

# Contrôle et stabilisation des systèmes dynamiques, application au pendule double

Vincent Boulard

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Système dynamique différentiel</b>	<b>2</b>
2.1	Définition d'un système dynamique . . . . .	2
2.1.1	Justification de l'existence des trajectoires . . . . .	2
2.2	Point d'équilibre et stabilité . . . . .	3
2.2.1	Système dynamique linéaire . . . . .	3
2.2.2	Linéarisation au voisinage d'un état d'équilibre . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Contrôle</b>	<b>4</b>
3.1	Définition d'un système de contrôle . . . . .	4
3.2	Système de contrôle linéaire autonome . . . . .	5
3.3	Linéarisation autour d'un état d'équilibre . . . . .	5
3.4	Stabilisation par contrôle . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Pendule double inversé</b>	<b>7</b>
4.1	Formalisme géométrique . . . . .	7
4.2	Application au pendule double inversé . . . . .	8
4.3	Simulations . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>9</b>

## 1 Introduction

Un système dynamique est un système évoluant dans le temps selon une loi bien déterminée. Des exemples courants sont donnés par des systèmes physiques dont l'état est caractérisé par  $n$  variables scalaires, dont l'évolution est déterminée par un *système différentiel*. Il est courant de pouvoir agir sur ces systèmes via ce qu'on appelle un *contrôle*. La question naturelle qui se pose alors est de savoir si, pour tout couple d'états  $(A, B)$  du système, on peut trouver un contrôle l'amenant de l'état  $A$  à l'état  $B$ . La réponse à ce type de question est apportée par la *théorie du contrôle*, développée en grande partie pendant le XXe siècle notamment par Pontriaguine [1] et Kalman [2].

Une autre question d'intérêt est de savoir s'il est possible de contrôler un système de manière à *stabiliser* un état instable. On peut par exemple penser à un stylo qu'on mettrait à la verticale sur notre index et qu'on essaierait de stabiliser à l'aide de petits mouvements.

Notre objectif ici est de démontrer la possibilité de stabiliser un pendule double inversé en concevant un contrôle simple et explicite, suivi de simulations pour illustrer nos résultats.

Pour cela, nous commencerons par présenter les concepts et les outils fondamentaux de la théorie des systèmes dynamiques et du contrôle. Ensuite, nous les mettrons en application en utilisant un formalisme de géométrie riemannienne [3, 4] pour analyser le pendule double inversé.

Je tiens à remercier chaleureusement Amaury Hayat, qui m'a suivi durant tout ce projet en me guidant via d'excellentes ressources, de très bons conseils et en me partageant son expérience. Je souhaite aussi remercier Éric Cancès, qui m'a encouragé à participer au Prix Fermat Junior.

## 2 Système dynamique différentiel

Nous commençons par définir de manière formelle ce qu'est un système dynamique en temps continu dont l'évolution est décrite par un système d'équations différentielles. Ensuite, nous abordons la notion de point d'équilibre et nous formalisons le concept de stabilité.

### 2.1 Définition d'un système dynamique

On se donne  $T \in ]0, +\infty]$ <sup>1</sup> et  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  alors l'équation suivante

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in [0, T], x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

est ce qu'on appellera ici un *système dynamique*, où  $\mathbb{R}^d$  est l'*espace des phases*, c'est à dire l'espace des états,  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  est l'état initial,  $x(t) \in \mathbb{R}^d$  est l'état du système à l'instant  $t$ , et  $f$  est la *dynamique* du système. De manière plus générale, l'espace décrivant l'ensemble des états possibles peut être un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  voir même une variété différentielle  $\mathcal{M}$ . Par souci de simplicité, notre présentation durant les parties 2 et 3 se concentrera dans le cas où l'espace des phases est  $\mathbb{R}^d$ .

Un cas particulier intéressant est celui où notre dynamique  $f$  ne dépend pas du temps. On dit alors que le système est *autonome*<sup>2</sup>, le système (1) s'écrit alors (avec  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ )

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \forall t \in [0, T], x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d. \quad (2)$$

Un exemple typique de système dynamique est le pendule simple<sup>3</sup>. L'état du pendule est caractérisé par  $(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$  (*position angulaire et vitesse angulaire*). Sa dynamique est  $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -\sin(x_1))$  et ainsi en écrivant  $\Theta = (\theta, \dot{\theta})$ , on obtient le système autonome suivant

$$(\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)) = (\dot{\theta}(t), -\sin(\theta(t))), \forall t \geq 0, \Theta(0) = (\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2.$$

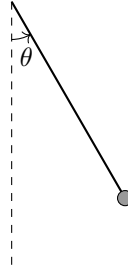


FIGURE 1 – Schéma d'un pendule simple

#### 2.1.1 Justification de l'existence des trajectoires

Pour que l'état  $x(t)$  soit défini pour tout  $t \in [0, T]$  il est nécessaire d'imposer des hypothèses sur  $f$ , une fois cela fait le théorème de Cauchy-Lipschitz global [5] nous assure l'existence et l'unicité des trajectoires en tout temps (*i.e. à une condition initiale est associée une unique trajectoire*). Le théorème donne ainsi une condition suffisante d'existence et d'unicité dans le cas autonome, il suffit que  $F$  soit  $C^1$  et que ses dérivées partielles soient bornées, car le théorème des accroissements finis montre alors que  $F$  est lipschitzienne. Ainsi par soucis de simplicité, on se placera dans ce cadre dans la suite.

Pour un système physique, l'unicité correspond à la notion de déterminisme : si l'état de départ de notre système est donné, il ne peut évoluer que d'une seule manière. Par exemple, la dynamique du pendule simple est bien  $C^1$  et donc les trajectoires sont bien définies.

---

1. Si  $T = +\infty$  alors on remplacera chaque occurrence de  $[0, T]$  par  $[0, +\infty[$   
2. On peut penser à n'importe quel système physique fermé dont les interactions extérieures sont fixées (gravité, champ électromagnétique, etc.)  
3. Ici et dans toute la suite, on prendra toutes les constantes physique égales à 1.

## 2.2 Point d'équilibre et stabilité

Dans cette section nous considérons un système dynamique autonome de la forme (2) avec  $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ . Remarquons que s'il existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$  tel que  $F(\bar{x}) = 0$  alors le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que si  $x_0 = \bar{x}$  alors

$$x(t) = \bar{x}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Donc le système reste dans le même état qui est alors qualifié *d'état d'équilibre*.<sup>4</sup>

Par exemple dans le cas du pendule simple on a clairement  $F(0, 0) = F(\pi, 0) = 0$  donc ces deux points sont des états d'équilibre, or intuitivement on sait bien qu'il existe une différence profonde entre ces deux points. Si l'on prend un état initial proche de  $(0, 0)$  on sait qu'il va rester proche de celui-ci, alors que ce ne serait pas forcément le cas pour  $(\pi, 0)$ . On dit du premier que c'est un état d'équilibre *stable* alors que le second ne l'est pas. Plus rigoureusement on dit que  $\bar{x}$  est stable si<sup>5</sup>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 \in B(\bar{x}, \delta), \forall t \in [0, T], x(t) \in B(\bar{x}, \varepsilon), \quad (3)$$

où  $B(x, r) = \{z \in \mathbb{R}^d \mid |x - z| < r\}$ . Sinon on dit qu'il est *instable* ou pas stable.

Maintenant on se place dans le cadre où  $T = +\infty$ , Un cas particulièrement intéressant d'état d'équilibre stable est lorsque celui-ci est attractif, c'est à dire que sur des temps longs, quel que soit l'état initial,  $x(t)$  tends vers  $\bar{x}$ . Plus rigoureusement, on dit qu'un état d'équilibre stable  $\bar{x}$  est *globalement asymptotiquement stable*, abrégé en *GAS*, si

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}. \quad (4)$$

Ce type d'attraction peut avoir lieu seulement localement. Ainsi, on dit qu'un état d'équilibre stable  $\bar{x}$  est *localement asymptotiquement stable*, abrégé en *LAS*, si

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in B(\bar{x}, \delta), \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}. \quad (5)$$

Maintenant la difficulté vient du fait que pour une dynamique  $F$  très générale, étudier la stabilité des états d'équilibre peut être compliqué. Ainsi nous allons voir un cas particulier de système dynamique où l'étude de la stabilité est simple, les *systèmes dynamiques linéaires*. Puis nous verrons comment localement, nous pouvons ramener l'étude de la stabilité des états d'équilibre de  $F$  à celle des systèmes linéaires.

### 2.2.1 Système dynamique linéaire

Un système dynamique de la forme (2) est dit linéaire si  $F$  l'est, c'est à dire s'il existe une matrice  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  telle que  $F(x) = Ax$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dans ce cadre, les propriétés de l'exponentielle de matrice couplé au théorème de Cauchy-Lipschitz assure que l'unique solution d'état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  est

$$\forall t \in [0, T], x(t) = e^{tA}x_0. \quad (6)$$

On s'intéresse au point d'équilibre  $\bar{x} = 0$ , si  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ , on a

$$\forall t \in [0, T], x(t) = (e^{t\lambda_1}x_{01}, \dots, e^{t\lambda_d}x_{0d}),$$

et ainsi il est clair que 0 est stable si et seulement si  $\lambda_i \leq 0$  pour tout  $i$  entre 1 et  $d$ , et si les inégalités précédentes sont strictes alors il est GAS. Maintenant on peut montrer que l'analyse précédente sur la stabilité est valable pour n'importe quelle matrice  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  en remplaçant les  $\lambda_i$  par les parties réelles des valeurs propres de  $A$  [6].

Une matrice  $A$  dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative est appelée matrice de *Hurwitz*.

4. On les désignera également comme des points d'équilibre dans certains contextes.

5. Dans ce type d'énoncé, il faut comprendre que  $x_0$  est l'état initial et que  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est l'unique trajectoire solution de (2).

### 2.2.2 Linéarisation au voisinage d'un état d'équilibre

Notre but est maintenant d'analyser la stabilité d'un état d'équilibre  $\bar{x}$  pour une dynamique  $F$  plus générale. Pour comprendre comment faire, nous allons mener un raisonnement intuitif.

On part d'un état initial  $x_0$  proche de  $\bar{x}$ , et on pose  $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$  pour tout  $t \in [0, T]$ . En faisant l'hypothèse que  $x(t)$  reste proche de  $\bar{x}$  et avec un développement à l'ordre 1 en  $\bar{x}$ , on obtient

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + o(\delta x(t)), \quad (7)$$

où  $A = DF(\bar{x})$  est la jacobienne de  $F$  en  $\bar{x}$ . Ainsi on appelle *système linéarisé* de (2) en  $\bar{x}$  le système dynamique linéaire dont la dynamique est  $A$ . L'équation (7) nous fait ainsi comprendre l'intérêt de l'étude du système linéarisé. On peut alors montrer rigoureusement que si  $A$  est Hurwitz,  $\bar{x}$  est LAS et que si  $A$  admet une valeur propre ayant une partie réelle strictement positive,  $\bar{x}$  est instable [5].

Reprenons l'exemple du pendule simple, avec le résultat précédent il est facile de montrer que  $(\pi, 0)$ , la position d'équilibre verticale avec la masse vers le haut, est instable. En effet on a

$$DF(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

or 1 est valeur propre de cette matrice.

Maintenant que l'on sait parler de point d'équilibre et de leur stabilité, on s'intéresse à savoir s'il est possible de contrôler notre système de manière à stabiliser un point d'équilibre instable, ainsi nous devons aborder la notion de *contrôle*. En sachant que notre but final est de stabiliser un pendule double inversé, système présenté en dernière partie.

## 3 Contrôle

Dans cette partie on s'attarde à définir la notion de système de contrôle, puis en suivant la même idée que la partie précédente nous traitons le cas linéaire, et nous essayons ensuite d'appliquer les résultats trouvés à des systèmes non-linéaires mais localement. Enfin nous traitons de la notion de stabilisation par contrôle en donnant les résultats essentiels qui nous serviront pour le pendule double inversé.

### 3.1 Définition d'un système de contrôle

Soit  $T > 0$ ,  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^k)$  alors la relation suivante

$$\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad x_u(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad (8)$$

est ce qu'on appelle un *système de contrôle*. Formellement un système de contrôle peut être vu comme une famille de systèmes dynamiques indexé par un ensemble de fonction et chaque élément de cet ensemble est ce qu'on appelle un contrôle. Pour bien faire comprendre que l'état du système à l'instant  $t$  dépend de  $u$ , on le notera parfois  $x_u(t)$ . Il est à noter que  $u(t) \in \mathbb{R}^k$ , ce qui signifie qu'on agit sur le système à l'aide de  $k$  variables scalaires (*forces, moments, vitesses, etc.*). Si  $f$  ne dépend pas de  $t$ , on notera  $F$  la dynamique du système de contrôle qui sera également dite autonome.

Un exemple de système de contrôle est le pendule simple inversé, le système est représenté sur la figure 2, le contrôle  $u$  représente ici l'accélération du carré gris. La dynamique est donnée par  $F : ((x_1, x_2), u) \rightarrow (x_2, \sin(x_1) + u \cos(x_1))$  et en posant  $\Theta(t) = (\theta(t), \dot{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^2$  l'état du pendule à l'instant  $t$  on obtient

$$(\dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)) = (\dot{\theta}, \sin(\theta(t)) + u(t) \cos(\theta(t))), \quad \forall t \geq 0, \quad \Theta(0) = (\theta_0, \dot{\theta}_0) \in \mathbb{R}^2.$$

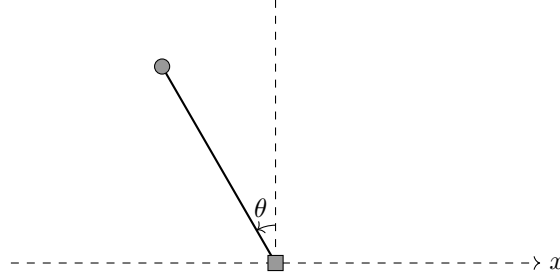


FIGURE 2 – Schéma d'un pendule simple inversé

De manière analogue à la section précédente, pour que les trajectoires existent et soit uniques il suffit d'imposer certaines conditions sur  $f$  qui sont données par des variantes du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour plus de détails voir [7]. Dans la suite nous nous placerons toujours dans un cadre où ces conditions sont vérifiées. La seule subtilité par rapport à la section précédente, c'est que les trajectoires  $x_u$  ne seront pas forcément  $C^1$  mais elles seront absolument continues<sup>6</sup> (*on note*  $AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$  *l'ensemble des fonctions absolument continues définies sur*  $[0, T]$  *à valeurs dans*  $\mathbb{R}^d$ ) et (8) sera alors vérifié presque partout sur  $[0, T]$  et pas forcément pour tout  $t$ . Nous ne nous attarderons pas sur cette subtilité.

Maintenant que nous avons défini ce qu'est un système de contrôle, une question qui vient naturellement à l'esprit est : À partir d'un état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , quel est l'ensemble des états que je peux atteindre en temps  $T$  ?

Pour mieux comprendre, commençons par le cas des systèmes linéaires autonomes.

### 3.2 Système de contrôle linéaire autonome

Le système de contrôle (8) est dit linéaire et autonome si  $f$  ne dépend pas de  $t$  (*on le note alors*  $F$ ), et si  $F(x, u) = Ax + Bu$  avec  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $B \in \mathbb{R}^{d \times k}$ .

Fixons un contrôle  $u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^k)$ , le premier avantage de ces systèmes est qu'il est possible d'exprimer l'unique trajectoire  $x_u \in AC([0, T]; \mathbb{R}^d)$  d'état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\forall t \in [0, T], \quad x_u(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) \, ds. \quad (9)$$

Dans ce cadre on dit que le système est contrôlable en temps  $T$  si pour tout état initial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  on a

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}^d, \quad \exists u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^k), \quad x_u(T) = x_1. \quad (10)$$

Le fait de pouvoir exprimer explicitement  $x_u$  permet de montrer que le système est contrôlable en temps  $T$  si et seulement si celui-ci respecte le critère suivant, appelé *critère de Kalman* [8],

$$\text{rang}(C) = d, \quad \text{où } C = (B, AB, \dots, A^{d-1}B). \quad (11)$$

La matrice  $C$  est appelé *matrice de Kalman*. Notons alors que la contrôlabilité d'un système linéaire ne dépend finalement pas de  $T$ , on parlera alors simplement de contrôlabilité. Intuitivement, cela est lié au fait qu'il n'y a pas de contrainte sur les valeurs que peut prendre notre contrôle, ainsi même sur un temps très court, celui-ci peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.<sup>7</sup>

### 3.3 Linéarisation autour d'un état d'équilibre

Revenons au cadre plus général d'un système de contrôle autonome, soit  $t \in [0, T]$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  un état initial, on pose

$$\mathcal{A}(t, x_0) = \{x_1 \in \mathbb{R}^d \mid \exists u \in L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^k), \quad x_u(t) = x_1\}. \quad (12)$$

6. Dire que  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$  est absolument continue signifie qu'il existe  $f \in L^1([0, T]; \mathbb{R}^d)$  telle que  $x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) \, ds$ , on peut alors montrer que  $x$  est continue et presque partout dérivable, et sa dérivée est égale à  $f$ .

7. Ce manque de réalisme peut être corrigé en imposant à chaque contrôle d'être à valeurs dans un compact fixé, mais nous n'en parlerons pas ici.

En général,  $\mathcal{A}(t, x_0) \neq \mathbb{R}^d$  et ainsi l'idée d'étudier la contrôlabilité globale est vaine mais par contre, supposons qu'en temps  $t$  nous puissions atteindre  $z \in \mathcal{A}(t, x_0)$ . Il est intéressant de se demander si pour tout  $y$  assez proche de  $z$  on peut atteindre  $y$ , c'est à dire  $y \in \mathcal{A}(t, x_0)$ . Ainsi on dit que le système est *localement contrôlable* à partir de  $x_0$ , en temps  $t$  et en  $z \in \mathcal{A}(t, x_0)$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(z, r) \subset \mathcal{A}(t, x_0)$ .

En étant guidé par la même intuition que dans la section deux, on définit un état d'équilibre du système de contrôle autonome comme un couple  $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$  tel que  $F(\bar{x}, \bar{u}) = 0$  (*remarquons alors que  $\bar{x} \in \mathcal{A}(t, \bar{x})$* ). Puis on définit le système linéarisé en  $(\bar{x}, \bar{u})$  comme

$$\delta \dot{x}(t) = DF_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x(t) + DF_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \delta x(0) = 0, \quad (13)$$

où  $DF_x(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  et  $DF_u(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{d \times k}$  sont les jacobiennes partielles<sup>8</sup> respectivement selon  $x$  et  $u$  de  $F$ , on pose  $A = DF_x(\bar{x}, \bar{u})$  et  $B = DF_u(\bar{x}, \bar{u})$ .

On peut alors montrer que si le système linéaire autonome (13) est contrôlable alors le système de contrôle non-linéaire est localement contrôlable à partir de  $\bar{x}$ , en  $\bar{x}$  et en tout temps [8]. Autrement dit quel que soit  $t \in ]0, T]$ , on peut trouver un  $r > 0$  tel que  $B(\bar{x}, r) \subset \mathcal{A}(t, \bar{x})$ . Intuitivement, cela signifie que pour tout  $t \in ]0, T]$  et tout état  $x_1 \in \mathbb{R}^d$  assez proche de  $\bar{x}$ , on peut trouver un contrôle  $u$  nous faisant partir de  $\bar{x}$  et nous amenant à  $x_1$  en temps  $t$ .

Notons que la stabilisation d'une position d'équilibre instable semble être liée à la notion de contrôlabilité locale. Car dans ce cadre, on part d'un état  $x_1 \in \mathbb{R}^d$  assez proche de  $\bar{x}$  et on cherche un contrôle  $u$  qui sur un temps long, nous amène à  $\bar{x}$ . En fait, dans la sous-section suivante nous allons voir que la contrôlabilité locale et une condition suffisante pour la stabilisation, mais voyons d'abord un exemple de système localement contrôlable.

On reprend l'exemple du pendule simple inversé et on s'intéresse à l'état d'équilibre  $((0, 0), 0)$ . On a alors

$$A = DF_x((0, 0), 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = DF_u((0, 0), 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi la matrice de Kalman du système linéarisé est  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , qui est inversible et donc le pendule simple inversé est localement contrôlable en  $((0, 0), 0)$ .

### 3.4 Stabilisation par contrôle

Ici  $T = +\infty$ , et on se place dans le cadre général d'un système de contrôle autonome qui admet un état d'équilibre  $(\bar{x}, \bar{u})$ . Notre but ici est de trouver un contrôle  $u$  de telle manière à ce que pour tout état initial  $x_0$  assez proche de  $\bar{x}$ ,  $x(t)$  tendent vers  $\bar{x}$  quand  $t$  tend vers l'infini. On se doute alors de deux choses :

- À un instant  $t$ ,  $u(t)$  doit clairement dépendre de l'état  $x(t)$  puisque le contrôle doit fonctionner pour toute condition initiale (*penser au pendule simple inversé*), ainsi  $u(t) = g(x(t))$  avec  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  qui est appelée *fonction de feedback*, c'est à dire que  $u$  doit être une fonction de  $x$ .
- On s'attend à ce que  $u(t)$  tende vers  $\bar{u}$  quand  $t$  tend vers l'infini.

Commençons par le cas d'un système de contrôle linéaire autonome. Dans ce cas on cherche une fonction de feedback elle aussi linéaire qu'on assimile à une matrice  $K \in \mathbb{R}^{k \times d}$ . Ainsi on obtient l'équation différentielle suivante (*avec  $u(t) = Kx(t)$* )

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

or on sait d'après 2.2.1 que si  $A + BK$  est Hurwitz alors toutes les trajectoires tendent vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini. Ainsi, on dira qu'un système de contrôle linéaire autonome est stabilisable asymptotiquement s'il existe  $K \in \mathbb{R}^{k \times d}$  tel que  $A + BK$  soit Hurwitz.

Maintenant, le *théorème de placement des pôles* [8] énonce que si  $A$  et  $B$  vérifient le critère de Kalman, alors pour tout polynôme unitaire  $P$  de degré  $d$ , on peut trouver  $K \in \mathbb{R}^{k \times d}$  tel que  $P$  soit le polynôme caractéristique de  $A + BK$ . Ainsi, en choisissant  $P = (X + 1)^d$ , le théorème assure que si un système de

8. Matrice dans la base canonique associé à une différentielle partielle.

contrôle linéaire autonome est contrôlable, alors il est stabilisable asymptotiquement.

Revenons maintenant au cas non-linéaire, on peut montrer que si le système linéarisé en  $(\bar{x}, \bar{u})$  est stabilisable asymptotiquement via une matrice de feedback  $K \in \mathbb{R}^{d \times k}$  alors en posant  $F_{sta} : (x, u) \mapsto F(x, u + K(x - \bar{x}))$ , le point  $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^{d+k}$  est LAS pour le système dynamique associé à  $F_{sta}$ . On dira finalement que le système de contrôle est *localement stabilisable asymptotiquement* en  $(\bar{x}, \bar{u})$ .

Pour conclure cette section, reprenons notre exemple fil rouge du pendule simple inversé. D'après les paragraphes précédents on sait alors que le système est localement asymptotiquement contrôlable et on vérifie qu'en prenant  $K = \begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$  on a

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul du polynôme caractéristique montre clairement que cette matrice est Hurwitz, donc  $K$  est une matrice de feedback permettant d'avoir une stabilisation.

## 4 Pendule double inversé

Nous commençons par présenter un formalisme géométrique pour certains systèmes dynamiques physiques, puis nous appliquons celui-ci au pendule double inversé et nous montrons qu'il est localement stabilisable asymptotiquement autour de son état d'équilibre instable tout en exhibant un contrôle réalisant cette stabilisation. Puis dans un second temps, nous simulons numériquement le système, d'abord sans contrôle puis avec celui trouvé en deuxième partie.

### 4.1 Formalisme géométrique

Pour un système dynamique physique, il est courant que l'ensemble des positions accessibles (*espace de configuration*) est une structure de variété différentielle  $\mathcal{M}$ <sup>9</sup>. Pour trouver la dynamique de ce type de système, une méthode géométrique efficace consiste à trouver une métrique  $g$  sur  $\mathcal{M}$  tel que pour tout  $(p, v) \in T\mathcal{M}$ ,  $T(p, v) = \frac{1}{2}|v|_g^2$  où  $T$  est l'énergie cinétique du système. Une telle métrique est alors entièrement déterminée par  $T$  et on l'appelle *métrique de masse*. Une fois cela fait, le lagrangien de notre système devient une fonction lisse définie sur  $T\mathcal{M}$  à valeurs réelles qui s'écrit

$$\forall (p, v) \in T\mathcal{M}, \mathcal{L}(p, v) = \frac{1}{2}|v|_g^2 - U(p), \quad (15)$$

où  $U$  est l'énergie potentielle du système qui est une fonction lisse sur  $\mathcal{M}$  à valeurs réelles. Il suffit alors de se donner un système de coordonnées locales  $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ <sup>10</sup> où la trajectoire s'écrit  $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ , la dynamique est alors donnée par les *équations d'Euler-Lagrange* (pour tout  $i$  avec  $1 \leq i \leq n$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0. \quad (16)$$

L'avantage de cette méthode est de pouvoir calculer les dérivées du lagrangien pour finalement arriver à l'équation exploitable suivante (pour tout  $k$  avec  $1 \leq k \leq n$ )

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = -g^{k\mu} \frac{\partial U}{\partial x^\mu}, \quad (17)$$

où les  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel. Physiquement, cette dernière équation correspond simplement au principe fondamental de la dynamique.

9. Ici  $\mathcal{M}$  est une variété de classe  $C^\infty$ , nous dirons alors qu'elle est lisse, ainsi une fonction  $C^\infty$  est appelée fonction lisse.

10. Dans cette sous-section on respectera toutes les notations et conventions usuelles de géométrie différentielle, notamment la convention d'Einstein.

## 4.2 Application au pendule double inversé

Le pendule double inversé est un système de contrôle, représenté sur la figure 3, dont l'état est décrit par quatre variables scalaires  $(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in \mathbb{R}^4$  représentant les positions et les vitesses angulaires, et le contrôle  $u \in \mathbb{R}$  représente l'accélération du point de fixation.

Dans le cas sans contrôle ( $u = 0$ ), l'espace de configuration du système est difféomorphe au tore  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (où  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ). En écrivant l'énergie cinétique du système en fonction des coordonnées angulaires, il est facile de trouver la métrique de masse  $g$  et, ensuite, de déterminer la dynamique du système via (17). Maintenant pour trouver la dynamique dans le cas avec contrôle, nous considérons temporairement le point de fixation dans notre système dynamique, ainsi notre espace de configuration devient  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  avec les coordonnées  $(\theta_1, \theta_2, x)$  où  $x$  est la position du point de fixation. Alors les deux premières équations de (17) nous donnent la dynamique du pendule double inversé avec contrôle, et celles-ci sont équivalentes au système suivant <sup>11</sup>

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 - 2u \cos(\theta_1) - 2 \sin(\theta_1) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0, \\ \ddot{\theta}_2 - u \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

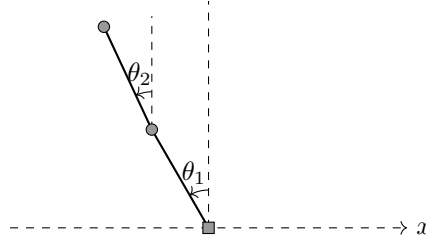


FIGURE 3 – Schéma d'un pendule double inversé

On vérifie que l'état  $((0, 0, 0, 0), 0)$  est un état d'équilibre, nous allons donc linéariser notre système de contrôle. En posant  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$  on obtient

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{\Theta}(t) = A\Theta(t) + Bu(t), \quad (19)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On montre que  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$  est une valeur propre de  $A$  et cela montre que notre état d'équilibre pour le pendule double inversé sans contrôle ( $u = 0$ ) est instable. Maintenant, on montre aisément que la matrice de Kalman du système est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

et puisqu'elle est inversible, on en déduit que notre système est localement contrôlable autour de sa position d'équilibre et donc localement stabilisable asymptotiquement en  $((0, 0, 0, 0), 0)$ . On cherche alors une matrice de feedback  $K \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$  réalisant cette stabilisation, une manière simple est de chercher  $K$  tel que le polynôme caractéristique de  $A + BK$  soit  $(X + 1)^4$ . On vérifie alors aisément que la matrice  $K = (-10 \frac{19}{2} - 4 \ 6)$  convient, ainsi le contrôle s'écrit

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) = -10\theta_1(t) + \frac{19}{2}\theta_2(t) - 4\dot{\theta}_1(t) + 6\dot{\theta}_2(t). \quad (20)$$

11. Ici nous présentons la dynamique du système sous la forme d'un système différentiel d'ordre 2 non résoluble, et non pas comme une équation du type  $\dot{x} = F(x)$ . En fait, on pourrait mettre la dynamique sous cette forme mais cela serait moins pratique, par soucis de concision nous admettrons que cela ne pose pas de problème.



### 4.3 Simulations

Nous présentons maintenant des résultats de simulations réalisées en python. Tous les codes que nous avons développés sont librement accessibles [9].

Un premier code simule des trajectoires du pendule double inversé dans l'espace physique et sur le tore. Pour comprendre ce deuxième cas, il suffit de plonger  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  et on peut alors visualiser les trajectoires du système sur le tore. Notons que ce code utilise le formalisme de la section 4.1 et l'équation (17) pour calculer les trajectoires, ce qu'il le rend facilement adaptable pour simuler d'autres types de systèmes dont la variété de configuration est de dimension deux.

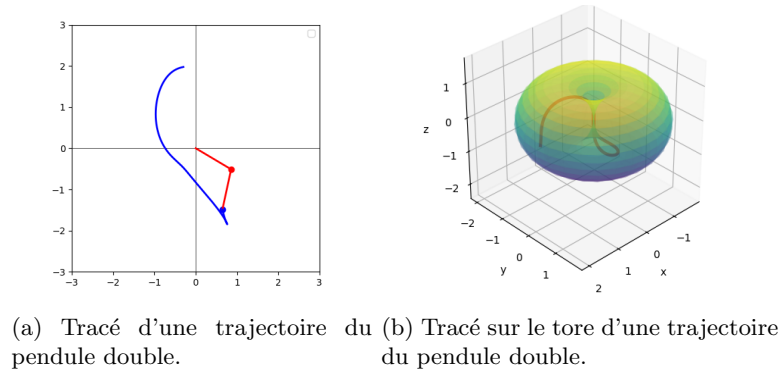


FIGURE 4 – Tracé de trajectoires

Un deuxième code simule le pendule double inversé avec contrôle, et on peut vérifier numériquement que pour un état initial assez proche de  $(0, 0, 0, 0)$ , le contrôle (20) stabilise bien le système. Assez remarquablement, nous avons réussi à stabiliser des états initiaux avec des écarts angulaires supérieurs à 0.2 radians, ce qui montre la robustesse du contrôle trouvé, car a priori, le bassin d'attraction du contrôle n'aurait pu être que pour des perturbations très petites, de l'ordre de  $10^{-3}$  radians par exemple.



FIGURE 5 – Stabilisation du pendule double inversé

La figure 5 est une capture d'écran d'une simulation de stabilisation, une vidéo de démonstration est disponible ici [10].

## 5 Conclusion

La théorie du contrôle est relativement récente. Elle se situe à la frontière entre le monde des mathématiques théoriques et appliquées. Elle trouve de nombreuses applications dans l'industrie et a connu des grands succès pratiques. Par exemple, la mission Apollo n'aurait pas pu aboutir sans les contributions de Kalman [11]. Ce que nous avons présenté ici n'est qu'une ébauche de la théorie. En particulier, l'exemple du pendule double inversé est principalement didactique, et les résultats que nous avons exposés s'appliquent à une classe bien plus large de systèmes de contrôle.

## Références

- [1] L.S. PONTYAGIN, V.G. BOLTYANSKIY, R.V. GAMKRELIDZE et E.F. MISHCHENKO : *Mathematical theory of optimal processes*. The Macmillan Company, 1964.
- [2] Rudolf E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 1960.
- [3] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2000.
- [4] John M. LEE : *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.
- [5] Morris W. HIRSCH et Stephen SMALE : *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [6] Emmanuel TRÉLAT : Contrôle optimal : théorie et applications. <https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/fichiers/livreopt.pdf>.
- [7] Alexandre ERN : Contrôle de modèles dynamiques. <http://cermics.enpc.fr/~ern/MAP434/poly.pdf>.
- [8] Jean-Michel CORON : *Control and nonlinearity*. American Mathematical Society, 2007.
- [9] Vincent BOULARD : [https://github.com/Mipoza/control\\_project](https://github.com/Mipoza/control_project).
- [10] Vincent BOULARD : <https://www.youtube.com/watch?v=q5J56JN3C2A>.
- [11] L.A. MCGEE et S.F. SCHMIDT : Discovery of the kalman filter as a pratical tool for aerospace and industry. <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19860003843/downloads/19860003843.pdf>.