

Содержание

1	Введение	2
1.1	Постановка задачи	2
1.2	Обозначения	2
2	Математическая модель	3
2.1	Уравнения в эйлеровых координатах	3
2.2	Переход к Лагранжевым координатам	3
2.3	Уравнения непрерывности в лагранжевых координатах	4
2.4	Уравнения Дарси	5
2.5	Уравнения сохранения энергии в лагранжевых координатах	7
2.6	Вязкость	8
3	Численный метод	8
3.1	Блок фильтрации	8
3.2	Блок энергии	10
4	Результаты расчетов	11
5	Расчеты на лабораторном симуляторе	11
6	Не вписано	11

1 Введение

1.1 Постановка задачи

В данной работе рассмотрен процесс парогравитационного дренажа в одномерной постановке. В отличие от традиционной задачи фильтрации считается, что скелет подвижен. Рассматривается одномерная область, расположенная вертикально. Она заполнена двумя подвижными фазами - песком и нефтью. Нефть при пластовой температуре имеет большую вязкость и практически не фильтруется. Через нижнюю границу подается горячий газ, который прогревает область, вязкость нефти уменьшается, и песок приобретает подвижность и начинает двигаться относительно нефти под действием силы тяжести.

1.2 Обозначения

Индекс $a = l, s, g$ обозначает, соответственно, флюид, скелет и газ.

- θ_a — Объемная доля a -ой фазы
- ρ_a — Плотность a -ой фазы ($[\rho_a] = \text{Кг/м}^3$)
- e_a — Плотность энергии a -ой фазы ($[e_a] = \text{Дж/м}^3$)
- T — Температура ($[T] = \text{К}$)
- λ — Коэффициент теплопроводности среды ($[\lambda] = \text{Дж/(м с К)}$)
- c_a — Плотность теплоемкости a -ой фазы ($[c_a] = \text{Дж/К}$)
- V_a — Скорость a -ой фазы ($[V_a] = \text{м/с}$)
- W — Скорость фильтрации ($[W] = \text{м/с}$)
- h_a — плотность энтальпии ($[h_a] = \text{Дж/м}^3$)
- ψ - отношение объемных долей двух фаз ($\psi = \frac{\theta_l}{\theta_s}$)

2 Математическая модель

2.1 Уравнения в эйлеровых координатах

Выпишем уравнения необходимые для решения задачи. Это уравнения непрерывности, уравнения сохранения энергии, и определяющее соотношение в виде закона Дарси. Введем следующие обозначения: z - вертикальная координата, t - время. Уравнения непрерывности, при условии отсутствия источников и постоянных плотностях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \frac{\partial V_l \theta_l}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial V_s \theta_s}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \theta_g}{\partial t} + \frac{\partial V_g \theta_g}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь θ - объемная доля, V - скорость соответствующей фазы. Индексы l, s, g - соответственно флюид, твердая фаза и газ.

Сумма объемных долей всех фаз равна единице.

$$\theta_l + \theta_s + \theta_g = 1\tag{2}$$

Считаем что источники энергии отсутствуют. A_g - работа сил тяжести. Тогда уравнение сохранения энергии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial z} &= A_g \\ E &= \theta_l e_l + \theta_s e_s + \theta_g e_g \\ Q &= \theta_l h_l V_l + \theta_s h_s V_s + \theta_g h_g V_g - \lambda \frac{\partial T}{\partial z}\end{aligned}\tag{3}$$

2.2 Переход к Лагранжевым координатам

Перейдем к Лагранжевой координате dx связанной с твердой фазой

$$dx = \theta_s dz - \theta_s V_s dt\tag{4}$$

Чтобы переписать наши уравнения в лагранжевых координатах посмотрим как свя-

заны дифференцирование по z и по x

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z &= \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} \\ \partial(f, z) &= \frac{1}{\theta_s} \partial(f, x) + V_s \partial(f, t) \\ \frac{\partial(f, z)}{\partial(t, z)} &= \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, z)} + V_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, z)}\end{aligned}\tag{5}$$

Для $f = t$

$$\partial(t, z) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x) + V_s \partial(t, t) = \frac{1}{\theta_s} \partial(t, x)$$

Из (5), используя предыдущее равенство получаем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z = \frac{\partial(f, x)}{\partial(t, x)} + V_s \theta_s \frac{\partial(f, t)}{\partial(t, x)}$$

Далее получаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_z &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x - V_s \theta_s \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_t &= \theta_s \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t\end{aligned}\tag{6}$$

Применим полученные равенства к уравнению непрерывности для твердой фазы. Переходим к новой переменной.

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial V_s \theta_s}{\partial x} = 0$$

Расписывая третий член, и сокращая подобные члены, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} + \frac{1}{\theta_s^2} \frac{\partial \theta_s}{\partial t} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\theta_s}\tag{7}$$

2.3 Уравнения непрерывности в лагранжевых координатах

Применим полученные правила перехода к лагранжевой координате (6)

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial \theta_l}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial V_l \theta_l}{\partial x} = 0\tag{8}$$

Перепишем второй член в виде $V_s \theta_s \frac{\partial \theta_l}{\partial x} = \theta_s \frac{\partial V_s \theta_l}{\partial x} - \theta_l \theta_s \frac{\partial V_s}{\partial x}$. Тогда получим

$$\frac{\partial \theta_l}{\partial t} - \theta_s \frac{\partial V_s \theta_l}{\partial x} + \theta_l \theta_s \frac{\partial \theta_l}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial V_l \theta_l}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

К третьему члену применим выражение полученное из уравнения непрерывности твердой фазы (7) и сгруппируем члены, поделим все на θ_s .

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_l}{\partial t} + \theta_l \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\theta_s} - \frac{\partial V_s \theta_l}{\partial x} + \frac{\partial V_l \theta_l}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

После преобразования получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\theta_l}{\theta_s} + \frac{\partial (V_l - V_s) \theta_l}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

Повторив выкладки для пара и введя отношения объемных долей $\psi_l = \frac{\theta_l}{\theta_s}$, $\psi_g = \frac{\theta_g}{\theta_s}$ и скорости фильтрации как

$$W_l = \theta_l (V_l - V_s) \quad (12)$$

$$W_g = \theta_g (V_g - V_s)$$

Получаем уравнения непрерывности в лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \frac{\partial W_l}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_g}{\partial t} + \frac{\partial W_g}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 Уравнения Дарси

Напишем закон Ньютона для каждой фазы

$$\begin{aligned} \rho_l \theta_l \vec{a}_l &= -\theta_l \nabla P + \theta_l \rho_l \vec{g} + \vec{F}_{lg} + \vec{F}_{ls} \\ \rho_g \theta_g \vec{a}_g &= -\theta_g \nabla P + \theta_g \rho_g \vec{g} + \vec{F}_{gl} + \vec{F}_{gs} \\ \rho_s \theta_s \vec{a}_s &= -\theta_s \nabla P + \theta_s \rho_s \vec{g} + \vec{F}_{sg} + \vec{F}_{sl} \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $F_{ls} = -F_{sl}$, также для остальных сил трения. Пренебрежем ускорениями и сложим все три уравнения. Получим условие гидростатического равновесия.

$$\nabla P = (\theta_l \rho_l + \theta_s \rho_s + \theta_g \rho_g) \vec{g} \quad (15)$$

Теперь выпишем первое уравнение (14). Пренебрежем ускорением, силой трения газа о жидкость, и распишем силу трения жидкости о скелет более подробно. Она пропорциональна скорости движения жидкости относительно скелета.

$$\theta_l \nabla P = \theta_l \rho_l \vec{g} - A_{ls} * (\vec{V}_l - \vec{V}_s)$$

Учтем (12). Коэффициент A_{ls} состоит из части не зависящей от объемных долей фаз, и части наоборот зависящей от них. Обозначим первую за η_l , а вторую за $B(\theta_l, \theta_s)$ соответственно.

$$W_l = \frac{\theta_l^2 B(\theta_l, \theta_s)}{\eta_l} (-\nabla P + \rho_l \vec{g}) \quad (16)$$

Вспомним об условии гидростатического равновесия (15). Тогда

$$W_l = -\frac{k_l}{\eta_l} ((\rho_l \theta_l + \rho_g \theta_g + \rho_s \theta_s - \rho_l) g) \quad (17)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{1}{1 + \psi_l + \psi_g} \\ \theta_l &= \frac{\psi_l}{1 + \psi_l + \psi_g} \\ \theta_g &= \frac{\psi_g}{1 + \psi_l + \psi_g} \\ \psi_l &= \frac{\theta_l}{\theta_s} \\ \psi_g &= \frac{\theta_g}{\theta_s} \\ k_l &= \theta_l^2 \\ k_g &= \theta_g^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Получаем некий аналог закона Дарси для данной задачи

$$\begin{aligned} W_l &= -\frac{\psi_l^2}{\eta_l (1 + \psi_l + \psi_g)^3} ((\rho_s - \rho_l) + \psi_g (\rho_g - \rho_l)) g \\ W_g &= -\frac{\psi_g^2}{\eta_g (1 + \psi_l + \psi_g)^3} ((\rho_s - \rho_g) + \psi_l (\rho_l - \rho_g)) g \end{aligned} \quad (19)$$

2.5 Уравнения сохранения энергии в лагранжевых координатах

Перепишем уравнение сохранения энергии (3) в лагранжевых переменных, применив полученные для них соотношения (5)

$$\frac{\partial E}{\partial t} - V_s \theta_s \frac{\partial E}{\partial x} + \theta_s \frac{\partial Q}{\partial x} = P_g$$

Перегруппируем частные производные

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q - V_s E) + E \frac{\partial V_s}{\partial x} = \frac{1}{\theta_s} P_g$$

Распишем подробно E , Q , P_g , применим равенство (7), перейдем от переменных θ к ψ и сгруппируем некоторые члены. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_l e_l + e_s + \psi_g V_f e_g) + \frac{\partial}{\partial x} \left(e_l W_l + e_g W_g - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \theta_s \right) = \frac{1}{\theta_s} P_g - \frac{\partial}{\partial x} (P(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g))$$

Далее покажем, что правой частью можно пренебречь. Для этого преобразуем правую часть

$$\frac{1}{\theta_s} P_g - \frac{\partial}{\partial x} (P(\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g)) = \frac{P_g}{\theta_s} - \theta_s \frac{\partial P}{\partial z} (\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g) - \theta_s P \frac{\partial}{\partial z} (\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g)$$

Покажем что последний член преобразованной правой части равен нулю. Используем уравнения непрерывности в Эйлеровых координатах

$$\theta_s P \frac{\partial}{\partial z} (\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g) = \frac{\partial}{\partial t} (\theta_l + \theta_s + \theta_g) = 0$$

Выражение в скобках - сумма объемных долей всех фаз равна единице. Следовательно производная по времени равна нулю.

От правой части остаются только 2 члена. Распишем их

$$\frac{P_g}{\theta_s} - \theta_s \frac{\partial P}{\partial z} (\theta_l V_l + \theta_s V_s + \theta_g V_g) = \theta_s W_l (\rho_l - \rho_s) g + \theta_s W_g (\rho_g - \rho_s) g$$

Получившееся величина это изменение потенциальной энергии вследствие движения фаз. Она очень мала по сравнению с тепловой энергией, поэтому ей можно пренебречь. Выпишем получившееся уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\psi_l c_l + c_s + \psi_g c_g)T) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_l T W_l + c_g T W_g - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0 \quad (20)$$

2.6 Вязкость

Вязкость зависит от температуры по модельному экспоненциальному закону

$$\eta = e^{-\alpha(T-T_0)} \quad (21)$$

3 Численный метод

3.1 Блок фильтрации

Сначала в блоке фильтрации вычисляются вязкости в каждой ячейке как функции температуры на предыдущем слое по времени.

$$\eta_i = e^{-\alpha(T_i^n - T_0)} \quad (22)$$

Далее вычисляются скорости фильтрации и отношения объемных долей на новом временном слое.

Для начала выпишем получившееся уравнения

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} = 0$$

$$W_l = -\frac{\psi_l^2}{\eta_l(1 + \psi_l + \psi_g)^3}((\rho_s - \rho_l) + \psi_g(\rho_g - \rho_l))g$$

$$W_g = -\frac{\psi_g^2}{\eta_g(1 + \psi_l + \psi_g)^3}((\rho_s - \rho_g) + \psi_l(\rho_l - \rho_g))g$$

На очередном временном шаге вначале вычисляем скорости фильтрации в каждой ячейке, просто как функцию от ψ_l, ψ_g

$$W_{l\ i} = -\frac{\psi_{l\ i}^2}{\eta_l(1 + \psi_{l\ i}^n + \psi_{g\ i}^n)^3}((\rho_s - \rho_l) + \psi_{g\ i}^n(\rho_g - \rho_l))g$$

$$W_{g\ i} = -\frac{\psi_{g\ i}^2}{\eta_g(1 + \psi_{g\ i}^n + \psi_{l\ i}^n)^3}((\rho_s - \rho_g) + \psi_{l\ i}^n(\rho_l - \rho_g))g$$

Далее запишем для уравнений непрерывности схему Годунова??? (Консервативную схему первого порядка).

$$\vec{\psi}^{n+1} = \vec{\psi}^n - \frac{\tau(\vec{W}_{i+\frac{1}{2}} - \vec{W}_{i-\frac{1}{2}})}{h} \quad (23)$$

В качестве потока вещества на границах ячеек берем поток Хартена, Лакса, ван Лира (HLL). Считаем решением задачи Римана два разрыва идущих со скоростью a_l и a_r , причем $a_l < a_r$.

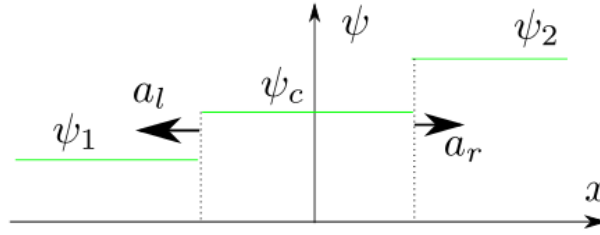


Рис. 1: Задача Римана

Тогда из законов сохранения поток на границе ячеек, в случае когда a_l и a_r разных знаков

$$F^* = \frac{F_l a_r - F_r a_l + a_r a_l (U_r - U_l)}{a_r - a_l} \quad (24)$$

Если a_l и a_r одного знака то мы просто сносим поток из ячейки справа или слева в зависимости от их знака.

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}} &= W_i, \quad a_l > 0 \\ W_{i+\frac{1}{2}} &= W_{i+1}, \quad a_r < 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Если же имеют a_l и a_r разные знаки то берем поток HLL

$$W_{i+\frac{1}{2}} = \frac{W_i a_r - W_{i+1} a_l + a_r a_l (\psi_i - \psi_{i+1})}{a_r - a_l} \quad (26)$$

За скорости распространения разрывов берем максимально и минимально возможную скорость звука. Запишем систему в виде

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

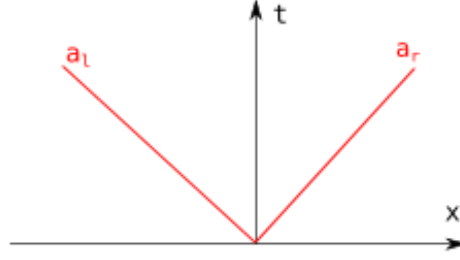


Рис. 2: a_r и a_l разных знаков

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} \\ \frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Чтобы найти собственные значения решаем квадратное уравнение. Получаем два собственных значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2} \end{aligned} \quad (29)$$

Ищем максимум и минимум собственных значений для всех возможных значений объемных долей: $a_l = \min(\lambda_1(\theta_l, \theta_g))$, $a_r = \max(\lambda_2(\theta_l, \theta_g))$

3.2 Блок энергии

В блоке энергии вычисляется температура в каждой ячейке на новом временном слое. Выпишем уравнение энергии в Лагранжевых координатах

$$\frac{\partial}{\partial t} ((\psi_l c_l + c_s + \psi_g c_g)T) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c_l T W_l + c_g T W_g - \lambda \theta_s \frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0$$

Запишем для него схему Годунова??? (Консервативную схему первого порядка).

$$T_i^{n+1} S_i^{n+1} = T_i^n S_i^n - \tau \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^l - Q_{i-\frac{1}{2}}^l}{h} - \tau \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^g - Q_{i-\frac{1}{2}}^g}{h} + \tau \frac{Q_{i+\frac{1}{2}}^\lambda - Q_{i-\frac{1}{2}}^\lambda}{h} \quad (30)$$

где за S_i^n обозначено $\psi_{li}^n c_l + c_s + \psi_{gi}^n c_g$, за S_i^{n+1} обозначено $\psi_{li}^{n+1} c_l + c_s + \psi_{gi}^{n+1} c_g$ за Q^l и Q^g

конвективные потоки тепла флюида и газа, за Q^λ поток тепла за счет теплопроводности.

Уже известны отношения объемных долей на текущем и предыдущем временном шаге, скорости фильтрации на границах ячеек и температура в ячейках на предыдущем шаге. Чтобы найти поток тепла на границе ячеек сносим температуру против потока.

$$\begin{aligned} Q_{i+\frac{1}{2}}^l &= W_{l\ i+\frac{1}{2}} T_{i+1}^n, \quad W_{l\ i+\frac{1}{2}} < 0 \\ Q_{i+\frac{1}{2}}^l &= W_{l\ i+\frac{1}{2}} T_i^n, \quad W_{l\ i+\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} Q_{i+\frac{1}{2}}^g &= W_{g\ i+\frac{1}{2}} T_{i+1}^n, \quad W_{g\ i+\frac{1}{2}} < 0 \\ Q_{i+\frac{1}{2}}^g &= W_{g\ i+\frac{1}{2}} T_i^n, \quad W_{g\ i+\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Для потока тепла за счет теплопроводности нужно вычислить объемную долю твердой фазы на границе ячеек $\theta_{s\ i+\frac{1}{2}}$. Так как твердая фаза тяжелее всего, то она может двигаться только вниз. Поэтому сносим её справа

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^\lambda = \lambda \theta_{s\ i+1} \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{h} \quad (33)$$

4 Результаты расчетов

5 Расчеты на лабораторном симуляторе

6 Не вписано

Можно переписать систему в виде

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = A \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial x} \quad (34)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} \\ \frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} & \frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} &= -\frac{\psi_l(2\psi_g + 2 - \psi_l)(\psi_g(\rho_g - \rho_l) - \rho_l + \rho_s)}{\eta_l(\psi_g + \psi_l + 1)^4}g \\
\frac{\partial W_l}{\partial \psi_g} &= -\frac{\psi_l^2(\rho_g(\psi_l + 1 - 2\psi_g) + \rho_l(2\psi_g + 2 - \psi_l) - 3\rho_s)}{\eta_l(\psi_g + \psi_l + 1)^4}g \\
\frac{\partial W_g}{\partial \psi_l} &= -\frac{\psi_g^2(\rho_g(2\psi_l + 2 - \psi_g) + \rho_l(\psi_g - 2\psi_l + 1) - 3\rho_s)}{\eta_g(\psi_g + \psi_l + 1)^4}g \\
\frac{\partial W_g}{\partial \psi_g} &= -\frac{\psi_g(2\psi_l + 2 - \psi_g)(\psi_l(\rho_l - \rho_g) - \rho_g + \rho_s)}{\eta_g(\psi_g + \psi_l + 1)^4}g
\end{aligned} \tag{36}$$

Ищем собственные значения

$$\lambda^2 - (W_1 + W_4)\lambda + W_1W_4 - W_3W_2 = 0 \tag{37}$$

$$D = (W_1 + W_4)^2 - 4(W_1W_4 - W_3W_2) \tag{38}$$