在 UWB 测距时，误差主要可分为两类：一类是由于多径、NLOS 等引起的误差，这类误差通常大于 0 且与距离有关；另一类是由于测量噪声、设备时钟漂移等引起的误差，这类误差可近似为均值为 0 的高斯分布。因此可使用极大似然估计对数据进行拟合，进而抵消一部分误差的影响。

首先复习一下极大似然估计：

对于离散型随机变量，总体 X 的概率分布律可表示为：

$$P\{X=x\}=p(x;\theta) \tag{1}$$

其中 θ 为未知参数。设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是取自总体的样本，则样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取到观测值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的概率可表示为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta) \tag{2}$$

其中 $L(\theta)$ 是 θ 的函数，称为似然函数。

同样的，对于连续性随机变量，总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)$，则似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta) \tag{3}$$

若存在统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta) \tag{4}$$

则称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为参数 θ 的极大似然估计值。

假设 X 服从均值为 μ，方差为 σ^2 的高斯分布，其概率密度函数可表示为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

则其似然函数可表示为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\mu,\sigma^2)=(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^n e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

为便于求得极值，取其对数

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{7}$$

分别对 μ，σ^2 求偏导

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2} \tag{8}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial (\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{9}$$

令其为 0，可求得

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{10}$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 \tag{11}$$

若存在两组数据 x、y，其关系可以描述为 $y = ax + b + \varepsilon$，其中 $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$。$y$ 与 x 的关系可以转化为 $y \sim N(ax+b,\sigma^2)$，为求得参数 a 和 b，可以使用极大似然估计的思想，其似然函数的对数为

$$\ln L(a,b,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 \tag{12}$$

其中，参数 a 和 b 是需要求解的参数，其他项可以舍去，且求似然函数的最大值可以转化为求其相反数的最小值，即问题转化为找到 $\hat{a}$ 和 $\hat{b}$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(\hat{a}x_i+\hat{b})]^2 = \min\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 \tag{13}$$

上式分别对 a 和 b 求偏导

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}x_i[(ax_i+b)-y_i] \tag{14}$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}[(ax_i+b)-y_i] \tag{15}$$

令其为 0，可求得

$$\hat{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{16}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{17}$$

这个结果与一元线性回归及最小二乘估计得到的结果一致。