Cálculo integral

Contenidos

1 Series Numéricas e Integrales Impropias

1.1 Series numéricas

Definición 1.1.1
Una serie de números reales es una pareja de sucesiones de números reales $(a_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$, relacionadas por

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$$

Denominaremmos término n-ésimo de la serie al elemento a_n y llamaremos suma parcial n-ésima de la serie a s_n

Observación Las sumas parciales definen los términos

$$a_0 = s_0 \qquad a_n = s_n - s_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Definición 1.1.2
Llamaremos suma de una serie a

$$s = \lim s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n$$

suponiendo que existe

Observación Denotaremos $s = \sum\limits_{n\geq 0} a_n = \sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} a_n$. Esta misma notación nor servirá para representar la serie.

Definición 1.1.3
Diremos que una serie $\sum a_n$ es convergente o divergente si lo es la sucesión de sumas parciales

- convergente $\qquad \lim s_n \in \mathbb{R}$
- divergente $\qquad \lim s_n = \pm\infty$

- oscilante $\quad\quad \nexists \lim s_n$

Observación 1.1.4 Una serie no tiene por qué comenzar por el índice 0, y por tanto, podemos considerar series con términos a_n donde $n \geq n_0$. En tal caso, las sumas parciales son $s_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_n$, y la suma (si existe) $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_n$.

Definición 1.1.5
Sea $r \in \mathbb{R}$. Llamaremos serie geométrica de razón r a la serie

$$\sum_{n\geq 0} r^n$$

Proposición
La serie geométrica es convergente si y solo si $|r| < 1$, en tal caso la suma es

$$\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Demostración
Primero, calculamos el término n-ésimo

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

- Si $r = 1$, $\lim s_n = \lim\limits_{n\to\infty} n + 1 = \infty$
- Si $|r| > 1$, $\lim s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \infty$
- Si $|r| < 1$, $\lim s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{-1}{r-1}$
- Si $r = -1$, $s_n = 0$ si n par y $s_n = 1$ si n impar. Por lo tanto la serie es oscilante

Proposición 1.1.6
Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n = 0$

Demostración
Sabemos que $a_n = s_n - s_{n-1}$, por lo tanto $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1})$, como $\lim s_n$ existe (y por lo tanto también $\lim s_{n-1}$)

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

Proposición 1.1.7 (Criterio de Cauchy para series)
La serie $\sum a_n$ es convergente si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \implies |s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} \cdots + a_n| < \varepsilon$$

Proposición 1.1.8 (linealidad)
Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series convergentes. Entonces $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ también lo es y $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$.

Proposición 1.1.9
Sean dos sucesiones (a_n)y (b_n), son iguales salvo en número finito de términos, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen la misma convergencia.

Demostración
Sea $d_n = b_n - a_n$, que vale 0 salvo en número finito de términos

- Si $\sum a_n$ converge $\quad \sum b_n = \sum a_n + \overbrace{\sum d_n}^{\text{Suma finita}} \implies \sum b_n$ converge
- Si $\sum a_n$ diverge $\quad \sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$ diverge
- Si $\sum a_n$ oscila $\quad \sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$ oscila

Proposición 1.1.10 (Asociatividad)
Sea $\sum a_n$ una serie y $(n_k)_{k\geq 0}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Definimos

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0} \qquad b_k = a_{(n_{k-1}+1)} + \cdots + a_{n_k}$$

Si existe la suma de $\sum a_n$, entonces también existe la suma de $\sum b_k$ y son iguales.

Demostración
Sea $A_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ y $B_k = \sum\limits_{i=0}^{k} b_i$, por la definición anterior se tiene que $B_k = A_{n_k}$ y por lo tanto (B_k) es una sucesión parcial de (A_n), lo cual implica que si (A_n) converge, (B_k) también y lo hace al mismo número.

1.2 Series de números positivos

Proposición 1.2.1
Si una serie $\sum a_n$ es de *términos positivos* ($a_n \geq 0$) entonces la sucesión (s_n) de sumas parciales es *creciente*, y por tanto, siempre tiene límite:

$$\sum a_n = \lim s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

Este puede ser finito (si la sucesión de sumas parciales es acotada) o infinito (en caso contrario).

Proposición 1.2.2 (Criterio de comparación directa)
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos. Si $\exists n_0$ tal que $a_n \leq b_n$ $(\forall n \geq n_0)$. Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Por tanto, la convergencia de $\sum b_n$ implica la de $\sum a_n$ y la divergencia de $\sum a_n$ implica la de $\sum b_n$.

Demostración
Por el enunciado
$$\sum_{i=n_0}^{n} a_i \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$
Los términos $a_0, \cdots, a_{n_0}$ se pueden añadir al sumatorio y no alteran la convergencia.

Definición
Llamamos serie harmónica a la serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

Definición 1.2.3 (Serie de Riemman)
Sea $p \in \mathbb{R}$. Llamaremos serie harmónica generalizada o serie de Riemman de parámetro p a la serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$$

Proposición
La serie de Riemman es convergente si y solo si $p > 1$.

Demostración
Distinguiremos entre varios casos

- Si $p = 1$. Suponemos que la serie es convergente con suma s
$$s = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = s$$
absurdo ya que $s > s$.

- Si $p < 1$.
$$n^p \leq n \implies \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$
y por comparación directa con la serie harmónica, diverge.

- Si $p > 1$.
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots \leq$$
$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \cdots$$
que es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ y por lo tanto convergente.

Proposición 1.2.4 (Criterio de comparación en el límite)
Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe el límite
$$\lim \frac{\sum a_n}{\sum b_n} = l \in [0, +\infty]$$

- Si $l < +\infty$. $\sum b_n$ converge $\implies$ $\sum a_n$ converge y $\sum a_n$ diverge $\implies$ $\sum b_n$ diverge.
- Si $l > 0$. $\sum a_n$ converge $\implies$ $\sum b_n$ converge y si $\sum b_n$ diverge $\implies$ $\sum a_n$ diverge.
- Si $0 < l < +\infty$. Entonces las dos series tienen el mismo caracter.

Demostración
Provaremos cada caso de manera individual

- Caso $l < +\infty$. Fijado $\varepsilon > 0$, por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \implies a_n < (l+\varepsilon)b_n$$

  y el resultado queda provado por comparación directa.

- Caso $l > 0$. Se deduce del primer caso, considerando

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$$

- Caso $0 < l < +\infty$. Se trata de una conjunción de los casos anteriores

Lema 1.2.5 Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos.

- Suponemos que hay $n_0 \in \mathbb{N}$ y $r < 1$ tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} < r$$

  entonces $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

  entonces $\sum a_n = +\infty$

Demostración
Provaremos cada caso por separado

- $a_n^{1/n} < r \implies a_n < r^n$ que es la serie geométrica de razón $r < 1$, de modo que por comparación directa el resultado queda demostrado.
- $a_n^{1/n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$ y por lo tanto diverge.

Proposición 1.2.6 (Criterio de la raíz de Cauchy)
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Suponemos que existe $\lim a_n^{1/n} = \alpha$, entonces, si $\alpha > 1$ la serie diverge y si $\alpha < 1$ la serie converge.

Demostración
Demostraremos cada caso por separado

- Caso $\alpha < 1$. Sea $\alpha < r < 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \leq r$$

  Y el resultado queda provado aplicando el lema anterior.

- Caso $\alpha > 1$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

  y aplicamos el lema anterior.

Lema 1.2.7 Sea $\sum a_n$ una serie de términos estrictamente positivos.

- Suponemos que hay $n_0 \in \mathbb{N}$ y $r < 1$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

  entonces $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

  entonces $\sum a_n = +\infty$

Demostración
Separaremos los casos.

- $$\frac{a_n + 1}{a_n} \leq r \implies a_{n+1} \leq r a_n \implies a_n \leq C r^n \quad (n \geq n_0)$$

  donde $C = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$ y por el criterio de comparación directa $\sum a_n$ converge.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_{n+1} \geq a_n \implies a_n$ es creciente $\implies \sum a_n$ diverge

Proposición 1.2.8 (Criterio del cociente de Alembert)
Sea $\sum a_n$ una serie de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, entonces

- Si $\alpha > 1$ la serie diverge

- Si $\alpha < 1$ la serie converge

Demostración
Separamos los dos casos

- Si $\alpha < 1$. Sea $\alpha < r < 1$ entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

  y aplicamos el lema anterior.

- Si $\alpha > 1$. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

  $$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

  y aplicamos el lema anterior.

Ejemplo
Estudiar la convergencia de

- $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$.
  $n!$ crece más que n^2 $(n! > n^2) \implies \frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$ que es la serie de Riemman de parámetro 2 (convergente). Por tanto, $\sum\limits_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente.

- $\sum \frac{x^n}{n!}$ para $x > 0$.

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

  Por lo tanto, aplicando el criterio del cociente de Alembert, la serie coverge.

- $\sum \alpha^{n+\sqrt{n}}$

  $$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \alpha^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \alpha$$

  Por lo tanto, por el criterio de la raíz, $\begin{cases} \alpha < 1 \text{ convergente} \\ \alpha > 1 \text{ divergente} \end{cases}$. Si $\alpha = 1$, la serie es $\sum 1^{n+\sqrt{n}} = \sum 1$ que es divergente.

Observación 1.2.9 Los criterios anteriores no deciden cuando $\alpha = 1$. Como $a_{n+1}/a_n \to \alpha$ implica que $a_n^{1/n} \to \alpha$, si el criterio del cociente no decide, entonces el de la raíz tampoco.

Proposición 1.2.10 (Criterio de Raabe)
Sea $\sum a_n$ una serie de términos estrictamente positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente. Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Proposición (Criterio de condensación)
Sea (a_n) una sucesión de números positivos decreciente. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Proposición (Criterio logarítmico)
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)}$$

Si $L > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente. Si $L < 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Proposición 1.2.11 (Criterio de la integral)
Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $f\colon [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ positiva, localmente integrable y decreciente. Consideramos $a_n = f(n)$ $(n \geq n_0)$ entonces

i) La serie $\sum a_n$ y la integral impropia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ tienen el mismo carácter.

ii) Para $N \geq n_0$

$$\sum_{n\geq n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_n$$

donde $\varepsilon_n \in [0, a_n]$

Ejemplo

- $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ tiene el mismo carácter que $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ (convergete $\iff \alpha > 1$)
- Calcular $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$ con error $< 10^{-3}$.
  Necesitamos que

$$\frac{1}{N^{1.01}} < 10^{-3} \implies N > 1000^{1/1.01} \implies N \geq 934$$

  Calculamos ahora

$$\sum_{n=1}^{933} \frac{1}{n^{1.01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1.01}} \simeq 100.577 \simeq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$$

Proposición 1.2.12
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos. Dada cualquier permutación $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum a_{\sigma(n)}$ tiene la misma suma que $\sum a_n$.

Demostración
Sea $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ y $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$ y sean $A = \lim A_n$ y $B = \lim B_n$. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{0, 1, \ldots, m\} \leq \big\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(n)\big\}$$

ya que σ es suprayectiva. Entonces $a_0 + a_1 + \cdots + a_m \leq a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)}$ por lo tanto, $A_m \leq B_n \implies A \leq B$. Haciendo el mismo razonamiento para σ^{-1} (biyectiva), obtenemos que $B \leq A$. Y por lo tanto, $A = \sum a_n = \sum a_{\sigma(n)} = B$.

1.3 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes

Definición 1.3.1
Diremos que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, si la serie $\sum |a_n|$ es convergente.

Proposición 1.3.2
Toda serie absolutamente convergete es convergente.

Demostración
Aplicamos criterio de Cauchy para series a $\sum |a_n|$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n \geq n_0 \implies \left\| a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \right| < \varepsilon \implies |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$$

De donde se deduce que

$$|a_{n+1} + \cdots + a_n| < |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon$$

(por la desigualdad triangular). Y por lo tanto, $\sum a_n$ cumple el criterio de Cauchy.

Definición 1.3.3
Una serie convergente, que no es absolutamente convergente, se dice que es condicionalmente convergente.

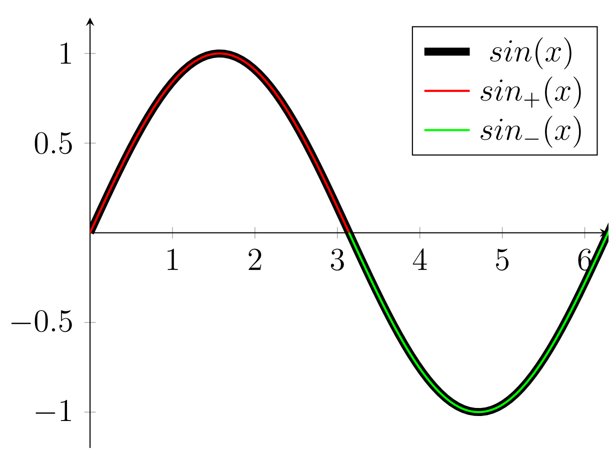
Ejemplo
La serie armónica alternada $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es condicionalmente convergente.

Definición 1.3.4
Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos a_+ (la parte positiva de a) como $a_+ = \max(a, 0)$, asimismo, definimos la parte negativa de a como $a_- = \max(-a, 0)$.

Observación Dado un a, podemos expresar $a = a_+ - a_-$ y $|a| = a_+ + a_-$

Observación Dada $f \colon X \to \mathbb{R}$, podemos hacer exactamente lo mismo, ($f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$)

Ejemplo



Lema 1.3.5 Sea (a_n) una sucesión de números reales. Sean (p_n) y (q_n) sus partes positiva y negativa (respectivamente).

i) $\sum a_n$ converge absolutamente $\iff$ $\sum p_n$, $\sum q_n$ son convergentes.

ii) Si $\sum a_n$ es condicionalmente convergente, entonces $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son divergentes