



Universidad Nacional del Sur

**Apuntes de materia**  
Control Moderno

Filsinger Miqueas

# Matrices

**Definición 1.** El rango de una matriz  $A$  de  $m \cdot n$  es igual al  $\min(m, n)$ .

**Propiedades de la multiplicación:**

- 1)  $(AB)C = A(BC)$
- 2)  $A(B + C) = AB + AC$
- 3)  $AB \neq BA$ , en general

## 1.1 Operación determinante

**Definición 2. Método de los Cofactores:** Sea  $A$  una matriz de dimensiones  $n \times n$ , podemos entonces calcular el determinante de  $A$  ( $\det(A)$  o  $|A|$ ) como sigue. Definimos el cofactor de fila  $i$  y columna  $j$  como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

donde  $|M_{ij}|$  es el determinante de la matriz  $M_{ij}$ , que es la matriz de orden  $(n-1) \cdot (n-1)$  resultante de quitar la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna de  $A$ . Luego el determinante de  $A$  es la suma de los productos de los elementos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \cdots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \quad \forall k \in 1, \dots, n.$$

### Ejemplo: Filas o columnas de ceros

El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3} \lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda (\sigma^2 - \omega^2).$$

**Propiedades:** Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas, entonces

- 1)  $|A| = |A^t|$ ,
- 2)  $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ ,
- 3)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ,
- 4) Si  $A$  es triangular o diagonal entonces  $|A|$  es igual al producto de su diagonal principal.

## 1.2 Operación inversa

---

**Definición 3.** Si  $A$  es una matriz no nula de dimensión  $n \times n$  entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde  $Adj(A)$  es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de  $A$ .

**Propiedades:**

**1)**  $(A^{-1})^{-1} = A$

**2)**  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

**3)**  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Teorema 1.** Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

## 1.3 Operación Trasposición

---

La trasposición de una matriz  $(n \times m)$ , rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma  $(m \cdot n)$ .

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

**Propiedades:**

**1)** Involutiva:  $(A^t)^t = A$

**2)** Distributiva:  $(A + B)^t = A^t + B^t$

**3)** Producto:  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

# Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

---

**Definición 4.** Sea  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n$$

Se dice que  $\mathbf{v}$  es *Combinación Lineal* del conjunto  $\mathbf{X}$ .

**Definición 5.** Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n,$$

es  $\alpha_i = 0$ , entonces se dice que el conjunto  $\mathbf{X}$  está compuesto por vectores *Linealmente Independientes*.

En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

**# Observación.** Por consecuencia

$$\exists \alpha_i / \mathbf{x}_k = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}$$

entonces  $\mathbf{X}$  es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes*.

De esto también se desprende que  $\mathbf{0}$  no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

**Definición 6.** Sea  $S$  un subespacio de  $V$ , y sea  $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ . Luego  $B$  es una **base** de  $S$  si:

1.  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$  son linealmente independientes.
2.  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$  generan al subespacio  $S$ .

## 2.1 Transformación Lineal

---

Queremos encontrar una matriz  $A$  que al multiplicarla por las coordenadas de un vector  $\mathbf{v}$  en la base  $B_1$  ( $[\mathbf{v}]_{B_1}$ ) de como resultado el transformado de dicho vector escrito en base  $B_2$ . Es decir:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1}$$

donde  $T: V \rightarrow W$  tal que  $B_1$  es base de  $V$  y  $B_2$  es base de  $W$

**Teorema 2.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos  $B_1$  base de  $V$  y  $B_2$  base de  $W$ . Existe una **única** matriz  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1} \tag{1}$$

donde  $A$  se suele notar como  $[T]_{B_1 \rightarrow B_2}$

Para obtener esta matriz sólo necesitamos calcular los transformados de la base  $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

$$\mathbf{A} = [T]_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(\mathbf{v}_1)]_{B_2} & [T(\mathbf{v}_2)]_{B_2} & \dots & [T(\mathbf{v}_n)]_{B_2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esta matriz toma vectores en base  $B_1$  los transforma y devuelve sus coordenadas en base  $B_2$ .

**Teorema 3.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita. Sean  $B_1$  y  $B_{1'}$  dos bases de  $V$ , y  $B_2$  y  $B_{2'}$  dos bases de  $W$ , donde  $T : V \rightarrow W$ , entonces

$$[T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}} = [B_2]_{B_{2'}} [T]_{B_1 \rightarrow B_2} [B_{1'}]_{B_1} \quad (3)$$

Observemos que por lo tanto, si llamo  $\tilde{A} = [T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}}$  entonces podemos escribir (3) como

$$\tilde{A} = [B_2]_{B_{2'}} \cdot A \cdot [B_{1'}]_{B_1} \quad (4)$$

### Ejemplo:

Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x + y, z)$ . Si  $B = \{(1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 0, 3)\}$  es una base de  $\mathbb{R}^3$ , hallar  $[T]_{B \rightarrow C}$  (siendo  $C$  la base canonica) y  $[T(\mathbf{v})]_C$  siendo  $[\mathbf{v}]_B = [1, 2, 0]$

Sabemos que

$$[T]_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1, 0, 2)]_C & [T(0, 2, 1)]_C & [T(0, 0, 3)]_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando la matriz hallada podemos obtener el vector transformado en base canonica

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{v})]_C &= [T]_{B \rightarrow C} \cdot [\mathbf{v}]_B \\ [T(\mathbf{v})]_C &= (5, 4) \end{aligned}$$

que puede ser verificado buscando  $T(\mathbf{v})$ .

## 2.2 Autovalores y Autovectores

**Definición 7.** Para una matriz  $A$ , un vector no nulo  $\mathbf{x}$  se dice que es un autovector de  $A$  si

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

**# Observación.** Si partimos de la definición entonces podemos operar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda \mathbf{x} - A\mathbf{x} \\ \mathbf{0} &= (\lambda I - A) \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

y como  $\mathbf{x}$  es no nulo, el sistema tiene una solución no trivial, por lo que

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (5)$$

donde el determinante se llama *polinomio característico*, y es un polinomio mónico de orden  $n$ .

**Definición 8.** Si  $A \in M_n(\mathbb{R})$  entonces:

- 1)  $\lambda$  es autovalor de  $A \Leftrightarrow P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$  es decir, los autovalores son las raíces del polinomio característico.
- 2) Si  $\lambda$  es autovalor de  $A \Rightarrow$  las soluciones no nulas del sistema homogéneo  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  son los autovectores asociados a  $\lambda$

**# Observación.** Podemos ver de la definición que los autovectores no son únicos, ya que si  $\mathbf{x}$  es un autovector, entonces  $\alpha\mathbf{x}$  también lo es.

**Teorema 4.** Si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$  entonces  $\alpha + \lambda$  es un autovalor de  $\alpha I + A$

**Definición 9.** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ , y  $T$  una matriz no singular también de  $n \times n$ , y sea  $\tilde{A} = T A T^{-1}$ , entonces  $A$  y  $\tilde{A}$  se dicen *matrices semejantes*. Están relacionadas por la matriz de semejanza  $T$ .

**Teorema 5.** Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

**# Observación.** Como toda  $TLT : V \rightarrow V$  tiene asociada una matriz  $([T]_B)$ , las definiciones de autovalores y autovectores también las podemos aplicar a una matriz.

### Ejemplo:

Sea  $B$  una matriz triangular de orden  $3 \times 3$  genérica, buscar sus autovalores y autovectores: Si llamamos

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

entonces el polinomio característico queda definido por  $P(\lambda) = (\lambda - a) \cdot (\lambda - e) \cdot (\lambda - i)$  por lo tanto los autovalores de la matriz  $B$  son  $\{a, e, i\}$ .

Luego podemos obtener los autovectores planteando lo siguiente

$$(B - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b & c \\ 0 & e - \lambda & f \\ 0 & 0 & i - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

por lo que obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (a - \lambda) \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = 0 \\ (e - \lambda) \cdot x_2 + f \cdot x_3 & = 0 \\ (i - \lambda) \cdot x_3 & = 0 \end{cases} \quad (6)$$

que define al espacio de autovectores asociado al autovalor  $\lambda$ .

# Espacio de estados y modelos de función transferencia

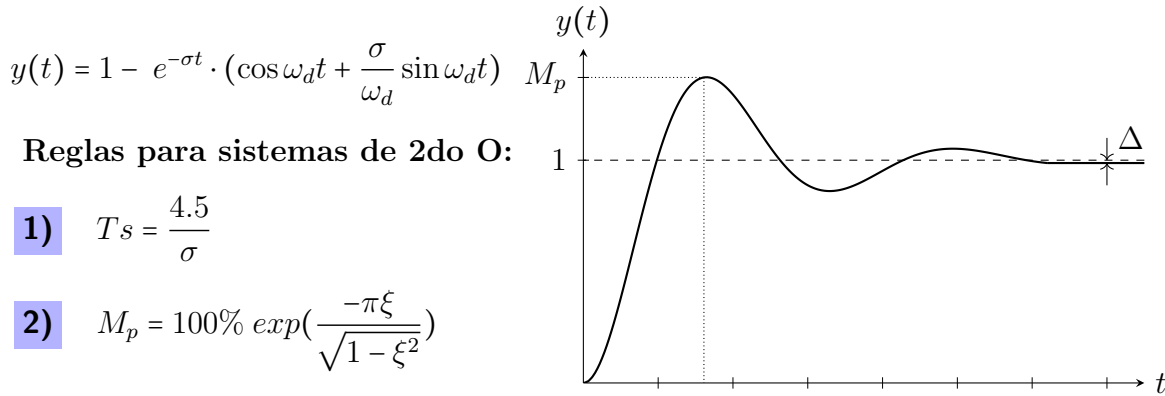
**Definición 10.** Sea un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

se definen las siguientes cantidades:

- 1)  $0 < \xi \leq 1$ : Relación de amortiguamiento
- 2)  $\sigma = \xi\omega_n$ : Parte real del par de polos
- 3)  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$ : Parte imaginaria del par de polos
- 4)  $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$ : Par de polos

La respuesta temporal al escalón de este sistema es descrito por



Ahora queremos encontrar un modelo de función transferencia discreta que imite el modelo de tiempo continuo. Por lo tanto, definimos:

$$y[k] = y[kT] = 1 - \underbrace{\left(e^{-\sigma T}\right)^k}_a \left( \cos k \underbrace{\omega_d T}_b + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d kT \right)$$

Tabla de transformada  $\mathcal{Z}$ :

(7)

(8)