Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

Contenidos

0 Formas Cuadráticas

0.1 Definición, matriz de una forma cuadrática y bases

Definición 0.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E} &\to \mathbf{k}\\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v)\end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1+u_2,v)=\phi(u_1,v)+\phi(u_2,v)$
- $\phi(\lambda u,v)=\lambda\phi(u,v)$
- $\phi(u,v)=\phi(v,u)$

$\forall u,v,u_1,u_2\in\mathbb{E}$ y $\forall\lambda\in\mathbf{k}$.

Definición 0.1.2
Sea ϕ una forma bilineal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$. Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned}q\colon \mathbb{E} &\to \mathbf{k}\\ u &\mapsto q(u)=\phi(u,u)\end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a ϕ.

Observación 0.1.3 Se cumple que $q(\lambda u)=\lambda^2 q(u)$

Lema 0.1.4 Sea ϕ una forma bilieal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ con $\operatorname{car}\mathbf{k}\neq 2$ y sea q la forma cuadrática asociada a ϕ, entonces

$$\phi(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$$

Demostración

$$\begin{aligned}q(u+v)-q(u)-q(v)=\phi(u+v,u+v)-\phi(u,u)-\phi(v,v)=\\ =\phi(u,u)+\phi(u,v)+\phi(v,u)+\phi(v,v)-\phi(u,u)-\phi(v,v)=2\phi(u,v)\end{aligned}$$

Definición 0.1.5
Sea ϕ una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ y sea $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ una base. La matriz de ϕ en base B es

$$M_B(\phi)=(a_{ij})=(\phi(u_i,u_j))$$

Observación 0.1.6 La matriz $M_B(\phi)$ es simétrica

Definición 0.1.7
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. y sea $\phi\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica.

- Diremos que ϕ es definida positiva si

$$\phi(x,x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es definida negativa si

$$\phi(x,x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es no definida en cualquier otro caso.

Observación 0.1.8 Si ϕ es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$.

Definición 0.1.9
Dada una matriz cuadrada A (dim n) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i,j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = \left|A_k\right|$$

Teorema de Sylvester (0.1.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n y sea $\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } \mathbb{E}$$

Demostración
$\Longrightarrow$
Como ϕ es definida positiva, define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$. Si tomamos una base B cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Llamamos $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \left|M_{B_2}(\phi)\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

Entonces, como $M_B(\phi) = S^T_{B,B_2} M_{B_2}(\phi) S_{B_2,B}$

$$\left|M_B(\phi)\right| = \left|S_{B_2,B}\right|^2 \left|M_{B_2}(\phi)\right| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que ϕ también define un producto escalar en el subespacio vectorial $< v_1, \cdots, v_k >$ cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left|M_B(\phi)_k\right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Longleftarrow$

Tenemos que $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$. Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \qquad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad {\scriptstyle \substack{2\leq k\leq n \\ 1\leq i\leq k-1}}$$

Propiedades de $\{v_1, \cdots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \cdots, v_k\rangle = \langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ En particular, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.
- $\phi(v_k, v_i) = 0 \; \forall 1 \leq i \leq k-1$ porque $v_i \in \langle u_1, \cdots, u_i\rangle$ y hemos tomado los α de manera que $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$ es base ortogonal
- La matriz S_{B_2B}

$$S_{B_2B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|S_{B_2B}\right| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$M_B(\phi) = S^T_{B,B_2} M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|cc} \phi(v_1, v_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \phi(v_k, v_k) & & \\ \hline & & & \ddots & \\ & & & & \phi(v_n, v_n) \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right)$$

$$\implies \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S^t_{B,B_2})\delta_k(M_{B_2}(\phi))\delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis)} \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0$$

Finalmente, $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x, x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

Teorema Método convergencia-pivote (0.1.11)
Dada una forma bilineal simétrica ϕ, queremos encontrar una base de $\mathbb{E}$, B_2, en la cual $M_{B_2}(\phi)$ sea una matriz diagonal. Partimos de una base B i de $M_B(\phi)$. El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1M_B(\phi)|S_1) \underset{\text{en columnas}}{\overset{\text{misma op.}}{\sim}} \left(S_1M_B(\phi)S_1^T|S_1\right) \sim \cdots \sim$$
$$\sim \left(S_r \ldots S_1M_B(\phi)S_1^T \ldots S_r^T|S_r \ldots S_1\right)$$

Donde la matriz de la izquierda es M_{B_2} y es diagonal.

Ejemplo 0.1.12

$$q_\phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces, en base B, los vectores de B_2 son:

- $v_1 = (1,0,0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$
- $v_2 = (1,1,1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y $\phi(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$.

Proposición 0.1.13
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n, sea $\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica y sea q su forma cuadrática asociada. Consideremos $B = \{u_1, \ldots u_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$. Sabemos que

$$D = M_B\left(\phi\right) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subespacio vectorial $\mathbb{E}^{\perp} \subseteq \mathbb{E}$ definido por $\mathbb{E}^{\perp} = \{u \in \mathbb{E} \mid \phi(u,v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{E}\}$. Tenemos que

i)
$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \implies E^{\perp} = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle .$$

ii)
$$\mathrm{rg}\, q + \dim \mathbb{E}^{\perp} = n \implies i_0(q) = \dim \mathbb{E}^{\perp}.$$

iii) Sean $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, e $i_+(q)$ el número de elementos estrictamente positivos de la diagonal de $M_B(\phi)$. $i_+(q)$ no depende de la base *q-ortogonal* B elegida.

iv) Sea $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ y sean $\delta_0 = 1$, $\delta_1, \ldots, \delta_n \neq 0$. Entonces, $i_-(q)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia $\delta_0, \ldots, \delta_n$.

Demostración

i) $u_i \in \{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$,

$$\phi(u_j, u_i) = (0 \ \cdots \ 1 \cdots \ 0\ ) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \ \forall\, 1 \leq j \leq n \implies$$

$\implies \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{E}^{\perp}$.

Sea $u \in \mathbb{E}$ tal que $u \notin \langle u_{m+1}, \ldots u_n \rangle$. Se tiene que $\exists\ 1 \leq i \leq m$ t.q. $x_i \neq 0$. Entonces,

$$e_i^t M_B(\phi)\, u = (0 \ \cdots \ 1_i \ \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_i x_i \neq 0 \implies u \notin \mathbb{E}^{\perp}.$$

Así pues, $\mathbb{E}^{\perp} = \langle u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle$.

iii) Sea $B' = \{u'_1, \ldots, u'_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$.

$$M_{B'}(\phi) = D' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$m = i_+(q, B);\ \ \mathbb{F}^+ = \langle u_1, \ldots u_m \rangle;\ \ \mathbb{E} = \mathbb{F}^+ \oplus \langle u_{m+1}, \ldots u_n \rangle = \mathbb{F}^+ \oplus \mathbb{F}^{\leq 0}.$$

Análogamente,

$$m' = i_+(q, B');\ \ \mathbb{F}'^+ = \langle u'_1, \ldots u'_m \rangle;\ \ \mathbb{E} = \mathbb{F}'^+ \oplus \left\langle u'_{m+1}, \ldots u'_n \right\rangle = \mathbb{F}'^+ \oplus \mathbb{F}'^{\leq 0}.$$

Consideremos la fución que proyecta un vector de $\mathbb{F}^+$ sobre $\mathbb{F}'^+$.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{F}^+ &\to \mathbb{E} \to \mathbb{F}'^+ \\ v &\longmapsto f(v). \end{aligned}$$

Sea $v \in \mathbb{F}^+$ y sean v_1 y v_2 las proyecciones de v sobre $\mathbb{F}'^+$ y $\mathbb{F}'^{\leq 0}$ respectivamente. Tenemos que $f(v) = v_1$. Entonces,

$$f(v) = 0 \implies v_1 = 0 \implies v = v_2.$$

Además, $0 \leq \phi(v, v)$ y $\phi(v_2, v_2) = \phi(v, v) \leq 0$, de modo que $v = 0$ y f es inyectiva. Considerando la función que proyecta un vector de $\mathbb{F}'^+$ sobre $\mathbb{F}^+$.

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{F}'^+ &\to \mathbb{E} \to \mathbb{F}^+ \\ v &\longmapsto g(v). \end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento análogo, obtenemos que g es inyectiva, de modo que $m = m'$.

0.2 Clasificación afín y proyectiva

Definición 0.2.1
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-espacios vectoriales. Sean

$$\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k},$$

$$\psi\colon \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbf{k}$$

formas bilineales simétricas. Diremos que ϕ y ψ son afínmente equivalentes, y escribiremos $\phi \sim \psi$, si existe un isomorfismo $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ tal que

$$\phi(u, v) = \psi(f(u), f(v))\ \ \forall u, v \in \mathbb{E},$$

$$\phi\left(f^{-1}(u'), f^{-1}(v')\right) = \psi(u', v')\ \ \forall u', v' \in \mathbb{F}.$$

Teorema de Sylvester (0.2.2)

i) $\mathbf{k} = \mathbb{R}$

$$\phi \sim \psi \iff \operatorname{rg}\phi = \operatorname{rg}\psi \text{ y } i_+(\phi) = i_+(\psi).$$

ii) $\mathbf{k} = \mathbb{C}$

$$\phi \sim \psi \iff \operatorname{rg}\phi = \operatorname{rg}\psi.$$

1 Álgebra multilineal

1.1 Espacio dual

Definición 1.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Definimos el espacio dual de $\mathbb{E}$ como $\mathbb{E}^* = \{\phi : \mathbb{E} \to \mathbf{k} \text{ lineales}\}$ (también es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial)

Observación 1.1.2 Para definir $\mathbb{E}^*$ tenemos que usar bases de $\mathbb{E}$.

Definición 1.1.3
Si $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^* \colon \mathbb{E} &\to \mathbf{k} \\ u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de B a $B^* = \{u_1^*, \cdots, u_n^*\}$ (que efectivamente es una base de $\mathbb{E}^*$).

Observación 1.1.4 En particular si $w \in \mathbb{E}^*$ y $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$, se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) = a_j \implies w = \sum_{i=1}^{n} w(u_i) u_i^*$$

Proposición 1.1.5 (cambios de base)
Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev. de $\dim \mathbb{E} = n$) y sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y B_2. Si $S_{B_1 B_2}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces:

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T$$

Proposición 1.1.6 (aplicaciones lineales)
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-ev. y sea $\phi \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ una aplicación lineal, entonces ϕ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^* \colon \mathbb{F}^* &\to \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi \end{aligned}$$

Observación 1.1.7 Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son de dimensión finita, ϕ admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 \text{ base de } \mathbb{F} \end{array}\right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1,B_2}(\phi)$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* \text{ base de } \mathbb{F}^* \end{array}\right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*,B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1,B_2}(\phi))^T$$

Proposición 1.1.8 (espacio bidual)
Dado $\mathbb{E}$ $\mathbf{k}$-ev. podemos definir $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \cdots$. En particular tenemos que $\mathbb{E}^{**}$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{E}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(u) \colon \mathbb{E}^* &\to \mathbf{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u) \end{aligned}$$

Observación 1.1.9 Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$ y no distinguimos entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}^{**}$

1.2 Tensores

Definición 1.2.1
Sean $\mathbb{E}_1, \cdots, \mathbb{E}_r$ $\mathbf{k}$-ev. Diremos que $f \colon \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_r \to \mathbf{k}$ es un tensor (o una aplicacion multilineal) si $\forall i = 1, \cdots, r$ y $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$ $(i \neq j)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \phi_i \colon \mathbb{E}_i &\to \mathbf{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_r) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

Definición 1.2.2
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Llamaremos tensor de tipo (p, q) (o tensor p veces covariante y q veces contravariante) (o tensor p-covariante y q-contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned} f \colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) \end{aligned}$$

Observación 1.2.3 Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como $T_p^q(\mathbb{E})$.

Observación 1.2.4 Por convenio $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbf{k}$.

Ejemplo 1.2.5
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**}$ $(\cong \mathbb{E})$
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbf{k}\}$

Proposición 1.2.6
$T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$ (cambiando el orden)

Proposición 1.2.7
$T_p^q(\mathbb{E})$ tiene estructura de $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$

$$\begin{aligned}\alpha f + \beta g \colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \mathbb{E}}^{p} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k}\\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) = \alpha f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) +\\ \beta g(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q).\end{aligned}$$

Definición 1.2.8 (producto tensorial)
Dados $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$, definimos el producto tensorial de f y g como

$$\begin{aligned}f \otimes g \colon \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p+p'} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q+q'} &\to \mathbf{k}\\ (v_1, \cdots, v_p, \overline{v_1}, \cdots \overline{v_{p'}}, w_1, \cdots, w_q, \overline{w_1}, \cdots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_p) *\\ & g(\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \cdots \overline{w_{q'}})\end{aligned}$$

Observación 1.2.9 Si f y g son tensores, entonces $f \otimes g$ también lo es. Además $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$.

Proposición 1.2.10
Sean $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, $g \in T_{p'}^{q'}$ y $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$.

- $\otimes$ **NO** es abeliano. En general $f \otimes g \neq g \otimes f$.
- $\otimes$ es asociativo. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$. Denotado por $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h \quad ((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in \mathbf{k}$. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

Ejemplo 1.2.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Y consideramos el producto tensorial de los tensores e_1^* y e_2^* sobre los vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\left.\begin{aligned}(e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) = e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1 y_2\\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) = e_2^*(v_1)e_1^*(v_2) = y_1 x_2\end{aligned}\right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

Ejemplo 1.2.12
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$, $B* = \{e_1^*, e_2^*\}$, entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \qquad \begin{cases}(e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0\\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1\\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0\\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0\end{cases}$$

Observación 1.2.13 Si $\mathbb{E}$ es un $\mathbf{k}$-ev de dimensión n y $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$

$$(\underbrace{e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p}}_{I=\{i_1,\cdots,i_p\}} \otimes \underbrace{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_2}}_{J=\{j_1,\cdots j_q\}})(\underbrace{e_{l_1}, \cdots, e_{l_p}}_{L=\{l_1,\cdots,l_p\}}, \underbrace{e^*_{m_1}, \cdots, e^*_{m_q}}_{M=\{m_1,\cdots,m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 1.2.14 Sean $f, g \in T^q_p(\mathbb{E})$ entonces

$$f = g \iff_{\substack{\forall e_{i_1},\cdots,e_{i_p} \in B \\ \forall e^*_{j_1},\cdots,e^*_{j_q} \in B^*}} f(e_{i_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = g(e_{i_1}, \cdots, e^*_{j_q})$$

1.3 Dimensión y bases de $T^q_p(\mathbb{E})$

Recordemos que $T^q_p(\mathbb{E})$ es un $\mathbf{k}$-ev.

Teorema (base de $T^q_p(\mathbb{E})$) (1.3.1)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión n y sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces

i) $\dim_{\mathbf{k}} T^q_p(\mathbb{E}) = n^{p+q}$

ii) Una base de $T^q_p(\mathbb{E})$ es

$$B^q_p = \left\{ e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \Big|^{i_1,\cdots,i_p \in \{1,\cdots,n\}}_{j_1,\cdots,j_1 \in \{1,\cdots,n\}} \right\}$$

iii) Si $f \in T^q_p(\mathbb{E})$, las coordenadas de f en la base B^q_p son

$$f_{B^q_p} = (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}))$$

Demostración

i) Es consecuencia directa de ii

ii) Primero veamos que B^q_p es linealmente independiente. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ}(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean I_0, J_0 dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la 1.2.13). Veamos ahora que B^q_p es generadora. Sea $f \in T^q_p(\mathbb{E})$, definimos $g \in T^q_p(\mathbb{E})$ como

$$g = \sum_{\forall I,J} (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que $f = g$ quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i^0_1}, \cdots, e_{i^0_p}, e^*_{j^0_1}, \cdots, e^*_{j^0_q}) = f(e_{i^0_1}, \cdots, e_{i^0_p}, e^*_{j^0_1}, \cdots, e^*_{j^0_q})$$

Por la 1.2.13 y queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1.3.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea $u \in \mathbb{R}^n$
$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \qquad (B_0^1 = B)$$
- Sea $w \in T_1^0(\mathbb{E})(= \mathbb{E}^*)$
$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \qquad (B_1^0 = B^*)$$
- Sea $n = 3$ y sea $f \in T_2(\mathbb{E})$
$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \cdots e_3^* \otimes e_3^*\}$$
$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

Proposición 1.3.3 (cambio de base)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n y sean $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Sea $S = (s_j^i)$ la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B y sea $T = (t_j^i)$ su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "T"'] & \overline{B} \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, bend left, "S^t"] & \overline{B}^* \arrow[l, bend left, "T^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y sean
$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \Big(f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*)\Big)_{I,J}$$
$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \Big(f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \cdots, u_{j_q}^*)\Big)_{I,J}$$
Entonces, $\forall I, J$
$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \cdots, u_{j_q}^*) = \sum_{\forall L,M} s_{i_1}^{l_1} \cdots s_{i_p}^{l_p} t_{m_1}^{j_1} \cdots t_{m_q}^{j_q} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*)$$

Ejemplo 1.3.4

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$ por lo tanto $f = u$ y ${}^{u_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{u_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ por lo tanto $f = w$ y ${}^{w_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{w_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces
$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- $f \in T_2(\mathbb{E})$ por lo tanto f es una forma bilineal y ${}^{f_B=A\in M_{n,n}(k)}_{f_{\overline{B}}=\overline{A}\in M_{n,n}(k)}$, entonces
$$\overline{A} = S^t A S$$

1.4 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como $x_n = \{1, \cdots, n\}$
- Denotaremos como $\mathcal{S}_n = \{\sigma \colon x_n \to x_n \text{ bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$ es un grupo por composición. Además denotaremos $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada $s_0 \in \mathcal{S}_n$, la aplicación
$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$
es biyectiva.
- Sea $s \in \mathcal{S}_n$, denotaremos s de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si s es cíclica la denotaremos como $s = (1, 3, 7, 5)$. En este caso, $s(1) = 3$, $s(3) = 7$, $s(7) = 5$ y $s(5) = 1$, para el resto de valores $s(i) = i$.
- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo $s = (i, j)$ con $i \neq j$
- $\forall s \in \mathcal{S}_n$, s se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir
$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \mod 2$$
- Sea $s \in \mathcal{S}_n$ y sea $s = t_1 \cdots t_p$ una descomposición de s en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de s como $\varepsilon(s) = (-1)^p$.

1.5 Tensores simétricos y antisimétricos

Definición 1.5.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$ y $s \in \mathcal{S}_p$, entonces, definimos $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$ como
$$(\underline{s}f)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_{s(1)}, \cdots, v_{s(p)})$$

Ejemplo 1.5.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$ y $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$, entonces
$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

Proposición 1.5.3
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión n, sean $w_1, \ldots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$, y $s \in \mathcal{S}_p$ $(t = s^{-1})$. Entonces
$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$

Demostración
Sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{E}$ (obsérvese que $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$)

$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_1, \ldots, u_p) = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \ldots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$

Dado que $s(i) = j \iff i = t(j)$, $w_i(u_{s(i)}) = w_i(u_j) = w_{t(j)}(u_j)$. Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}(u_1, \ldots, u_p)$$

Ejemplo 1.5.4
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos $(1, 2) = s \in \mathcal{S}_2$. Entonces $s = (1, 2) = s^{-1} = t$ y para los siguientes elementos de $T_2(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \qquad \underline{s} f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \qquad \underline{s} f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos $(1, 2, 3) = s \in (S)_3$. Entonces $t = s^{-1} = (1, 3, 2)$, es decir, que $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$, y para el siguiente elemento de $T_3(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

Observación 1.5.5 Sea $f_i \in T_p(\mathbb{E})$. Entonces $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i (\underline{s} f_i)$. Por tanto, la proposición anterior sirve para $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$.

Ejemplo 1.5.6
Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.5.4 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

Definición 1.5.7
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de $\dim n$. Sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. f es simétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s} f = f$
2. f es antisimétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s} f = \varepsilon(s) f$
3. $S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$
   $A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_P(\mathbb{E})$

Observación 1.5.8 $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ son s.e-v. (ver observación 1.5.5).

Ejemplo 1.5.9
Para los dos ejemplos, sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, sean B y B^* bases de $\mathbb{E}$ y de $\mathbb{E}^*$ correspondientemente.

1. Definimos $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $s = (1,2) \in (S)_2$. Entonces $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s\}$ y $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$, $\varepsilon(s) = -1$.

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f,\ \underline{s}(f) \neq -f\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E})\end{array}$$

2. Como anteriormente, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$.

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\mathrm{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f\end{array}\right\} \Longrightarrow f \in S_2(\mathbb{E})$$

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s) f\end{array}\right\} \Longrightarrow f \in A_2(\mathbb{E})$$

Observación 1.5.10

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$ si $\varepsilon(s) = t_1 \cdots t_n$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$.
- $s \in \mathcal{S}_p$. Definimos $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})_{p \times p}$, donde $a_{i,j} = 1$ si $i = s(j)$ y $a_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces $\det A = \varepsilon(s)$.

Proposición 1.5.11
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-e.v. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$\begin{aligned}\text{f simétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i, j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)\end{aligned}$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned}\text{f antisimétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i \neq j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & - f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \\ \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i \neq j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \ldots, u_p) = 0.\end{aligned}$$

Demostración

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

   En el caso de la implicación conversa se cumple:

$$\begin{aligned}\forall t \text{ transposición } \underline{t} f = f \Longrightarrow & \forall t_1, \ldots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \ldots, t_m} f = \\ & \underline{t_1}(\underline{t_2}(\ldots(\underline{t_m} f)\ldots)) = f\end{aligned}$$

   Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \Longrightarrow \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s} f = f \Longrightarrow \text{ f es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned}
&\forall u_1,\dots,u_p \in E, \forall i \neq j \quad 0 = f(u_1,\dots,u_i+u_j,\dots,u_i+u_j,\dots,u_p) = \\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_i,\dots,u_p) + f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) + \\
&f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p) + f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_j,\dots,u_p) = \\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) + f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p) \implies \\
&f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)
\end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1\cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1\cdots t_m)f$$

Y entonces:

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1\cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f \implies f \in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser f antisimétrica,

$$\forall u_1,\dots,u_p \in E,\ \forall i \neq j \quad f(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_p) = -f(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_p)$$

Si $u_i = u_j$, entonces $f(u_1,\dots,u_p) = 0$.

Proposición 1.5.12
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $\operatorname{car}\mathbf{k} \neq 2$ y sea $f \in T_p(\mathbb{E})$, entonces $\forall v_i, v_j \in \mathbb{E}$

$$f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots) = -f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots) \iff f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots) = 0$$

Demostración
$\Longrightarrow$

$$\begin{gathered}
f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots) = -f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots) \implies \\
2f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots) = 0 \implies f(\cdots,w,\cdots,w,\cdots) = 0
\end{gathered}$$

$\Longleftarrow$

$$\begin{gathered}
f(\cdots,v_i+v_j,\cdots,v_i+v_j,\cdots) = 0 \implies \\
f(\cdots,v_i,\cdots,v_i,\cdots) + f(\cdots,v_j,\cdots,v_j,\cdots) + f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots) + f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots) = 0 \\
\implies f(\cdots,v_i,\cdots,v_j,\cdots) = -f(\cdots,v_j,\cdots,v_i,\cdots)
\end{gathered}$$

Ejemplo 1.5.13
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (forma bilineal) y sea $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base, Llamamos $M_B(f) = A = (f(e_i,e_j))$ y sea $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$. Entonces

$$\underline{\mathrm{Id}}f = f \qquad M_b(\underline{s}f) = (\underline{s}f(e_i,e_j)) = (f(e_j,e_i)) = A^t$$

Es decir, f es simétrico si y solo si $A^t = A \iff A$ simétrica y f es antisimétrico si y solo si $A = -A^t \iff A$ antisimétrica

Ejemplo 1.5.14
Sea $\dim \mathbb{E} = n$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $\mathbb{E}$, entonces

$$f\colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} \to \mathbf{k}$$
$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto det_B(u_1, \dots, u_n)$$

Como f es multilineal ($\implies f \in T_n(\mathbb{E})$), f es antisimétrico por la proposición 1.5.11.

Definición 1.5.15
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $\operatorname{car} \mathbf{k} = 0$ y $f \in T_p(\mathbb{E})$. Llamamos simetrizado de f a

$$S(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \underline{s} f$$

y antisimetrizado de f a

$$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} f$$

Ejemplo 1.5.16
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{E}$

- Sea $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$, entonces

$$S(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*)$$
$$A(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

- Sea $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$, entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*)$$

Observación 1.5.17 $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$, por lo tanto no hace falta calcular s^{-1}

Ejemplo 1.5.18
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (forma bilineal) y sea $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$, entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) + M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) - M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Observación 1.5.19 Si $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

Proposición 1.5.20
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Consideramos $A, S\colon T_p(\mathbb{E}) \to T_p(\mathbb{E})$, entonces

i) A, S son lineales

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ y $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$

iii) $\mathrm{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$ y $\mathrm{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$

Demostración

i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos $S(f+g)$)

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ queda como ejercicio. Suponemos que $f \in A_p(\mathbb{E})$, entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}f\right) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(s)\left(\varepsilon(s)f\right) = \frac{p!f}{p!} = f$$

iii) $\mathrm{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$ queda como ejercicio. Demostraremos que $\mathrm{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$. Por ii sabemos que $A_p(\mathbb{E}) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, por lo tanto, resta ver que $A(h) \in A_p(\mathbb{E})$, $\forall h \in T_p(\mathbb{E})$. Sea $s \in \mathcal{S}_p$

$$\underline{s}A(h) = \underline{s}\left(\frac{1}{p!}\sum_{r\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(r)\underline{r}h\right) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(r)\underline{s}(\underline{r}h)\right) =$$

$$= \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(sr)\underline{sr}h\right) \overset{1.4}{=} \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{t\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(t)\underline{t}h\right) = \varepsilon(s)A(h)$$

Observación 1.5.21 Las mismas construcciones funcionan para tensores $(0,q)$, $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$, pero no funcionan para tensores (p,q) donde $p,q \neq 0$ porque las construcciones implican permutaciones.

1.6 Producto exterior

Observación 1.6.1 $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$, $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ y S_p, A_p s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$, $g \in S_{p'}(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_{p'}(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

Ejemplo 1.6.2
Sean ω_1, $\omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$:

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$, porque $S_1 = \{\mathrm{Id}\}$.
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$.

Observación 1.6.3 El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

Observación 1.6.4 Lo haremos en $T_p(\mathbb{E})$, análogamente se hará en $T^q(\mathbb{E})$.

Definición 1.6.5 (producto exterior de orden 1)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v.; $\omega_1, \ldots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)$$

Observación 1.6.6

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \cancel{p!} \left(\frac{1}{\cancel{p!}} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} \left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p \right) \right) =$$

$$= \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \left(\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{s^{-1}(p)} \right) \stackrel{\varepsilon(s) = \varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)} \right)$$

Ejemplo 1.6.7
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \cdots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

Proposición 1.6.8
Sean $\omega_1, \ldots \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$

ii) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \left(\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}} \right) . \wedge \cdots \wedge \omega_p = \alpha_i (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \ldots . \wedge \omega_p) + \beta_i (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \cdots \wedge \omega_p)$

iii) Sea $s \in \mathcal{S}_p$, $t = s^{-1}$, $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t} \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \right) = \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \right)$.

iv) Si $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E}$, $\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \right) (u_1, \ldots, u_p) = \det \left(\omega_j(u_i) \right)$.

v) Si $\omega_i = \omega_j, (i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$.

vi) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ son linealmente independientes.

Demostración

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A \left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p . \right) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in \operatorname{Im}(A) \stackrel{\text{visto}}{=} A_p(\mathbb{E})$.

ii) Ejercicio (misma proposición que $\otimes$).

iii) $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$ (Ejercicio, misma proposición que $\otimes$).

$$\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} \stackrel{1.6.5 + 1.6.6}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)} \right) =$$

$$\stackrel{\varepsilon^2(s) = 1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r) \varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)} \right) \stackrel{rs = m \in \mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m) \left(\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)} \right) =$$

$$= \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \right).$$

iv)

$$\overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})}(u_1,\ldots,u_p) = \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)}\otimes\cdots\otimes\omega_{r(p)}\right)(u_1,\ldots,u_p) =$$

$$\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)}(u_1)\ldots\omega_{r(p)}(u_p)\right) \overset{\text{def det}}{=} det(\omega_j(u_i))_{i,j}.$$

v)

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_p \overset{iii}{=} (-1)\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_i\wedge\cdots\wedge\omega_p \implies$$
$$\implies 2\left(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\right) = 0 \overset{\text{car}\,\mathbf{k}\neq 2}{\implies} \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p = 0.$$

vi) $\implies$

Suponemos que son l.d. y que $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j\omega_j$:

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p = \omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{p-1}\wedge\left(\sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j\omega_j\right) \overset{ii}{=} \sum_{j=1}^{p-1}\alpha_j\left(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{p-1}\wedge\omega_j\right) \overset{v}{=} 0 \text{ !!}$$

$\Longleftarrow$

Sea $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$, $B^*=\{\omega_1,\ldots,\omega_p,\overbrace{\omega_{p+1},\ldots,\ldots,\omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$ la base dual de B, tenemos que:

$$\left(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\right)(u_1,\ldots,u_p) \overset{iv}{=} \det\left(\omega_j\left(u_i\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Observación 1.6.9 En el caso particular de $B=\{e_1,\ldots e_n\}$ base de $\mathbb{E}$,

$$I=\{i_1,\ldots i_p\},\ 1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n;$$
$$J=\{j_1,\ldots j_p\},\ 1\leq j_1<\cdots<j_p\leq n.$$

$$\varepsilon_{IJ} = \left(e^*_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^*_{i_p}\right)\left(e_{j_1},\cdots,e_{j_p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } I=J \\ 0 & \text{en el caso contrario}\end{cases}$$

En efecto, si $\exists j_k\in J$, $j_k\notin I$, entonces en virtud del cálculo dado por iv (1.6.8), en la posición k hay una fila de ceros.
Por otro lado, si $I=J$ entonces tenemos el determinante de la matriz identidad.
Observemos también que si $I=J$ pero no están ordenadas crecientemente, $\varepsilon_{IJ}=\pm1$ en función de las permutaciones que ordenan estos conjuntos.

Teorema (1.6.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de $\dim n$, sea $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ y sea $p\leq n$.

i) $\dim A_p(\mathbb{E}) = \binom{n}{p}$.

ii) Una base de A_p es $\tilde{B} = \left\{ e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p} \right\}$, $i \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

iii) Si $w \in A_p(\mathbb{E})$, las coordenadas de w en la base anterior son:

$$\left(w\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p} \right) \right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$$

Demostración

i) *ii* $\Longrightarrow$ *i* trivialmente.

ii) L.I.: Sea

$$w = \sum_{\substack{I = \{i_1, \ldots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \alpha_I e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p} = 0.$$

Sea $I_0 = \left\{ i^0_1, \ldots, i^0_p \right\}$ con $1 \leq i^0_1 < \cdots < i^0_p \leq n$ cualesquiera. Entonces,

$$0 = w\left(e_{i^0_1}, \ldots, e_{i^0_p} \right) = \sum_{\substack{I = \{i_1, \ldots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \alpha_I e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p} \left(e_{i^0_1}, \ldots, e_{i^0_p} \right) \overset{1.6.9}{=} \alpha_{I_0}.$$

Generadores:

$$A_p(\mathbb{E}) = A(T_p(\mathbb{E})) = A_p\left(\left[e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \right]_I \right) = \left[\left\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \right\}_I \right] \overset{ii}{=} \left[\left\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \right\}_{I \text{ ordenado}} \right].$$

iii) Sea $w \in A_p(\mathbb{E})$. Consideremos

$$\tilde{w} = \sum_{\substack{I = \{i_1, \ldots, i_p\} \\ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}} \left(w\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p} \right) \right) e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}.$$

Veremos que $\tilde{w} = w$. Como tensores, basta ver que coinciden sobre vectores $\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p} \right)$. Como ambos son alternados, podemos suponer $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$. Entonces,

$$\tilde{w}\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p} \right) = w\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p} \right).$$

Ejemplo 1.6.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

Espacio	dim	base	coordenadas
$A_1(\mathbb{E}) = T_1(\mathbb{E}) (= \mathbb{E}^*)$	3	$\{e^*_1, e^*_2, e^*_3\}$	$w = (a_1, b_1, c_1)$
$A_2(\mathbb{E}) \subseteq T_2(\mathbb{E})$	3	$\{e^*_1 \wedge e^*_2, e^*_1 \wedge e^*_3, e^*_2 \wedge e^*_3\}$	$w_1 \wedge w_2 = (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_2) e^*_1 \wedge e^*_2 + (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_3) e^*_1 \wedge e^*_3 + (w_1 \wedge w_2)(e_2, e_3) e^*_2 \wedge e^*_3$
$A_3(\mathbb{E}) \subseteq T_3(\mathbb{E})$	1	$\{e^*_1 \wedge e^*_2 \wedge e^*_3\}$	$t = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = (t(e_1, e_2, e_3))$

Además, si $w_1 = (a_1, b_1, c_2)_{B^*}$, $w_2 = (a_2, b_2, c_2)_{B^*}$ y $w_3 = (a_3, b_3, c_3)_{B^*}$

$$w_1 \wedge w_2 = \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_2) \\ w_2(e_1) & w_2(e_2) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_3) \\ w_2(e_1) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_2) & w_1(e_3) \\ w_2(e_2) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*) =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*)$$

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3)(e_1, e_2, e_3)(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)$$

Observación 1.6.12 De forma análoga, podemos hacer el producto exterior de tensores 1-contravariantes $(T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E})$ y obtendremos $A^p(\mathbb{E})$ con dimensión $\binom{n}{p}$ y base $\left\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ si $B = \{e_i, \ldots, e_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.

Definición 1.6.13
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$ y $g \in A_q(\mathbb{E})$. Definimos el producto exterior de f y g como

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(f \otimes g)$$

Proposición 1.6.14
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_q(\mathbb{E})$ y $h \in A_r(\mathbb{E})$.

i) $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

ii) $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$

iii) $\wedge$ es lineal en cada factor.

Observación 1.6.15 $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_r = w_1 \wedge (w_2 \wedge (\cdots w_{r-1} \wedge (w_r)))$

Ejemplo 1.6.16
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $f, g \in A_2(\mathbb{E})$

- $f = e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*$
- $g = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$

$$f \wedge g = (e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*) \wedge (e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*) =$$

$$= \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} +$$

$$+ e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \cancelto{0}{e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} = e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$$

2 Geometría Proyectiva

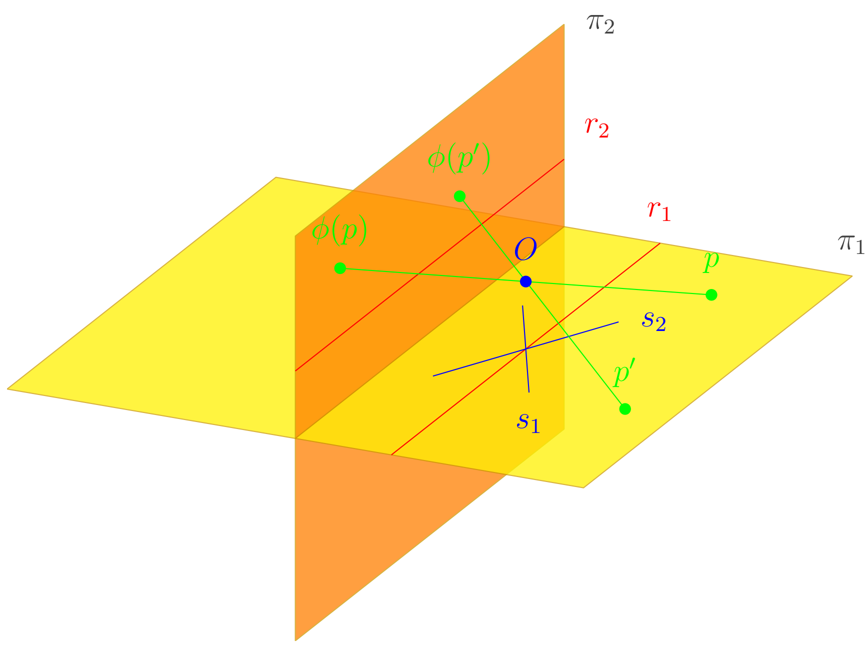
2.1 Contexto e idea

Segun el programa de Erlegen, una geometría se basa en el estudio de invariantes al aplicar unas ciertas transformaciones. Así tenemos que las geometrías estan "incluidas" en las superiores.

Así, la geometría euclidea, que estudia las transformaciones ortogonales, estaría "incluída" en la geometría afín, que estudia las tansformaciones lineales. Aquí se muestra una tabla con las distintas geometrías en la cual cada una esta "incluída" en la anterior

Geometría	Transformaciones de estudio
G. euclídea	transformaciones ortogonales
G. afín	transformaciones lineales
G. proyectiva	proyectividades
G. Algebraica	transformaciones por polinomios
G. Analítica	transformaciones por funciones analíticas
G. Diferencial	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$
Topología	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^0$

2.1.1 Problema matemático



La idea básica del problema es enviar los puntos de π_1 a π_2 mediante la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \pi_1 &\to \pi_2 \\ p &\mapsto \overline{pO} \cap \pi_2 \end{aligned}$$

Observación 2.1.1

i) ϕ manda rectas a rectas

ii) ϕ no esta definida en r_1

iii) r_2 no esta en la imagen de ϕ

iv) $\phi(s_1)$ y $\phi(s_2)$ son pararelas, por lo tanto, ϕ no mantiene el paralelismo

v) ϕ no mantiene el tipo de cónica afín

Veremos que la solucion para ii y iii consistirá en añadir puntos en el ∞.

2.2 Definición y caracterizaciones del espacio proyectivo

Definición 2.2.1
Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo, $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de $\dim n+1$. El espacio proyectivo asociado a $\mathbb{E}$ es

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\}$$

Diremos que $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ tiene dimensión n.

Observación 2.2.2 Se cumple $\mathbb{P}(\mathbb{E}) = (\mathbb{E} \setminus \{0\})/\sim$, donde $v \sim v' \iff \exists \lambda \neq 0,\ v' = \lambda v$ para $v, v' \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$.

Definición 2.2.3
Tenemos la siguiente aplicación π dada por el paso al cociente.

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{E} \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ v &\mapsto \pi(v) = [v] \\ \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\} &\leftrightarrow [v] \end{aligned}$$

Definición 2.2.4
A los elementos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ los llamaremos puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$.

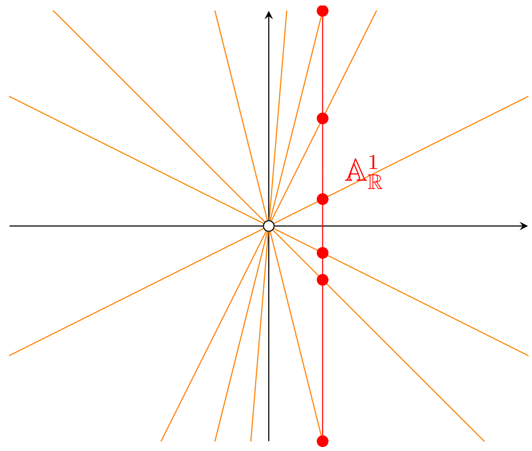
$$p = \pi(v) = [v]$$

Observación 2.2.5

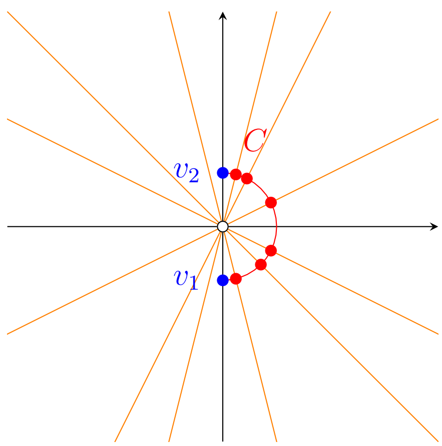
- Si $\mathbb{E}$ no es relevante, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$.
- Si queremos remarcar $\mathbf{k}$, $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$.
- Normalmente $\mathbb{P} + \mathbf{k}^n = \mathbb{P}(\mathbf{k}^{n+1}) = (\mathbf{k}^{n+1} \setminus 0)/\sim$.

Ejemplo 2.2.6

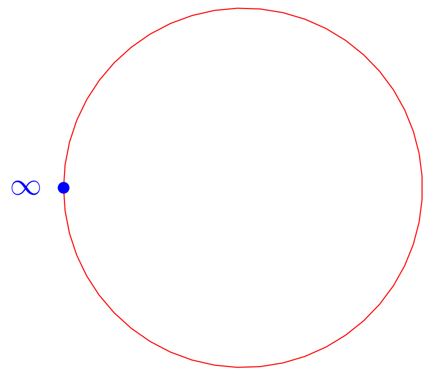
1. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.



Cada objeto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ (rectas en naranja) tiene su equivalente en $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ (puntos en rojo), a excepción de la recta $x = 0$. Para solucionar este problema, podemos usar la siguiente representación



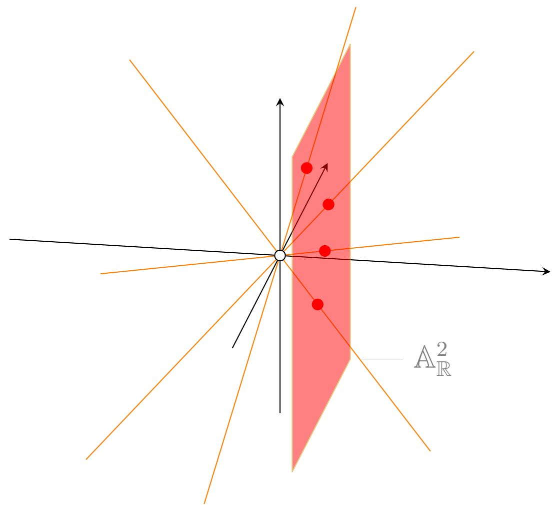
Pero el problema ahora viene por que v_1 y v_2 corresponden al mismo elemento de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Lo podemos solucionar de la siguiente forma:



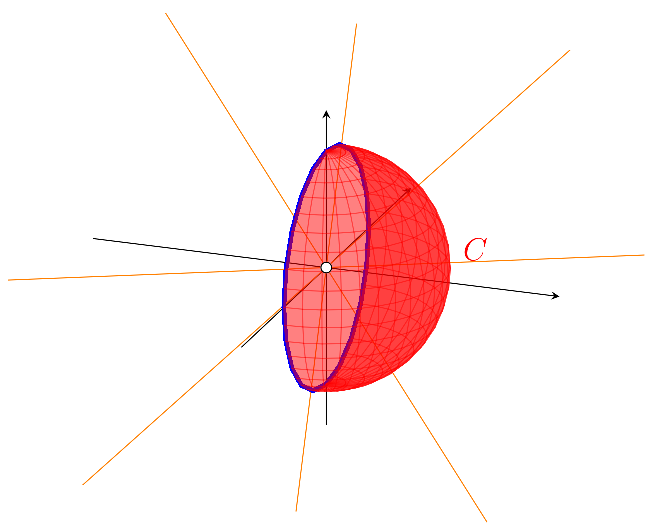
De tal forma que

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = C/(v_1 \sim v_2)$$

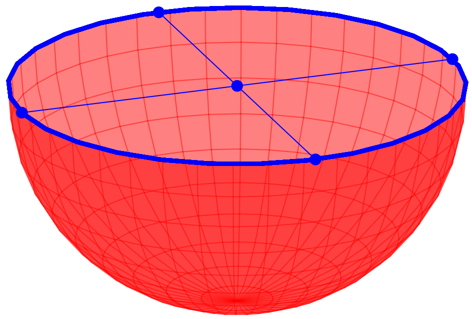
2. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.



Cada objeto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (rectas en naranja) tiene su equivalente en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (puntos en rojo), a excepción de las rectas del plano $x = 0$. Para solucionar este problema, procedemos de manera análoga a 1

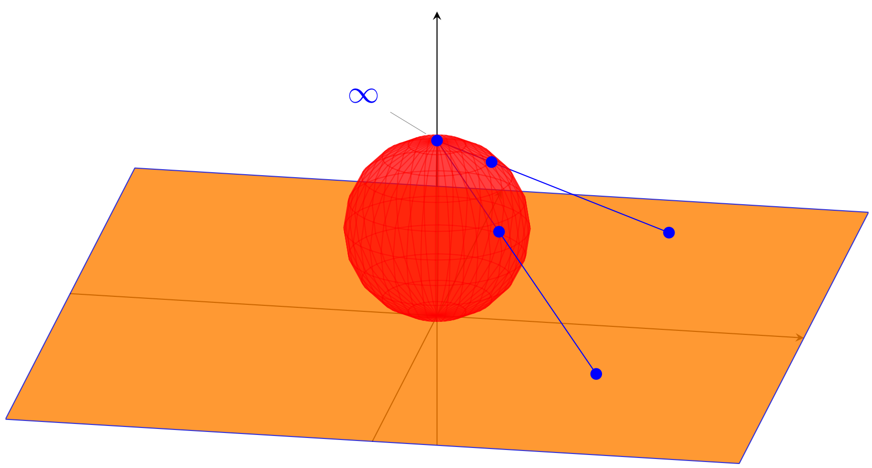


De nuevo, nos encontramos con el problema de que hay elementos de C (en azul) que se corresponden con el mismo elemento de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, No obstante, podemos visualizarlo como



Y unir los puntos azules antipolares. Aunque, si lo tratamos de imaginar, este objeto no cabe en $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\sim\, = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. Las igualdades por el momento son por analogía o intuición, más adelante se demostrarán. Aunque nos podemos hacer una idea basándonos en la proyección estereográfica



4. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}/2}$ contiene 7 puntos pues las rectas de $\mathbb{Z}^3$ solo contienen el 0 y un punto.

Observación 2.2.7 Hemos enunciado la definición algebraica de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Existe una definición axiomática que no es igual en algunos casos patológicos.

2.3 Variedades lineales proyectivas

Definición 2.3.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimensión $n+1$, sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Llamaremos variedad lineal (proyectiva) de dimensión r a cualquier conjunto de la forma:

$$V = \pi(H \setminus \{0\})$$

donde $H \subseteq \mathbb{E}$ es un subespacio vectorial de dimensión $r+1$.

Por convención defnimos la siguiente notación:

$$V = \pi(H \setminus \{0\}) = \pi(H)$$

Ejemplo 2.3.2

- $\mathbb{P}^n = \pi(\mathbb{E})$ es una variedad lineal de dimensión n.
- $p \in \mathbb{P}^n$, $p = \pi(v) = \pi([v])$ es una varideadad lineal de dimensión 0.
- $\varnothing = \pi(\varnothing_{\mathbb{E}})$ es una variedad lineal de dimensión -1.

Definición 2.3.3

- $\dim V = 1 \longrightarrow$ Recta
- $\dim V = 2 \longrightarrow$ Plano
- $\dim V = n-1 \longrightarrow$ Hiperplano

Lema 2.3.4 $V = \pi(H \setminus \{0\}) \iff H \setminus \{0\} = \pi^{-1}(V)$

Ejercicio 2.3.5
Demostrar el lema anterior.

Observación 2.3.6 Hay una biyección

$$\{\text{s.e.v. de } \mathbb{E}\} \underset{\pi^{-1}}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades lineales de } \mathbb{P}(\mathbb{E})\}$$

- con dimension $r+1 \leftrightarrow r$
- $H_1 \subseteq H_2 \iff V_1 \subseteq V_2$ con $V_i = \pi(H_i)$
- Las operaciones $+$ y $\cap$ definidas para subespacios, se definen a traves de esta biyección a variedades.

Proposición 2.3.7
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales $\implies V_1 \cap V_2$ variedad lineal que verifica:

- $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1, V_2$
- Si W variedad lineal, $W \subseteq V_1, V_2 \implies W \subseteq V_1 \cap V_2$

Demostración
Veamos que: $V_1 \cap V_2 = \pi(H_1 \cap H_2)$ si $V_i = \pi(H_i)$
$\supseteq$

$$\text{Si } v \in H_1 \cap H_2, p = [v] \in \pi(H_1), \pi(H_2) \implies p \in V_1 \cap V_2$$

$\subseteq$

$$\text{Sea } p \in V_1 \cap V_2, \left.\begin{array}{l} p = [v_1], v_1 \in H_1 \\ p = [v_2], v_2 \in H_2 \end{array}\right\} \implies [v_1] = [v_2] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ t.q. } v_2 = \lambda v_1 \implies$$
$$\implies v_2 \in H_1 \implies v_2 \in H_1 \cap H_2 \implies p = [v_2] \in \pi(H_1 \cap H_2)$$

El resto sigue de lo que sabemos de s.e.v.s.

Definición 2.3.8
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales, $V_i = \pi(H_i)$, definimos *join* o variedad lineal generada como:

$$V_1 \vee V_2 = \pi(H_1 + H_2)$$

Proposición 2.3.9

- $V_1, V_2 \subseteq V_1 \vee V_2$
- Sea W una variedad lineal, $V_1, V_2 \subseteq W \implies V_1 \vee V_2 \subseteq W$

Demostración
Propiedades de la suma de s.e.v.

Proposición 2.3.10
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales:

- $V_1 \subseteq V_2 \implies \dim(V_1) \leq \dim(V_2)$
- Si $V_1 \subseteq V_2$ y $\dim(V_1) = \dim(V_2) \implies V_1 = V_2$

Proposición 2.3.11 Fórmula de Grassmann

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demostración
Propiedades s.e.v.

Ejemplo 2.3.12

1. $\mathbb{P}^2$ $\quad V_1, V_2$ rectas, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 2$	Posición relativa
0	2	Se cortan en un punto
1	1	Son la misma recta

   Por tanto, dos rectas en un plano, o se cruzan o son la misma.

2. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1, V_2$ rectas, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
-1	3	Se cruzan
0	2	Se cortan en un punto ($V_1 \vee V_2 \cong \mathbb{P}^2$)
1	1	Son la misma recta

3. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1, V_2$ planos, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 4$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
1	3	Se cortan en una recta
2	2	Son el mismo plano

4. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1$ plano, V_2 recta, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 3$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
0	3	Se cortan en un punto
1	2	$V_2 \subseteq V_1$

Proposición 2.3.13
Sean $p \in \mathbb{P}^n, r, V, H \subseteq \mathbb{P}^n$ (recta, variedad lineal, hiperplano, respectivamente).

1. $\dim(V \vee p) = $ ó $\begin{cases} \dim V & (\iff p \in V) \\ \dim V + 1 & (\iff p \notin V) \end{cases}$

2. $\dim(r \cap H) = $ ó $\begin{cases} 1 & (\iff r \subseteq H) \\ 0 & (\iff r \nsubseteq H) \end{cases}$

Demostración
Fórmula de Grassmann.

Definición 2.3.14
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n, (V_i = \pi(H_i)$ variedades lineales, V_1 y V_2 son suplementarias $\iff$ H_1 y H_2 son complementarios.

Observación 2.3.15

$$V_1, V_2 \text{ suplementarias} \iff H_1 \oplus H_2 = \mathbb{E} \iff \begin{Bmatrix} (1) & H_1 + H_2 = \mathbb{E} \\ (2) & H_1 \cap H_2 = \varnothing \end{Bmatrix} \iff$$
$$\iff \begin{cases} (1) & V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \\ (2) & V_1 \cap V_2 = \varnothing \end{cases}$$

Proposición 2.3.16
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales:

1. V_1, V_2 son suplementarias $\implies \dim V_1 + \dim V_2 = n - 1$

2. Si $\dim V_1 + \dim V_2 = n - 1$

$$V_1, V_2 \text{ suplementarias} \iff V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \iff V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Demostración

1. V_1, V_2 suplementarias $\iff H_1, H_2$ complementarios $\implies \overbrace{\dim H_1}^{\dim V_1 + 1} + \overbrace{\dim H_2}^{\dim V_2 + 1} = \dim \mathbb{E} = n + 1$

2. Fórmula de Grassmann.

Definición 2.3.17
Sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}(\mathbb{E})$, y sean $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{P}^n$ tal que $p_i = [v_i], v_i \in \mathbb{E}$, decimos que $p_0, \dots, p_m$ son linealmente independientes (l.i.) $\iff$ $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{E}$ son linealmente independientes.

Observación 2.3.18 La independencia lineal no depende de los representantes elegidos.

Ejemplo 2.3.19
$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Sean $p_0 = [(1,1,0)], p_1 = [(0,1,1)], p_2 = [(2,3,1)]$. Entonces p_0 y p_1 son linealmente independientes, pero p_0, p_1, p_2 son linealmente dependientes.

Proposición 2.3.20
Sean $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{P}^n$ puntos y $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lineal:

1. $\dim(p_0 \vee \cdots \vee p_m) \leq m$.
2. $\dim(p_0 \vee \cdots \vee p_m) = m \iff p_0, \dots, p_m$ son linealmente independientes.
3. $\dim V = m \iff \exists p_0, \dots, p_m \in V$ linealmente independientes tales que $V = p_0 \vee \cdots \vee p_m \iff \forall p_0, \dots, p_m \in V$ linealmente independientes, $V = p_0 \vee \cdots \vee p_m$.

Demostración
Inmediata a partir de propiedades de s.e.v..

Definición 2.3.21
$p_0, \dots, p_r \in \mathbb{P}^n (r \geq n)$ estan en posición general $\iff$ $n+1$ puntos cualesquiera de ellos son l.i..

2.4 Sistemas de referencia proyectivos. Coordenadas proyectivas

Observación 2.4.1 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Sea $B = \{v_0, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{E}$:

$$p = [v] = [\lambda v] \qquad (v)_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda v)_B = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vemos que las coordenadas estarían definidas salvor por multiplicar por λ.

Definición 2.4.2
$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$

1. Un sistema de referencia proyectivo en $\mathbb{P}^n$ es:

$$R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$$

   Donde $p_0, \dots, p_n, \bar{p}$ estan en posición general.

   - $\{p_0, \dots, p_n\}$ son los vertices de R
   - $\bar{p}$ es el punto unidad

2. Fijado un sistema de referencia R. Sea $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ base de $\mathbb{E}$. Diremos que B está adaptada a R si y solo si:

$$\begin{cases} p_i = [u_i], \forall i = 0, \dots, n \\ \bar{p} = [u_0 + \cdots + u_n] \end{cases}$$

3. *Asignación de coordenadas proyectivas*
   $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$, Sea $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$, y $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ una base adaptada. Sea $q \in \mathbb{P}^n, q = [v]$, entonces $q_R = v_B$. (Hace falta ver que la definición es consistente)

Proposición 2.4.3
Sea R un sistema de referencia en $\mathbb{P}^n$. Sean $B_1 = \{u_0, \dots, u_n\}, B_2 = \{u'_0, \dots u'_n\}$ bases adaptadas a R. Sea $q = [v] \in \mathbb{P}^n$, entonces $\exists \lambda \neq 0$ tal que $v_{B_2} = \lambda v_{B_1}$.

Demostración
$p_i = [u_i] = [u'_i], \forall i = 0, \dots, n$. Por tanto, $\exists \lambda \neq 0$ tal que $u'_i = \lambda_i u_i, \forall i = 1, \dots, n$. Por otro lado,

$$\bar{p} = [u_0 + \cdots + u_n] = [u'_0 + \cdots + u'_n] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } u'_0 + \cdots + u'_n =$$
$$= \lambda_0 u_0 + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda(u_0 + \cdots + u_n) \overset{B_1 \text{ base}}{\implies} \lambda_i = \lambda \ \forall i = 1, \dots, n$$

Observación 2.4.4 $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$ en $\mathbb{P}^n$

1. $q \in \mathbb{P}^n, q_R = (a_0, \dots, a_n) = \lambda(a_0, \dots, a_n) \overset{\text{notación}}{=} (a_0 : \cdots : a_n) \ \forall \lambda \neq 0$

2. Ejemplos:
   $(p_0)_R = (1 : 0 : \cdots : 0)$
   $\vdots$
   $(p_n)_R = (0 : \cdots : 0 : 1)$

3. $q_R = (0 : \cdots : 0)$ no existe.

4. Sea $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3), R = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\} = \{[(1,1,0)], [(1,0,1)], [(0,1,1)]; [(3,3,2)]\}$, entonces $B = \{[(1,1,0)], [(1,0,1)], [(0,1,1)]\}$ no es una base adaptada, para que lo sea, debemos multiplicar v_0, v_1, v_2 por $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tales que $\bar{p} = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$. En este caso:

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 3 \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

   Y el sistema de referencia con la base B adaptada es:

$$R' = \{[(2,2,0)], [(1,0,1)], [(0,1,1)]; [(3,3,2)]\}$$

Ejemplo 2.4.5
Consideremos el espacio $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; \overline{p}\}$, con $p_0 = [(1,1,0)]$, $p_1 = [(1,0,1)]$, $p_2 = [(0,1,1)]$ y $\overline{p} = [(3,3,2)]$. Queremos encontrar $B = \{u_0, u_1, u_2\}$ una base adaptada, es decir, que cumpla $\overline{p} = [u_0 + u_1 + u_2]$ y que $p_i = [u_i]$. Comprobamos que para la base $B = \{(2,2,0)^t, (1,0,1)^t, (0,1,1)^t\}$, se cumple

$$(p_0)_{\mathcal{R}} = (1:0:0) \quad (p_1)_{\mathcal{R}} = (0:1:0)$$
$$(p_2)_{\mathcal{R}} = (0:0:1) \quad (\overline{p})_{\mathcal{R}} = (1:1:1)$$

El punto $q = [(3,2,1)]$ tiene las coordenadas $q_{\mathcal{R}} = w_B = (1:1:0)$, que, en un abuso de notación, escribiremos como $(1,1,0)$.

Proposición 2.4.6
Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ sistemas de referencia de $\mathbb{P}^n$. Sea $q \in \mathbb{P}^n$.

i) $\exists S \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{k})$ invertible tal que $q_{\mathcal{R}_1} = S q_{\mathcal{R}_2}$ (matriz del cambio de sistema de referencia).

ii) Sean B_1, B_2 bases adaptadas a $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ respectivamente. Podemos coger $S = S_{B_2, B_1}$.

iii) Cualquier matriz de cambio de referencia es de la forma $S = \lambda S_{B_2, B_1}$ $(\lambda \neq 0)$.

Demostración
Cambio de base en $\mathbb{E}$.

Observación 2.4.7 Sea $\mathcal{R}$ sistema de referencia en $\mathbb{P}^n$, y B una base adaptada a éste. Las variedades lineales se pueden describir con

- Ecuaciones paramétricas: Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lineal de $\dim m$. Entonces $\exists p_0, \dots, p_m \in V$ linealmentes independientes tales que $V = p_0 \vee \cdots \vee p_m$ y para $q \in \mathbb{P}^n$

$$q \in V \iff w \in F \iff \begin{cases} \exists \alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbf{k} \\ w_B = \alpha_0 (v_0)_B + \cdots + \alpha_m (v_m)_B \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} \exists \alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbf{k} \\ q_R = \alpha_0 (p_0)_R + \cdots + \alpha (p_m)_R \end{cases}$$

  Donde $V = \pi(F)$, $p_i = \pi(v_i)$, y $q = \pi(w)$.

- Ecuaciones implícitas: Las ecuaciones implícitas de V en $\mathcal{R}$ coinciden con las ecuaciones implícitas de F en B. Es decir, existe una matriz A tal que los vectores $w_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que cumplen $A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son todos los pertenecientes a F y los puntos $q_R = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que cumplen $A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son todos los pertenecientes a V.

Observación 2.4.8 Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimensión $n+1$, F un subespacio vectorial de dimensión $m+1$, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$ y $V = \pi(F)$ una variedad lineal. Entonces

$$\dim V = \dim F - 1 = \dim E - \operatorname{rg} A - 1 = n + 1 - \operatorname{rg} A - 1 \implies m = \dim V = n - \operatorname{rg} A$$

Observación 2.4.9

- Para convertir de ecuaciones implícitas a paramétricas se debe resolver el sistema de ecuaciones homogéneo.
- Para convertir de ecuaciones paramétricas a implícitas se debe imponer

$$\operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc|c} & & & x_0 \\ (p_0)_R & \dots & (p_m)_R & \vdots \\ & & & x_n \end{array}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{array}{ccc} (p_0)_R & \dots & (p_m)_R \end{array}\right)$$

Ejemplo 2.4.10
Consideremos el espacio $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2, \overline{p}\}$, y los puntos $(q_0)_{\mathcal{R}} = (1,1,1)$ y $(q_1)_{\mathcal{R}} = (1,2,0)$. Encontremos las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta $V = q_0 \vee q_1$.

- Dado que los puntos son dados directamente y se hace su join, las ecuaciones paramétricas son tan solo las combinaciones lineales de q_0 y q_1. Más formalmente, si $(q)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, se cumple

$$q \in V \iff \exists \alpha_0, \alpha_1 \text{ t.q. } \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para encontrar las ecuaciones implícitas de esta variedad, imponemos que (x_0, x_1, x_2) sea combinación lineal de q_0 y q_1, es decir,

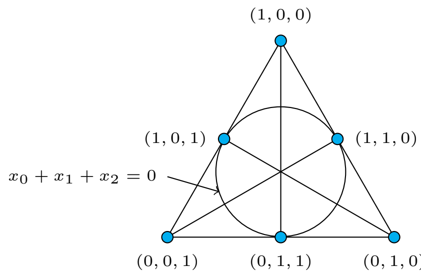
$$q \in V \iff \operatorname{rg}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_0 \\ 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{array}\right) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_0 \\ 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

Consideremos ahora la recta V' dada por $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Para encontrar su expresión paramétrica, debemos resolver este sistema de ecuaciones. En este caso, podemos encontrar dos soluciones linealmente independientes y expresar todas las soluciones como combinaciones lineales de estas.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En este mismo ejemplo, $p_0 \vee p_1 : x_2 = 0$, $p_2 \vee \overline{p} : x_1 - x_0 = 0$ y $(p_0 \vee p_1) \cap (p_2 \vee \overline{p}) = (1,1,0)$. Análogamente para los demás índices.

Ejemplo 2.4.11
Consideremos $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}/2}$. Sus puntos se pueden expresar como (a,b,c) $a,b,c \in \mathbb{Z}/2$. Podemos representarlo como



Como se puede observar, contiene siete puntos y siete rectas. Se denomina plano de Fano.

Observación 2.4.12 En $\mathbb{P}^2$, sean $(p_0)_R = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ y $(p_1)_R = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Entonces, $V = p_0 \vee p_1 \colon \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$. Es decir, aunque no haya operación suma definida entre puntos, está bien definido el conjunto de combinaciones lineales de ellos.

Observación 2.4.13

i)
$$\left.\begin{array}{l} V = p_0 \vee \cdots \vee p_m \\ W = q_0 \vee \cdots \vee q_r \end{array}\right\} V \vee W = p_0 \vee \cdots \vee p_m \vee q_0 \vee \cdots \vee q_r.$$

Demostración
Directa de espacios vectoriales.

ii)
$$\left.\begin{array}{l} V \colon A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \\ W \colon B \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} V \cap W \colon \left(\frac{A}{B}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Demostración
Directa de espacios vectoriales.

2.5 Dualidad

La **dualidad** es una diferencia fundamental respecto de la geometría afín.

Recordatorio 2.5.1 (Problema 3, Lista T1) Consideremos $\mathbb{E}$ un espacio vectorial y su dual $\mathbb{E}^*$. Sea $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ un subespacio vectorial. Entonces, $\mathbb{F}^\perp = \{w \in \mathbb{E}^* | w(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{F}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{E}^*$ y se satisface que $\dim \mathbb{F}^\perp = \dim \mathbb{E} - \dim \mathbb{F}$. Además, se tiene que

- $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}_2 \iff \mathbb{F}_2^\perp \subseteq \mathbb{F}_1^\perp$,
- $(\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2)^\perp = \mathbb{F}_1^\perp + \mathbb{F}_2^\perp$,
- $(\mathbb{F}_1 + \mathbb{F}_2)^\perp = \mathbb{F}_1^\perp \cap \mathbb{F}_2^\perp$,
- $\left(\mathbb{F}^\perp\right)^\perp = \mathbb{F}$.

Por tanto,

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbb{E} = \mathbb{E}^{**}} & & \boxed{\mathbb{E}^*} \\ \{\text{s.e.v. de } \dim = d\} & \underset{\perp}{\overset{\perp}{\rightleftarrows}} & \{\text{s.e.v. de } \dim = \dim \mathbb{E} - d\} \end{array}$$

de manera que la operación $\perp$ define una biyección entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}^*$ que invierte el orden de las inclusiones e intercambia $+$ y $\cap$.

Definición 2.5.2
Sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Llamaremos espacio proyectivo dual de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ a

$$(\mathbb{P}^n)^* \equiv \mathbb{P}(\mathbb{E}^*).$$

Observación 2.5.3

i) $\dim (\mathbb{P}^n)^* = n$.

ii) $((\mathbb{P}^n)^*)^* = \mathbb{P}^n$.

Definición 2.5.4
Sea $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ y sea $V = \pi(\mathbb{F}) \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lineal de $\dim m$. Entonces, se define la variedad lineal dual de V como

$$V^* \equiv \pi\left(\mathbb{F}^\perp\right) \subseteq (\mathbb{P}^n)^*.$$

Observación 2.5.5

i) $\dim V^* = n - m - 1$,

ii) $(V^*)^* = V$,

iii) $V_1 \subseteq V_2 \iff V_2^* \subseteq V_1^*$,

iv) $(V_1 \vee V_2)^* = V_1^* \cap V_2^*$,

v) $(V_1 \cap V_2)^* = V_1^* \vee V_2^*$.

En conclusión,

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}^n)^{**}} & & \boxed{(\mathbb{P}^n)^*} \\ \{\text{vars. lins. de } \dim = m\} & \underset{*}{\overset{*}{\rightleftarrows}} & \{\text{vars. lins. de } \dim = n-m-1\} \end{array}$$

de manera que la operación $*$ define una biyección entre $\mathbb{P}^n$ y $(\mathbb{P}^n)^*$ que invierte el orden de las inclusiones e intercambia $\vee$ y $\cap$.

Observación 2.5.6 Caso particular de los hiperplanos

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\mathbb{P}^n} & & \boxed{(\mathbb{P}^n)^*} \\ H \text{ hiperplano} & \longmapsto & H^* \text{ punto} \\ \dim m = n-1 & & \dim n - (n-1) - 1 = 0 \end{array}$$

Recíprocamente,

$$H_p \equiv p^* \text{ hiperplano} \quad \longleftarrow\!\shortmid \quad p \in (\mathbb{P}^n)^*$$

En ecuaciones,

$$H_p \colon a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0 \longleftrightarrow p = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

<u>Conclusión</u>: los hiperplanos de $\mathbb{P}^n$ son (*están en biyección con*) un espacio proyectivo de $\dim n$.

Definición 2.5.7
Sean $H_0, \dots, H_m$ hiperplanos de $\mathbb{P}^n$.

(i) $H_0, \dots, H_m$ son l.i. $\iff$ $H_0^*, \dots, H_m^*$ son l.i.

(ii) $H_0, \dots, H_m$ están en posición general $\iff$ $H_0^*, \dots, H_m^*$ están en posición general.

Proposición 2.5.8
Sean $H_0, \dots, H_m \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplanos, entonces

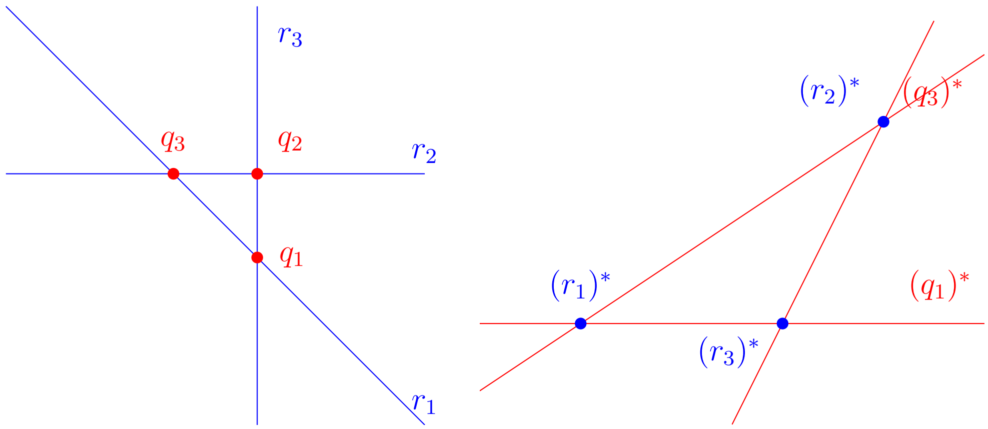
$$H_0, \dots, H_m \text{ l.i.} \iff \dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m) = n-m-1$$

Demostración
$H_0, \dots, H_m$ l.i $\overset{\text{def}}{\iff}$ $H_0^*, \dots, H_m^* \in (\mathbb{P}^n)^*$ son l.i. $\iff$ $\dim(H_o^* \vee \cdots \vee H_m^*) = m$ $\iff$ $\dim(H_o^* \vee \cdots \vee H_m^*)^* = n-m-1 = \dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m)$

Definición 2.5.9
Una recta (o haz) de hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ es la colección de hiperplanos que contienen a una variedad fijada V de dimensión $n-2$.

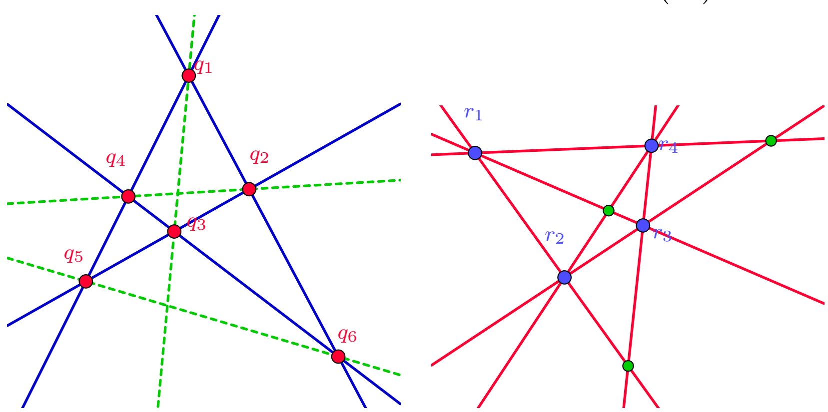
Ejemplo 2.5.10 Dualizacion del triángulo

Triángulo en $\mathbb{P}^2$ Triángulo en $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$



Ejemplo 2.5.11

Cuadrilátero en $\mathbb{P}^2$ Cuadrilátero en $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$



Definición 2.5.12
Sea $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n; \bar{p}\}$ una referencia de $\mathbb{P}^n$, sea $B = \{u_0, \ldots, u_n\}$ una base adaptada y sea $B^* = \{u_0^*, \ldots, u_n^*\}$ su base dual. Entonces, llamamos referencia dual de $\mathcal{R}$ a

$$\mathcal{R}^* = \{p_0' = [u_0^*], \ldots, p_n' = [u_n^*]; \bar{p}' = [u_0^* + \cdots + u_n^*]\}$$

Observación 2.5.13 $\mathcal{R}^*$ no depende de la base B escogida.

Ejemplo 2.5.14
En coordenadas, sea $p \in \mathbb{P}^n$ y sea $p_{\mathcal{R}} = (a_0, \ldots, a_n)$, entonces p^* es un hiperplano de $(\mathbb{P}^n)^*$ y, en referencia $\mathcal{R}^*$ se tiene

$$p^* \equiv a_0 x_0' + \cdots + a_n x_n' = 0$$

Y si $H \subseteq \mathbb{P}^n$ en referencia $\mathcal{R}$

$$\mathbb{P}^n \supseteq H \equiv b_0 x_0 + \cdots + b_n x_n = 0$$

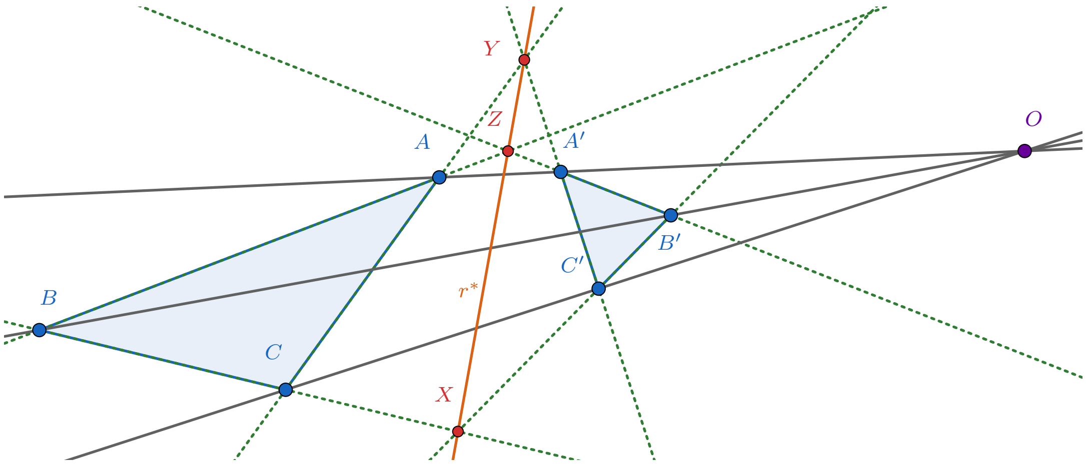
entonces $(H^*)_{\mathcal{R}^*} = (b_0, \ldots, b_n)$

Observación 2.5.15 En general, si tenemos $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{P}^n$ y $\mathcal{R}^* = \{{p_0}', \ldots, {p_n}'; \bar{p}'\}$ una refencia de $(\mathbb{P}^n)^*$. Entonces $({p_i}')^*$ es un hiperplano tal que $p_i \notin ({p_i}')^*$ y $p_j \in ({p_i}')^*$ $\forall i \neq j$

2.6 Los teoremas de Desargues y Pappus

Teorema de Desargues (2.6.1)
Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en $\mathbb{P}^2$ (sin vértices ni lados en común). Entonces,

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \varnothing \iff \begin{cases} AB \cap A'B' = Z \\ AC \cap A'C' = Y \\ BC \cap B'C' = X \end{cases} \quad \text{están alineados.}$$



Demostración
$\Longrightarrow$ Analítica
$R = \{A, B, C; O\}$, es un sistema de referencia porque todos los puntos son linealmente independientes.

- A, B, C linealmente independientes (ABC triangulo)
- A, B, O linealmente independientes (si no, $AB = A'B'$)
- B, C, O linealmente independientes (si no, $BC = B'C'$)
- C, A, O linealmente independientes (si no, $AC = A'C'$)

Tenemos que

- $A' \in AO : x_1 - x_2 = 0$ i $A \neq A' \implies A' = (a : 1 : 1)$
- $B' \in BO : x_0 - x_2 = 0$ i $B \neq B' \implies B' = (1 : b : 1)$
- $C' \in CO : x_0 - x_1 = 0$ i $C \neq C' \implies C' = (1 : 1 : c)$

$$Z : \left\{ \begin{aligned} &AB : x_2 = 0 \\ &A'B' : 0 = \begin{vmatrix} a & 1 & x_0 \\ 1 & b & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} x_0(1-b) - x_1(a-1) = x_0(1-b) + x_1(1-a) = 0 \implies$$

$$\implies Z = (a - 1 : 1 - b : 0).$$

Análogamente, $X = (0 : b-1 : 1-c), Y = (a-1 : 0 : 1-c)$. Vemos que $Z - X = Z \implies X, Y, Z$ no son linealmente independientes $\iff X, Y, Z$ están alineados.

$\implies$ Sintética

$\overbrace{\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{E})}^{\pi \text{ plano en } \mathbb{P}^3} \subset \mathbb{P}(\bar{\mathbb{E}}) = \mathbb{P}^3, \bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \times \mathbf{k}$

Sea r una recta en $\mathbb{P}^3$, $r \not\subseteq \pi$, tal que $r \cap \pi = O$. Sean $p, p' \in r, p \neq p', p, p' \neq O$. r y AA' son coplanarias $\implies pA \cap p'A' = A_0$ (intersección de rectas en un plano). Análogamente, $\begin{cases} pB \cap p'B' = B_0 \\ pC \cap p'C' = C_0 \end{cases}$.

Por construcción,

$$\begin{array}{ccc} pA_0 \cap \pi = A, & pB_0 \cap \pi = B, & pC_0 \cap \pi = C \\ p'A_0 \cap \pi = A', & p'B_0 \cap \pi = B', & p'C_0 \cap \pi = C' \end{array}$$

A_0, B_0, C_0 son linealmente independientes (forman un triángulo). Si estuvieran alineados, $T = A_0 \vee B_0 \vee C_0 \implies A, B, C \in \pi \cap (p \vee t)$ estarían alineados.

Finalmente,

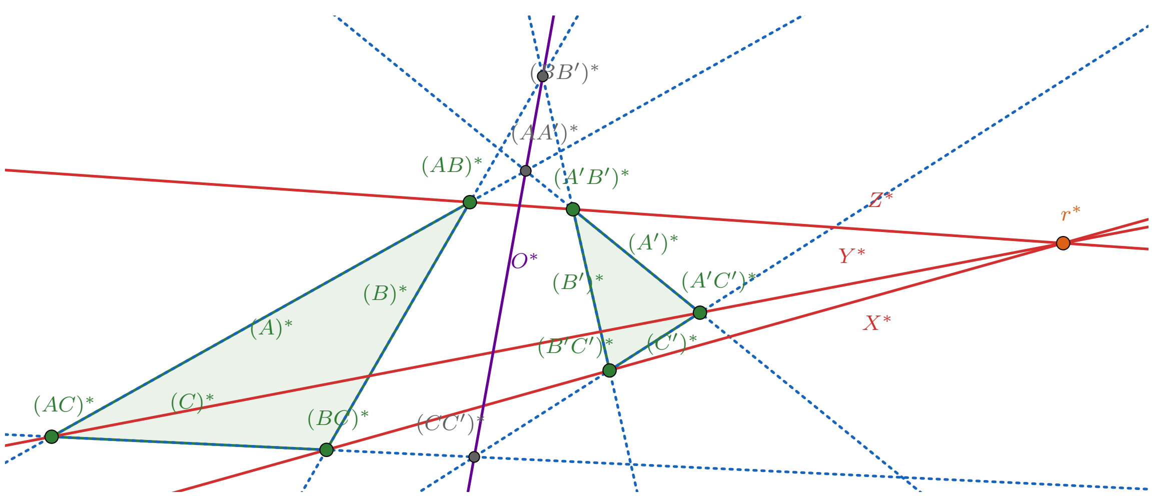
$$Z = AB \cap A'B' = \pi \cap ((A_0 \vee B_0 \vee p) \cap (A_0 \vee B_0 \vee p')) \underset{\text{planos distintos}}{\overset{\text{intersección de}}{=}} \pi \cap (A_0 \vee B_0)$$

Análogamente, $Y = \pi \cap (A_0 \vee C_0)$ y $X = \pi \cap (B_0 \vee C_0)$. Entonces, $X, Y, Z \in \pi \cap (A_0 \vee B_0 \vee C_0)$ (que es una recta porque es la intersección de dos planos distintos).

$\impliedby$ Dualidad

Hipotésis: X, Y, Z están alineados.

Consideramos el espacio proyectivo dual y dualizamos las hipótesis:



Queremos ver que, en efecto, $(AA')^*, (BB')^*, (CC')^*$ están alineados. Por la primera implicación, $\exists s \subset (\mathbb{P}^2)^*$ recta tal que:

$$
\begin{aligned}
s &= \big[[(AB)^* \vee (AC)^*] \cap \big[(A'B')^* \vee (A'C')^*\big]\big] \vee [\ldots] \vee [\ldots] \\
&= \big[(AB \cap AC)^* \cap (A'B' \cap A'C')^*\big] \vee [\ldots] \vee [\ldots] \\
&= (A^* \cap (A')^*) \vee (B^* \cap (B')^*) \vee (C^* \cap (C')^*) \\
&= (AA')^* \vee (BB')^* \vee (CC')^*
\end{aligned}
$$

$$s = (AA' \cap BB' \cap CC')^* \implies AA' \cap BB' \cap CC' = s^* \text{ (un punto)}$$

Observación 2.6.2 El teorema de Desargues es su propio dual: $(\implies) \iff (\impliedby)$.

Observación 2.6.3 Definición axiomática de $\mathbb{P}^2$

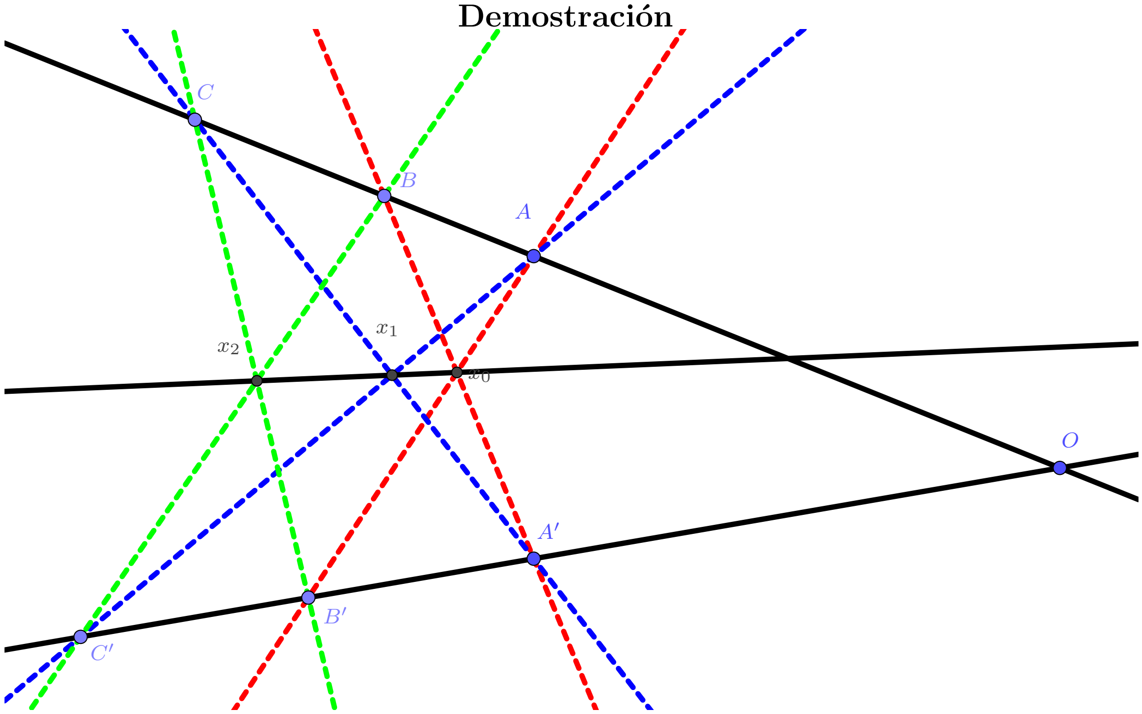
- $X \to$ puntos
- $Y \to$ rectas

Hay una relación de pertenencia entre puntos y rectas (los puntos pertenecen a rectas). Axiomas:

- $\forall p_1, p_2, \exists! r$ tal que $p_1, p_2 \in r$
- $\forall r_1, r_2, \exists! p$ tal que $p \in r_1, r_2$
- $\exists 4$ puntos no alineados

Teorema de Pappus (2.6.4)
Sean $r, s \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ rectas diferentes ($r \neq s$), sean $A, B, C \in r$ tal que $A \neq B$, $B \neq C$ y $C \neq A$ y sean también $A', B', C' \in s$ tal que $A' \neq B'$, $B' \neq C'$ y $C' \neq A'$. Entonces $x_0 \equiv AB' \cap A'B$, $x_1 \equiv AC' \cap A'C$ y $x_2 \equiv BC' \cap B'C$ estan alineados.

Demostración



Tomamos la referencia $\mathcal{R} = \{A, B, A'; B'\}$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= (1,0,0) & A' &= (0,0,1) \\ B &= (0,1,0) & B' &= (1,1,1) \\ C &= (1,a,0) & C' &= (1,1,b) \end{aligned}$$

con $a, b \neq 0$. Calculamos ahora x_0, x_1 y x_2 y vemos que

$$\begin{vmatrix} \rule{1.5em}{0.4pt} & x_0 & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & x_1 & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & x_2 & \rule{1.5em}{0.4pt} \end{vmatrix} = 0$$

2.7 Coordenadas absolutas. Razón doble

Definición 2.7.1
Sea $\mathcal{R} = \{p_0, p_1; \bar{p}\}$ un sistema de referencia de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ y sea $q \in \mathbb{P}^1_k$ con $q_{\mathcal{R}} = (x_0, x_1)$ las coordenadas de q en la referencia $\mathcal{R}$. Definimos las coordenas absolutas de q como

$$\alpha = \frac{x_0}{x_1} \in k \cup \{\infty\}$$

Observación 2.7.2 A diferencia de las coordenadas normales, **NO** está definido salvo constantes.

Observación 2.7.3 Al trabajar con coordenadas absolutas, trabajaremos con aritmética normal de $0/\infty$.

Observación 2.7.4

$$\begin{aligned} (p_0)_{\mathcal{R}} &= (1,0) & \alpha_0 &= \infty \\ (p_1)_{\mathcal{R}} &= (0,1) & \alpha_1 &= 0 \\ (p_2)_{\mathcal{R}} &= (1,1) & \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Definición 2.7.5
Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ con al menos 3 de ellos diferentes. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia y sean $(q_i)_{\mathcal{R}} = (x_i : y_i)$ $\forall i = 1,2,3,4$. Definimos la razón doble de q_1, q_2, q_3, q_4 como

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

Observación 2.7.6 La razón doble no depende del sistema de referencia ni del representante de cada punto. De hecho, sean $\mathcal{R}$ y $\bar{\mathcal{R}}$ dos sistemas de referencia y $q_i = (x_i, y_i)_{\mathcal{R}} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)_{\bar{\mathcal{R}}}$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$\frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_4 & \bar{y}_4 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_4 & \bar{y}_4 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Observación 2.7.7 La razón doble es cociente de razones simples

Observación 2.7.8 En coordenadas absolutas, si

$$\begin{array}{lll} q_1 & \alpha_1 & (\alpha_1 : 1) \\ q_2 & \alpha_2 & (\alpha_2 : 1) \\ q_3 & \alpha_3 & (\alpha_3 : 1) \\ q_4 & \alpha_4 & (\alpha_4 : 1) \end{array}$$

teniendo en cuenta que $(\infty, 1) = (1, 0)$. emtonces,

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}$$

Observación 2.7.9 Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ tal que $\{q_1, q_2, q_3\}$ son diferentes dos a dos. Tomamos $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$ como nuestro sistema de referencia y sean $(x, y)_{\mathcal{R}} = q_4$ las coordenadas de q_4 en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, entonces

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} : \frac{-y}{x} = \frac{x}{y}$$

es decir, la coordenada absoluta de q_4 en la referencia $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$.

Observación 2.7.10 Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad de dimensión $n - 2$, por lo tanto V^* es una recta de $(\mathbb{P}^n)^*$ y si $V \subseteq H_1, H_2, H_3, H_4 \subseteq \mathbb{P}^n$, la razón doble de H_1, H_2, H_3, H_4 queda definida considerando los hiperplanos como puntos del espacio dual, es decir,

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*)$$

Ejemplo 2.7.11
Consideramos $V \subseteq \mathbb{P}^4$, con

$$V : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Podemos identificar $V^* = \left\{ H^* \in (\mathbb{P}^4)^* \text{ hiperplano} | V \subseteq H \right\}$. Tomamos ahora

$$\bar{\rho} w_1(u_2) + \rho w_2(u_1) \begin{array}{ll} H_1 \to x_0 = 0 & \leftrightarrow (1, 0, 0, 0) \\ H_2 \to x_1 = 0 & \leftrightarrow (0, 1, 0, 0) \\ H_3 \to 2x_0 + x_1 = 0 & \leftrightarrow (2, 1, 0, 0) \\ H_4 \to 3x_0 + 2x_1 = 0 & \leftrightarrow (3, 2, 0, 0) \end{array}$$

Para calcular la razón doble, aplicamos la observación 2.7.9, y tomamos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{H_1, H_2; H_3\}$ y $B = \{(2, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ una base adaptada. Entonces se tiene que $(H_4)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) = (3, 4)$. Por lo tanto,

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = \frac{3}{4}$$

Proposición 2.7.12
Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^n$ y sea $\rho = (q_1, q_2, q_3, q_4)$. Si permutamos los cuatro puntos, (con $4! = 24$ posiblidades), obtendremos uno de los sisguientes valores para la razón doble

$$\bar{\rho}w_1(u_2) + \rho w_2(u_1)A_p = \left\{\rho, \frac{\rho}{1}, 1-\rho, \frac{1}{1-\rho}, \frac{\rho}{\rho-1}, \frac{\rho-1}{\rho}\right\}$$

Definición 2.7.13 Proyección y sección
Sean $V, r \subseteq \mathbb{P}^n$ dos variedades suplementarias con $\dim r = 1$ ($\implies \dim V = n-2$). Entonces, definimos la proyección desde V como

$$\begin{aligned} \Phi \colon r &\to V^* \\ p &\mapsto V \vee p \end{aligned}$$

De nuevo identificando los hiperplanos de $\mathbb{P}^n$ con puntos de $(\mathbb{P}^n)^*$. Asimismo, definimos la sección con r como

$$\begin{aligned} \Psi \colon V^* &\to r \\ H &\mapsto H \cap r \end{aligned}$$

Observación 2.7.14 $p \notin V \implies V \vee p$ es un hiperplano que contiene a V.

Observación 2.7.15 Ψ está bien definido y $r \cap H$ es un punto. En efecto, si $r \cap H$ no es un punto, $r \subseteq H$, pero si nos miramos ahora $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$, entonces V es un hiperplano de H, $\implies r \cap V \neq \varnothing$, lo cual es una contradicción ya que hemos supuesto que V y r son suplementarias.

Observación 2.7.16 $\Phi(\Psi(H)) = H$ y $\Psi(\Phi(p)) = p$, esd decir, Φ y Ψ son inversas mutuas.

Teorema de la invariancia de razón doble (2.7.17)
Sean $V, r \subseteq \mathbb{P}^n$ dos variades suplementarias con $\dim r = 1$ ($\implies \dim V = n-2$) y sean Φ y Ψ la proyección desde V y la sección con r respectivamente. Entonces,

i) $\forall p_1, p_2, p_3, p_4 \in r$ con p_1, p_2, p_3 distintos dos a dos

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\Phi(p_1), \Phi(p_2), \Phi(p_3), \Phi(p_4))$$

ii) $\forall H_1, H_2, H_3, H_4 \in V^*$ (identificando hiperplanos con elementos del dual) con H_1, H_2, H_3 distintos dos a dos. Entonces

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) = (\Psi(H_1), \Psi(H_2), \Psi(H_3), \Psi(H_4))$$

Demostración
Primero vemos que $i \iff ii$ porque $\Psi^{-1} = \Phi$. Pasamos ahora a demostrar i. Sea $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, entonces podemos elegir $u_1, u_2 \in \mathbb{E}$ tal que $p_1 = [u_1]$, $p_2 = [u_2]$ y $p_3 = [u_1 + u_2]$. Por lo tanto $p_4 = [\rho u_1 + u_2]$, de la misma forma, $\bar{\rho} = (H_1, H_2, H_3, H_4)$ y

podemos escoger $w_1, w_2 \in \mathbb{E}^*$ tal que $H_1 = [w_1]$, $H_2 = [w_2]$ y $H_3 = [2_1 + w_2]$. Lo que implica que $H_4 = [\bar{\rho} w_1 + w_2]$. Ahora trabajamos con que $p_i \in H_i$. Entonces

$$\begin{cases} p_1 \in H_1 \implies w_1(u_1) = 0 \\ p_2 \in H_2 \implies w_2(u_2) = 0 \\ p_3 \in H_3 \implies (w_1 + w_2)(u_1 + u_2) = 0 \implies \cancelto{0}{w_1(u_1)} + w_1(u2) + w_2(u_1) + \cancelto{0}{w_2(u_2)} = 0 \\ p_4 \in H_4 \implies (\bar{\rho} w_1 + w_2)(\rho u_1 + u_2) = 0 \implies \cancelto{0}{\bar{\rho} w_1(u_1)} + \bar{\rho} w_1(u_2) + \rho w_2(u_1) + \cancelto{0}{w_2(u_2)} = 0 \end{cases}$$

trabajando ahora con la cuarta ecuación

$$\bar{\rho} w_1(u_2) + \rho w_2(u_1) = w_1(u_2)(\bar{\rho} - \rho) = 0 \overset{(1)}{\implies} \bar{\rho} = \rho$$

La cancelación en (1) ocurre ya que $w_1(u_2) \neq 0$. Y $w_1(u_2) \neq 0$ ya que, si lo fuera,

$$w_1(u_2) = 0 \implies p_2 \in H_1 \implies \{p_1, p_2\} \subseteq r \cap H_1 \implies r \subseteq H_1 \implies r \cap V \neq \varnothing$$

pero como sabemos $r \cap V = \varnothing$ ya que son variedades suplementarias.

2.8 Cuaternas armónicas

Observación 2.8.1 Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$ diferentes dos a dos. y sea

$$A_p = \left\{ \rho, \frac{1}{\rho}, 1 - \rho, \frac{1}{1 - \rho}, \frac{\rho}{\rho - 1}, \frac{\rho - 1}{\rho} \right\}$$

Entonces, los valores de A_p son diferentes, salvo el caso en que

$$A_p = \left\{ -1, \frac{1}{2}, 2 \right\} \qquad \text{con } \mathbf{k} = \mathbb{R}$$

Definición 2.8.2
Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$ diferentes dos a dos. Entonces $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ forman una cuaterna armónica si y solo si

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$$

Proposición 2.8.3
Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$ diferentes dos a dos. Entonces, son eqivalentes

i) $\rho = (p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$

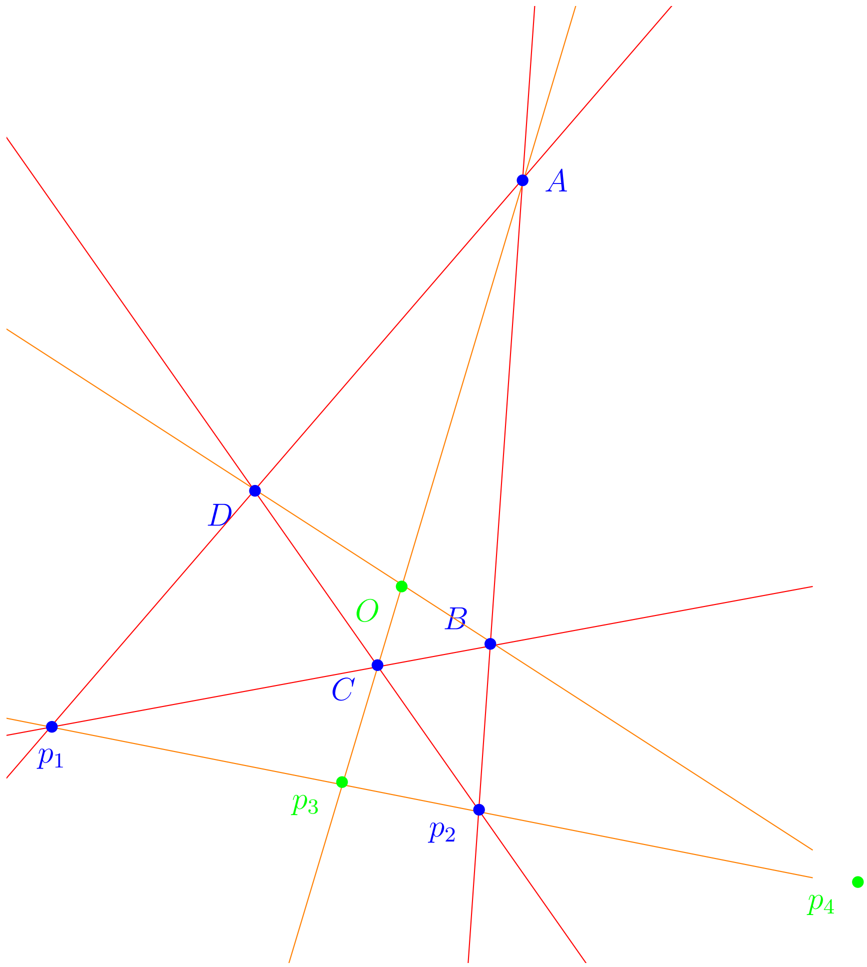
ii) $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_2, p_1, p_3, p_4)$

iii) $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_1, p_2, p_4, p_3)$

iv) $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (p_3, p_4, p_1, p_2)$

Demostración
La demostración se hará en clase de problemas

Teorema Cuaterna armónica en el cuadrilátero (2.8.4)
Sean $A, B, C, D, p_1, p_2 \in \mathbb{P}^2$ los vértices de un cuadrilátero, sea $p_1p_2 = r \subseteq \mathbb{P}^2$, $AC = s \subseteq \mathbb{P}^2$, $s \cap BD = O \in \mathbb{P}^2$, $s \cap r = p_3 \in \mathbb{P}^2$ y $DB \cap r = p_4 \in \mathbb{P}^2$. Entonces, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ son una cuaterna armónica. Dicho de otra forma, en un cuadrilátero, la intersección de una diagonal con las otras dos y los vértices de la diagonal forman una cuaterna armónica.



Demostración
Podemos poner poner coordemadas y operar y nos saldrá el resultado. Aunque aquí detallamos una demostración sintética. Para esta demostración nos valdremos de las proyecciones y secciones definidas anteriormente, por ello, recordamos que si $h \subseteq \mathbb{P}^2$ es una recta, una variedad complementaria de h es un punto. Ahora definimos Φ_B la proyección desde B, Φ_D la proyección desde D y Ψ_s y Ψ_r la sección con r y con s respectivamente. entonces

$$\begin{array}{llll} r & \overset{\Psi_s \circ \Phi_B}{\rightarrow} s & \overset{\Psi_r \circ \Phi_D}{\rightarrow} r \\ p_1 & \mapsto C & \mapsto p_2 \\ p_2 & \mapsto A & \mapsto p_1 \\ p_3 & \mapsto p_3 & \mapsto p_3 \\ p_4 & \mapsto O & \mapsto p_4 \end{array}$$

Por el teorema 2.7.17, tenemos que, si $f = \Psi_r \circ \Phi_D \circ \Psi_s \circ \Phi_B$,

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = (f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4)) = (p_2, p_1, p_3, p_4)$$

Y por la proposición 2.8.3, tenemos que $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es una cuaterna armónica.