$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n^2+1}$ divergent (crit. gooc. no funciona)

(comparar amb $\frac{1}{\ }$)

18/09/2017

Prop: Criteri de la integral

Sigui $n_0 \in \mathbb{N}$ i $f: [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ positiva i decreixent.

Sigui $a_n = f(n)$ $(n \geq n_0)$. Aleshores:

1. La sèrie $\sum a_n$ i la int. impròpia $\int_{n_0}^{+\infty} f$ tenen el mateix caràcter

2. Per a $N > n_0$, $\sum_{n=n_0} a_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_N$

on $\varepsilon_n \in [0, a_n]$

Dem per de teoria anterior.
Interesant per al càlcul numèric.

Exemple $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ té el mateix caràcter que

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ i sabem q és trivial

Exemple 2 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$ amb error $< 10^{-3}$

Cal $\frac{1}{N^{1.01}} < 10^{-3} \Rightarrow N > 1000^{\frac{1}{1.01}} \Rightarrow$ ~~4474~~ $N \geq 934$

Aleshores $\sum^{\infty} \frac{1}{n^{1.01}} = \sum^{933} \frac{1}{n^{1.01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.01}} + \varepsilon_n \sim 100.522$

Proposició: (commutativitat de la suma d'una sèrie de termes positius)

Sigui $\sum a_n$ amb $a_n \geq 0$
Donada qualsevol permutació $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$,
la sèrie reordenada té la mateixa suma.

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n$$

Dem: Sigui σ fixada

$A_n = \sum_{k\geq 0}^{n} a_k$. sumes parcials

$B_n = \sum a_{\sigma(k)}$ sumes parcials de la permutació

$A = \sum^{\infty} a_k \qquad B = \sum^{\infty} a_{\sigma(k)}$

Sigui $m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $\{0 .. m\} \subset \{\sigma(0), \dots, \sigma(n)\}$

Per tant $\underbrace{\underbrace{a_0 + a_1 + \dots + a_m}_{\text{tots aquests}}}_{\text{apareixen dins de tots aquests}} \leq a_{\sigma(0)} + \dots + a_{\sigma(n)}$

$$A_n \leq B_n \leq B \Rightarrow A \leq B$$

Canviant σ per σ^{-1} veuríem $B \leq A$ $\square$

si el lím $A_n \leq B$

sèries creixents

3. SÈRIES ABSOLUTAMENT CVGTS I CONDICIONALMENT CVGTS

Def: Una sèrie és absolutament convergent quan ho és la dels valors absoluts $\sum |a_n|$

Prop: Una sèrie absolutament convergent és convergent.

Dem: Apliquem el criteri de Cauchy a $\sum |a_n|$:

Donat ε, $\exists n_0$ tq $m, n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{|a_{n+1}| + \dots + |a_m|}_{S_m - S_n} < \varepsilon$

D'aquí es dedueix q es satisfà el criteri de Cauchy en la sèrie de partida $\sum a_n$

pq $|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m|$ (perquè és un sol)

Def. Una sèrie conv. però no abs. cond s'anomena condicionalment convergent.

(2) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} p_k - \sum_{k=0}^{n} q_k$

Termes positius $\nearrow$ conv. / $\searrow$ div.

Si $\sum a_k$ conv:

1. Si $\sum p_k$ conv i $\sum q_k$ div, $\sum a_k$ no pot ser conv
2. Si $\sum p_k$ div i $\sum q_k$ conv, $\sum a_k$ no pot ser conv
3. Si conv conv
   contradiu la hipòtesi de $\sum a_k$ abs conv.
4. Si $\sum p_k$ div i $\sum q_k$ div

<u>Proposició</u>: Si una sèrie és <u>abs. convergent</u>, aleshores <u>totes les seves sèries reordenades són convergents amb la mateixa suma</u>.

<u>Dem</u>: $a_n = p_n - q_n$

$\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$ aquí $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\sum a_{\sigma(n)}$ també és abs conv)

$\sum |a_{\sigma(n)}| = \sum |a_n| < +\infty$ (per commutativitat)

$\Rightarrow$ (aplicant lema (1)

$\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$

convergents pel lem.

reord. termes pos.

Ex: La sèrie harmònica alternada

Prop (linealitat de les sèries abs. convergents)

Def: $a \in \mathbb{R}$ part positiva $a_+ = \max(a, 0)$

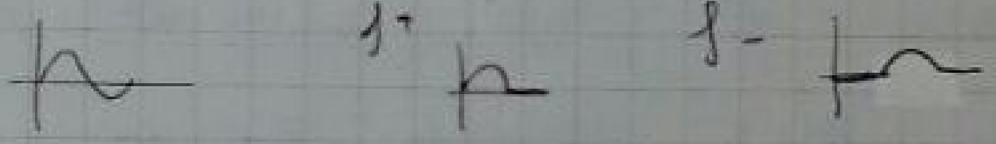
part negativa $a_- = \max(-a, 0)$

$\Rightarrow \boxed{a = a_+ - a_- \quad |a| = a_+ + a_-}$

Prop: Donada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ → no importa el domini, així que pot ser un mesura.

$f = f_+ - f_- \quad |f| = f_+ + f_-$

Ex: $f(x) = \sin x$



Lema: Sigui (a_n) successió numèrica.

Siguin (p_n) i (q_n) les seves parts positiva i negativa.

① $\sum a_n$ absol. conv. $\Leftrightarrow$ $\sum p_n, \sum q_n$ cvgts.

En tal cas, $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$

② Si $\sum a_n$ és cond. conv, aleshores, $\Rightarrow$ $\sum p_n, \sum q_n$ divergents

Dem: (1) $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k\geq 0}^{n} p_k + \sum_{k \geq 0}^{n} q_k$ sumes p. conv. sèries de termes positius.

implica (1) perquè $\sum^n |a_k| \geq \sum p_k$, $\geq \sum q_k$ separadament (per ser abs. conv)