Cálculo Integral

Contenidos

1 Series numéricas e integrales impropias

1.1 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes

Demostración (1.3.10)

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (-a_{2n+1} + a_{2n+2}) \leq s_{2n} \to (s_{2n}) \text{ decreixent}$$
$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1} \to (s_{2n+1}) \text{ creixent}$$

Por tanto, tenemos que: $s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0 = a_0 \implies (s_{2n+1})$ es creciente i acotada $\implies (s_{2n+1})$ tiene limite s.

$$lim(s_{2n} - s_{2n-1}) = lim(a_n) = 0 \implies lim(s_{2n}) = s \implies lim(s_n) = s$$

Finalmente, como s esta dentro del intervalo de extremos s_n, s_{n+1} y su longitud es a_{n+1}, tenemos que $\mid s - s_n \mid \leq a_{n+1}$.

1.2 Series de potencias

Demostración (1.4.2)
Si $0 \leq s \leq r$ y $\sum |a_n| r^n$ converge $\implies \sum |a_n| s_n$ también, porqué $|a_n| s^n \leq |a_n| r^n$.

Demostración (1.4.4)
Caso $0 < R < +\infty$: Sea $0 < |x| < R$, $\exists c$ tal que $|x| < cR \iff \frac{1}{R} < \frac{c}{|x|}$, si n suficientemente grande, $|a_n|^{1/n} \leq \frac{c}{|x|} \iff \mid a_n x^n \mid \leq c^n$ (serie geométrica de razón $c < 1$).
Sea $|x| > R \iff \frac{1}{R} > \frac{1}{|x|}$, hay infinitos n tales que $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|x|} \implies \mid a_n x^n \mid > 1 \to a_n x^n$ no tiende a 0 $\implies \sum a_n x^n$ no converge.