1 Series Numéricas

Corolario del criterio de Cauchy

$\sum a_n$ convergente $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Serie de Bertrand $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}\right)$

- $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$, $\beta > 1 \implies$ convergente
- $\alpha < 1$ o $\alpha = 1$, $\beta \leq 1 \implies$ divergente

1.1 Series positivas

Criterio de Condensación (a_n decreciente, $a_n \geq 0$) $\sum a_n$ convergente $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ convergente

Comparación directa ($b_n \geq a_n \geq 0 \quad \forall n \geq n_0$)

- $\sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.
- $\sum a_n$ divergente $\implies \sum b_n$ divergente

Comparación en el límite $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L\right)$

- $L < +\infty$, $\sum a_n$ conv. $\implies \sum b_n$ conv.
- $L > 0$, $\sum b_n$ div. $\implies \sum a_n$ div.

Criterio de la raíz y del cociente

$\left(\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L\right)$

- $L < 1 \implies \sum a_n$ convergente
- $L > 1 \implies \sum a_n$ divergente

Criterio de Raabe $\left(\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L\right)$

- $L > 1 \implies \sum a_n$ convergente
- $L < 1 \implies \sum a_n$ divergente

Criterio logarítmico $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{-\log a_n}{\log n} = L\right)$

- $L > 1 \implies \sum a_n$ convergente
- $L < 1 \implies \sum a_n$ divergente

Criterio de Leibnitz $\left(a_n \text{ dec. } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$

$\sum (-1)^{n+1} a_n$ convergente

Criterio de la integral ($a_n = f(n)$, f integ.)

- $\int_M^\infty f$ converge $\iff \sum a_k$ converge
- $\sum_M^\infty = \sum_M^{N-1} + \int_N^\infty f + \varepsilon_N$, $\varepsilon_N \in [0, a_N]$

Criterio de Dirichlet ($\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, b_n dec. Sumas de $\sum a_n$ acotadas.) $\sum a_n b_n$ convergente

1.2 Series de Potencias

Teorema de Cauchy-Hadamard

$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$

Radio de convergencia

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

2 Integrales impropias

Criterio de Cauchy ($\forall \varepsilon, \exists c_0$)

$c_1, c_2 > c_0 \implies \left|\int_{c_1}^{c_2} f\right| < \varepsilon. \implies$ convergente

Comparación directa ($g(x) \geq f(x) \geq 0$)

- $\int_a^\infty g$ converge $\implies \int_a^\infty f$ converge
- $\int_a^\infty f$ divergente $\implies \int_a^\infty g$ divergente

Comp. en el límite $\left(g, f \geq 0, \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L\right)$

- $L < \infty$, $\int_a^b g$ conv. $\implies \int_a^b f$ conv.
- $L > 0$, $\int_a^b f$ div. $\implies \int_a^b g$ div.

Criterio de Dirichlet

$\left(\text{g dec.}, \lim_{x\to b} g(x) = 0, c < b \implies \left|\int_a^c f\right| < M\right)$

Entonces $\int_a^b f(x)g(x)dx$ converge

3 Integración múltiple

Conjuntos de medida nula ($Z \subseteq \mathbb{R}^n$ medida nula)

- graph(f) con f unif. cont.
- $f(Z)$ con f lipschitziana ($d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$)
- $f(Z)$ con f de clase $\mathcal{C}^1$
- M subvariedad regular de dim $M < n$

Teorema de Lebesgue: f integrable en A sii $disc(f) \cap A$ tiene medida nula

Conjuntos admisibles (A, A' admisibles)

- $A \cap A'$, $A \cup A'$, $A \smallsetminus A'$ son admisibles
- rectángulos acotados y bolas

Medida de Jordan ($C \subseteq \mathbb{R}^n$ admisible)

$\mathrm{vol}(C) = \int_C 1$

Propiedades de la integral (f, g integrables)

- $f + g$ integrable
- fg integrable
- $f \leq g \implies \int_E f \leq \int_E g$
- $m \leq f \leq M \implies m\,\mathrm{vol}(E) \leq \int_E f \leq M\,\mathrm{vol}(E)$
- $\mathrm{vol}(E) = 0 \implies \int_E f = 0$
- E conexo, f continua $\implies \int_E f = f(x_0)\,\mathrm{vol}(E)$
- h continua $\implies h \circ f$ integrable
- $\left|\int_E f\right| \leq \int_E |f|$
- $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$

Teorema de Fubini (f continua)

$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A dx \left(\int_B dy f(x,y)\right)$

Región elemental (ψ, ϕ cont. D elemental)

$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}|_{\phi(x) \leq y \leq \psi(x)}^{x\in D}\right\}$

TCV ($V \in \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi\colon V \mapsto \mathbb{R}^n$ inyectiva, de clase C^1, $\det \mathrm{D}\,\varphi \neq 0$), $f\colon U = \varphi(V) \mapsto \mathbb{R}$ integrable). Entonces $\int_U = \int_V (f \circ \varphi)|\det \mathrm{D}\,\varphi|$