



Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia
Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

1.1 Operación determinante

Definición 1. Método de los Cofactores: Sea A una matriz de dimensiones $n \cdot n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij} , que es la matriz de orden $(n-1) \cdot (n-1)$ resultante de quitar la i -ésima fila y j -ésima columna de A . Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elementos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \quad \forall k \in 1, \dots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros

El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3} \lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda (\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

- 1) $|A| = |A^t|$,
- 2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,
- 3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,
- 4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 2. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \cdot n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A .

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n \cdot m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) Involutiva: $(A^t)^t = A$

2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

*Espacios Vectoriales y Transformaciones
Lineales*
