

# Cálculo integral

## Contenidos

<b>1 Series Numéricas e Integrales Impropias</b>	<b>1</b>
1.1 Series numéricas . . . . .	1
1.2 Series de números positivos . . . . .	3
1.3 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes . . . . .	8

## 1 Series Numéricas e Integrales Impropias

### 1.1 Series numéricas

#### Definición 1.1.1

Una serie de números reales es una pareja de sucesiones de números reales  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(s_n)_{n \geq 0}$ , relacionadas por

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

Denominaremos término  $n$ -ésimo de la serie al elemento  $a_n$  y llamaremos suma parcial  $n$ -ésima de la serie a  $s_n$

**Observación** Las sumas parciales definen los términos

$$a_0 = s_0 \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

#### Definición 1.1.2

Llamaremos suma de una serie a

$$s = \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

suponiendo que existe

**Observación** Denotaremos  $s = \sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n$ . Esta misma notación no servirá para representar la serie.

#### Definición 1.1.3

Diremos que una serie  $\sum a_n$  es convergente o divergente si lo es la sucesión de sumas parciales

- convergente  $\lim s_n \in \mathbb{R}$
- divergente  $\lim s_n = \pm\infty$
- oscilante  $\nexists \lim s_n$

**Observación 1.1.4** Una serie no tiene por qué comenzar por el índice 0, y por tanto, podemos considerar series con términos  $a_n$  donde  $n \geq n_0$ . En tal caso, las sumas parciales son  $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ , y la suma (si existe)  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k$ .

### Definición 1.1.5

Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie geométrica de razón  $r$  a la serie

$$\sum_{n \geq 0} r^n$$

### Proposición

La serie geométrica es convergente si y solo si  $|r| < 1$ , en tal caso la suma es

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$$

### Demostración

Primero, calculamos el término  $n$ -ésimo

$$s_n = 1 + r + \dots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

- Si  $r = 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$
- Si  $|r| > 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \infty$
- Si  $|r| < 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{-1}{r-1}$
- Si  $r = -1$ ,  $s_n = 0$  si  $n$  par y  $s_n = 1$  si  $n$  impar. Por lo tanto la serie es oscilante

### Proposición 1.1.6

Si  $\sum a_n$  es convergente, entonces  $\lim a_n = 0$

### Demostración

Sabemos que  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , por lo tanto  $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1})$ , como  $\lim s_n$  existe (y por lo tanto también  $\lim s_{n-1}$ )

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

### Proposición 1.1.7 (Criterio de Cauchy para series)

La serie  $\sum a_n$  es convergente si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n \geq n_0 \implies |s_m - s_n| = |a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \varepsilon$$

**Proposición 1.1.8** (linealidad)

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series convergentes. Entonces  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$  también lo es y  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$ .

**Proposición 1.1.9**

Sean dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , son iguales salvo en número finito de términos, entonces las series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen la misma convergencia.

**Demostración**

Sea  $d_n = b_n - a_n$ , que vale 0 salvo en número finito de términos

- Si  $\sum a_n$  converge  $\quad \sum b_n = \sum a_n + \overbrace{\sum d_n}^{\text{Suma finita}} \implies \sum b_n$  converge
- Si  $\sum a_n$  diverge  $\quad \sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  diverge
- Si  $\sum a_n$  oscila  $\quad \sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  oscila

**Proposición 1.1.10** (Asociatividad)

Sea  $\sum a_n$  una serie y  $(n_k)_{k \geq 0}$  una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Definimos

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0} \quad b_k = a_{(n_{k-1}+1)} + \cdots + a_{n_k}$$

Si existe la suma de  $\sum a_n$ , entonces también existe la suma de  $\sum b_k$  y son iguales.

**Demostración**

Sea  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$  y  $B_k = \sum_{i=0}^k b_i$ , por la definición anterior se tiene que  $B_k = A_{n_k}$  y por lo tanto  $(B_k)$  es una sucesión parcial de  $(A_n)$ , lo cual implica que si  $(A_n)$  converge,  $(B_k)$  también y lo hace al mismo número.

## 1.2 Series de números positivos

**Proposición 1.2.1**

Si una serie  $\sum a_n$  es de *términos positivos* ( $a_n \geq 0$ ) entonces la sucesión  $(s_n)$  de sumas parciales es *creciente*, y por tanto, siempre tiene límite:

$$\sum a_n = \lim s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$$

Este puede ser finito (si la sucesión de sumas parciales es acotada) o infinito (en caso contrario).

**Proposición 1.2.2** (Criterio de comparación directa)

Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos positivos. Si  $\exists n_0$  tal que  $a_n \leq b_n$  ( $\forall n \geq n_0$ ). Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Por tanto, la convergencia de  $\sum b_n$  implica la de  $\sum a_n$  y la divergencia de  $\sum a_n$  implica la de  $\sum b_n$ .

### **Demostración**

Por el enunciado

$$\sum_{i=n_0}^n a_i \leq \sum_{k=n_0}^n b_k \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$

Los términos  $a_0, \dots, a_{n_0}$  se pueden añadir al sumatorio y no alteran la convergencia.

### **Definición**

Llamamos serie armónica a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

### **Definición 1.2.3** (Serie de Riemman)

Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie armónica generalizada o serie de Riemman de parámetro  $p$  a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

### **Proposición**

La serie de Riemman es convergente si y solo si  $p > 1$ .

### **Demostración**

Distinguiremos entre varios casos

- Si  $p = 1$ . Suponemos que la serie es convergente con suma  $s$

$$s = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = s$$

absurdo ya que  $s > s$ .

- Si  $p < 1$ .

$$n^p \leq n \implies \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

y por comparación directa con la serie armónica, diverge.

- Si  $p > 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \dots \leq \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \dots \end{aligned}$$

que es una serie geométrica de razón  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$  y por lo tanto convergente.

### **Proposición 1.2.4** (Criterio de comparación en el límite)

Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe el límite

$$\lim \frac{\sum a_n}{\sum b_n} = l \in [0, +\infty]$$

- Si  $l < +\infty$ .  $\sum b_n$  converge  $\implies \sum a_n$  converge y  $\sum a_n$  diverge  $\implies \sum b_n$  diverge.
- Si  $l > 0$ .  $\sum a_n$  converge  $\implies \sum b_n$  converge y si  $\sum b_n$  diverge  $\implies \sum a_n$  diverge.
- Si  $0 < l < +\infty$ . Entonces las dos series tienen el mismo caracter.

### **Demostración**

Provaremos cada caso de manera individual

- Caso  $l < +\infty$ . Fijado  $\varepsilon > 0$ , por definición de límite, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \implies a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

y el resultado queda provado por comparación directa.

- Caso  $l > 0$ . Se deduce del primer caso, considerando

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$$

- Caso  $0 < l < +\infty$ . Se trata de una conjunción de los casos anteriores

**Lema 1.2.5** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} < r$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$

### **Demostración**

Provaremos cada caso por separado

- $a_n^{1/n} < r \implies a_n < r^n$  que es la serie geométrica de razón  $r < 1$ , de modo que por comparación directa el resultado queda demostrado.
- $a_n^{1/n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$  y por lo tanto diverge.

**Proposición 1.2.6** (Criterio de la raíz de Cauchy)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Suponemos que existe  $\lim a_n^{1/n} = \alpha$ , entonces, si  $\alpha > 1$  la serie diverge y si  $\alpha < 1$  la serie converge.

### **Demostración**

Demostraremos cada caso por separado

- Caso  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \leq r$$

Y el resultado queda provado aplicando el lema anterior.

- Caso  $\alpha > 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

y aplicamos el lema anterior.

**Lema 1.2.7** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$

### **Demostración**

Separaremos los casos.

•

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \implies a_{n+1} \leq r a_n \implies a_n \leq C r^n \quad (n \geq n_0)$$

donde  $C = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$  y por el criterio de comparación directa  $\sum a_n$  converge.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_{n+1} \geq a_n \implies a_n$  es creciente  $\implies \sum a_n$  diverge

**Proposición 1.2.8** (Criterio del cociente de Alembert)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ , entonces

- Si  $\alpha > 1$  la serie diverge
- Si  $\alpha < 1$  la serie converge

### **Demostración**

Separamos los dos casos

- Si  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$  entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

y aplicamos el lema anterior.

- Si  $\alpha > 1$ . Entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

y aplicamos el lema anterior.

### Ejemplo

Estudiar la convergencia de

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ .  
 $n!$  crece más que  $n^2$  ( $n! > n^2$ )  $\implies \frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$  que es la serie de Riemman de parámetro 2 (convergente). Por tanto,  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$  es convergente.

- $\sum \frac{x^n}{n!}$  para  $x > 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

Por lo tanto, aplicando el criterio del cociente de Alembert, la serie converge.

- $\sum \alpha^{n+\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \alpha$$

Por lo tanto, por el criterio de la raíz,  $\begin{cases} \alpha < 1 \text{ convergente} \\ \alpha > 1 \text{ divergente} \end{cases}$ . Si  $\alpha = 1$ , la serie es

$\sum 1^{n+\sqrt{n}} = \sum 1$  que es divergente.

**Observación 1.2.9** Los criterios anteriores no deciden cuando  $\alpha = 1$ . Como  $a_{n+1}/a_n \rightarrow \alpha$  implica que  $a_n^{1/n} \rightarrow \alpha$ , si el criterio del cociente no decide, entonces el de la raíz tampoco.

### Proposición 1.2.10 (Criterio de Raabe)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

### Proposición (Criterio de condensación)

Sea  $(a_n)$  una sucesión de números positivos decreciente. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

**Proposición** (Criterio logarítmico)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)}$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Proposición 1.2.11** (Criterio de la integral)

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $f: [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, localmente integrable y decreciente. Consideramos  $a_n = f(n)$  ( $n \geq n_0$ ) entonces

- i) La serie  $\sum a_n$  y la integral impropia  $\int_{n_0}^{+\infty} f$  tienen el mismo carácter.
- ii) Para  $N \geq n_0$

$$\sum_{n \geq n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_n$$

donde  $\varepsilon_n \in [0, a_n]$

**Ejemplo**

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  tiene el mismo carácter que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  (convergente  $\iff \alpha > 1$ )
- Calcular  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$  con error  $< 10^{-3}$ .

Necesitamos que

$$\frac{1}{N^{1.01}} < 10^{-3} \implies N > 1000^{1/1.01} \implies N \geq 934$$

Calculamos ahora

$$\sum_{n=1}^{933} \frac{1}{n^{1.01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.01}} \simeq 100.577 \simeq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$$

**Proposición 1.2.12**

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Dada cualquier permutación  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la serie  $\sum a_{\sigma(n)}$  tiene la misma suma que  $\sum a_n$ .

**Demostración**

Sea  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  y  $B_n = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$  y sean  $A = \lim A_n$  y  $B = \lim B_n$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{0, 1, \dots, m\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$$

ya que  $\sigma$  es suprayectiva. Entonces  $a_0 + a_1 + \dots + a_m \leq a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(n)}$  por lo tanto,  $A_m \leq B_n \implies A \leq B$ . Haciendo el mismo razonamiento para  $\sigma^{-1}$  (biyectiva), obtenemos que  $B \leq A$ . Y por lo tanto,  $A = \sum a_n = \sum a_{\sigma(n)} = B$ .

### 1.3 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes