



Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia
Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

Definición 1. El rango de una matriz A de $m \cdot n$ es igual al $\min(m, n)$.

Propiedades de la multiplicación:

- 1) $(AB)C = A(BC)$
- 2) $A(B + C) = AB + AC$
- 3) $AB \neq BA$, en general

1.1 Operación determinante

Definición 2. Método de los Cofactores: Sea A una matriz de dimensiones $n \times n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij} , que es la matriz de orden $(n-1) \cdot (n-1)$ resultante de quitar la i -ésima fila y j -ésima columna de A . Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elementos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \quad \forall k \in 1, \dots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros

El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3} \lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda (\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

- 1) $|A| = |A^t|$,
- 2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,
- 3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,
- 4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 3. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \times n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A.

Propiedades:

- 1) $(A^{-1})^{-1} = A$
- 2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- 3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n \times m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

- 1) Involutiva: $(A^t)^t = A$
- 2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$
- 3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

Definición 4. Sea $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \times \mathbf{x}_n$$

Se dice que \mathbf{v} es *Combinación Lineal* del conjunto \mathbf{X} .

Definición 5. Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \times \mathbf{x}_n ,$$

es $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto \mathbf{X} está compuesto por vectores *Linealmente Independientes*.

En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

Observación. Por consecuencia

$$\exists \alpha_i / \mathbf{x}_k = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \times \mathbf{x}_n , \quad \mathbf{x}_k \in X$$

entonces X es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes*.

De esto también se desprende que $\mathbf{0}$ no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición 6. Sea S un subespacio de V , y sea $B = \{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_m\}$. Luego B es una **base de S** si:

1. $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_m$ son linealmente independientes.
2. $\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_m$ generan al subespacio S .

2.1 Transformación Lineal

Queremos encontrar una matriz A que al multiplicarla por las coordenadas de un vector \mathbf{v} en la base B_1 ($[\mathbf{v}]_{B_1}$) de como resultado el transformado de dicho vector escrito en base B_2 . Es decir:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1}$$

donde $T : V \rightarrow W$ tal que B_1 es base de V y B_2 es base de W

Teorema 2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos B_1 base de V y B_2 base de W . Existe una **única** matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1} \quad (1)$$

donde A se suele notar como $[T]_{B_1 \rightarrow B_2}$

Para obtener esta matriz sólo necesitamos calcular los transformados de la base $B_1 = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n\}$

$$\mathbf{A} = [T]_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(\mathbf{v}_1)]_{B_2} & [T(\mathbf{v}_2)]_{B_2} & \dots & [T(\mathbf{v}_n)]_{B_2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \quad (2)$$

Esta matriz toma vectores en base B_1 los transforma y devuelve sus coordenadas en base B_2 .

Teorema 3. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y $B_{1'}$ dos bases de V , y B_2 y $B_{2'}$ dos bases de W , donde $T : V \rightarrow W$, entonces

$$[T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}} = [B_2]_{B_{2'}} [T]_{B_1 \rightarrow B_2} [B_{1'}]_{B_1} \quad (3)$$

Observemos que por lo tanto, si llamo $\tilde{\mathbf{A}} = [T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}}$, entonces podemos escribir (3) como

$$\tilde{\mathbf{A}} = [B_2]_{B_{2'}} \cdot \mathbf{A} \cdot [B_{1'}]_{B_1} \quad (4)$$

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x+y, z)$. Si $B = (1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 0, 3)$ es una base de \mathbb{R}^3 , hallar $[T]_{B \rightarrow C}$ (siendo C la base canonica) y $[T(\mathbf{v})]_C$

Sabemos que

$$[T]_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1, 0, 2)]_C & [T(0, 2, 1)]_C & [T(0, 0, 3)]_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando la matriz hallada podemos obtener el vector transformado en base canonica

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{v})]_C &= [T]_{B \rightarrow C} \cdot [\mathbf{v}]_C \\ [T(\mathbf{v})]_C &= (5, 4) \end{aligned}$$

que puede ser verificado buscando $T(\mathbf{v})$.

2.2 Autovalores y Autovectores

Definición 7. Para una matriz A , un vector no nulo x se dice que es un autovector de A si

$$A \cdot x = \lambda x$$

Observación. Si partimos de la definición

$$Ax = \lambda x$$

entonces podemos operar de la siguiente forma

$$4 = 4$$

Observación. Podemos ver de la definición que los autovectores no son únicos, ya que si x es un autovector, entonces αx también lo es.

Teorema 4. Si λ es un autovalor de A entonces $\alpha + \lambda$ es un autovalor de $\alpha I + A$

Definición 8. Sea A una matriz de $n \times n$, y T una matriz no singular también de $n \times n$, y sea $\tilde{A} = T A T^{-1}$, entonces A y \tilde{A} se dicen *matrices semejantes*. Están relacionadas por la matriz de semejanza T .

Teorema 5. Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

Ejemplo:

Supongamos que tenemos