Содержание

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В данной работе рассмотрен процесс парогравитационного дренажа в одномерной постановке. В отличии от традиционной задачи фильтрации считается, что скелет подвижен. Рассматривается одномерная область, расположенная вертикально. Она заполнена двумя подвижными фазами - песком и нефтью. Нефть при пластовой температуре имеет большую вязкость и практически не фильтруется. Через нижнюю границу подается горячий газ, который прогревает обаcть, вязкость нефти уменьшается, и песок приобретает подвижность и начинает двигаться относительно нефти под действием силы тяжести.

1.2 Обозначения

Индекс a = l, s, g обозначает ,соответственно, флюид, скелет и газ.

- θ_a — Объемная доля a-ой фазы
- ρ_a — Плотность a-ой фазы ($[\rho_a] = $ Кг/м^3)
- e_a — Плотность энергии a-ой фазы ($[e_a] = $ Дж/м^3)
- T — Температура ($[T] = $ К)
- λ — Коэффициент теплопроводности среды ($[\lambda] = $ Дж/(м с К))
- c_a — Плотность теплоемкости a-ой фазы ($[c_a] = $ Дж/К)
- V_a — Скорость a-ой фазы ($[V_a] = $ м/с)
- W — Скорость фильтрации ($[W] = $ м/с)
- h_a — плотность энтальпии ($[h_a] = $ Дж/м^3)
- ψ - отношение объемных долей двух фаз($\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$)

2 Математическая модель

2.1 Уравнения в эйлеровых координатах

Выпишем уравнения необходимые для решения задачи. Это уравнения непрерывности, уравнения сохранения энергии, и определяющее соотношение в виде закона Дарси. Введем следующие обозначения: z - вертикальная координата, t - время. Уравнения непрерывности, при условии отсутствия источников и постоянных плотностях выглядят следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta_g}{\partial t} + \frac{\partial V_g \theta_g}{\partial z} = 0\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь θ - объемная доля, V - скорость соответствующей фазы. Индексы l, s, g - соответственно флюид, твердая фаза и газ.

Сумма объемных долей всех фаз равна единице.

$$\theta_l + \theta_s + \theta_g = 1 \tag{2}$$

Считаем что источники энергии отсутствуют. A_g - работа сил тяжести. Тогда уравнение сохранения энергии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} = A_g \\ &E = \theta_l e_l + \theta_s e_s + \theta_g + e_g \\ &Q = \theta_l h_l V_l + \theta_s h_s V_s + \theta_g h_g V_g - \lambda \frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned} \tag{3}$$

2.2 Переход к Лагранжевым координатам

Перейдем к Лагранжевой координате dx связанной с твердой фазой

$$dx = \theta_s dz - \theta_s V_s dt \tag{4}$$

Чтобы переписать наши уравнения в лагранжевых координатах посмотрим как связаны дифференцирование по z и по x

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial(f,z)}{\partial(t,z)} \\
&\partial(f,z) = \frac{1}{\theta_s}\partial(f,x) + V_s\partial(f,t) \\
&\frac{\partial(f,z)}{\partial(t,z)} = \frac{1}{\theta_s}\frac{\partial(f,x)}{\partial(t,z)} + V_s\frac{\partial(f,t)}{\partial(t,z)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Для $f = t$

$$\partial(t,z) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x) + V_s\partial(t,t) = \frac{1}{\theta_s}\partial(t,x)$$

Из (5), используя предыдущее равенство получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial(f,x)}{\partial(t,x)} + V_s\theta_s\frac{\partial(f,t)}{\partial(t,x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x - V_s\theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \\
&\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_t = \theta_s\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t
\end{aligned} \tag{6}$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для твердой фазы. Переходим к новой переменной.

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t} - V_s\theta_s\frac{\partial\theta_s}{\partial x} + \theta_s\frac{\partial V_s\theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2}\frac{\partial\theta_s}{\partial t} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\theta_s} \tag{7}$$

2.3 Уравнения непрерывности в лагранжевых координатах

Применим полученные правила перехода к лагранжевой координате (6)

$$\frac{\partial\theta_l}{\partial t} - V_s\theta_s\frac{\partial\theta_l}{\partial x} + \theta_s\frac{\partial V_l\theta_l}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

Перепишем второй член ввиде $V_s\theta_s\frac{\partial\theta_l}{\partial x}=\theta_s\frac{\partial V_s\theta_l}{\partial x}-\theta_l\theta_s\frac{\partial V_s}{\partial x}$. Тогда получим

$$\frac{\partial\theta_l}{\partial t}-\theta_s\frac{\partial V_s\theta_l}{\partial x}+\theta_l\theta_s\frac{\partial\theta_l}{\partial x}+\theta_s\frac{\partial V_l\theta_l}{\partial x}=0 \tag{9}$$

К третьему члену применим выражение полученное из уравнения непрерывности твердой фазы (7) и сгруппируем члены, поделим все на θ_s.

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial\theta_l}{\partial t}+\theta_l\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\theta_s}-\frac{\partial V_s\theta_l}{\partial x}+\frac{\partial V_l\theta_l}{\partial x}=0 \tag{10}$$

После преобразования получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\theta_l}{\theta_s}+\frac{\partial(V_l-V_s)\theta_l}{\partial x}=0 \tag{11}$$

Повторив выкладки для пара и введя отношения объемных долей $\psi_l=\frac{\theta_l}{\theta_s}$, $\psi_g=\frac{\theta_g}{\theta_s}$ и скорости фильтрации как

$$\begin{aligned} W_l &= \theta_l(V_l-V_s) \\ W_g &= \theta_g(V_g-V_s) \end{aligned} \tag{12}$$

Получаем уравнения непрерывности в лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_l}{\partial t}+\frac{\partial W_l}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial\psi_g}{\partial t}+\frac{\partial W_g}{\partial x}=0 \end{aligned} \tag{13}$$

2.4 Уравнения Дарси

Напишем закон Ньютона для каждой фазы

$$\begin{aligned} \rho_l\theta_l\vec{a_l} &= -\theta_l\nabla P+\theta_l\rho_l\vec{g}+\vec{F}_{lg}+\vec{F}_{ls} \\ \rho_g\theta_g\vec{a_g} &= -\theta_g\nabla P+\theta_g\rho_g\vec{g}+\vec{F}_{gl}+\vec{F}_{gs} \\ \rho_s\theta_s\vec{a_s} &= -\theta_s\nabla P+\theta_s\rho_s\vec{g}+\vec{F}_{sg}+\vec{F}_{sl} \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $F_{ls}=-F_{sl}$, также для остальных сил трения. Пренебрежем ускорениями и сложим все три уравнения. Получим условие гидростатического равновесия.

$$\nabla P=(\theta_l\rho_l+\theta_s\rho_s+\theta_g\rho_g)\,\vec{g} \tag{15}$$

Теперь выпишем первое уравнение (14). Пренебрежем ускорением, силой трения газа о жидкость, и распишем силу трения жидкости о скелет более подробно. Она пропорциональна скорости движения жидкости относительно скелета.

$$\theta_l \nabla P = \theta_l \rho_l \vec{g} - A_{ls} * \left(\vec{V_l} - \vec{V_s}\right)$$

Учтем (12). Коэффициент A_{ls} состоит из части не зависящей от объемных долей фаз, и части наоборот зависящей от них. Обозначим первую за η_l, а вторую за $B(\theta_l, \theta_s)$ соответственно.

$$W_l = \frac{\theta_l^2 B(\theta_l, \theta_s)}{\eta_l} \left(-\nabla P + \rho_l \vec{g}\right) \tag{16}$$

Вспомним об условии гидростатического равновесия (15). Тогда

$$W_l = -\frac{k_l}{\eta_l} \left(\left(\rho_l \theta_l + \rho_g \theta_g + \rho_s \theta_s - \rho_l\right) g\right. \tag{17}$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned}
\theta_s &= \frac{1}{1 + \psi_l + \psi_g} \\
\theta_l &= \frac{\psi_l}{1 + \psi_l + \psi_g} \\
\theta_g &= \frac{\psi_g}{1 + \psi_l + \psi_g} \\
\psi_l &= \frac{\theta_l}{\theta_s} \\
\psi_g &= \frac{\theta_g}{\theta_s} \\
k_l &= \theta_l^2 \\
k_g &= \theta_g^2
\end{aligned} \tag{18}$$

Получаем некий аналог закона Дарси для данной задачи

$$\begin{aligned}
W_l &= -\frac{\psi_l^2}{\eta_l (1 + \psi_l + \psi_g)^3} ((\rho_s - \rho_l) + \psi_g (\rho_g - \rho_l)) g \\
W_g &= -\frac{\psi_g^2}{\eta_g (1 + \psi_l + \psi_g)^3} ((\rho_s - \rho_g) + \psi_l (\rho_l - \rho_g)) g
\end{aligned} \tag{19}$$

2.5 Уравнения сохранения энергии в лагранжевых координатах

Перепишем уравнение сохранения энергии (3) в лагранжевых переменных, применив полученные для них соотношения (5)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial Q}{\partial x} = P_g$$

Перегруппируем частные производные

$$\frac{1}{\theta_s}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q - V_s E) + E\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{1}{\theta_s} P_g$$

Распишем подробно E, Q, P_g ,применим равенство (7) ,перейдем от переменных θ к ψ и сгруппируем некоторые члены. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_l e_l + e_s + \psi_g V_f e_g) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e_l W_l + e_g W_g - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\theta_s\right) = \frac{1}{\theta_s} P_g - \frac{\partial}{\partial x}\left(P(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g)\right)$$

Далее покажем ,что правой частью можно пренебречь. Для этого преобразуем правую часть

$$\frac{1}{\theta_s} P_g - \frac{\partial}{\partial x}\left(P(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g)\right) = \frac{P_g}{\theta_s} - \theta_s \frac{\partial P}{\partial z}(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g) - \theta_s P \frac{\partial}{\partial z}(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g)$$

Покажем что последний член преобразованной правой части равен нулю. Используем уравнения непрерывности в Эйлеровых координатах

$$\theta_s P \frac{\partial}{\partial z}(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g = \frac{\partial}{\partial t}(\theta_l + \theta_s + \theta_g) = 0$$

Выражение в скобках - сумма объемных долей всех фаз равна единице. Следовательно производная по времени равна нулю.

От правой части остаются только 2 члена. Распишем их

$$\frac{P_g}{\theta_s} - \theta_s \frac{\partial P}{\partial z}(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g) = \theta_s W_l(\rho_l - \rho_s)g + \theta_s W_g(\rho_g - \rho_s)g$$

Получившееся величина это изменение потенциальной энергии вследствии движения фаз. Она очень мала по сравнению с тепловой энергией, поэтому ей можно пренебречь. Выпишем получившееся уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((\psi_l c_l + c_s + \psi_g c_g)T\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_l T W_l + c_g T W_g - \lambda\theta_s \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \tag{20}$$

2.6 Вязкость

Вязкость зависит от температуры по модельному экспоненциальному закону

$$\eta = e^{-\alpha(T - T_0)} \tag{21}$$

3 Численный метод

3.1 Блок фильтрации

Сначала в блоке фильтрации вычисляются вязкости в каждой ячейке как функции темпеатуры на предыдущем слое по времени.

$$\eta_i = e^{-\alpha(T_i^n - T_0)} \tag{22}$$

Далее вычисляются скорости фильтрации и отношения объемных долей на новом временном слое.

Для начала выпишем получившееся уравнения

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0$$

$$W_l = -\frac{\psi_l^2}{\eta_l(1+\psi_l+\psi_g)^3}((\rho_s-\rho_l)+\psi_g(\rho_g-\rho_l))g$$
$$W_g = -\frac{\psi_g^2}{\eta_g(1+\psi_l+\psi_g)^3}((\rho_s-\rho_g)+\psi_l(\rho_l-\rho_g))g$$

На очередном временном шаге вначале вычисляем скорости фильтрации в каждой ячейке, просто как функцию от ψ_l, ψ_g

$$W_{l\ i} = -\frac{\psi_{l\ i}^{n\ 2}}{\eta_l(1+\psi_{l\ i}^n+\psi_{g\ i}^n)^3}((\rho_s-\rho_l)+\psi_{g\ i}^n(\rho_g-\rho_l))g$$
$$W_{g\ i} = -\frac{\psi_{g\ i}^{n\ 2}}{\eta_g(1+\psi_{g\ i}^n+\psi_{l\ i}^n)^3}((\rho_s-\rho_g)+\psi_{l\ i}^n(\rho_l-\rho_g))g$$

Далее запишем для уравнений непрерывности схему Годунова???(Консервативную схему первого порядка).

$$\vec{\psi}^{n+1} = \vec{\psi}^{n} - \frac{\tau(\vec{W}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{W}_{i-\frac{1}{2}})}{h} \tag{23}$$

В качестве потока вещества на границах ячеек берем поток Хартена, Лакса, ван Лира(HLL). Считаем решением задачи Римана два разрыва идущих со скоростью a_l и a_r, причем $a_l < a_r$.

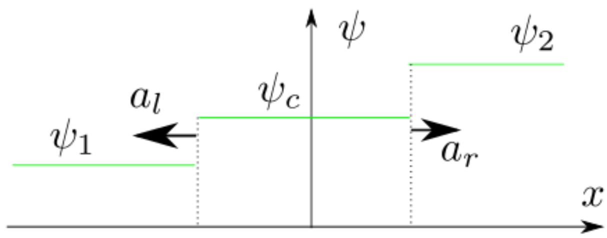

Рис. 1: Задача Римана

Тогда из законов сохранения поток на границе ячеек, в случае когда a_l и a_r разных знаков

$$F^* = \frac{F_l a_r - F_r a_l + a_r a_l (U_r - U_l)}{a_r - a_l} \tag{24}$$

Если a_l и a_r одного знака то мы просто сносим поток из ячейки справа или слева в зависимости от их знака.

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}} &= W_i,\ a_l > 0 \\ W_{i+\frac{1}{2}} &= W_{i+1},\ a_r < 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Если же имеют a_l и a_r разные знаки то берем поток HLL

$$W_{i+\frac{1}{2}} = \frac{W_i a_r - W_{i+1} r_l + a_r a_l (\psi_i - \psi_{i+1})}{a_r - a_l} \tag{26}$$

За скорости распространения разрывов берем максимально и минимально возможную скорость звука. Запишем систему ввиде

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

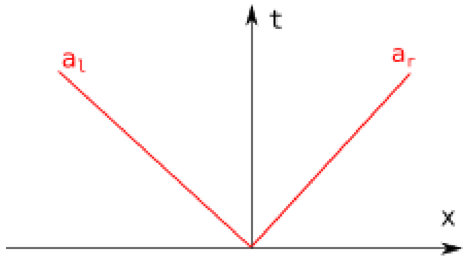

Рис. 2: a_r и a_l разных знаков

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} \\ \frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Чтобы найти собственные значения решаем квадратное уравнение. Получаем два собственных значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \end{aligned} \tag{29}$$

Ищем максимум и минимум собственных значений для всех возможных значений объемных долей: $a_l = min(\lambda_1(\theta_l, \theta_g)),\ a_r = max(\lambda_2(\theta_l, \theta_g))$

3.2 Блок энергии

В блоке энергии вычисляется температура в каждой ячейке на новом временном слое. Выпишем уравнение энергии в Лагранжевых координатах

$$\frac{\partial}{\partial t}((\psi_l c_l + c_s + \psi_g c_g)T) + \frac{\partial}{\partial x}\left(c_l T W_l + c_g T W_g - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0$$

Запишем для него схему Годунова???(Консервативную схему первого порядка).

$$T_i^{n+1} S_i^{n+1} = T_i^n S_i^n - \tau \frac{Q^l_{i+\frac{1}{2}} - Q^l_{i-\frac{1}{2}}}{h} - \tau \frac{Q^g_{i+\frac{1}{2}} - Q^g_{i-\frac{1}{2}}}{h} + \tau \frac{Q^\lambda_{i+\frac{1}{2}} - Q^\lambda_{i-\frac{1}{2}}}{h} \tag{30}$$

где за S_i^n обозначено ${\psi_l^n}_i c_l + c_s + {\psi_g^n}_i c_g$, за S_i^{n+1} обозначено ${\psi_l^{n+1}}_i c_l + c_s + {\psi_g^{n+1}}_i c_g$ за Q^l и Q^g

конвективные потоки тепла флюида и газа, за Q^{λ} поток тепла за счет теплопроводности.

Уже известны отношения объемных долей на текущем и предыдущем временном шаге, скорости фильтрации на границах ячеек и температура в ячейках на предыдущем шаге. Чтобы найти поток тепла на границе ячеек сносим температуру против потока.

$$\begin{aligned} Q^{l}_{i+\frac{1}{2}} &= W_{l\ i+\frac{1}{2}} T^{n}_{i+1},\ W_{l\ i+\frac{1}{2}} < 0 \\ Q^{l}_{i+\frac{1}{2}} &= W_{l\ i+\frac{1}{2}} T^{n}_{i},\ W_{l\ i+\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} Q^{g}_{i+\frac{1}{2}} &= W_{g\ i+\frac{1}{2}} T^{n}_{i+1},\ W_{g\ i+\frac{1}{2}} < 0 \\ Q^{g}_{i+\frac{1}{2}} &= W_{g\ i+\frac{1}{2}} T^{n}_{i},\ W_{g\ i+\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Для потока тепла за счет теплопроводности нужно вычислить объемную долю твердой фазы на границе ячеек $\theta_{s\ i+\frac{1}{2}}$. Так как твердая фаза тяжелее всего, то она может двигаться только вниз. Поэтому сносим её справа

$$Q^{\lambda}_{i+\frac{1}{2}} = \lambda \theta_{s\ i+1} \frac{T^{n}_{i+1} - T^{n}_{i}}{h} \tag{33}$$

4 Результаты расчетов

5 Расчеты на лабораторном симуляторе

6 Не вписано

Можно переписать систему в виде

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = A \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \tag{34}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} \\ \frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} &= -\frac{\psi_l(2\psi_g + 2 - \psi_l)(\psi_g(\rho_g - \rho_l) - \rho_l + \rho_s)}{\eta_l(\psi_g + \psi_l + 1)^4} g \\
\frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} &= -\frac{\psi_l^2(\rho_g(\psi_l + 1 - 2\psi_g) + \rho_l(2\psi_g + 2 - \psi_l) - 3\rho_s)}{\eta_l(\psi_g + \psi_l + 1)^4} g \\
\frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} &= -\frac{\psi_g^2(\rho_g(2\psi_l + 2 - \psi_g) + \rho_l(\psi_g - 2\psi_l + 1) - 3\rho_s)}{\eta_g(\psi_g + \psi_l + 1)^4} g \\
\frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} &= -\frac{\psi_g(2\psi_l + 2 - \psi_g)(\psi_l(\rho_l - \rho_g) - \rho_g + \rho_s)}{\eta_g(\psi_g + \psi_l + 1)^4} g
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Ищем собственные значения

$$
\lambda^2 - (W_1 + W_4)\lambda + W_1 W_4 - W_3 W_2 = 0 \tag{37}
$$

$$
D = (W_1 + W_4)^2 - 4(W_1 W_4 - W_3 W_2) \tag{38}
$$