

# 图像增强：直方图均衡化

2019年10月14日 19:57

## 简介

图像直方图描述图像中各灰度级出现的相对频率，基于直方图的灰度变换，可调整图像直方图到一个预定的形状。例如，一些图像由于其灰度分布集中在较窄的区间，对比度很弱，图像细节看不清楚。此时，可采用图像灰度直方图均衡化处理，使得图像的灰度分布趋向均匀，图像所占有的像素灰度间距拉开，进而加大图像反差，改善视觉效果，达到增强的目的。从人眼视觉特性来考虑，一幅图像的直方图如果是均匀分布的，该图像色调给人的感觉会比较协调。

## 原理

设 $f(x, y)$ 为一个灰度级在范围 $[0, L - 1]$ 的数字图像，其直方图为

$$P(r_k) = \frac{n_k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$$

$n$ 为图像的像素总数

$n_k$ 为图像中第 $k$ 个灰度级的像素个数

$r_k$ 为第 $k$ 个灰度级对应的灰度

将 $r_k$ 归一化为 $r$

对 $r$ 进行如下变换

$$s = T(r)$$

该变换式应满足如下条件

- (1) 对于 $0 \leq r \leq 1$ ，有 $0 \leq s \leq 1$
- (2) 在 $0 \leq r \leq 1$ 区间内， $s$ 单调递增

以下部分用连续型随机变量解释

从 $s$ 到 $r$ 的反变换用下式表示

$$r = T^{-1}(s)$$

$r$ 的概率密度为 $P_r(r)$ ； $s$ 的概率密度可由 $P_r(r)$ 求出（证明文末给出）

$$P_s(s) = \left( P_r(r) \frac{dr}{ds} \right) \Big|_{r=T^{-1}(s)}$$

假定变换函数为

$$s = T(r) = \int_0^r P_r(\omega) d\omega$$

式中： $\omega$ 是积分变量， $\int_0^r P_r(\omega) d\omega$ 是 $r$ 的分布函数

对 $r$ 求导，则

$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = P_r(r)$$

把结果代入前面公式，有：

$$P_s(s) = \left[ P_r(r) \cdot \frac{1}{P_r(r)} \right] = 1$$

由此可见，变换后变量 $s$ 在其定义域内均匀分布

且 $r$ 的分布函数满足上述两个条件

因此，用 $r$ 的分布函数作为变换函数，可产生灰度级均匀分布的图像

## MATLAB代码

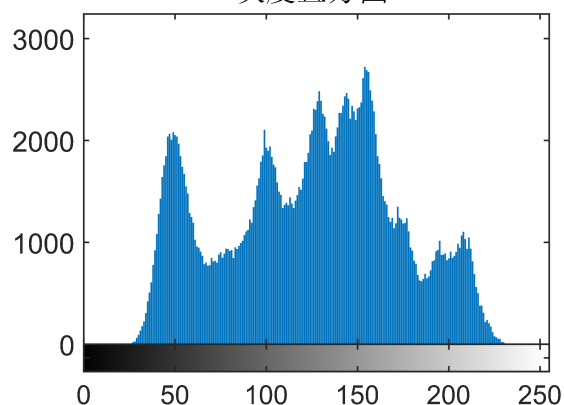
```
clc;clear;
I = imread('lena512.bmp');
[m, n] = size(I);
[hr, ~] = imhist(I);
pr = hr / (m * n);
s = cumsum(pr) * 255;
I_ = I;
for i = 1:m
    for j = 1:n
        I_(i, j) = uint8(s(I(i, j) + 1));
    end
end
```

## 结果分析

原图



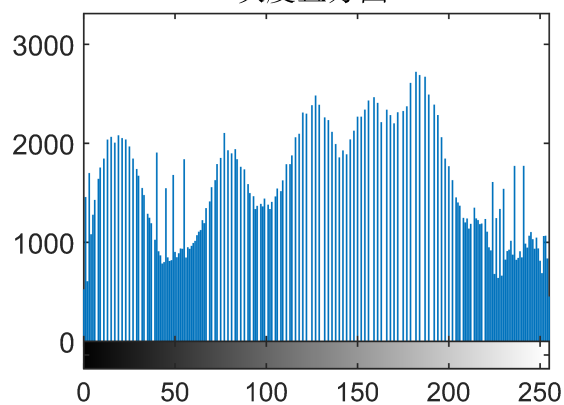
灰度直方图



直方图均衡化后



灰度直方图



直方图均衡化后，图像对比度增强，像素值动态范围得到了扩展。然而因为灰度图像的像素值只能取8位无符号整型，因此变换后的灰度级并不是严格的均匀分布。

## 定理及证明

### 定理2.6.1

设  $X$  是连续随机变量，其密度函数为  $p_X(x)$ ， $Y = g(X)$  是另一个随机变量。

若  $y = g(x)$  严格单调，其反函数  $h(y)$  有连续导函数，则  $Y = g(X)$  的密度函数为

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[h(y)]|h'(y)|, & a < y < b \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

其中  $a = \min \{g(-\infty, g(\infty))\}$ ,  $b = \max \{g(-\infty, g(\infty))\}$

**证明：**

设  $g(x)$  是严格单调增函数，这时它的反函数  $h(y)$  也严格单调增函数。

且  $h'(y) > 0$ 。记  $a = g(-\infty)$ ,  $b = g(\infty)$ ，这意味着  $y = g(x)$  仅在区间  $(a, b)$  取值，于是  $y$  的CDF  $F_Y(y)$  有

- 当  $y < a$  时

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$$

- 当  $y > b$  时

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1$$

- 当  $a \leq y \leq b$  时

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq h(y)) = \int_{-\infty}^{h(y)} p_X(x) dx \end{aligned}$$

由此得  $Y$  的PDF为

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X[h(y)]|h'(y)|, & a < y < b \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

同理可证当  $g(x)$  是严格单调减函数时，结论也成立。但要注意  $h'(y) < 0$ ，故要加绝对值符号，这时  $a = g(\infty)$ ,  $b = g(-\infty)$ ，综上所述，定理得证。