19/09/2017

Juan José Ruiz
juan.jose.ruiz@[illegible]

TEMA 1 ÁLGEBRA MULTILINEAL

1.1 Espacio Dual (Recordatorio)

Def: $\boxed{E^* = \{ f : E \longrightarrow K \mid \text{lineales} \}}$ → Ej: E^* es ev. sobre K

Para obtener E^* necesitamos bases. Sea E ev. de dim n.
Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de E. Entonces definimos

$$\left[\begin{array}{l} u_i^* : E \longrightarrow K \\ \quad u_j \longmapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij} \end{array} \right]$$

Entonces $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ es base de E^* (Ej)

En particular si $w \in E^*$, $w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$, donde se cumple

$$\omega(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{u_i^*(u_j)}_{\delta_{ij}} = a_j \Rightarrow \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) \cdot u_i^*$$

Obs: el dual no se puede definir de forma canónica sino que debe pasar por la base anterior de E.

Cambios de base ~ dim. finita.

Sean B_1, B_2 bases de E, y B_1^*, B_2^* bases duales de B_1, B_2 en E^*
Sea S_{B_1, B_2} la matriz de cambio de base de B_1 en B_2.

$$\boxed{S_{B_2^*, B_1^*} = \left(S_{B_1, B_2} \right)^T}$$

Ojo! $B_2^* \to B_1^*$

En particular, $S_{B_1^*, B_2^*} = (S_{B_1, B_2}^{-1})^T$

[illegible]

Aplicaciones lineales

Sean E y F e.v. Sea $\Phi : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces,
Φ induce la aplicación lineal dual siguiente Φ^*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^*: F^* \longrightarrow E^* \\ \omega \longmapsto \Phi^*(\omega) \equiv \omega \circ \Phi : E \xrightarrow{\Phi} F \xrightarrow{\omega} K \end{array} \right\}$$

Φ^* es lineal por ser composición de lineales

Si ahora E y F son de dimensión finita, Φ admite una expresión matricial (en coordenadas)

Más concretamente

$$\left.\begin{array}{l} B_E \text{ base } E \\ B_F \text{ base } F \end{array}\right\} \Phi \text{ viene dada por } M_{B_E, B_F}(\Phi)$$

dual → normal
cambiar de orden
la base y transponer

$$\left.\begin{array}{l} B_E^* \text{ base } E^* \\ B_F^* \text{ base } F^* \end{array}\right\} \boxed{M_{B_F^*, B_E^*}(\Phi^*) = (M_{B_1, B_2}(\Phi))^T}$$

<u>Espacio bidual</u>

Dado E ev podemos definir $E^*, (E^*)^*, \dots$ Ahora bien, $E^{**} = (E^*)^*$ es canónicamente isomorfo (como ev) a E mediante el isomorfismo siguiente:

$$\begin{array}{l} E \xrightarrow{\Phi} E^{**} \\ u \longmapsto \Phi(u) : E^* \longrightarrow K \\ \qquad\qquad\qquad \omega \longmapsto (\Phi(u))(\omega) \equiv \underset{E^*}{\omega}(\underset{E}{u}) \end{array}$$

OBS $\omega : E \longrightarrow K$

"Para cada u le asigno un $\Phi(u)$ sin usar bases

E^{**} canon. isomorf a E

Como este isomorfismo es canónico (no depende de la elección de bases), $E \simeq E^{**}$ y no distinguimos entre E y E^{**}