La méthode tridiagonale-Fourier

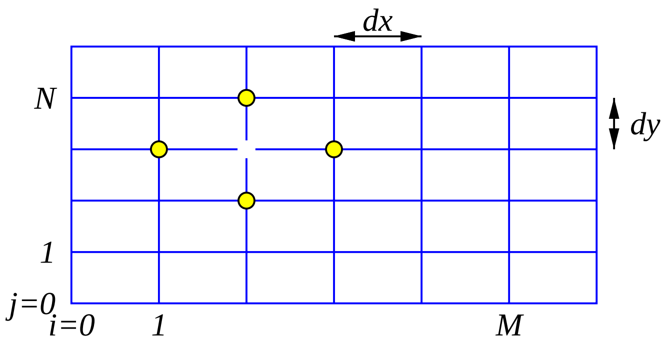
Il s'agit d'une méthode de résolution d'une classe de grands systèmes linéaires à matrices creuses. Nous l'appliquons ic au problème discrétisé de Poisson en 2-D.

Le problème de Poisson en 2-D

Considérons le problème modèle de Poisson avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u_{|\partial D} = g \end{cases} \text{dans le rectangle } D =]0;a[\times]0;b[$$

Une discrétisation par différences finies, avec le schéma classique à 5 points et **des pas de discrétisation réguliers** dans chaque direction,



donne l'approximation algébrique suivante du problème :

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{dx^2}\left(u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}\right) - \dfrac{1}{dy^2}\left(u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}\right) = f_{ij} \\ 1 \leq i \leq M \text{ et } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

Avec : $u_{ij} = g_{ij}$ si $\begin{cases} i = 0 \text{ ou } i = M+1 \\ \text{ou} \\ j = 0 \text{ ou } j = N+1 \end{cases}$ et $\begin{cases} dx = \dfrac{a}{M+1} \\ dy = \dfrac{b}{N+1} \end{cases}$

En utilisant les notations :

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{dx^2} \\ \beta = \dfrac{2}{dx^2} + \dfrac{2}{dy^2} \end{cases} \quad \text{puis} \quad B = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & & & \\ \alpha & \beta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta & \alpha \\ & & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \quad \text{et enfin} \quad C = -\frac{1}{dy^2} I_M$$

Le problème se met sous la forme bloc-matricielle :

$$\begin{bmatrix} B & C & & & \\ C & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & C \\ & & & C & B \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{N-1} \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N-1} \\ S_N \end{bmatrix}$$

où les matrices B, C, Y_j, S_j sont de dimension M.

Théorême

Ce système de dimension $N \times M$ est équivalent à M systèmes **tridiagonaux** de dimension N (plus simples à résoudre)

Transformation du système

Les matrices $B \text{ et } C$ sont symétriques donc diagonalisables.
De plus, elles commutent : $B . C = C . B$

Elles ont donc les mêmes vecteurs propres et se diagonalisent par les mêmes matrices de passage :

$$\begin{cases} Q^t . B . Q = D \\ Q^t . C . Q = \Delta \end{cases}$$

où les matrices $D = [d_i] \text{ et } \Delta = [\delta_i]$ sont diagonales d'ordre M

Le système s'écrit donc :

$$\begin{cases} B . Y_1 + C . Y_2 & = & S_1 \\ & \dots & \\ C . Y_{j-1} + B . Y_j + C . Y_{j+1} & = & S_j \\ & \dots & \\ C . Y_{N-1} + B . Y_N & = & S_N \end{cases}$$

d'où nous tirons : $Q^t . C . Y_{j-1} + Q^t . B . Y_j + Q^t . C . Y_{j+1} = Q^t . S_j$

Et, en utilisant l'équation de changement de base : $\Delta . Q^t . Y_{j-1} + D . Q^t . Y_j + \Delta . Q^t . Y_{j+1} = Q^t . S_j$

La notation : $\nu_j = Q^t . Y_j \text{ et } \eta_j = Q^t . S_j$ revient à passer à la base orthonormée de vecteurs propres de $B \text{ et } C$.

Notre système devient alors :

$$\begin{cases} D.v_1 + \Delta\ .v_2 & = & \eta_1 \\ & \dots & \\ \Delta\ .v_{j-1} + D.v_j + \Delta\ .v_{j+1} & = & \eta_j \\ & \dots & \\ \Delta\ .v_{N-1} + D.v_N & = & \eta_N \end{cases}$$

Détaillons ce système en regroupant les lignes de même indice de chaque sous-système :

$$\begin{cases} d_i.v_{i,1} + \delta_i.v_{i,2} & = & \eta_{i,1} & \\ & \dots & & \\ \delta_i.v_{i,j-1} + d_i.v_{i,j} + \delta_i.v_{i,j+1} & = & \eta_{i,j} & 2 \leq j \leq N-1 \\ & \dots & & \\ \delta_i.v_{i,N-1} + d_i.v_{i,N} & = & \eta_{i,N} & \end{cases}$$

$1 \leq i \leq M$

Ce qui s'écrit matriciellement :

$$T_i = \begin{bmatrix} d_i & \delta_i & & & \\ \delta_i & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \delta_i \\ & & & \delta_i & d_i \end{bmatrix} \quad U_i = \begin{bmatrix} v_{i,1} \\ \vdots \\ v_{i,j} \\ \vdots \\ v_{i,N} \end{bmatrix} \quad h_i = \begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \vdots \\ \eta_{i,j} \\ \vdots \\ \eta_{i,N} \end{bmatrix}$$

$T_i.U_i = h_i$ pour $1 \leq i \leq M$

Le système linéaire du problème est ainsi transformé en M systèmes tridiagonaux de dimension N.

Ces derniers peuvent être résolus par la méthode de Gauss, par exemple.

Algorithme

1. Trouver les valeurs propres d_i et δ_i de B et C et la matrice de changement de base Q
2. Transformer le second membre : $\eta_j = Q^t S_j$ pour $1 \leq j \leq N$
3. Calculer les h_i par transposition:

$$\ddots \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \dots, \quad \eta_N$$

$$\begin{array}{c} h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{array}\begin{bmatrix} \eta_{1,1} & \eta_{1,2} & \cdots & \eta_{1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{M,1} & \eta_{M,2} & \cdots & \eta_{M,N} \end{bmatrix}$$

4. Résoudre $T_i \,.\, U_i = h_i$ pour $1 \le i \le M$
5. A partir des U_i,remonter aux ν_j par transposition :

$$\begin{array}{c|cccc} \ddots & U_1, & U_2, & \ldots, & U_M \\ \hline \nu_1 & \nu_{i,1} & \nu_{2,1} & \cdots & \nu_{M,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_N & \nu_{1,N} & \nu_{2,N} & \cdots & \nu_{M,N} \end{array}$$

6. Enfin, nous obtenons la solution du système algébrique initial par le changement de base :$Y_j = Q \,.\, \nu_j$

Changements de base par TFD

En rappelant que :

$$\begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{dx^2} \\ \beta = \dfrac{2}{dx^2} + \dfrac{2}{dy^2} \end{cases} \text{puis } B = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & & & \\ \alpha & \beta & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \beta & \alpha \\ & & & \alpha & \beta \end{bmatrix} \text{et enfin } C = -\frac{1}{dy^2} I_M$$

B et C ont les mêmes vecteurs propres $\vec{q_i}, 1 \le i \le M$ avec $q_{i,l} = \sqrt{\dfrac{2}{M+1}} \sin\left(\dfrac{\pi i l}{M+1}\right)$ pour $1 \le l \le M$

associés à leurs valeurs propres respectives :

$$\begin{cases} d_i = 2 + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \left\{1 - \cos\left(\dfrac{\pi i}{M+1}\right)\right\} \text{pour } 1 \le i \le M \\ \delta_i = -1 \end{cases}$$

Alors un changement de base du type $y = Q \,.\, \nu$ se développe explicitement sous la forme :

$$y_k = \sum_{l=1}^{M} q_{k,l} \,.\, \nu_l$$

soit : $y_k = \sqrt{\dfrac{2}{M+1}} \,.\, \sum_{l=1}^{M} \nu_l \,.\, \sin\left(\dfrac{\pi k l}{M+1}\right)$

Notons : $P = M + 1$ et $v_0 = v_P = 0$

Nous obtenons alors l'expression d'une transformation sinus discrète :

$$\sqrt{\frac{2}{P}}\,.\,y_k = \frac{2}{P}\,.\,\sum_{l=0}^{P} v_l\,.\;\sin\left(\frac{\pi k l}{P}\right) \text{ pour } 0 \le k \le P$$

Calcul d'une Transformation sinus discrète

Une transformation sinus discrète se calcule de manière classique de la manière suivante :

- En posant : $d_k = \frac{1}{2}\,.\,(a_k - a_{P-k}) + (a_k + a_{P-k})\,.\;\sin\left(\frac{k\pi}{P}\right)$ pour $0 \le k \le P$
- et : $z_j = \frac{1}{P}\,.\,\sum_{k=0}^{P-1} d_k\,.\,e^{i\frac{2\pi jk}{P}} = x_j + i\,.\,w_j$
- nous obtenons les composantes de $y = Q\,.\,v$ par récurrence avec :
  $$\begin{cases} y_1 = \sqrt{\frac{P}{2}}\,.\,x_0 \\ y_{2j} = \sqrt{\frac{P}{2}}.2w_j \\ y_{2j+1} - y_{2j-1} = \sqrt{\frac{2}{P}}.2x_j \end{cases}$$
- Enfin, nous calculons par Transformation de Fourier Rapide l'expression :
  $z_j = \frac{1}{P}\,.\,\sum_{k=0}^{P-1} d_k\,.\,e^{i\frac{2\pi jk}{P}}$ pour $1 \le j \le P-1$

Remarque

Les transformations $v_j = Q^t\,.\,y_j$ et $y_j = Q\,.\,v_j$ se calculent de la même manière sachant que :

$$y_k = \frac{2}{P}\,.\,\sum_{l=0}^{P} v_l\,.\;\sin\left(\frac{\pi k l}{P}\right) \text{ et } v_0 = v_P = 0 \text{ pour } 1 \le k \le P-1$$

s'inverse en : $v_l = \sum_{l=0}^{P} y_k\,.\;\sin\left(\frac{\pi k l}{P}\right)$ pour $1 \le l \le P-1$

Version finale de l'algorithme

1. Les valeurs propres de B et C: $\begin{cases} d_i = 2 + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \left\{1 - \cos\left(\dfrac{\pi i}{M+1}\right)\right\} \\ \delta_i = -1 \end{cases}$ pour $1 \leq i \leq M$
2. Transformer le second membre : $\eta_j = Q^t S_j$ pour $1 \leq j \leq N$

   Sachant : $\begin{cases} q_{k,l} = \sqrt{\dfrac{2}{M+1}} \sin\left(\dfrac{\pi k l}{M+1}\right) \text{ pour } 1 \leq l \leq M \\ 1 \leq k \leq M \end{cases}$

   Par Transformation sinus rapide : $\begin{cases} \eta_{k,j} = \dfrac{2}{M+1} \displaystyle\sum_{l=0}^{M+1} \left(\sqrt{\dfrac{M+1}{2}} S_{l,j}\right) \sin\left(\dfrac{\pi k l}{M+1}\right) \\ 1 \leq k \leq M \end{cases}$
3. Calculer les h_i par transposition:

$$\begin{array}{c|c} \ddots & \eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_N \\ \begin{matrix} h_1 \\ \vdots \\ h_M \end{matrix} & \begin{bmatrix} \eta_{1,1} & \eta_{1,2} & \cdots & \eta_{1,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_{M,1} & \eta_{M,2} & \cdots & \eta_{M,N} \end{bmatrix} \end{array}$$

4. Résoudre la méthode de Gauss tridiagonale : $T_i \, . \, U_i = h_i$ pour $1 \leq i \leq M$ où :

$$T_i = \begin{bmatrix} d_i & \delta_i & & & \\ \delta_i & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \delta_i \\ & & & \delta_i & d_i \end{bmatrix}$$

5. A partir des U_i,remonter aux ν_j par transposition :

$$\begin{array}{c|c} \ddots & U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_M \\ \begin{matrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_N \end{matrix} & \begin{bmatrix} \nu_{i,1} & \nu_{2,1} & \cdots & \nu_{M,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{1,N} & \nu_{2,N} & \cdots & \nu_{M,N} \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Enfin, nous obtenons la solution du système algébrique initial par le changement de base :$Y_j = Q \, . \, \nu_j$

   Par Transformation sinus inverse : $\begin{cases} y_{k,j} = \displaystyle\sum_{l=1}^{M} \nu_{l,j} \sin\left(\dfrac{\pi k l}{M+1}\right) \\ 1 \leq k \leq M \end{cases}$