$$\exp(z) = e^z := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

$z = ix$ ← imaginari pur

$$e^{ix} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n x^n}{n!} = \cos x + i \sin x$$ → Fórmula d'Euler.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

27/09/17

5. Integrals impròpies. Definicions i exemples.

Def Sigui $D \subset \mathbb{R}$ interval

$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ funció

f es diu localment integrable si és integrable en tot interval compacte $K \subset D$.

(Mira pàg següent)

Considerem p.ex. $f: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, on $a < b \leq +\infty$.

Aleshores f és localment integrable sii és integrable en tot interval $[a, M]$, on $a < M < b$. En tot cas podem estudiar la integral impròpia.

$$\int_a^b f := \lim_{M \to b} \int_a^M f$$

Obs. Integral impròpia de 1a espècie: interval no fitat.

" " de 2a espècie: funció no fitada

" " convergent: $\exists \int_a^b f < +\infty$

" " divergent: $\exists \int_a^b f = \pm\infty$

Anàlogament per a $f:]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Considerem on $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

Prenem $a < c < b$ i escrivim

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f = \lim_{M \to a^+} \int_M^c f + \lim_{N \to b^-} \int_c^N f$$

✓ oscil·lant + div = div

✓ $+\infty + \infty = +\infty$

✓ $-\infty - \infty = -\infty$

✗ $-\infty + \infty = ?$

Integral impròpia 3a espècie : ni funció ni interval són fitats

Més generalment, podem considerar D unió ~~fitada~~ finita disjunta d'intervals oberts

(p.ex $D = \mathbb{R} - \{0\}$)

Prop Sigui $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ int. Riemann

Alesshores $\int_a^b f = \lim_{M \to b^-} \int_a^M f.$ ~~Exercici~~

Diferència amb ⊛ $f : [a,b]$, $f : [a,b)$ (cas anterior)

Exemples importants

(1) $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ és convergent sii } \alpha > 1 \ \left(\text{i val } \frac{1}{\alpha-1}\right), \text{ divergent sii } \alpha \leq 1}$

1a esp (interval no fitat)

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \alpha = 1 & \lim_{M \to +\infty} \left[\log x\right]_{x=1}^{x=M} = +\infty \\ \alpha \neq 1 & \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=M} = \lim_{M \to +\infty} \frac{M^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \end{cases}$$

$\alpha > 0 \Leftarrow$ el den $\to 0$ quan $x \to 0$

(2) $\boxed{\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ és convergent sii } \alpha < 1 \ \left(\text{i val } \frac{1}{1-\alpha}\right), \text{ divergent sii } \alpha \geq 1}$

int imp. conv

segon dos int. impròpia div

int impròpia sii $\alpha > 0$

Obs $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} = +\infty$

conv div

ó

div conv.

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$ és convergent sii $\alpha > 0$ (i val $\frac{1}{\alpha}$)

Regles de càlcul. - linealitat (Ex: escriure les props)
- Barrow
- parts

Exemples (1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{\pi}{2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} + \int_0^{+\infty} = \pi$

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} + \int_0^{1} = +\infty$ però $\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{x=1}$

divergents.

La Regla de Barrow quan l'interval tenim la funció està def en un interval

Però $\frac{1}{x}$ no està def en $[-1, 1]$ perquè $\nexists \frac{1}{0}$.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ no existeix.

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x}\, dx = \left[\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 = \dots$ No existeix.

integral impròpia que va oscil·lant.
$\Rightarrow$ el límit no existeix.

$\alpha > 1$

$\alpha < 1$

6. Criteris de convergència per a integrals impròpies

Prop (Criteri de Cauchy per a integrals impròpies)

Sigui $f: [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ loc integrable
La integral impròpia $\int_a^b f$ és convergent sii
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_0 \in [a,b[$ tq
$c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow \left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| < \varepsilon$.

1. els lím de funcions es poden calcular amb lím de successions

2.

Dem És conseqüència del criteri de Cauchy aplicat a la funció

$F: [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

$F(x) = \int_a^x f$

i el límit
$\lim_{x \to b^-} F(x)$
existeix sii, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix c_0 tq
$c_0 \leq c_1 < c_2 \Longrightarrow \underbrace{|F(c_2) - F(c_1)|}_{\int_{c_1}^{c_2} f} < \varepsilon$ $\blacksquare$

Def Una integral impròpia $\int_a^b f$ és [...]

quan $\int_a^b |f|$ és convergent

Prop Si $\int_a^b f$ és absolutament convergent, és convergent.

Dem (Apliquem el criteri de Cauchy a la integral $\int_a^b |f|$)

$\forall \varepsilon \quad \exists c_0$ tq $a < c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} |f| < \varepsilon$

i utilitzem $\left| \int_{c_1}^{c_2} f \right| \leq \int_{c_1}^{c_2} |f|$

de manera que $\int_a^b f$ també satisfà el cr. de Cauchy $\boxtimes$