Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia

Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

Definición 1. El rango de una matriz A de $m \cdot n$ es igual al $min(m, n)$.

Propiedades de la multiplicación:

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $AB \neq BA$, en general

1.1 Operación determinante

Definición 2. **Método de los Cofactores:** Sea A una matriz de dimensiones $n \times n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij}, que es la matriz de orden $(n-1) \cdot (n-1)$ resultante de quitar la i-ésima fila y j-ésima columna de A. Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elemntos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \ \forall k \in 1, \ldots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros

El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3}\lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda\,(\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

1) $|A| = |A^t|$,

2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,

4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 3. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \times n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A.

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n{\times}m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) Involutiva: $(A^t)^t = A$

2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Definición 4. Sea $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}\}$ un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n}$$

Se dice que $\boldsymbol{v}$ es *Combinación Lineal* del conjunto $\boldsymbol{X}$.

Definición 5. Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n} \ ,$$

es $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto $\boldsymbol{X}$ está compuesto por vectores *Linealmente Independientes.*
En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

 # Observación. Por consecuencia

$$\exists\ \alpha_i / \ \ \boldsymbol{x_k} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n} \ , \ \ \boldsymbol{x_k} \in X$$

entonces X es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes.*
De esto también se desprende que $\mathbf{0}$ no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición 6. Sea S un subespacio de V, y sea $B = \{\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2} \ldots \boldsymbol{b_m}\}$. Luego B es una **base de S** si:

1. $\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2} \ldots \boldsymbol{b_m}$ son linealmente independientes.
2. $\boldsymbol{b_1}\boldsymbol{b_2} \ldots \boldsymbol{b_m}$ generan al subespacio S.

2.1 Transformación Lineal

Queremos enconrtar una matriz A que al multiplicarla por las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1 ($[\boldsymbol{v}]_{B1}$) de como resultado el transformado de dicho vector escrito en base B_2. Es decir:

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B2} = \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{v}]_{B1}$$

donde $T : V \to W$ tal que B_1 es base de V y B_2 es base de W

Teorema 2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos B_1 base de V y B_2 base de W. Existe una **única** matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B2} = \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{v}]_{B1} \tag{1}$$

donde A se suele notar como $[T]_{B1\to B2}$

Para obtener esta matriz sólamente necesitamos calcular los tranformados de la base $B_1 = \{\boldsymbol{v_1}\boldsymbol{v_2} \ldots \boldsymbol{v_n}\}$

$$\boldsymbol{A} = [T]_{B1\to B2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(\boldsymbol{v_1})]_{B2} & [T(\boldsymbol{v_2})]_{B2} & \ldots & [T(\boldsymbol{v_n})]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esta matriz toma vectores en base B_1 los transforma y devuelve sus coordenadas en base B_2.

Teorema 3. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y $B_{1'}$ dos bases de V, y B_2 y $B_{2'}$ dos bases de W, donde $T : V \to W$, entonces

$$[T]_{B_{1'} \to B_{2'}} = [B_2]_{B_{2'}} \, [T]_{B_1 \to B_2} \, [B_{1'}]_{B_1} \tag{3}$$

Observemos que por lo tanto, si llamo $\tilde{\boldsymbol{A}} = [T]_{B_{1'} \to B_{2'}}$ entonces podemos escribir (3) como

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [B_2]_{B_{2'}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot [B_{1'}]_{B_1} \tag{4}$$

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \ T(x, y, z) = (x + y, z)$. Si $B = \{(1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 0, 3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, hallar $[T]_{B \to C}$ (siendo C la base canonica) y $[T(\boldsymbol{v})]_C$ siendo $[\boldsymbol{v}]_B = [1, 2, 0]$

Sabemos que

$$[T]_{B \to C} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0,2)]_C & [T(0,2,1)]_C & [T(0,0,3)]_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando la matriz hallada podemos obtener el vector transformado en base canonica

$$[T(\boldsymbol{v})]_C = [T]_{B \to C} \cdot [\boldsymbol{v}]_B$$
$$[T(\boldsymbol{v})]_C = (5, 4)$$

que puede ser verificado buscando $T(\boldsymbol{v})$.

2.2 Autovalores y Autovectores

Definición 7. Para una matriz $\boldsymbol{A}$, un vector no nulo $\boldsymbol{x}$ se dice que es un autovector de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

 # Observación. Si partimos de la definición entonces podemos operar de la siguiente forma

$$\boldsymbol{0} = \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{0} = (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x}$$

y como $\boldsymbol{x}$ es no nulo, el sistema tiene una solución no trivial, por lo que

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \tag{5}$$

donde el determinante se llama *polinomio carácteristico*, y es un polinomio mónico de orden n.

Definición 8. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces:

1) λ es autovalor de $A \Leftrightarrow P(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ es decir, los autovalores son las raices del polinomio característico.

2) Si λ es autovalor de $A \Rightarrow$ las soluciones no nulas del sistema homogeneo $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ son los autovectores asociados a λ

 # Observación. Podemos ver de la definición que los autovectores no son únicos, ya que si $\boldsymbol{x}$ es un autovector, entonces $\alpha\boldsymbol{x}$ también lo es.

Teorema 4. Si λ es un autovalor de A entonces $\alpha + \lambda$ es un autovalor de $\alpha I + A$

Definición 9. Sea A una matriz de $n \times n$, y T una matriz no singular también de $n \times n$, y sea $\tilde{A} = T\ A\ T^{-1}$, entonces A y $\tilde{A}$ se dicen *matrices semejantes*. Están relacionadas por la matriz de semejanza T.

Teorema 5. Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

 # Observación. Como toda $TL\ T : V \to V$ tiene asociada una matriz $([T]_B)$, las definiciones de autovalores y autovectores también las podemos aplicar a una matriz.

Ejemplo:

Sea B una matriz triángular de orden 3×3 genérica, buscar sus autovalores y autovectores: Si llamamos

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

entonces el polinomio característico queda definido por $P(\lambda) = (\lambda - a)\cdot(\lambda - e)\cdot(\lambda - i)$ por lo tanto los autovalores de la matriz B son $\{a, e, i\}$.

Luego podemos obtener los autovectores planteando lo siguiente

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & e-\lambda & f \\ 0 & 0 & i-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

por lo que obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (a-\lambda)\cdot x_1 + b\cdot x_2 + c\cdot x_3 & = 0 \\ (e-\lambda)\cdot x_2 + f\cdot x_3 & = 0 \\ (i-\lambda)\cdot x_3 & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

que define al espacio de autovectores asociado al autovalor lambda.

2.3 Forma Canónica de Jordan

Sea $T : V \to V$, si el polinomio característico de T se factoriza completamente existe una base donde la transformación lineal viene dada por una matriz de "m bloques" $(m < n)$ con la siguiente forma.

$$J = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{A_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{A_m} \end{bmatrix}$$

donde cada $\boldsymbol{A_k}$ es un *bloque de Jordan*. Estos tienen una dimensión de $m \times m$, donde m es la *multiplicidad algebraica* del autovalor asociado.

$$\boldsymbol{A_k} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

luego cada autovector generalizado lo podemos generar con la siguiente regla. Sea A una matriz genérica de $n \times n$, entonces el i-esimo autovector generalizado puede ser escrito como:

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v_1} & = \lambda \boldsymbol{v_1} \\ A\boldsymbol{v_i} & = v_{i-1} + \lambda \boldsymbol{v_i}, \quad i > 1 \end{cases}$$

Ejemplo:

Supongamos que se quiere diagonalizar la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

luego su polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2$, es decir sus autovalores son -1 y 2. Ahora buscamos los espacios propios asociados a cada autovalor

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} y & = x \\ z & = 0 \end{cases}$$

es decir el primer espacio propio es $E_{\lambda=-1} = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} z & = x \\ y & = 0 \end{cases}$$

obteniendo el último espacio propio como $E_{\lambda=2} = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Como vemos el espacio propio de $\lambda = 2$ tiene una dimensión menor a su multiplicidad algebraica, por lo que no podría ser diagonalizable. Sin embargo Jordan nos proporciona una manera de encontrar una matriz de transformación A que aunque no es diagonal, cumple la propiedad de ser triangular.

Para esto Jordan nos dice que debemos encontrar un tercer vector, linealmente independiente a los vectores encontrados en los espacios propios. Lo hacemos con la regla ya mencionada,

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v_2} = v_2 A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} z & = 1 + x \\ y & = 0 \end{cases} \to \boldsymbol{v_2} = [1, 0, 2]$$

luego la matriz de similaridad P / $J = P^{-1}AP$ queda definida como

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definición 10. Sea un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

se definen las siguientes cantidades:

1) $0 < \xi \leq 1$: Relación de amortiguamiento

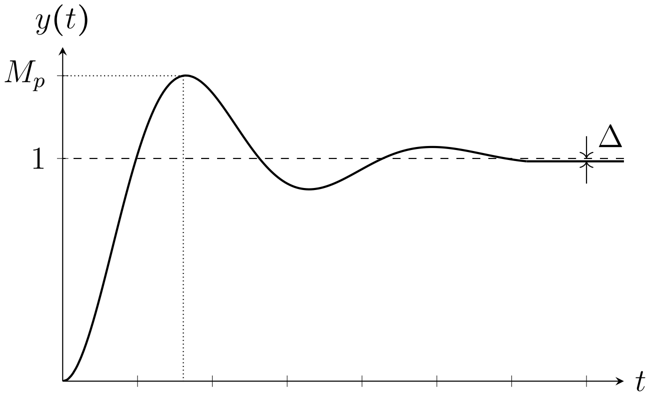
2) $\sigma = \xi\omega_n$: Parte real del par de polos

3) $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$: Parte imaginaria del par de polos

4) $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$: Par de polos

La respuesta temporal al escalón de este sistema es descripto por

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \cdot (\cos\omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d t)$$



Reglas para sistemas de 2do O:

1) $Ts = \frac{4.5}{\sigma}$

2) $M_p = 100\%\, exp(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}})$

Ahora queremos encontrar un modelo de función transferencia discreta que imite el modelo de tiempo continuo. Por lo tanto, definimos:

$$y[k] = y[kT] = 1 - (\underbrace{e^{-\sigma T}}_{a})^k\ (\cos k\ \overbrace{\omega_d T}^{b} + \frac{\sigma}{\omega_d}\sin\omega_d kT) \tag{7}$$

Secuencia	$\longrightarrow$	Transformada $\mathcal{Z}$
$a^k \sin bk$		$\frac{az\sin b}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$
$a^k \cos bk$		$\frac{z(z - a\cos b)}{z^2 - 2az\cos b + a^2}$

Donde la transformada buscada es

$$\mathcal{Z}\{y[k]\} = \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\mathcal{Z}\{u(t)\}} \cdot G(z)$$

Luego aplicando Transformada $\mathcal{Z}$ a la ecuación (7) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z) &= \frac{z}{z-1} - z\cdot[\frac{\overbrace{z - a\cos(\omega_d T)}^{\eta_1(z)}}{z^2 - 2e^{-\sigma T}z\cos\omega_d T + e^{-2\sigma T}} + \frac{\sigma}{\omega_d}\frac{\overbrace{a\sin\omega_d T}^{\eta_2(z)}}{\Delta(z^2)}] \\ &= \frac{z}{z-1}\underbrace{\frac{N(z)}{(z^2 - 2az\cos\omega_d T + a^2)}}_{G(z)}\end{aligned} \tag{8}$$

por lo tanto, los polos del sistema muestreado son

$$z^2 - 2az\cos\omega_d T + a^2$$

donde

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= a\cos\omega_d T \pm ja\sqrt{1-\cos^2\omega_d T} \\ &= \left(e^{-\sigma T}\right)\cdot\left(e^{\pm j\omega_d T}\right) \\ |z_{1,2}| &= e^{-\sigma T} \end{aligned} \tag{9}$$

Es decir que la parte real de los polos en el plano "s" controla la magnitud de los polos en el plano "z".

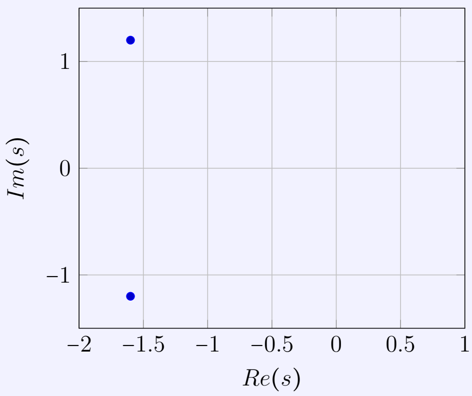
Ejemplo:

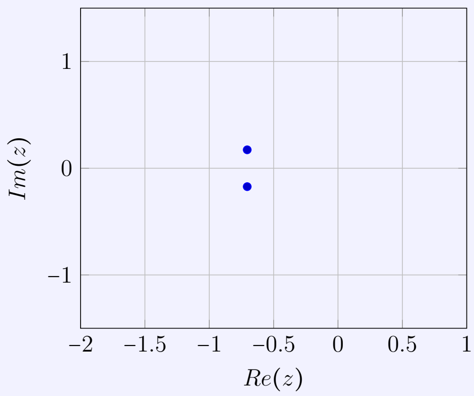
Sea $G(s) = \dfrac{4}{s^2 + 3\cdot 2s + 4}$, entonces $\xi = 0.8,\ \omega_n = 2,\ T_s = 4.5/1.6 \simeq 2.8seg,\ M_p = 1.5\%$

$s_{1,2} = -1.6 \pm j1.2$

Elijamos como periodo $T = 0.2$seg, es decir, tendriamos 14 muestras hasta el tiempo de establecimiento T_s.

$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = 0.7053 \pm j0.1726$





3.1 Formas Canónicas

En esta sección vamos a buscar las matrices de control estándar para una ecuación diferencial general, que puede contemplar distintos aspectos respecto a su forma de construirse. Para esta subsección los resultados están paraemtrizados tanto para sistemas continuos, como para sistemas discretos con las siguientes ecuaciones diferenciales (o a diferencias):

Caso continuo: $\boxed{y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = b_0 u^n(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_n u(t)}$

Caso discreto: $\boxed{y[k] + a_1 y[k-1] + \cdots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + \cdots + b_n u[k-n]}$

Cuyas funciones transferencia son

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

En el caso general las ecuaciones de estado se describen como

$$\underline{\text{Caso Contínuo:}} \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} & = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\,u(t) \\ y(t) & = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}\,u(t) \end{cases} \quad \underline{\text{Caso Discreto:}} \begin{cases} \boldsymbol{x}[k+1] & = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{b}\,u[k] \\ y[k] & = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{d}\,u[k] \end{cases} \tag{10}$$

luego podemos plantear las siguientes matrices de estados, llamadas canónicas.

Forma Canónica de Observabilidad

$$\boldsymbol{A_o} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b_o} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1\,b_0 \\ b_2 - a_2\,b_0 \\ b_3 - a_3\,b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n\,b_0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c:o} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d_o} = b_0$$

Forma Canónica de Controlabilidad

$$\boldsymbol{A_c} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b_c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c_c} = \begin{bmatrix} b_1 - a_1\,b_0 & b_2 - a_2\,b_0 & \cdots & b_n - a_n\,b_0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{d_c} = b_0$$

Ejemplo:

Podemos escribir la función transferencia discreta,

$$H(z) = \frac{2z + 4z + 4}{z^2 + 2z},$$

observando que $b_0 = 2, b_1, b_2 = 4, a_1 = 2, a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\dot{\boldsymbol{x}}[k+1] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}[k] + 2u[k]$$

3.2 Transformaciones de Canon

Si aplicamos la teoría de la sección () entonces podemos transformar las matrices de control planteando

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x} \;\text{ o también }\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$$

desde donde podemos demostrar que

$$
\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} \\
\bar{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{T}\boldsymbol{b} \\
\bar{\boldsymbol{c}} &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{T}^{-1} \\
\bar{b} &= b
\end{aligned}
$$

Matriz de transición de estados

Volviendo al mismo sistema