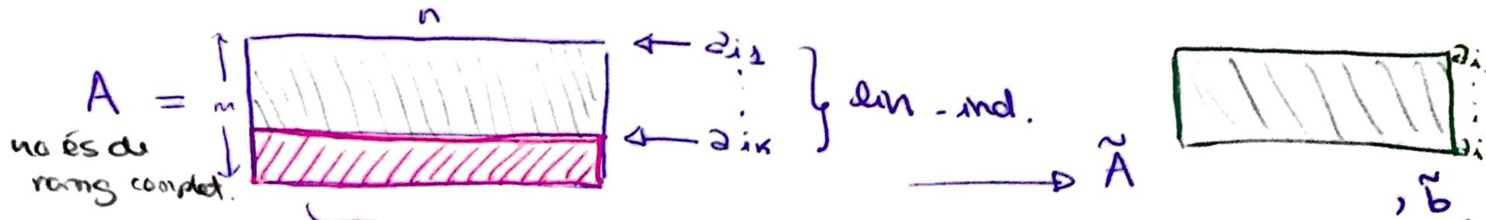
27/09/17

Th. 2.1. (p 38)




$(P_e) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \equiv Q_e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\qquad$ $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{k \times n}$

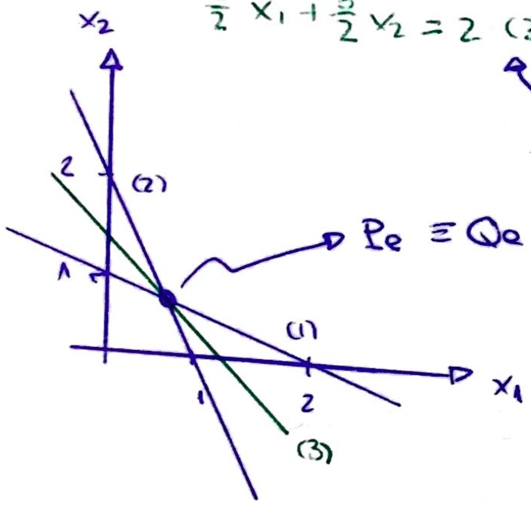
$\text{rang}(A) = k < m$ $\qquad$ $\text{rang}(\tilde{A}) = k$

Exemple

$$P_e \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}x_1 + x_2 = 1 & (1) \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 1 & (2) \end{array} \right\} Q_e$$

$\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 2 \quad (3)$ ⊗

c.l. de (1) i (2).



## Teorema 3 (p.42)

Sigui $P_e \neq \emptyset$, rang(A) = m (rang complet), $x^* \in P_e$.

$x$ pt extrem $\iff$ $x^*$ ? SBF

### Demo

$x$ pt extrem $\Rightarrow$ SBF — del sistema de constriccions eliminem les que són = 0.

1.- $x = [x_1, x_2, \dots, x_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{x_N}]'$ pt extrem de $P_e$ amb $x_i, \dots, x_r > 0$.

$\Rightarrow Ax = b \to \sum_{i=1}^{r} A_i x_i = b$ (1) (l.i. ind)

Demostrarem:

2.- $A_i$, $i = 1, \dots, r$ són l.i. (per reducció a l'absurd).

▶ $x$ pt extrem i $\exists \alpha_i \neq 0$ : $\sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i = 0$ (2)

▶ Amb (1), (2) i prenent un escalar $\theta > 0$.

$$\left[\sum_{i=1}^{r} A_i (x_i + \theta \cdot \alpha_i) = b\right], \left[\sum_{i=1}^{r} A_i (x_i - \theta \alpha_i) = b\right] \text{ (3)} \to A X^2 = b.$$

$A \cdot X^1 = b$

$\theta \sum_{i=1}^{r} A_i \alpha_i = 0$ (hipòtesi.)

construim $\underbrace{X^1, X^2}_{\in P_e} \neq X$ tal que: $x = \frac{1}{2} X^1 + \frac{1}{2} X^2$ ◁— Idea

▶ A més que: $x_i > 0$, $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \exists \bar{\theta} > 0$ tq $\forall \theta \in [0, \bar{\theta})$:

$x_i + \theta x_i > 0$, $x_i - \theta \alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, r$ (4)

vectors factibles

▶ $x^1 = [x_1 + \theta \cdot \alpha_1, x_2 + \theta \alpha_2, \dots, x_r + \theta \alpha_r, 0, \dots, 0]'$

▶ $x^2 = [x_1 - \theta \alpha_1, x_2 - \theta \alpha_2, \dots, x_r - \theta \alpha_r, 0, \dots, 0]'$

← les primeres r components són > 0, i la resta són = 0.

▶ $x^1, x^2 \in P_e$ ◁— (3), $x^1, x^2 \geq 0$ ◁— (4)

continuació Demo (T3)

▶ combinació convexa de $x^1$ i $x^2$

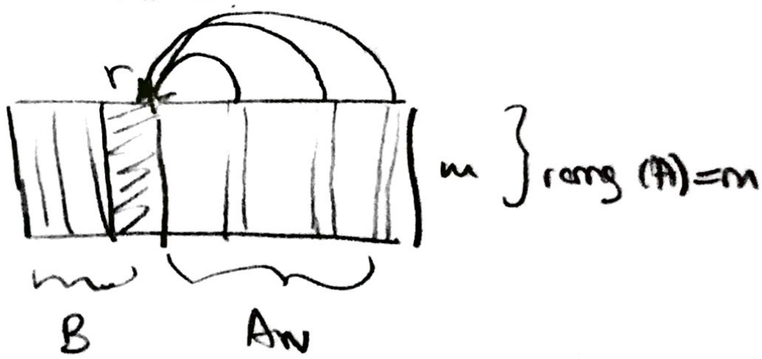
$\frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 = x \Rightarrow$ pt extrem !!! contradicció

$\Rightarrow A_i,\ i = 1, 2, \dots, r$ són lin indep.

$\Rightarrow x$ SBF : · factible per tè m vars associades a una matriu B no singular.

1) $r = m \Rightarrow B = [A_1, A_2, \dots, A_{r=m}$, $A_N$

2) $r < m$ $\left\{ B = [A_1, \dots, A_r, \underbrace{A_{r+1}, \dots, A_m}_{x_i = 0}] \right.$
rang(A)



## x SBF $\Rightarrow$ x pt extrem

1- $x \in P_e$, SBF $\quad x = [\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_s}^{>0}, \overbrace{0, \dots, 0}^{s+1, \dots, n}]'$, $x_j > 0$, $j = 1, \dots, s$ (1)
$s \leq m$

he tret les $x_i$ que valen 0.

2.- $\underbrace{\sum_{i=1}^{s} A_i x_i = b}_{Ax = b}$, $A_i,\ i = 1, \dots, s$ són l.i.

3.- x és pt extrem (per contradicció)

▶ x no és pt extrem $\Rightarrow$ el puc escriure com a combinació convexa de dos punts $\in P_e$,

$x = \lambda \cdot x^1 + (1-\lambda) \cdot x^2$, $x^1, x^2 \in P_e$, $x_1 \neq x$ (2)
$x_2 \neq x$

$\lambda \in [0, 1]$

▶ $x^1, x^2 \geq 0 \Rightarrow x_i^1 = x_i^2 = 0$, $i = s+1, \dots, n$ (3)

(1) ja que $x_i = 0$ $\forall i \in \{s+1, \dots, n\}$.

▶ $x, x^1, x^2 \in P_e \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^1 = \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^2 = b$ (4)

~~[illegible]~~ $\longrightarrow$

$\triangleright$ $A_i$, $i = 1, \dots, r$ lin ind (4) $\left.\right\} \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x_i = x_i^1 = x_i^2, \ i = 1, \dots, s \\ x_i = x_i^1 = x_i^2 = 0, \ i = s+1, \dots, n \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = x^1 = x^2 \Rightarrow \boxed{x \text{ pt extrem}}$