# Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

## Contenidos



# 0 Formas Cuadráticas

## 0.1 Definición, matriz de una forma cuadrática y bases

**Definición 0.1.1**
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned} \phi \colon E \times E &\to k \\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$

- $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

$\forall u, v, u_1, u_2 \in E$ y $\forall \lambda \in k$.

**Definición 0.1.2**
Sea $\phi$ una forma bilineal simétrica sobre un **k**-ev. $\mathbb{E}$. Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned} q\colon E &\to k \\ u &\mapsto q(u) = \phi(u, u) \end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a $\phi$.

**Observación 0.1.3** Se cumple que $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$

**Lema 0.1.4** Sea $\phi$ una forma bilieal simétrica sobre un **k**-ev. $\mathbb{E}$ con $car\mathbb{E} \neq 2$ y sea $q$ la forma cuadrática asociada a $\phi$, entonces

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} q(u + v) - q(u) - q(v) = \phi(u + v, u + v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = \\ = \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = 2\phi(u, v) \end{aligned}$$

**Definición 0.1.5**
Sea $\phi$ una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un **k**-ev. $\mathbb{E}$ y sea $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ una base. La matriz de $\phi$ en base $B$ es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

**Observación 0.1.6** La matriz $M_B(\phi)$ es simétrica

**Definición 0.1.7**
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sea $\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica.

- Diremos que $\phi$ es definida positiva si

$$\phi(x, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que $\phi$ es definida negativa si

$$\phi(x, x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que $\phi$ es no definida en cualquier otro caso.

**Observación 0.1.8** Si $\phi$ es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$.

**Definición 0.1.9**
Dada una matriz cuadrada $A$ (dim $n$) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = \left|A_k\right|$$

**Teorema** de Sylvester (0.1.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimension $n$ y sea $\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } \mathbb{E}$$

**Demostración**
$\Longrightarrow$
Como $\phi$ es definida positiva, define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$. Si tomamos una base $B$ cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Llamamos $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \left|M_{B_2}(\phi)\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

Entonces, como $M_B(\phi) = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2,B}$

$$\left|M_B(\phi)\right| = \left|S_{B_2,B}\right|^2 \left|M_{B_2}(\phi)\right| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que $\phi$ también define un producto escalar en el subespacio vectorial $< v_1, \cdots, v_k >$ cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left|M_B(\phi)_k\right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Longleftarrow$
Tenemos que $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$. Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1} u_1 + u2 \\ v_3 = \alpha_{3,1} u_1 + \alpha_{3,2} u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1} u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1} u_{n-1} + u_n \end{cases} \qquad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad {}_{1 \leq i \leq k-1}^{2 \leq k \leq n}$$

Propiedades de $\{v_1, \cdots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \cdots, v_k\rangle = \langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ En particular, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.
- $\phi(v_k, v_i) = 0\ \forall 1 \leq i \leq k-1$ porque $v_i \in \langle u_1, \cdots, u_i\rangle$ y hemos tomado los $\alpha$ de manera que $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$ es base ortogonal
- La matriz $S_{B_2 B}$

$$S_{B_2B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|S_{B_2B}\right| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$M_B(\phi) = S^T_{B,B_2} M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi(v_1,v_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \phi(v_k,v_k) & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ & & & & & \phi(v_n,v_n) \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right)$$

$$\implies \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S^t_{B,B_2})\delta_k(M_{B_2}(\phi))\delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis)} \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0$$

Finalmente, $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x,x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

**Teorema** Método convergencia-pivote (0.1.11)
Dada una forma bilineal simétrica $\phi$, queremos encontrar una base de $\mathbb{E}$, $B_2$, en la cual $M_{B_2}(\phi)$ sea una matriz diagonal. Partimos de una base $B$ i de $M_B(\phi)$. El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \underset{\text{en columnas}}{\overset{\text{misma op.}}{\sim}} \left(S_1 M_b(\phi) S_1^T|S_1\right) \sim \cdots \sim$$
$$\sim \left(S_r \ldots S_1 M_B(\phi) S_1^T \ldots S_r^T | S_r \ldots S_1\right)$$

Donde la matriz de la izquierda es $M_{B_2}$ y es diagonal.

**Ejemplo 0.1.12**

$$q_\phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces, en base $B$, los vectores de $B_2$ son:

- $v_1 = (1,0,0); \quad \phi(v_1,v_1) = 2$
- $v_2 = (1,1,1); \quad \phi(v_2,v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3,v_3) = \frac{1}{2}$

Y $\phi(v_i,v_j) = 0$, $i \neq j$.

**Proposición 0.1.13**
Sea $E$ un $k$-ev. de dimension $n$, sea $\phi\colon E \times E \to k$ una forma bilineal simétrica y sea $q$ su forma cuadrática asociada. Consideremos $B = \{u_1, \ldots u_n\}$ una base *$q$-ortogonal* de $E$. Sabemos que

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subespacio vectorial $E^\perp \subseteq E$ definido por $E^\perp = \{u \in E \mid \phi(u,v) = 0 \forall v \in E\}$. Tenemos que

i)

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \implies E^\perp = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle.$$

ii)
$$\operatorname{rg} q + \dim E^{\perp} = n \implies i_0(q) = \dim E^{\perp}.$$

iii) Sean $k = \mathbb{R}$, e $i_+(q)$ el número de elementos estrictamente positivos de la diagonal de $M_B(\phi)$. $i_+(q)$ no depende de la base *q-ortogonal* $B$ elegida.

iv) Sea $k = \mathbb{R}$ y sean $\delta_0 = 1, \delta_1, \ldots, \delta_n \neq 0$. Entonces, $i_-(q)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia $\delta_0, \ldots, \delta_n$.

**Demostración**

i) $u_i \in \{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$,

$$\phi(u_j, u_i) = (0 \ \cdots \ 1 \cdots \ 0\ ) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \ \forall\, 1 \leq j \leq n \implies$$

$\implies \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle \subseteq E^{\perp}$.

Sea $u \in E$ tal que $u \notin \langle u_{m+1}, \ldots u_n \rangle$. Se tiene que $\exists\ 1 \leq i \leq m$ t.q. $x_i \neq 0$. Entonces,

$$e_i^t M_B(\phi)\, u = (0 \ \cdots \ 1_i \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_i x_i \neq 0 \implies u \notin E^{\perp}.$$

Así pues, $E^{\perp} = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle$.

iii) Sea $B' = \{u_1', \ldots, u_n'\}$ una base *q-ortogonal* de E.

$$M_{B'}(\phi) = D' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n' \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$m = i_+(q, B)\,; \ \ F^+ = \langle u_1, \ldots u_m \rangle\,; \ \ E = F^+ \oplus \langle u_{m+1}, \ldots u_n \rangle = F^+ \oplus F^{\leq 0}.$$

Análogamente,

$$m' = i_+(q, B')\,; \ \ F'^+ = \langle u_1', \ldots u_m' \rangle\,; \ \ E = F'^+ \oplus \left\langle u_{m+1}', \ldots u_n' \right\rangle = F'^+ \oplus F'^{\leq 0}.$$

Consideremos la fución que proyecta un vector de $F^+$ sobre $F'^+$.

$$\begin{aligned} f\colon F^+ \to E \to F'^+ \\ v \longmapsto f(v). \end{aligned}$$

Sea $v \in F^+$ y sean $v_1$ y $v_2$ las proyecciones de $v$ sobre $F'^+$ y $F'^{\leq 0}$ respectivamente. Tenemos que $f(v) = v_1$. Entonces,

$$f(v) = 0 \implies v_1 = 0 \implies v = v_2.$$

Además, $0 \leq \phi(v, v)$ y $\phi(v_2, v_2) = \phi(v, v) \leq 0$, de modo que $v = 0$ y $f$ es inyectiva. Considerando la función que proyecta un vector de $F'^+$ sobre $F^+$.

$$\begin{aligned} g\colon F'^+ \to E \to F^+ \\ v \longmapsto g(v). \end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento equivalente, obtenemos que $g$ es inyectiva, de modo que $m = m'$.

## 0.2 Clasificación afín y proyectiva

**Definición 0.2.1**
Sean $E$ y $F$ $k$-espacios vectoriales. Sean

$$\phi\colon E \times E \to k,$$

$$\psi\colon F \times F \to k$$

formas bilineales simétricas. Diremos que $\phi$ y $\psi$ son afínmente equivalentes, y escribiremos $\phi \sim \psi$, si existe un isomorfismo $f\colon E \to F$ tal que

$$\phi(u, v) = \psi(f(u), f(v)) \quad \forall u, v \in E,$$

$$\phi\left(f^{-1}(u'), f^{-1}(v')\right) = \psi(u', v') \quad \forall u', v' \in F.$$

**Teorema** de Sylvester (0.2.2)

i) $k = \mathbb{R}$

$$\phi \sim \psi \iff \operatorname{rg}\phi = \operatorname{rg}\psi \text{ y } i_+(\phi) = i_+(\psi).$$

ii) $k = \mathbb{C}$

$$\phi \sim \psi \iff \operatorname{rg}\phi = \operatorname{rg}\psi.$$

# 1 Álgebra multilineal

## 1.1 Espacio dual

**Definición 1.1.1**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Definimos el espacio Dual de $\mathbb{E}$ como $\mathbb{E}^* = \{\phi : \mathbb{E} \to \mathbf{k} \text{ lineales}\}$ (también es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial)

**Observación 1.1.2** Para definir $\mathbb{E}^*$ tenemos que usar bases de $\mathbb{E}$.

**Definición 1.1.3**
Si $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^* \colon \mathbb{E} &\to \mathbf{k} \\ u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de $B$ a $B^* = \{u_1^*, \cdots, u_n^*\}$ (que efectivamente es una base de $\mathbb{E}^*$).

**Observación 1.1.4** En particular si $w \in \mathbb{E}^*$ y $w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$, se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) = a_j \implies w = \sum_{i=1}^{n} w(u_i) u_i^*$$

**Proposición 1.1.5** (cambios de base)
Sean $B_1$ y $B_2$ bases de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev. de $\dim \mathbb{E} = n$) y sean $B_1^*$ y $B_2^*$ las bases duales de $B_1$ y $B_2$. Si $S_{B_1 B_2}$ es la matriz de cambio de base de $B_1$ a $B_2$, entonces:

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T$$

**Proposición 1.1.6** (aplicaciones lineales)
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-ev. y sea $\phi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ una aplicación lineal, entonces $\phi$ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^* \colon \mathbb{F}^* &\to \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi \end{aligned}$$

**Observación 1.1.7** Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son de dimensión finita, $\phi$ admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &\text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 &\text{ base de } \mathbb{F} \end{aligned}\right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1, B_2}(\phi)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1^* &\text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* &\text{ base de } \mathbb{F}^* \end{aligned}\right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*, B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1, B_2}(\phi))^T$$

**Proposición 1.1.8** (espacio bidual)
Dado $\mathbb{E}$ $\mathbf{k}$-ev. podemos definir $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \cdots$. En particular tenemos que $\mathbb{E}^{**}$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{E}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(u)\colon \mathbb{E}^* &\to \mathbf{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u) \end{aligned}$$

**Observación 1.1.9** Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$ y no distinguimos entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}^{**}$

## 1.2 Tensores

**Definición 1.2.1**
Sean $\mathbb{E}_1, \cdots, \mathbb{E}_r$ $\mathbf{k}$-ev. Diremos que $f\colon \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_r \to \mathbf{k}$ es un tensor (o una aplicacion multilineal) si $\forall i = 1, \cdots, r$ y $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$ $(i \neq j)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \phi_i\colon \mathbb{E}_i &\to \mathbf{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_r) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

**Definición 1.2.2**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Llamaremos tensor de tipo $(p, q)$ (o tensor p veces covariante y q veces contravariante) (o tensor p-covariante y q-contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) \end{aligned}$$

**Observación 1.2.3** Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como $T_p^q(\mathbb{E})$.

**Observación 1.2.4** Por convenio $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbf{k}$.

**Ejemplo 1.2.5**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**}$ $(\cong \mathbb{E})$
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbf{k}\}$

**Proposición 1.2.6**
$T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$ (cambiando el orden)

**Proposición 1.2.7**
$T_p^q(\mathbb{E})$ tiene estructura de $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\alpha f + \beta g \colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \mathbb{E}}^{p} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) = \alpha f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) + \\ \beta g(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q).\end{aligned}$$

**Definición 1.2.8** (producto tensorial)
Dados $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$, definimos el producto tensorial de $f$ y $g$ como

$$\begin{aligned}f \otimes g \colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p+p'} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q+q'} &\to \mathbf{k} \\ (v_1, \cdots, v_p, \overline{v_1}, \cdots \overline{v_{p'}}, w_1, \cdots, w_q, \overline{w_1}, \cdots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_p) + \\ &\qquad g(\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \cdots \overline{w_{q'}})\end{aligned}$$

**Observación 1.2.9** Si $f$ y $g$ son tensores, entonces $f \otimes g$ también lo es. Además $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$.

**Proposición 1.2.10**
Sean $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, $g \in T_{p'}^{q'}$ y $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$.

- $\otimes$ **NO** es abeliano. En general $f \otimes g \neq g \otimes f$.
- $\otimes$ es asociativo. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$. Denotado por $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h \quad ((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in k$. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

**Ejemplo 1.2.11**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Y consideramps el producto tensorial de los tensores $e_1^*$ y $e_2^*$ sobre los vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\left.\begin{aligned}(e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) = e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1 y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) = e_2^*(v_1)e_1^*(v_{"})?y_1 x_2\end{aligned}\right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

**Ejemplo 1.2.12**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$, $B* = \{e_1^*, e_2^*\}$, entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \qquad \begin{cases}(e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0\end{cases}$$

**Observación 1.2.13** a Si $\mathbb{E}$ es un $\mathbf{k}$-ev de dimensión $n$ y $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$

$$(\underbrace{e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p}}_{I=\{i_1,\cdots,i_p\}} \otimes \underbrace{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_2}}_{J=\{j_1,\cdots j_q\}})(\underbrace{e_{l_1}, \cdots, e_{l_p}}_{L=\{l_1,\cdots,l_p\}}, \underbrace{e^*_{m_1}, \cdots, e^*_{m_q}}_{M=\{m_1,\cdots,m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Observación 1.2.14** Sean $f, g \in T^q_p(\mathbb{E})$ entonces

$$f = g \iff_{\substack{\forall e_{i_1},\cdots,e_{i_p} \in B \\ \forall e^*_{j_1},\cdots,e^*_{j_q} \in B^*}} f(e_{i_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = g(e_{i_1}, \cdots, e^*_{j_q})$$

## 1.3 Dimensión y bases de $T^q_p(\mathbb{E})$

Recordemos que $T^q_p(\mathbb{E})$ es un $\mathbf{k}$-ev.

**Teorema** (base de $T^q_p(\mathbb{E})$) (1.3.1)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión $n$ y sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces

i) $\dim_k T^q_p(\mathbb{E}) = n^{p+q}$

ii) Una base de $T^q_p(\mathbb{E})$ es

$$B^q_p = \left\{ e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} |^{i_1,\cdots,i_p \in \{1,\cdots,n\}}_{j_1,\cdots,j_1 \in \{1,\cdots,n\}} \right\}$$

iii) Si $f \in T^q_p(\mathbb{E})$, las coordenadas de $f$ en la base $B^q_p$ son

$$f_{B^q_p} = (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}))$$

**Demostración**

i) Es consecuencia directa de ii

ii) Primero veamos que $B^q_p$ es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ}(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean $I_0$, $J_0$ dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la 1.2.13). Veamos ahora que $B^q_p$ es generadora. Sea $f \in T^q_p(\mathbb{E})$, definimos $g \in T^q_p(\mathbb{E})$ como

$$g = \sum_{\forall I,J} (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que $f = g$ quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i^0_1}, \cdots, e_{i^0_p}, e^*_{j^0_1}, \cdots, e^*_{j^0_q}) = f(e_{i^0_1}, \cdots, e_{i^0_p}, e^*_{j^0_1}, \cdots, e^*_{j^0_q})$$

Por la 1.2.13 y queda demostrado el teorema.

**Ejemplo 1.3.2**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea $u \in \mathbb{R}^n$
$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \qquad (B_0^1 = B)$$
- Sea $w \in T_1^0(\mathbb{E})(= \mathbb{E}^*)$
$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \qquad (B_1^0 = B^*)$$
- Sea $n = 3$ y sea $f \in T_2(\mathbb{E})$
$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \cdots e_3^* \otimes e_3^*\}$$
$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

**Proposición 1.3.3** (cambio de base)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión $n$ y sean $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Sea $S = (s_j^i)$ la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a $B$ y sea $T = (t_j^i)$ su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "T"'] & \overline{B} \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, bend left, "S^t"] & \overline{B}^* \arrow[l, bend left, "T^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y sean
$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \Big(f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*)\Big)_{I,J}$$
$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \Big(f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \cdots, u_{j_q}^*)\Big)_{I,J}$$
Entonces, $\forall I, J$
$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \cdots, u_{j_q}^*) = \sum_{\forall L, M} s_{i_1}^{l_1} \cdots s_{i_p}^{l_p} t_{m_1}^{j_1} \cdots t_{m_q}^{j_q} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*)$$

**Ejemplo 1.3.4**

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$ por lo tanto $f = u$ y $\substack{u_B = (x_1, \cdots, u_n) \\ u_{\overline{B}} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)}$, entonces
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ por lo tanto $f = w$ y $\substack{w_B = (x_1, \cdots, u_n) \\ w_{\overline{B}} = (\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n)}$, entonces
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- $f \in T_2(\mathbb{E})$ por lo tanto $f$ es una forma bilineal y $\substack{f_B = A \in M_{n,n}(k) \\ f_{\overline{B}} = \overline{A} \in M_{n,n}(k)}$, entonces
$$\overline{A} = S^t A S$$

## 1.4 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como $x_n = \{1, \cdots, n\}$
- Denotaremos como $\mathcal{S}_n = \{\sigma\colon x_n \to x_n \text{bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$ es un grupo por composición. Además denotaremos $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada $s_0 \in \mathcal{S}_n$, la aplicación
$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$
es biyectiva.
- Sea $s \in \mathcal{S}_n$, denotaremos $s$ de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si $s$ es cíclica la denotaremos como $s = (1, 3, 7, 5)$. En este caso, $s(1) = 3$, $s(3) = 7$, $s(7) = 5$ y $s(5) = 1$, para el resto de valores $s(i) = i$.
- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo $s = (i, j)$ con $i \neq j$
- $\forall s \in \mathcal{S}_n$, $s$ se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir
$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \mod 2$$
- Sea $s \in \mathcal{S}_n$ y sea $s = t_1 \cdots t_p$ una descomposición de $s$ en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de $s$ como $\varepsilon(s) = (-1)^p$.

## 1.5 Tensores simétricos y antisimétricos

**Definición 1.5.1**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión $n$, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$ y $s \in \mathcal{S}_p$, entonces, definimos $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$ como
$$(\underline{s}f)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_{s(1)}, \cdots, v_{s(p)})$$

**Ejemplo 1.5.2**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$ y $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$, entonces
$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

**Proposición 1.5.3**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión $n$, sean $w_1, \ldots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$, y $s \in \mathcal{S}_p$ $(t = s^{-1})$. Entonces
$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$

**Demostración**
Sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{E}$ (obsérvese que $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$)

$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_1, \ldots, u_p) = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \ldots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$

Dado que $s(i) = j \iff i = t(j)$, $w_i(u_{s_i}) = w_i(u_j) = w_{t(j)(u_j)}$. Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}(u_1, \ldots, u_p)$$

**Ejemplo 1.5.4**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos $(1, 2) = s \in \mathcal{S}_2$. Entonces $s = (1, 2) = s^{-1} = t$ y para los siguientes elementos de $T_2(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \qquad \underline{s}f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \qquad \underline{s}f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos $(1, 2, 3) = s \in (S)_3$. Entonces $t = s^{-1} = (1, 3, 2)$, es decir, que $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$, y para el siguiente elemento de $T_3(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

**Observación 1.5.5** Sea $f_i \in T_p(\mathbb{E})$. Entonces $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i (\underline{s} f_i)$. Por tanto, la proposición anterior sirve para $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$.

**Ejemplo 1.5.6**
Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.5.4 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

**Definición 1.5.7**
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de $\dim n$. Sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. $f$ es simétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f$
2. $f$ es antisimétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f$
3. $S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$
   $A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_P(\mathbb{E})$

**Observación 1.5.8** $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ son s.e-v. (ver observación 1.5.5).

**Ejemplo 1.5.9**
Para los dos ejemplos, sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, sean $B$ y $B^*$ bases de $\mathbb{E}$ y de $\mathbb{E}^*$ correspondientemente.

1. Definimos $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $s = (1,2) \in (S)_2$. Entonces $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s\}$ y $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$, $\varepsilon(s) = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f,\ \underline{s}(f) \neq -f \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E}) \end{array}$$

2. Como anteriormente, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$.

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array}\right\} \implies f \in S_2(\mathbb{E})$$

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f \end{array}\right\} \implies f \in A_2(\mathbb{E})$$

**Observación 1.5.10**

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$ si $\varepsilon(s) = t_1, \ldots, t_n$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$.
- $s \in \mathcal{S}_p$. Definimos $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, donde $A_{i,j} = 1$ si $i = s(j)$ y $A_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces $\det A = \varepsilon(s)$.

**Proposición 1.5.11**
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-e.v. de dimensión $n$, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$\begin{aligned} \text{f simétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i,j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned} \text{f antisimétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & - f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \\ \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \ldots, u_p) = 0. \end{aligned}$$

**Demostración**

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

   En el caso de la implicación conversa se cumple:

$$\begin{aligned} \forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f \implies & \forall t_1, \ldots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \ldots, t_m}f = \\ & \underline{t_1}(\underline{t_2}(\ldots(\underline{t_m}f)\ldots)) = f \end{aligned}$$

   Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies \text{ f es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned}
&\forall u_1,\dots,u_p\in E, \forall i<j \quad 0=f(u_1,\dots,u_i+u_j,\dots,u_i+u_j,\dots,u_p)=\\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_i,\dots,u_p)+f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)+\\
&f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)+f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_j,\dots,u_p)=\\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)+f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)\implies\\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)=-f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)
\end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f=-f \implies \underline{t_1\cdots t_m}f=(-1)^m f=\varepsilon(t_1\cdots t_m)f$$

Y entonces:

$$\forall s\in\mathcal{S}_p \quad s=t_1\cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s)=(-1)^m \implies \forall s\in\mathcal{S}_p \quad \underline{s}f=\varepsilon(s)f \implies f\in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser $f$ antisimétrica,

$$\forall u_1,\dots,u_p\in E,\ \forall i<j \quad f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p)=-f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

Si $u_i=u_j$, entonces $f(u_1,\dots,u_p)=0$.

**Proposición 1.5.12**
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. con $car\mathbb{E}\neq 2$ y sea $f\in T_p(\mathbb{E})$, entonces $\forall v_i,v_j\in\mathbb{E}$

$$f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots)=-f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots) \iff f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots)=0$$

**Demostración**
$\implies$

$$\begin{gathered}
f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots)=-f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots)\implies\\
2f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots)=0 \implies f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots)=0
\end{gathered}$$

$\impliedby$

$$\begin{gathered}
f(\cdots,v_i+v_j,\cdots,v_i+v_j,\cdots)=0\implies\\
f(\cdots,v_i,\cdots,v_i,\cdots)+f(\cdots,v_j,\cdots,v_j,\cdots)+f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots)+f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots)=0\\
\implies f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots)=-f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots)
\end{gathered}$$

**Ejemplo 1.5.13**
Sea $f\in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ una base, Llamamos $M_B(f)=A=(f(e_i,e_j))$ y sea $\mathcal{S}_2=\{\mathrm{Id},s=(1,2)\}$. Entonces

$$\underline{\mathrm{Id}}f=f \qquad M_b(\underline{s}f)=(\underline{s}f(e_i,e_j))=(f(e_j,e_i))=A^t$$

Es decir, $f$ es simétrico si y solo si $A^t=A \iff A$ simétrica y $f$ es antisimétrico si y solo si $A=-A^t \iff A$ antisimétrica

**Ejemplo 1.5.14**
Sea $\dim \mathbb{E} = n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{E}$, entonces

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} &\to \mathbf{k} \\ (u_1, \ldots, u_n) &\mapsto det_B(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Como $f$ es multilineal ( $\implies f \in T_n(\mathbb{E})$), $f$ es antisimétrico por la proposición 1.5.11.

**Definición 1.5.15**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $car\mathbf{k} = 0$ y $f \in T_p(\mathbb{E})$. Llamamos simetrizado de $f$ a

$$S(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \underline{s} f$$

y antisimetrizado de $f$ a

$$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} f$$

**Ejemplo 1.5.16**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{E}$

- Sea $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, s = (1, 2)\}$, entonces

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*) \\ A(f) &= \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*) \end{aligned}$$

- Sea $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$, entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*)$$

**Observación 1.5.17** $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$, por lo tanto no hace falta calcular $s^{-1}$

**Ejemplo 1.5.18**
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$, entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) + M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) - M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

**Observación 1.5.19** Si $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

**Proposición 1.5.20**
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Consideramos $A, S\colon T_p(\mathbb{E}) \to T_p(\mathbb{E})$, entonces

i) $A, S$ son lineales

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ y $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ y $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$

**Demostración** i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos $S(f+g)$)

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ queda como ejercicio. Suponemos que $f \in A_p(\mathbb{E})$, entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}f\right) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\left(\varepsilon(s)f\right) = \frac{p!f}{p!} = f$$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ queda como ejercicio. Demostraremos que $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$. Por ii sabemos que $A_p(\mathbb{E}) \subseteq Im(A)$, por lo tanto, resta ver que $g = A(h) \in A_p(\mathbb{E})$, sea $s \in \mathcal{S}_op$

$$\underline{s}h = \underline{s}\left(\frac{1}{p!}\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\underline{r}f\right) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\underline{s}(\underline{r}f)\right) =$$

$$= \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p\varepsilon(sr)\underline{sr}h}\right) \overset{1.4}{=} \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{t\in\mathcal{S}_p\varepsilon(t)\underline{t}h}\right) = \varepsilon(s)g$$

**Observación 1.5.21** Las mismas construcciones funcionan para tensores $(0,q)$, $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$, pero no funcionan para tensores $(p,q)$ donde $p, q \neq 0$ porque las construcciones implican permutaciones.

## 1.6 Producto exterior

**Observación 1.6.1** $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$, $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ y $S_p$, $A_p$ s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$, $g \in S_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

**Ejemplo 1.6.2**
Sean $\omega_1$, $\omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$:

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$, porque $S_1 = \{Id\}$.
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$.

**Observación 1.6.3** El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

**Observación 1.6.4** Lo haremos en $T_p(\mathbb{E})$, análogamente se hará en $T^q(\mathbb{E})$.

**Definición 1.6.5** (producto exterior de orden 1)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v.; $\omega_1, \ldots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)$$

**Observación 1.6.6**

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \cancel{p!} \left( \frac{1}{\cancel{p!}} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} \left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p\right) \right) =$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \left(\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{s^{-1}(p)}\right) \overset{\varepsilon(s)=\varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)$$

**Ejemplo 1.6.7**
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \cdots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

**Proposición 1.6.8**
Sean $\omega_1, \ldots \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

i) $\omega_1 \wedge \ldots \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$

ii) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \left(\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}}\right) \wedge \cdots \wedge \omega_p = \alpha_i (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_p) + \beta_i (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \cdots \wedge \omega_p)$

iii) Sea $s \in \mathcal{S}_p$, $t = s^{-1}$, $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t} \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) = \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)$

iv) Si $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E}$, $\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) \left(u_1, \ldots, u_p\right) = det \left(\omega_j(u_i)\right)$

v) Si $\omega_i = \omega_j, (i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$

vi) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ son l.i.

**Demostración**

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A \left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p\right) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in Im(A) \overset{visto}{=} A_p(\mathbb{E})$

ii) Ejercicio (misma proposición que $\otimes$)

iii) $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$ (Ejercicio, misma proposición que $\otimes$)

$$\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} \overset{1.6.5+1.6.6}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) =$$

$$\overset{\varepsilon^2(s)=1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r)\varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) \overset{rs=m \in \mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m) \left(\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)}\right) =$$

$$= \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)$$

iv)

$$\overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)(u_1, \ldots, u_p) =$$

$$\sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{r(1)}(u_1) \ldots \omega_{r(p)}(u_p)\right) \stackrel{\text{def det}}{=} det(\omega_j(u_i))_{i,j}$$

v)

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \stackrel{1.6.8(iii)}{=} (-1)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \implies$$

$$\implies 2\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) = 0 \stackrel{car\mathbf{k} \neq 2}{\implies} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$$

vi) $\implies$

Suponemos que son l.d. y que $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j$:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j\right) \stackrel{1.6.8(ii)}{=} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_j\right) \stackrel{1.6.8(v)}{=} 0 \text{ !!}$$

$\impliedby$

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_p, \overbrace{\omega_{p+1}, \ldots, \ldots, \omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$ la base dual de $B$, tenemos que:

$$\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)(u_1, \ldots, u_p) \stackrel{1.6.8(iv)}{=} det\left(\omega_j\left(u_i\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

# 2 Espacio Proyectivo

## 2.1 Definición y caracterizaciones del espacio proyectivo

### Definición 2.1.1

Sea $k$ un cuerpo, $\mathbb{E}$ un $k$-e.v. de $\dim n+1$. El espacio proyectivo asociado a $\mathbb{E}$ es

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\}$$

Diremos que $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ tiene dimensión $n$.

**Observación 2.1.2** Se cumple $\mathbb{P}(\mathbb{E}) = (\mathbb{E} \setminus \{0\})/\sim$, donde $v \sim v' \iff \exists \lambda \neq 0,\ v' = \lambda v$ para $v, v' \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$.

**Definición 2.1.3**
Tenemos la siguiente aplicación $\pi$ dada por el paso al cociente.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\setminus\{0\} &\to \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ v &\mapsto \pi(v) = [v] \\ \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\} &\leftrightarrow [v] \end{aligned}$$

**Definición 2.1.4**
A los elementos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ los llamaremos puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$.

$$p = \pi(v) = [v]$$

**Observación 2.1.5**

- Si $\mathbb{E}$ no es relevante, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$.
- Si queremos remarcar $k$, $\mathbb{P}^n_k = \mathbb{P}(E)$.
- Normalmente $\mathbb{P} + k^n = \mathbb{P}(k^{n+1}) = (k^{n+1}\setminus 0)/\sim$.

**Ejemplo 2.1.6**

1. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Faltan dibujos de cómo interpretarlo (los añadirá Ernesto).
2. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Ídem.
3. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^2\setminus 0)/\sim\, = \mathbb{C}\cup\{\infty\} = S^2$. Las igualdades por el momento son por analogía o intuición, más adelante se demostrarán. (Aquí se puede poner un dibujo de la proyección estereográfica).
4. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}/2}$ contiene 7 puntos pues las rectas de $\mathbb{Z}^3$ solo contienen el 0 y un punto.

**Observación 2.1.7** Hemos enunciado la definición algebraica de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Existe una definición axiomática que no es igual en algunos casos patológicos.

## 2.2 Variedades lineales proyectivas

**Definición 2.2.1**
Sea $\mathbb{E}$ un $k$-e.v. de dimensión $n+1$, sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Llamaremos variedad lineal (proyectiva) de dimensión $r$ a cualquier conjunto de la forma:

$$V = \pi(H\setminus\{0\})$$

donde $H\subseteq\mathbb{E}$ es un subespacio vectorial de dimensión $r+1$.

Por convención defnimos la siguiente notación:

$$V = \pi(H\setminus\{0\}) = \pi(H)$$

**Ejemplo 2.2.2**

- $\mathbb{P}^n = \pi(\mathbb{E})$ es una variedad lineal de dimensión $n$.
- $p \in \mathbb{P}^n$ $p = \pi(v) = \pi([v])$ es una varidead lineal de dimensión 0.
- $\emptyset = \pi(\emptyset_{\mathbb{E}})$ es una variedad lineal de dimensión $-1$.

**Definición 2.2.3**

- $\dim V = 1 \longrightarrow$ Recta
- $\dim V = 2 \longrightarrow$ Plano
- $\dim V = n-1 \longrightarrow$ Hiperplano

**Lema 2.2.4** $V = \pi(H \setminus \{0\}) \iff H \setminus \{0\} = \pi^{-1}(v)$

**Ejercicio 2.2.5**
Demostrar el lema anterior.

**Observación 2.2.6** Hay una biyección

$$\{\text{s.e.v. de } \mathbb{E}\} \underset{\pi^{-1}}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades lineales de } \mathbb{P}(\mathbb{E})\}$$