22/09 dimecres

Podem usar $\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{1/n}$, $\frac{1}{R} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ si existeixen

<u>exemple</u>: 1) $\sum n!\, x^n$;

$\frac{1}{R} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = +\infty \Rightarrow R = 0$

2) $\sum_{n\geq 0} x^n$; $\frac{1}{R} = \lim 1^{1/n} = 1 \Rightarrow R = 1$

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$, $\frac{1}{R} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$

4) Les sèries $\sum_{n\geq 0} x^n$ (1), $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ (2), $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ (3)

tenen $R = 1$ (ja fet el 2), fer les altres dos

<u>però</u> tenen comportament diferent a la frontera

(1) $\begin{cases} x = 1 & \sum 1 = +\infty \\ x = -1 & \sum (-1)^n \text{ oscil·lant} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 1 & \sum \frac{1}{n} = +\infty \\ x = -1 & \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ condicionalment convergent} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 1 & \sum \frac{1}{n^2} \\ x = -1 & \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \end{cases}$ absolutament convergents

5) $x + x^2 + x^4 + x^8 + x^{16} + \dots$

$\lim\sup |a_n|^{1/n} = 1 \Rightarrow R = 1$

$|x| + |x|^2 + |x|^4 + |x|^8 + \dots \leq \sum_{n\geq 0} |x|^n$ conv si $|x| < 1$

Si $|x| \geq 1$ el terme general <u>NO</u> tendeix a $0 \rightarrow$ no convergent

$\Rightarrow R = 1$

* Funcions definides per sèries de potències

Si una sèrie de potències $\sum a_n x^n$ té radi de convergència defineix una funció:

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Es pot provar:

- f es contínua
- f és "integrable terme a terme"
- f és "derivable terme a terme" ← aquesta ens interessa +

  ↳ $f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k$

  (si no el terme seria igual a 1 i tindria x^{-1})

- la sèrie derivada té mateix radi de convergència

dem ↳ $\limsup |n+1|^{1/n} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup |n|^{\frac{1}{n-1}} |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = \limsup \left(\underbrace{n^{1/n}}_{\to 1} \underbrace{|a_n|^{1/n}}_{\to \frac{1}{R}} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{R}$

- f es $\mathcal{C}^\infty$
- $f^{(k)}(0) = k!\, a_k \longrightarrow f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Def: Una funció tal que al voltant de cada punt es pot expressar com una sèrie de potències (convergent) es diu analítica

(això no ho podem oblidar pel examen)

Def: Sigui D interval obert, $D \ni 0$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^\infty$$

f defineix una sèrie de potències $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

que és la sèrie de Taylor de f (centrada en 0)

→ Suposem que el radi de convergència $R > 0$

* Fórmula de Taylor

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$$

poli de Taylor de grau $\leq n$ de f a 0

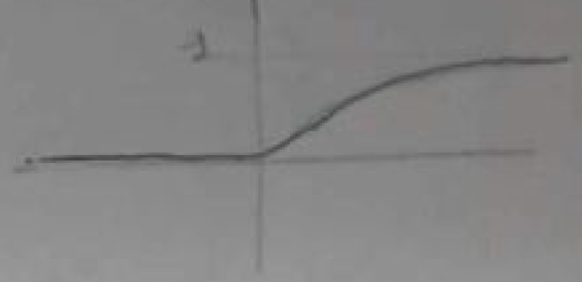
residu (Lagrange, integral ...)

Prop: Per tant, en $D \cap]-R, R[$

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

→ Hi ha funcions $\mathcal{C}^\infty$ que <u>NO</u> són analítiques:

<u>exemple</u> $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-1/t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$



f és $\mathcal{C}^\infty$, la sèrie de Taylor (centrada en 0) és nul·la

PERÒ f <u>NO</u> s'anul·la a cap veïnat de 0.

Per tant f <u>NO</u> coincideix amb la seva sèrie de Taylor a cap veïnat de 0

⚠ EXEMPLE IMPORTANT!!! (el tornarà a mencionar a final del curs ...)

→ Hi ha funcions $\mathcal{C}^\infty$ tq la seva sèrie de Taylor (a 0) té $R = 0$ (això és un detall, per si algú li feia gràcia xd)

* Sèries de Taylor importants [saber de memoria ♡]

- $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \forall |x| < 1$

- $(1+x)^p = \sum_{n \geq 0} \binom{p}{n} x^n \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{si } p \in \mathbb{N} \\ |x| < 1 & \text{si } p \notin \mathbb{N} \end{cases}$

- $(1+x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \quad \forall |x| < 1$

---

exemples: 1) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e^1 = e$

2) $\sum_{n \geq 1} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$

3) $f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

* Sèries de nombres complexos

$\sum_{n\geq 0} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$

Podem parlar de sèrie, sèrie convergent, sèrie absolutament convergent

$\sum_{n\geq 0} |a_n|$

$\sum c_n z^n$ $c_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$

$\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{1/n}$, radi de convergència $|z| < R$

$\exp(z) = e^z := \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

$z = ix$

$e^{ix} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n x^n}{n!} = \cos x + i \sin x$

Fórmula d'Euler : $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$

$\boxed{\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0}$