Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia

Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

Definición 1. El rango de una matriz A de $m \cdot n$ es igual al $min(m, n)$.

Propiedades de la multiplicación:

1) $(AB)C = A(BC)$

2) $A(B + C) = AB + AC$

3) $AB \neq BA$, en general

1.1 Operación determinante

Definición 2. **Método de los Cofactores:** Sea A una matriz de dimensiones $n \times n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij}, que es la matriz de orden $(n-1) \cdot (n-1)$ resultante de quitar la i-ésima fila y j-ésima columna de A. Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elemntos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \ \forall k \in 1, \ldots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros
El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3} \lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda \, (\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

1) $|A| = |A^t|$,

2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,

3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,

4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 3. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \times n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A.

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n \times m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) Involutiva: $(A^t)^t = A$

2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

Definición 4. Sea $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n}$$

Se dice que $\boldsymbol{v}$ es *Combinación Lineal* del conjunto $\boldsymbol{X}$.

Definición 5. Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n} \ ,$$

es $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto $\boldsymbol{X}$ está compuesto por vectores *Linealmente Independientes.*
En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

 # Observación. Por consecuencia

$$\exists\ \alpha_i / \ \ \boldsymbol{x_k} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{x_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{x_2} + \cdots + \alpha_n \times \boldsymbol{x_n} \ , \ \ \boldsymbol{x_k} \in X$$

entonces X es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes.*
De esto también se desprende que $\mathbf{0}$ no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición 6. Sea S un subespacio de V, y sea $B = \{\boldsymbol{b_1} \boldsymbol{b_2} \ \dots \boldsymbol{b_m}\}$. Luego B es una **base de S** si:

1. $\boldsymbol{b_1} \boldsymbol{b_2} \ \dots \boldsymbol{b_m}$ son linealmente independientes.
2. $\boldsymbol{b_1} \boldsymbol{b_2} \ \dots \boldsymbol{b_m}$ generan al subespacio S.

2.1 Transformación Lineal

Queremos enconrtar una matriz A que al multiplicarla por las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en la base B_1 ($[\boldsymbol{v}]_{B1}$) de como resultado el transformado de dicho vector escrito en base B_2. Es decir:

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B2} = \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{v}]_{B1}$$

donde $T : V \to W$ tal que B_1 es base de V y B_2 es base de W

Teorema 2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos B_1 base de V y B_2 base de W. Existe una **única** matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B2} = \boldsymbol{A} \cdot [\boldsymbol{v}]_{B1} \tag{1}$$

donde A se suele notar como $[T]_{B1\to B2}$

Para obtener esta matriz sólamente necesitamos calcular los tranformados de la base $B_1 = \{\boldsymbol{v_1 v_2} \ldots \boldsymbol{v_n}\}$

$$\boldsymbol{A} = [T]_{B1\to B2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(\boldsymbol{v_1})]_{B2} & [T(\boldsymbol{v_2})]_{B2} & \ldots & [T(\boldsymbol{v_n})]_{B2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esta matriz toma vectores en base B_1 los transforma y devuelve sus coordenadas en base B_2.

Teorema 3. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y $B_{1'}$ dos bases de V, y B_2 y $B_{2'}$ dos bases de W, donde $T : V \to W$, entonces

$$[T]_{B_{1'}\to B_{2'}} = [B_2]_{B_{2'}}\ [T]_{B_1\to B_2}\ [B_{1'}]_{B_1} \tag{3}$$

Observemos que por lo tanto, si llamo $\tilde{\boldsymbol{A}} = [T]_{B_{1'}\to B_{2'}}$ entonces podemos escribir (3) como

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = [B_2]_{B_{2'}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot [B_{1'}]_{B_1} \tag{4}$$

Ejemplo:
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 /\ T(x, y, z) = (x+y, z)$. Si $B = \{(1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 0, 3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, hallar $[T]_{B\to C}$ (siendo C la base canonica) y $[T(\boldsymbol{v})]_C$ siendo $[\boldsymbol{v}]_B = [1, 2, 0]$

Sabemos que

$$[T]_{B\to C} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1,0,2)]_C & [T(0,2,1)]_C & [T(0,0,3)]_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando la matriz hallada podemos obtener el vector transformado en base canonica

$$[T(\boldsymbol{v})]_C = [T]_{B\to C} \cdot [\boldsymbol{v}]_B$$
$$[T(\boldsymbol{v})]_C = (5, 4)$$

que puede ser verificado buscando $T(\boldsymbol{v})$.

Definición 7. Para una matriz $\boldsymbol{A}$, un vector no nulo $\boldsymbol{x}$ se dice que es un autovector de $\boldsymbol{A}$ si

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

 # Observación. Si partimos de la definición entonces podemos operar de la siguiente forma

$$\mathbf{0} = \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$
$$\mathbf{0} = (\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x}$$

y como $\boldsymbol{x}$ es no nulo, el sistema tiene una solución no trivial, por lo que

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0 \tag{5}$$

donde el determinante se llama *polinomio carácteristico*, y es un polinomio mónico de orden n.

Definición 8. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces:

1) λ es autovalor de $A \Leftrightarrow P(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$ es decir, los autovalores son las raices del polinomio característico.

2) Si λ es autovalor de $A \Rightarrow$ las soluciones no nulas del sistema homogeneo $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ son los autovectores asociados a λ

 # Observación. Podemos ver de la definición que los autovectores no son únicos, ya que si $\boldsymbol{x}$ es un autovector, entonces $\alpha \boldsymbol{x}$ también lo es.

Teorema 4. Si λ es un autovalor de A entonces $\alpha + \lambda$ es un autovalor de $\alpha I + A$

Definición 9. Sea A una matriz de $n \times n$, y T una matriz no singular también de $n \times n$, y sea $\tilde{A} = T\ A\ T^{-1}$, entonces A y $\tilde{A}$ se dicen *matrices semejantes*. Están relacionadas por la matriz de semejanza T.

Teorema 5. Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

 # Observación. Como toda $TL\ T : V \to V$ tiene asociada una matriz $([T]_B)$, las definiciones de autovalores y autovectores también las podemos aplicar a una matriz.

Ejemplo:
Sea B una matriz triángular de orden 3×3 genérica, buscar sus autovalores y autovectores: Si llamamos

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

entonces el polinomio característico queda definido por $P(\lambda) = (\lambda - a) \cdot (\lambda - e) \cdot (\lambda - i)$ por lo tanto los autovalores de la matriz B son $\{a, e, i\}$

Luego podemos obtener los autovectores planteando lo siguiente

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & e-\lambda & f \\ 0 & 0 & i-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

por lo que obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (a-\lambda) \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = 0 \\ (e-\lambda) \cdot x_2 + f \cdot x_3 & = 0 \\ (i-\lambda) \cdot x_3 & = 0 \end{cases} \tag{6}$$

que define al espacio de autovectores asociado al autovalor lambda.