Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia

Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

Definición 1. El rango de una matriz A de $m \cdot n$ es igual al $min(m, n)$.

Propiedades de la multiplicación:

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $AB \neq BA$, en general

1.1 Operación determinante

Definición 2. **Método de los Cofactores:** Sea A una matriz de dimensiones $n \cdot n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij}, que es la matriz de orden $(n-1)\cdot(n-1)$ resultante de quitar la i-ésima fila y j-ésima columna de A. Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elemntos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk},\ \forall k \in 1, \ldots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros
El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3}\lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda\,(\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

1) $|A| = |A^t|$,

2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,

4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 3. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \cdot n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A.

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n \cdot m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) Involutiva: $(A^t)^t = A$

2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

Definición 4. Sea $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_1, x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x_n}$$

Se dice que $\boldsymbol{v}$ es *Combinación Lineal* del conjunto $\boldsymbol{X}$.

Definición 5. Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x_n} \ ,$$

es $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto $\boldsymbol{X}$ está compuesto por vectores *Linealmente Independientes.*
En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

 # Observación. Por consecuencia

$$\exists\ \alpha_i / \ \ \boldsymbol{x_k} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{x_n} \ , \ \ \boldsymbol{x_k} \in X$$

entonces X es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes.*
De esto también se desprende que **0** no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición 6. Sea S un subespacio de V, y sea $B = \{\boldsymbol{b_1 b_2} \ \ldots \boldsymbol{b_m}\}$. Luego B es una **base de S** si:

1. $\boldsymbol{b_1 b_2} \ \ldots \boldsymbol{b_m}$ son linealmente independientes.
2. $\boldsymbol{b_1 b_2} \ \ldots \boldsymbol{b_m}$ generan al subespacio S.