Def: Sigui φ una forma bilineal simètrica.

(a) Diem que φ és definida positiva si

$$\varphi(x,x)>0, \quad \forall x\in E;\ x\neq\vec{0}$$

(b) Diem que φ és definida negativa si

$$\varphi(x,x)<0, \quad \forall x\in E,\ x\neq\vec{0}$$

(c) Diem que φ és no definida en qualsevol altre cas.

Obs: Si φ és una forma bilineal simètrica i definida positiva, aleshores defineix un producte escalar sobre E

Def: Donada una matriu quadrada A (dim n), definim

$$A_k=(a_{ij}), \quad 1\leq i,j\leq k \quad \text{i} \quad \delta_k(A)=|A_k|$$

Prop: Teorema de Sylvester

Sigui φ una forma bilineal simètrica.

$$\varphi \text{ és def. pos.} \iff \delta_k(M_B(\varphi))>0,\ \forall 1\leq k\leq n,$$
$$\forall \text{ base } B.$$

Dem: Durant tota la demostració, $M_B(\varphi)=A$.

$\Rightarrow$) Com que φ és definida positiva, defineix un producte escalar sobre E. Si prenem una base B qualsevol, mitjançant Gram-Schmidt podem construir una nova base ortogonal $B_2=\{v_1,\dots v_n\}$.

Per tant, $i\neq j \Rightarrow \varphi(v_i,v_j)=0$, $\varphi(v_i,v_i)>0$.

14/09/

Fem $\varphi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Per tant,

$$M_{B_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow |M_{B_2}(\varphi)| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0.$$

Aleshores, com $A = S^T_{B_1,B_2} M_{B_2}(\varphi) S_{B_1,B_2} \Longrightarrow$

$$\Rightarrow |A| = |S_{B_1,B_2}|^2 \, |M_{B_2}(\varphi)| > 0.$$

La matriu d'un producte escalar té, doncs, determinant positiu independentment de la base triada.

Prenem ara la base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$.

φ també defineix un ~~es~~ producte escalar al subespai vectorial $\langle u_1, \dots, u_k \rangle$ quan la restringim a aquest.

Pel que hem vist, tenim que $|A_k| > 0 \quad \forall\, 1 \leq k \leq n$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tenim $\delta_k(A) > 0$, $\forall\, 1 \leq k \leq n$.

Apliquem la següent variació de Gram-Schmidt.

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$.

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{21} u_1 + u_2 \\ v_3 = \alpha_{31} u_1 + \alpha_{32} u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n1} u_1 + \dots + \alpha_{nn-1} u_{n-1} + u_n \end{cases}$$

α_{ij} són tals que $\varphi(v_k, u_i) = 0$, $\quad 2 \leq k \leq n$
$\quad 1 \leq i \leq k-1$

14/09/20

Propietats de $\{v_1, \dots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. En particular, $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ és una base de E.

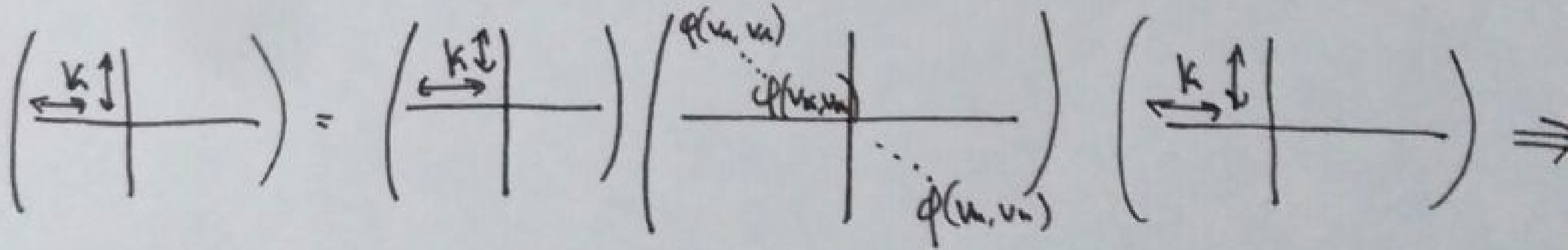
- $\varphi(v_k, v_i) = 0$, perquè $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$ i hem
  $1 \leq i \leq k-1$ definits els α de tal manera que
  $\underset{1 \leq i \leq k-1}{\varphi(v_k, u_i) = 0} \Rightarrow B_2$ és base ortogonal.

- La matriu $S_{B_2 B}$

$$S_{B_2,B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \cdots & \alpha_{n1} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \alpha_{n\,n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |S_{B_2,B}| = 1 \quad \text{i} \quad \delta_k(S_{B_2,B}) = 1$$

Finalment, fem

$$A = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\varphi) S_{B,B_2}$$



$$\Rightarrow \delta_k(A) = \delta_k(S_{B,B_2}^T)\,\delta_k(M_{B_2}(\varphi))\,\delta_k(S_{B,B_2}) =$$

$$= \delta_k(M_{B_2}(\varphi)) = \prod_{i=1}^{k} \varphi(v_i, v_i) > 0 \text{ per hipòtesi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_k(A)}{\delta_{k-1}(A)} = \varphi(v_k, v_k) > 0.$$

14/09/2017

Finalment, per $x \in E$

$$\varphi(x,x) \underset{\substack{\text{en} \\ \text{base } B_n}}{=} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \varphi(v_i, v_i) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq \vec{0}$$

Q. E. D.