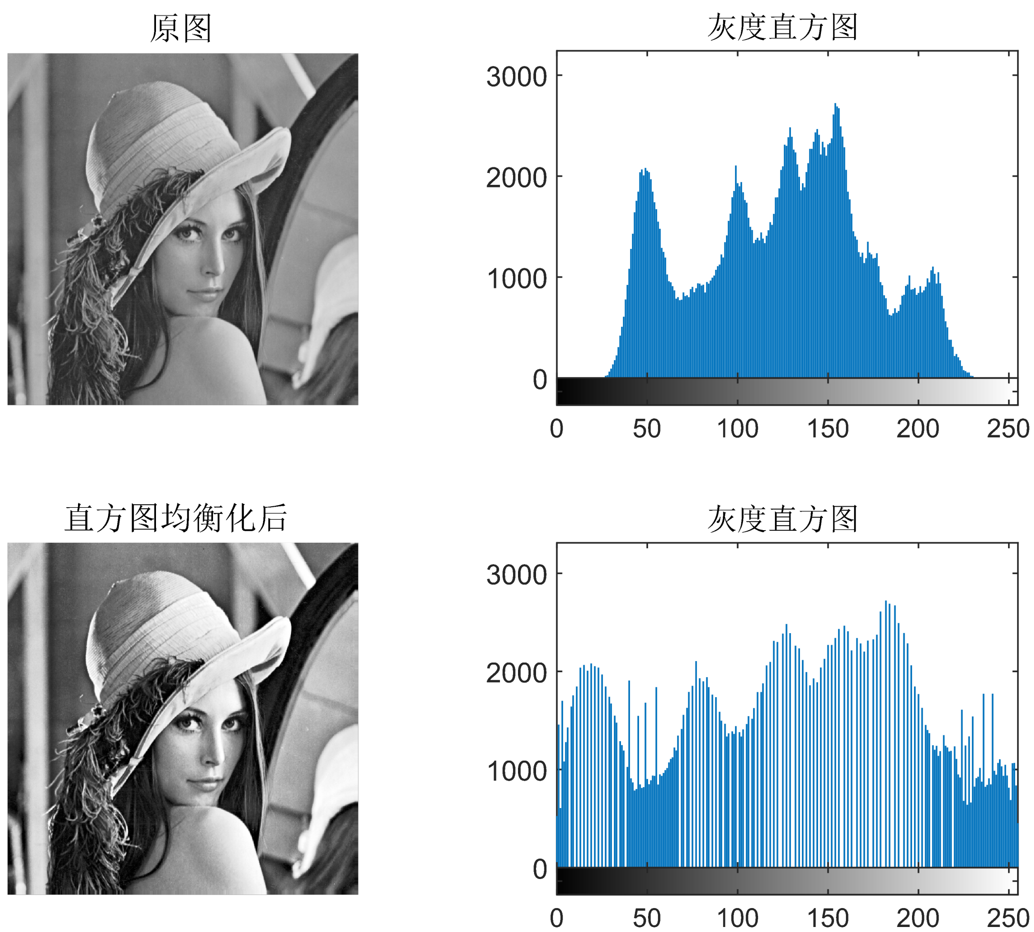
$$P_s(s)=\left[P_r(r)\cdot\frac{1}{P_r(r)}\right]=1$$

由此可见，变换后变量s在其定义域内均匀分布
且r的分布函数满足上述两个条件
因此，用r的分布函数作为变换函数，可产生灰度级均匀分布的图像

MATLAB代码

```
clc;clear;
I = imread('lena512.bmp');
[m, n] = size(I);
[hr, ~] = imhist(I);
pr = hr / (m * n);
s = cumsum(pr) * 255;
I_ = I;
for i = 1:m
    for j = 1:n
        I_(i, j) = uint8(s(I(i, j) + 1));
    end
end
```

结果分析



直方图均衡化后，图像对比度增强，像素值动态范围得到了扩展。然而因为灰度图像的像素值只能取8位无符号整型，因此变换后的灰度级并不是严格的均匀分布。

定理及证明

定理2.6.1

设 X 是连续随机变量，其密度函数为 $p_X(x)$， $Y=g(X)$ 是另一个随机变量。
若 $y=g(x)$ 严格单调，其反函数 $h(y)$ 有连续导函数，则 $Y=g(X)$ 的**密度函数**为
$$p_Y(y)=\begin{cases} p_X[h(y)]|h'(y)|, a<y<b \\ 0, \qquad\qquad\qquad others \end{cases}$$
其中 $a=min\{g(-\infty,g(\infty))\}$, $b=max\{g(-\infty,g(\infty))\}$

证明:

设 $g(x)$ 是严格单调增函数，这时它的反函数 $h(y)$ 也严格单调增函数。
且 $h'(y)>0$。记 $a=g(-\infty),b=g(\infty)$，这意味着 $y=g(x)$ 仅在区间 (a,b) 取值，于是y的CDF $F_Y(y)$ 有

- 当 $y<a$ 时
  $$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=0$$
- 当 $y>b$ 时
  $$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=1$$
- 当 $a\leqslant y\leqslant b$ 时
  $$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y)$$
  $$=P(X\leqslant h(y))=\int_{-\infty}^{h(y)}p_X(x)dx$$
  由此得Y的PDF为
  $$p_Y(y)=\begin{cases} p_X[h(y)]|h'(y)|, a<y<b \\ 0, \qquad\qquad\qquad others \end{cases}$$
  同理可证当 $g(x)$ 是严格单调减函数时，结论也成立。但要注意 $h'(y)<0$，故要加绝对值符号，这时 $a=g(\infty),b=g(-\infty)$，综上所述，定理得证。