



Universidad Nacional del Sur

Apuntes de materia
Control Moderno

Filsinger Miqueas

Matrices

Definición 1. El rango de una matriz A de $m \cdot n$ es igual al $\min(m, n)$.

Propiedades de la multiplicación:

- 1) $(AB)C = A(BC)$
- 2) $A(B + C) = AB + AC$
- 3) $AB \neq BA$, en general

1.1 Operación determinante

Definición 2. Método de los Cofactores: Sea A una matriz de dimensiones $n \times n$, podemos entonces calcular el determinante de A ($\det(A)$ o $|A|$) como sigue. Definimos el cofactor de fila i y columna j como:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

donde $|M_{ij}|$ es el determinante de la matriz M_{ij} , que es la matriz de orden $(n-1) \cdot (n-1)$ resultante de quitar la i -ésima fila y j -ésima columna de A . Luego el determinante de A es la suma de los productos de los elementos de una fila o columna con sus cofactores, es decir.

$$|A| = a_{k1} \cdot A_{k1} + \dots + a_{kn} \cdot A_{kn},$$

o también,

$$|A| = a_{1k} \cdot A_{1k} + \dots + a_{nk} \cdot A_{nk}, \quad \forall k \in 1, \dots, n.$$

Ejemplo: Filas o columnas de ceros

El cálculo de

$$|A| = \begin{vmatrix} \sigma & \omega & 0 \\ \omega & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

se puede realizar rápidamente por método de cofactores, realizando el método en la tercer fila o columna, quedando:

$$|A| = (-1)^{3+3} \lambda \cdot \begin{vmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{vmatrix} = \lambda (\sigma^2 - \omega^2).$$

Propiedades: Sean A y B matrices cuadradas, entonces

- 1) $|A| = |A^t|$,
- 2) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$,
- 3) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$,
- 4) Si A es triangular o diagonal entonces $|A|$ es igual al producto de su diagonal principal.

1.2 Operación inversa

Definición 3. Si A es una matriz no nula de dimensión $n \times n$ entonces

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)^T}{|A|},$$

donde $Adj(A)$ es la matriz adjunta, es decir aquella que está compuesta por los cofactores de A .

Propiedades:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Teorema 1. Una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es distinto de cero

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

1.3 Operación Trasposición

La trasposición de una matriz $(n \times m)$, rectangular o cuadrada, es la reflexión de los elementos respecto de su diagonal principal, adquiriendo la forma $(m \cdot n)$.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) Involutiva: $(A^t)^t = A$

2) Distributiva: $(A + B)^t = A^t + B^t$

3) Producto: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Espacios Vectoriales y Transformaciones Lineales

Definición 4. Sea $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ un conjunto de vectores que pertenece a un cierto espacio vectorial.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n$$

Se dice que \mathbf{v} es *Combinación Lineal* del conjunto \mathbf{X} .

Definición 5. Si la única solución a la combinación del vector nulo,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n,$$

es $\alpha_i = 0$, entonces se dice que el conjunto \mathbf{X} está compuesto por vectores *Linealmente Independientes*.

En otras palabras, se dice que un conjunto de vectores son linealmente independientes si ningún vector del conjunto puede ser escrito como combinación lineal del resto.

Observación. Por consecuencia

$$\exists \alpha_i / \mathbf{x}_k = \alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}$$

entonces \mathbf{X} es un conjunto de vectores *Linealmente Dependientes*.

De esto también se desprende que $\mathbf{0}$ no puede ser parte de un conjunto de vectores linealmente independientes.

Definición 6. Sea S un subespacio de V , y sea $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$. Luego B es una **base** de S si:

1. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ son linealmente independientes.
2. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ generan al subespacio S .

2.1 Transformación Lineal

Queremos encontrar una matriz A que al multiplicarla por las coordenadas de un vector \mathbf{v} en la base B_1 ($[\mathbf{v}]_{B_1}$) de como resultado el transformado de dicho vector escrito en base B_2 . Es decir:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1}$$

donde $T: V \rightarrow W$ tal que B_1 es base de V y B_2 es base de W

Teorema 2. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Supongamos B_1 base de V y B_2 base de W . Existe una **única** matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T(\mathbf{v})]_{B_2} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{v}]_{B_1} \tag{1}$$

donde A se suele notar como $[T]_{B_1 \rightarrow B_2}$

Para obtener esta matriz sólo necesitamos calcular los transformados de la base $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$

$$\mathbf{A} = [T]_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(\mathbf{v}_1)]_{B_2} & [T(\mathbf{v}_2)]_{B_2} & \dots & [T(\mathbf{v}_n)]_{B_2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esta matriz toma vectores en base B_1 los transforma y devuelve sus coordenadas en base B_2 .

Teorema 3. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y $B_{1'}$ dos bases de V , y B_2 y $B_{2'}$ dos bases de W , donde $T : V \rightarrow W$, entonces

$$[T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}} = [B_2]_{B_{2'}} [T]_{B_1 \rightarrow B_2} [B_{1'}]_{B_1} \quad (3)$$

Observemos que por lo tanto, si llamo $\tilde{A} = [T]_{B_{1'} \rightarrow B_{2'}}$ entonces podemos escribir (3) como

$$\tilde{A} = [B_2]_{B_{2'}} \cdot A \cdot [B_{1'}]_{B_1} \quad (4)$$

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x + y, z)$. Si $B = \{(1, 0, 2); (0, 2, 1); (0, 0, 3)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , hallar $[T]_{B \rightarrow C}$ (siendo C la base canonica) y $[T(\mathbf{v})]_C$ siendo $[\mathbf{v}]_B = [1, 2, 0]$

Sabemos que

$$[T]_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ [T(1, 0, 2)]_C & [T(0, 2, 1)]_C & [T(0, 0, 3)]_C \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego utilizando la matriz hallada podemos obtener el vector transformado en base canonica

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{v})]_C &= [T]_{B \rightarrow C} \cdot [\mathbf{v}]_B \\ [T(\mathbf{v})]_C &= (5, 4) \end{aligned}$$

que puede ser verificado buscando $T(\mathbf{v})$.

2.2 Autovalores y Autovectores

Definición 7. Para una matriz A , un vector no nulo \mathbf{x} se dice que es un autovector de A si

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

Observación. Si partimos de la definición entonces podemos operar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda \mathbf{x} - A\mathbf{x} \\ \mathbf{0} &= (\lambda I - A) \cdot \mathbf{x} \end{aligned}$$

y como \mathbf{x} es no nulo, el sistema tiene una solución no trivial, por lo que

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (5)$$

donde el determinante se llama *polinomio característico*, y es un polinomio mónico de orden n .

Definición 8. Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ entonces:

- 1) λ es autovalor de $A \Leftrightarrow P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$ es decir, los autovalores son las raíces del polinomio característico.
- 2) Si λ es autovalor de $A \Rightarrow$ las soluciones no nulas del sistema homogeneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son los autovectores asociados a λ

Observación. Podemos ver de la definición que los autovectores no son únicos, ya que si \mathbf{x} es un autovector, entonces $\alpha\mathbf{x}$ también lo es.

Teorema 4. Si λ es un autovalor de A entonces $\alpha + \lambda$ es un autovalor de $\alpha I + A$

Definición 9. Sea A una matriz de $n \times n$, y T una matriz no singular también de $n \times n$, y sea $\tilde{A} = T A T^{-1}$, entonces A y \tilde{A} se dicen *matrices semejantes*. Están relacionadas por la matriz de semejanza T .

Teorema 5. Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores

Observación. Como toda $TLT : V \rightarrow V$ tiene asociada una matriz $([T]_B)$, las definiciones de autovalores y autovectores también las podemos aplicar a una matriz.

Ejemplo:

Sea B una matriz triangular de orden 3×3 genérica, buscar sus autovalores y autovectores: Si llamamos

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

entonces el polinomio característico queda definido por $P(\lambda) = (\lambda - a) \cdot (\lambda - e) \cdot (\lambda - i)$ por lo tanto los autovalores de la matriz B son $\{a, e, i\}$.

Luego podemos obtener los autovectores planteando lo siguiente

$$(B - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b & c \\ 0 & e - \lambda & f \\ 0 & 0 & i - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

por lo que obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} (a - \lambda) \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 & = 0 \\ (e - \lambda) \cdot x_2 + f \cdot x_3 & = 0 \\ (i - \lambda) \cdot x_3 & = 0 \end{cases} \quad (6)$$

que define al espacio de autovectores asociado al autovalor λ .

Espacio de estados y modelos de función transferencia

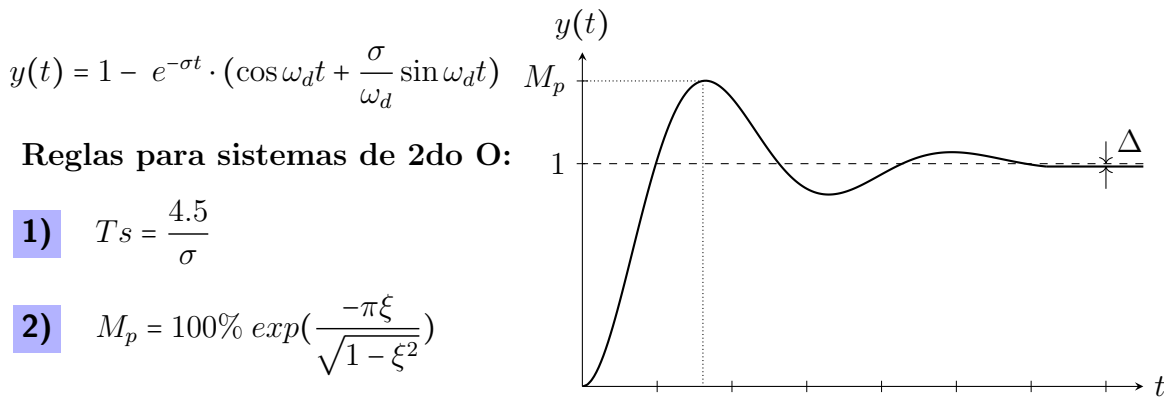
Definición 10. Sea un sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

se definen las siguientes cantidades:

- 1) $0 < \xi \leq 1$: Relación de amortiguamiento
- 2) $\sigma = \xi\omega_n$: Parte real del par de polos
- 3) $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$: Parte imaginaria del par de polos
- 4) $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$: Par de polos

La respuesta temporal al escalón de este sistema es descrito por



Ahora queremos encontrar un modelo de función transferencia discreta que imite el modelo de tiempo continuo. Por lo tanto, definimos:

$$y[k] = y[kT] = 1 - \underbrace{(e^{-\sigma T})^k}_a \left(\cos k \overbrace{\omega_d T}^b + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \omega_d kT \right) \quad (7)$$

Secuencia	Transformada \mathcal{Z}
$a^k \sin bk$	$\frac{az \sin b}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$
$a^k \cos bk$	$\frac{z(z - a \cos b)}{z^2 - 2az \cos b + a^2}$

Donde la transformada buscada es

$$\mathcal{Z}\{y[k]\} = \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{\mathcal{Z}\{u(t)\}} \cdot G(z)$$

Luego aplicando Transformada \mathcal{Z} a la ecuación (7) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{y(k)\} = Y(z) &= \frac{z}{z-1} - z \cdot \left[\frac{\overbrace{z - a \cos(\omega_d T)}^{\eta_1(z)}}{z^2 - 2e^{-\sigma T} z \cos \omega_d T + e^{-2\sigma T}} + \frac{\sigma}{\omega_d} \frac{\overbrace{a \sin \omega_d T}^{\eta_2(z)}}{\Delta(z^2)} \right] \\ &= \frac{z}{z-1} \underbrace{\frac{N(z)}{(z^2 - 2az \cos \omega_d T + a^2)}}_{G(z)} \end{aligned} \quad (8)$$

por lo tanto, los polos del sistema muestreado son

$$z^2 - 2az \cos \omega_d T + a^2$$

donde

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= a \cos \omega_d T \pm ja \sqrt{1 - \cos^2 \omega_d T} \\ &= (e^{-\sigma T}) \cdot (e^{\pm j \omega_d T}) \\ |z_{1,2}| &= e^{-\sigma T} \end{aligned} \quad (9)$$

Es decir que la parte real de los polos en el plano "s" controla la magnitud de los polos en el plano "z".

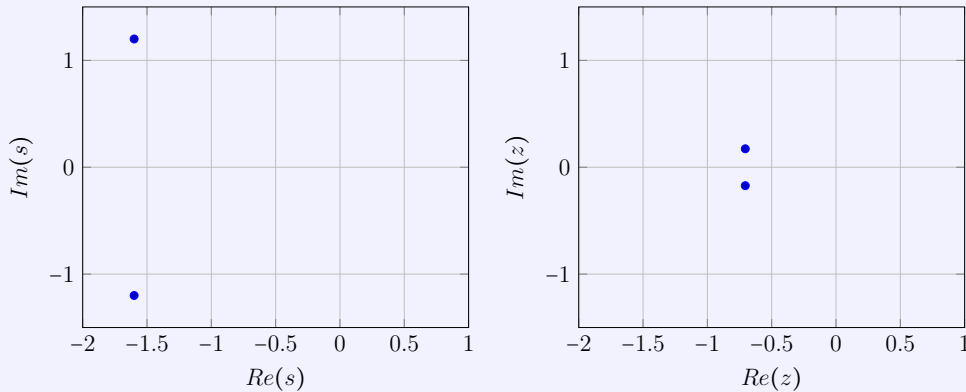
Ejemplo:

Sea $G(s) = \frac{4}{s^2 + 3 \cdot 2s + 4}$, entonces $\xi = 0.8$, $\omega_n = 2$, $T_s = 4.5/1.6 \simeq 2.8 \text{seg}$, $M_p = 1.5\%$

$$s_{1,2} = -1.6 \pm j1.2$$

Elijamos como periodo $T = 0.2 \text{seg}$, es decir, tendríamos 14 muestras hasta el tiempo de establecimiento T_s .

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = 0.7053 \pm j0.1726$$



3.1 Formas Canónicas

En esta sección vamos a buscar las matrices de control estándar para una ecuación diferencial general, que puede contemplar distintos aspectos respecto a su forma de construirse. Para esta subsección los resultados están parametrizados tanto para sistemas continuos, como para sistemas discretos con las siguientes ecuaciones diferenciales (o a diferencias):

Caso continuo: $y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t)$

Caso discreto: $y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + \dots + b_n u[k-n]$

Cuyas funciones transferencia son

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

En el caso general las ecuaciones de estado se describen como

$$\text{Caso Continuo: } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{d} u(t) \end{cases} \quad \text{Caso Discreto: } \begin{cases} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A} \mathbf{x}[k] + \mathbf{b} u[k] \\ y[k] &= \mathbf{c} \mathbf{x}[k] + \mathbf{d} u[k] \end{cases} \quad (10)$$

luego podemos plantear las siguientes matrices de estados, llamadas canónicas.

Forma Canónica de Observabilidad

$$\mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_o = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} : \mathbf{o} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad \mathbf{d}_o = b_0$$

Forma Canónica de Controlabilidad

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_c = [b_1 - a_1 b_0 \quad b_2 - a_2 b_0 \quad \dots \quad b_n - a_n b_0] \quad \mathbf{d}_c = b_0$$

Ejemplo:

Podemos escribir la función transferencia discreta,

$$H(z) = \frac{2z + 4z + 4}{z^2 + 2z},$$

observando que $b_0 = 2, b_1, b_2 = 4, a_1 = 2, a_2 = 0$. Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{x}}[k+1] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = [1 \quad 0] \mathbf{x}[k] + 2u[k]$$

3.2 Transformaciones de Canon

Si aplicamos la teoría de la sección () entonces podemos transformar las matrices de control planteando

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x} \quad \text{o también} \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \bar{\mathbf{x}}$$

desde donde podemos demostrar que

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T} \mathbf{b}$$

$$\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \mathbf{T}^{-1}$$

$$\bar{b} = b$$

3.3 Condiciones Iniciales

Queremos aproximar al vector de condiciones iniciales, es decir, queremos conocer el valor de cada variable de estado en un inicio del sistema. Para esto volvamos al sistema,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c} \mathbf{x} + \mathbf{d} u(t) \end{cases}$$

suponiendo que $u^k(0^-) = 0$ entonces podemos plantear que,

$$\begin{aligned} y(0^-) &= \mathbf{c} \mathbf{x}(0^-) + \mathbf{d} u(0^-) = \mathbf{c} \mathbf{x}(0^-) \\ y^{(1)}(0^-) &= \mathbf{c} \mathbf{x}^{(1)}(0^-) + \mathbf{d} u^{(1)}(0^-) = \mathbf{c} \mathbf{x}^{(1)}(0^-) \\ y^{(2)}(0^-) &= \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(2)}(0^-) + \mathbf{d} u^{(2)}(0^-) = \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(2)}(0^-) \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0^-) &= \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(n-2)}(0^-) + \mathbf{d} u^{(n-1)}(0^-) = \mathbf{c} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(n-1)}(0^-) \end{aligned}$$