

# Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

## Contenidos

<b>1</b>	<b>Álgebra multilineal</b>	<b>1</b>
1.1	Formas Cuadráticas . . . . .	1
	Teorema de Sylvester . . . . .	2
	Teorema Método convergencia-pivote . . . . .	4
1.2	Espacio dual . . . . .	5
1.3	Tensores . . . . .	6
1.4	Dimensión y bases de $T_p^q(\mathbb{E})$ . . . . .	8
	Teorema (base de $T_p^q(\mathbb{E})$ ) . . . . .	8
1.5	Recordatorio de permutaciones . . . . .	10
1.6	Tensores simétricos y antisimétricos . . . . .	11
1.7	Producto exterior . . . . .	16

## 1 Álgebra multilineal

### 1.1 Formas Cuadráticas

#### Definición 1.1.1

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned}\phi: E \times E &\rightarrow k \\ (u, v) &\mapsto \phi(u, v)\end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$
- $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

$\forall u, v, u_1, u_2 \in E$  y  $\forall \lambda \in k$ .

#### Definición 1.1.2

Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $\mathbf{k}$ -ev.  $\mathbb{E}$ . Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned}q: E &\rightarrow k \\ u &\mapsto q(u) = \phi(u, u)\end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a  $\phi$ .

**Observación 1.1.3** Se cumple que  $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$

**Lema 1.1.4** Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica sobre un  $\mathbf{k}$ -ev.  $\mathbb{E}$  con  $\text{car}\mathbb{E} \neq 2$  y sea  $q$  la forma cuadrática asociada a  $\phi$ , entonces

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

**Demostración**

$$\begin{aligned} q(u + v) - q(u) - q(v) &= \phi(u + v, u + v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = \\ &= \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = 2\phi(u, v) \end{aligned}$$

**Definición 1.1.5**

Sea  $\phi$  una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un  $\mathbf{k}$ -ev.  $\mathbb{E}$  y sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  una base. La matriz de  $\phi$  en base  $B$  es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

**Observación 1.1.6** La matriz  $M_B(\phi)$  es simétrica

**Definición 1.1.7**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. y sea  $\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbf{k}$  una forma bilineal simétrica.

- Diremos que  $\phi$  es definida positiva si

$$\phi(x, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es definida negativa si

$$\phi(x, x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que  $\phi$  es no definida en cualquier otro caso.

**Observación 1.1.8** Si  $\phi$  es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre  $\mathbb{E}$ .

**Definición 1.1.9**

Dada una matriz cuadrada  $A$  ( $\dim n$ ) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = |A_k|$$

**Teorema de Sylvester (1.1.10)**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dimension  $n$  y sea  $\phi: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbf{k}$  una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } \mathbb{E}$$

## Demostración

$\Rightarrow$

Como  $\phi$  es definida positiva, define un producto escalar sobre  $\mathbb{E}$ . Si tomamos una base  $B$  cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Llamamos  $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$ . Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies |M_{B_2}(\phi)| = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$$

Entonces, como  $M_B(\phi) = S_{B, B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2, B}$

$$|M_B(\phi)| = |S_{B_2, B}|^2 |M_{B_2}(\phi)| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que  $\phi$  también define un producto escalar en el subespacio vectorial  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$|M_B(\phi)_k| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Leftarrow$

Tenemos que  $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$ . Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u_2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \quad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad \begin{matrix} 2 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq k-1 \end{matrix}$$

Propiedades de  $\{v_1, \dots, v_n\}$

- $\forall k, \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$  En particular,  $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$  es base de  $\mathbb{E}$ .
- $\phi(v_k, v_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq k-1$  porque  $v_i \in \langle u_1, \dots, u_i \rangle$  y hemos tomado los  $\alpha$  de manera que  $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$  es base ortogonal
- La matriz  $S_{B_2 B}$

$$S_{B_2 B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies |S_{B_2 B}| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2 B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}
M_B(\phi) &= S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2} \\
\left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \phi(v_1, v_1) & \\ \hline & \ddots \\ \hline & \phi(v_k, v_k) \\ \hline & \ddots \\ & \phi(v_n, v_n) \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} k & \updownarrow \\ \hline \leftrightarrow & \end{array} \right) \\
\implies \delta_k(M_B(\phi)) &= \delta_k(S_{B,B_2}^T) \delta_k(M_{B_2}(\phi)) \delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) = \\
&= \prod_{i=1}^k \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis)} \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0
\end{aligned}$$

Finalmente,  $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x, x) = \phi \left( \sum_{i=1}^k x_i v_i, \sum_{i=1}^k x_i v_i \right) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

**Teorema** Método convergencia-pivote (1.1.11)

Dada una forma bilineal simétrica  $\phi$ , queremos encontrar una base de  $\mathbb{E}$ ,  $B_2$ , en la cual  $M_{B_2}(\phi)$  sea una matriz diagonal. Partimos de una base  $B$  i de  $M_B(\phi)$ . El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$\begin{aligned}
(M_B(\phi)|Id) &\overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \overset{\text{misma op. en columnas}}{\sim} (S_1 M_b(\phi) S_1^T | S_1) \sim \dots \sim \\
&\sim (S_r \dots S_1 M_B(\phi) S_1^T \dots S_r^T | S_r \dots S_1)
\end{aligned}$$

Donde la matriz de la izquierda es  $M_{B_2}$  y es diagonal.

**Ejemplo 1.1.12**

$$q_\phi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(1)+(2)}]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(1)+(2)}]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[\text{(1)+(2)}]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2)+(3)}]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(2)+(3)}]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[\text{(2)+(3)}]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(3)-}\frac{1}{2}\text{(2)}]{\text{fila}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow[\text{(3)-}\frac{1}{2}\text{(2)}]{\text{columna}} \\
& \xrightarrow[\text{(3)-}\frac{1}{2}\text{(2)}]{\text{columna}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Entonces, en base  $B$ , los vectores de  $B_2$  son:

- $v_1 = (1, 0, 0)$ ;  $\phi(v_1, v_1) = 2$
- $v_2 = (1, 1, 1)$ ;  $\phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ ;  $\phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y  $\phi(v_i, v_j) = 0$ ,  $i \neq j$ .

## 1.2 Espacio dual

### Definición 1.2.1

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. Definimos el espacio Dual de  $\mathbb{E}$  como  $\mathbb{E}^* = \{\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbf{k} \text{ lineales}\}$  (también es un  $\mathbf{k}$ -espacio vectorial)

**Observación 1.2.2** Para definir  $\mathbb{E}^*$  tenemos que usar bases de  $\mathbb{E}$ .

### Definición 1.2.3

Si  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  es una base de  $\mathbb{E}$  ( $\mathbf{k}$ -ev.) definimos

$$\begin{aligned}
u_i^* : \mathbb{E} &\rightarrow \mathbf{k} \\
u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de  $B$  a  $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$  (que efectivamente es una base de  $\mathbb{E}^*$ ).

**Observación 1.2.4** En particular si  $w \in \mathbb{E}^*$  y  $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*$ , se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*(u_j) = a_j \implies w = \sum_{i=1}^n w(u_i) u_i^*$$

### Proposición 1.2.5 (cambios de base)

Sean  $B_1$  y  $B_2$  bases de  $\mathbb{E}$  ( $\mathbf{k}$ -ev. de  $\dim \mathbb{E} = n$ ) y sean  $B_1^*$  y  $B_2^*$  las bases duales de  $B_1$  y  $B_2$ . Si  $S_{B_1 B_2}$  es la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$ , entonces:

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T$$

**Proposición 1.2.6** (aplicaciones lineales)

Sean  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{F}$   $\mathbf{k}$ -ev. y sea  $\phi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  una aplicación lineal, entonces  $\phi$  induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned}\phi^*: \mathbb{F}^* &\rightarrow \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi\end{aligned}$$

**Observación 1.2.7** Si  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{F}$  son de dimensión finita,  $\phi$  admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left. \begin{array}{l} B_1 \text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 \text{ base de } \mathbb{F} \end{array} \right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1, B_2}(\phi)$$

$$\left. \begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* \text{ base de } \mathbb{F}^* \end{array} \right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*, B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1, B_2}(\phi))^T$$

**Proposición 1.2.8** (espacio bidual)

Dado  $\mathbb{E}$   $\mathbf{k}$ -ev. podemos definir  $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \dots$ . En particular tenemos que  $\mathbb{E}^{**}$  es canónicamente isomorfo a  $\mathbb{E}$  mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\phi(u): \mathbb{E}^* &\rightarrow \mathbf{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u)\end{aligned}$$

**Observación 1.2.9** Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases),  $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$  y no distinguimos entre  $\mathbb{E}$  y  $\mathbb{E}^{**}$

## 1.3 Tensores

**Definición 1.3.1**

Sean  $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_r$   $\mathbf{k}$ -ev. Diremos que  $f: \mathbb{E}_1 \times \dots \times \mathbb{E}_r \rightarrow \mathbf{k}$  es un tensor (o una aplicación multilineal) si  $\forall i = 1, \dots, r$  y  $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$  ( $i \neq j$ ) se cumple que

$$\begin{aligned}\phi_i: \mathbb{E}_i &\rightarrow \mathbf{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_r)\end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

**Definición 1.3.2**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. Llamaremos tensor de tipo  $(p, q)$  (o tensor  $p$  veces covariante y  $q$  veces contravariante) (o tensor  $p$ -covariante y  $q$ -contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned}f: \overbrace{\mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}}^p \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \dots \times \mathbb{E}^*}^q &\rightarrow \mathbf{k} \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q)\end{aligned}$$

**Observación 1.3.3** Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como  $T_p^q(\mathbb{E})$ .

**Observación 1.3.4** Por convenio  $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbf{k}$ .

**Ejemplo 1.3.5**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**} (\cong \mathbb{E})$
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbf{k}\}$

**Proposición 1.3.6**

$T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$  (cambiando el orden)

**Proposición 1.3.7**

$T_p^q(\mathbb{E})$  tiene estructura de  $\mathbf{k}$ -espacio vectorial. Si  $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g: \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^p \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^q &\rightarrow \mathbf{k} \\ (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) &= \alpha f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) + \\ &\quad \beta g(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q). \end{aligned}$$

**Definición 1.3.8** (producto tensorial)

Dados  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$  y  $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$ , definimos el producto tensorial de  $f$  y  $g$  como

$$\begin{aligned} f \otimes g: \overbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}^{p+p'} \times \overbrace{\mathbb{E}^* \times \cdots \times \mathbb{E}^*}^{q+q'} &\rightarrow \mathbf{k} \\ (v_1, \dots, v_p, \overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, w_1, \dots, w_q, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) + \\ &\quad g(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \dots, \overline{w_{q'}}) \end{aligned}$$

**Observación 1.3.9** Si  $f$  y  $g$  son tensores, entonces  $f \otimes g$  también lo es. Además  $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$ .

**Proposición 1.3.10**

Sean  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ ,  $g \in T_{p'}^{q'}$  y  $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$ .

- $\otimes$  **NO** es abeliano. En general  $f \otimes g \neq g \otimes f$ .
- $\otimes$  es asociativo.  $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$ . Denotado por  $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h$  (( $f + g$ )  $\otimes$   $h = f \otimes h + g \otimes h$ )
- $\alpha \in k$ .  $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

**Ejemplo 1.3.11**

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ . Y consideramos el producto tensorial de los tensores  $e_1^*$  y  $e_2^*$  sobre los vectores  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

$$\left. \begin{aligned} (e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) &= e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) &= e_2^*(v_1)e_1^*(v_2) = y_1x_2 \end{aligned} \right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

**Ejemplo 1.3.12**

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$ ,  $B = \{e_1, e_2\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ , entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \quad \begin{cases} (e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0 \end{cases}$$

**Observación 1.3.13** a Si  $\mathbb{E}$  es un  $\mathbf{k}$ -ev de dimensión  $n$  y  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$\underbrace{(e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^*)}_{I=\{i_1, \dots, i_p\}} \otimes \underbrace{(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})}_{J=\{j_1, \dots, j_q\}} (\underbrace{e_{l_1}, \dots, e_{l_p}}_{L=\{l_1, \dots, l_p\}}, \underbrace{e_{m_1}^*, \dots, e_{m_q}^*}_{M=\{m_1, \dots, m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

**Observación 1.3.14** Sean  $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$  entonces

$$f = g \iff \begin{matrix} \forall e_{i_1}, \dots, e_{i_p} \in B \\ \forall e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^* \in B^* \end{matrix} \quad f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*)$$

**1.4 Dimensión y bases de  $T_p^q(\mathbb{E})$** 

Recordemos que  $T_p^q(\mathbb{E})$  es un  $\mathbf{k}$ -ev.

**Teorema** (base de  $T_p^q(\mathbb{E})$ ) (1.4.1)

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dimensión  $n$  y sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ , entonces

i)  $\dim_{\mathbf{k}} T_p^q(\mathbb{E}) = n^{p+q}$

ii) Una base de  $T_p^q(\mathbb{E})$  es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \mid \begin{matrix} i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\} \\ j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, n\} \end{matrix} \right\}$$

iii) Si  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ , las coordenadas de  $f$  en la base  $B_p^q$  son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*))$$

**Demostración**

i) Es consecuencia directa de ii



ii) Primero veamos que  $B_p^q$  es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ} (e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean  $I_0, J_0$  dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la 1.3.13). Veamos ahora que  $B_p^q$  es generadora. Sea  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ , definimos  $g \in T_p^q(\mathbb{E})$  como

$$g = \sum_{\forall I, J} (f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) (e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Mostrando ahora que  $f = g$  quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \dots, e_{j_q^0}^*) = f(e_{i_1^0}, \dots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \dots, e_{j_q^0}^*)$$

Por la 1.3.13 y queda demostrado el teorema.

### Ejemplo 1.4.2

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ ,  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea  $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \quad (B_0^1 = B)$$

- Sea  $w \in T_1^0(\mathbb{E}) (= \mathbb{E}^*)$

$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \quad (B_1^0 = B^*)$$

- Sea  $n = 3$  y sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$

$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \dots, e_3^* \otimes e_3^*\}$$

$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

### Proposición 1.4.3 (cambio de base)

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dimensión  $n$  y sean  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\overline{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ . Sea  $S = (s_j^i)$  la matriz de cambio de base de  $\overline{B}$  a  $B$  y sea  $T = (t_j^i)$  su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$B \xrightleftharpoons[T]{S} \overline{B} \quad B^* \xrightleftharpoons[T^t]{S^t} \overline{B}^*$$

Sea  $f \in T_p^q(\mathbb{E})$  y sean

$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \left( f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*) \right)_{I,J}$$

$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \left( f(u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \dots, u_{j_q}^*) \right)_{I,J}$$

Entonces,  $\forall I, J$

$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \dots, u_{i_p}, u_{j_1}^*, \dots, u_{j_q}^*) = \sum_{\forall L, M} s_{i_1}^{l_1} \cdots s_{i_p}^{l_p} t_{m_1}^{j_1} \cdots t_{m_q}^{j_q} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \dots, e_{j_q}^*)$$

### Ejemplo 1.4.4

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$  por lo tanto  $f = u$  y  $\begin{smallmatrix} u_B = (x_1, \dots, u_n) \\ u_{\bar{B}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{smallmatrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$  por lo tanto  $f = w$  y  $\begin{smallmatrix} w_B = (x_1, \dots, u_n) \\ w_{\bar{B}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{smallmatrix}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_2(\mathbb{E})$  por lo tanto  $f$  es una forma bilineal y  $\begin{smallmatrix} f_B = A \in M_{n,n}(k) \\ f_{\bar{B}} = \bar{A} \in M_{n,n}(k) \end{smallmatrix}$ , entonces

$$\bar{A} = S^t A S$$

## 1.5 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como  $x_n = \{1, \dots, n\}$
- Denotaremos como  $\mathcal{S}_n = \{\sigma: x_n \rightarrow x_n \text{ bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$  es un grupo por composición. Además denotaremos  $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada  $s_0 \in \mathcal{S}_n$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{S}_n &\rightarrow \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$

es biyectiva.

- Sea  $s \in \mathcal{S}_n$ , denotaremos  $s$  de las siguientes maneras

$$- s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix}$$

- Si  $s$  es cíclica la denotaremos como  $s = (1, 3, 7, 5)$ . En este caso,  $s(1) = 3$ ,  $s(3) = 7$ ,  $s(7) = 5$  y  $s(5) = 1$ , para el resto de valores  $s(i) = i$ .

- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo  $s = (i, j)$  con  $i \neq j$
- $\forall s \in \mathcal{S}_n$ ,  $s$  se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir

$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \pmod{2}$$

- Sea  $s \in \mathcal{S}_n$  y sea  $s = t_1 \cdots t_p$  una descomposición de  $s$  en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de  $s$  como  $\varepsilon(s) = (-1)^p$ .

## 1.6 Tensores simétricos y antisimétricos

### Definición 1.6.1

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dimensión  $n$ , sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$  y  $s \in \mathcal{S}_p$ , entonces, definimos  $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$  como

$$(\underline{s}f)(v_1, \dots, v_p) = f(v_{s(1)}, \dots, v_{s(p)})$$

### Ejemplo 1.6.2

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ,  $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$  y  $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$ , entonces

$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

### Proposición 1.6.3

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dimensión  $n$ , sean  $w_1, \dots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ , y  $s \in \mathcal{S}_p$  ( $t = s^{-1}$ ). Entonces

$$\underline{s}(w_1 \otimes \dots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \dots \otimes w_{t(p)}$$

### Demostración

Sean  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{E}$  (obsérvese que  $w_1 \otimes \dots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$ )

$$\underline{s}(w_1 \otimes \dots \otimes w_p)(u_1, \dots, u_p) = (w_1 \otimes \dots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \dots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdot \dots \cdot w_p(u_{s(p)})$$

Dado que  $s(i) = j \iff i = t(j)$ ,  $w_i(u_{s(i)}) = w_i(u_j) = w_{t(j)}(u_j)$ . Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdot \dots \cdot w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \dots \otimes w_{t(p)}(u_1, \dots, u_p)$$

### Ejemplo 1.6.4

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$  para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos  $(1, 2) = s \in \mathcal{S}_2$ . Entonces  $s = (1, 2) = s^{-1} = t$  y para los siguientes elementos de  $T_2(\mathbb{E})$  se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \quad \underline{s}f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \quad \underline{s}f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos  $(1, 2, 3) = s \in (\mathcal{S}_3)$ . Entonces  $t = s^{-1} = (1, 3, 2)$ , es decir, que  $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$ , y para el siguiente elemento de  $T_3(\mathbb{E})$  se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

**Observación 1.6.5** Sea  $f_i \in T_p(\mathbb{E})$ . Entonces  $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i (\underline{s}f_i)$ . Por tanto, la proposición anterior sirve para  $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$ .

### Ejemplo 1.6.6

Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.6.4 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \quad \underline{s}f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

**Definición 1.6.7**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. de dim  $n$ . Sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ .

1.  $f$  es simétrica  $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f$
2.  $f$  es antisimétrica  $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f$
3.  $S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$   
 $A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$

**Observación 1.6.8**  $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$  son s.e.v. (ver observación 1.6.5).

**Ejemplo 1.6.9**

Para los dos ejemplos, sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ , sean  $B$  y  $B^*$  bases de  $\mathbb{E}$  y de  $\mathbb{E}^*$  correspondientemente.

1. Definimos  $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$  y  $s = (1, 2) \in (S)_2$ . Entonces  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s\}$  y  $\varepsilon(\text{Id}) = 1$ ,  $\varepsilon(s) = -1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{Id}}(f) = f = \varepsilon(\text{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f, \underline{s}(f) \neq -f \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E}) \end{array}$$

2. Como anteriormente,  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ .

- Para  $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array} \right\} \implies f \in S_2(\mathbb{E})$$

- Para  $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$ ,

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\text{Id}}(f) = f = \varepsilon(\text{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f \end{array} \right\} \implies f \in A_2(\mathbb{E})$$

**Observación 1.6.10**

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$  si  $\varepsilon(s) = t_1, \dots, t_n$ , donde  $t_1, \dots, t_n$  son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1) \varepsilon(s_2)$ .
- $s \in \mathcal{S}_p$ . Definimos  $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , donde  $A_{i,j} = 1$  si  $i = s(j)$  y  $A_{i,j} = 0$  en otro caso. Entonces  $\det A = \varepsilon(s)$ .

**Proposición 1.6.11**

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -e.v. de dimensión  $n$ , sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ .

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$f \text{ simétrica} \iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i, j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned} f \text{ antisimétrica} &\iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i < j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = \\ &\quad - f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \\ &\iff \forall u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}, \forall i < j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \dots, u_p) = 0. \end{aligned}$$

### Demostración

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

En el caso de la implicación conversas se cumple:

$$\begin{aligned} \forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f &\implies \forall t_1, \dots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \dots, t_m}f = \\ &\underline{t_1}(\underline{t_2}(\dots(\underline{t_m}f)\dots)) = f \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies f \text{ es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned} \forall u_1, \dots, u_p \in E, \forall i < j \quad 0 = f(u_1, \dots, u_i + u_j, \dots, u_i + u_j, \dots, u_p) = \\ f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) + \\ f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_j, \dots, u_p) = \\ f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) + f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \implies \\ f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1 \cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1 \cdots t_m)f$$

Y entonces:

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f \implies f \in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser  $f$  antisimétrica,

$$\forall u_1, \dots, u_p \in E, \forall i < j \quad f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

Si  $u_i = u_j$ , entonces  $f(u_1, \dots, u_p) = 0$ .

### Proposición 1.6.12

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. con  $\text{car } \mathbb{E} \neq 2$  y sea  $f \in T_p(\mathbb{E})$ , entonces  $\forall v_i, v_j \in \mathbb{E}$

$$f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \iff f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

### Demostración

$\implies$

$$f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = -f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) \implies \\ 2f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0 \implies f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

$\Longleftarrow$

$$f(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots) = 0 \implies \\ f(\cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) = 0 \\ \implies f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$$

### Ejemplo 1.6.13

Sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$  (formas bilineales) y sea  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base, Llamamos  $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$  y sea  $\mathcal{S}_2 = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ . Entonces

$$\text{Id}f = f \quad M_b(\underline{s}f) = (\underline{s}f(e_i, e_j)) = (f(e_j, e_i)) = A^t$$

Es decir,  $f$  es simétrico si y solo si  $A^t = A \iff A$  simétrica y  $f$  es antisimétrico si y solo si  $A = -A^t \iff A$  antisimétrica

### Ejemplo 1.6.14

Sea  $\dim \mathbb{E} = n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $\mathbb{E}$ , entonces

$$f: \overbrace{E \times \cdots \times E}^n \rightarrow \mathbf{k} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_B(u_1, \dots, u_n)$$

Como  $f$  es multilineal ( $\implies f \in T_n(\mathbb{E})$ ),  $f$  es antisimétrico por la proposición 1.6.11.

### Definición 1.6.15

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. con  $\text{car} \mathbf{k} = 0$  y  $f \in T_p(\mathbb{E})$ . Llamamos simetrizado de  $f$  a

$$S(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \underline{s}f$$

y antisimetrizado de  $f$  a

$$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s}f$$

### Ejemplo 1.6.16

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$  y  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  base de  $\mathbb{E}$

- Sea  $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$  y  $\mathcal{S}_p = \{\text{Id}, s = (1, 2)\}$ , entonces

$$S(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*) \\ A(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

- Sea  $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$  y  $\mathcal{S}_p = \{\text{Id}, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ , entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*)$$

**Observación 1.6.17**  $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$ , por lo tanto no hace falta calcular  $s^{-1}$

### Ejemplo 1.6.18

Sea  $f \in T_2(\mathbb{E})$  (formas bilineales) y sea  $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$ , entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2} (M_B(f) + M_B(f)^t) = \frac{1}{2} (A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2} (M_B(f) - M_B(f)^t) = \frac{1}{2} (A - A^t)$$

**Observación 1.6.19** Si  $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

### Proposición 1.6.20

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -ev. Consideramos  $A, S: T_p(\mathbb{E}) \rightarrow T_p(\mathbb{E})$ , entonces

- i)  $A, S$  son lineales
- ii)  $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$  y  $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$
- iii)  $\text{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$  y  $\text{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$

**Demostración** i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos  $S(f + g)$ )

- ii)  $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$  queda como ejercicio. Suponemos que  $f \in A_p(\mathbb{E})$ , entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!} \left( \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s}f \right) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) (\varepsilon(s)f) = \frac{p!f}{p!} = f$$

- iii)  $\text{Im}(S) = S_p(\mathbb{E})$  queda como ejercicio. Demostraremos que  $\text{Im}(A) = A_p(\mathbb{E})$ . Por ii sabemos que  $A_p(\mathbb{E}) \subseteq \text{Im}(A)$ , por lo tanto, resta ver que  $g = A(h) \in A_p(\mathbb{E})$ , sea  $s \in \mathcal{S}_p$

$$\begin{aligned} \underline{s}h &= \underline{s} \left( \frac{1}{p!} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \underline{r}f \right) = \frac{1}{p!} \left( \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \underline{s}(\underline{r}f) \right) = \\ &= \varepsilon(s) \frac{1}{p!} \left( \sum_{r \in \mathcal{S}_p \varepsilon(sr) \underline{s}r} h \right) \stackrel{1.5}{=} \varepsilon(s) \frac{1}{p!} \left( \sum_{t \in \mathcal{S}_p \varepsilon(t) \underline{t}h} h \right) = \varepsilon(s)g \end{aligned}$$

**Observación 1.6.21** Las mismas construcciones funcionan para tensores  $(0, q)$ ,  $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$ , pero no funcionan para tensores  $(p, q)$  donde  $p, q \neq 0$  porque las construcciones implican permutaciones.

## 1.7 Producto exterior

**Observación 1.7.1**  $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ ,  $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$  y  $S_p, A_p$  s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$ ,  $g \in S_p(\mathbb{E})$  en general  $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$ ,  $g \in A_p(\mathbb{E})$  en general  $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

### Ejemplo 1.7.2

Sean  $\omega_1, \omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$ :

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$ , porque  $S_1 = \{Id\}$ .
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$ .

**Observación 1.7.3** El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

**Observación 1.7.4** Lo haremos en  $T_p(\mathbb{E})$ , análogamente se hará en  $T^q(\mathbb{E})$ .

**Definición 1.7.5** (producto exterior de orden 1)

Sea  $\mathbb{E}$  un  $\mathbf{k}$ -e.v.;  $\omega_1, \dots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ , el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p = p! A(\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p)$$

**Observación 1.7.6**

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p &= p! \left( \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} (\omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_p) \right) = \\ &= \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) (\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{s^{-1}(p)}) \stackrel{\varepsilon(s) = \varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)} \otimes \dots \otimes \omega_{r(p)}) \end{aligned}$$

### Ejemplo 1.7.7

Sea  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ ,  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ .

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \dots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

### Proposición 1.7.8

Sean  $\omega_1, \dots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

- $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$
- $\omega_1 \wedge \dots \wedge (\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}}) \wedge \dots \wedge \omega_p = \alpha_i (\omega_1 \wedge \dots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \dots \wedge \omega_p) + \beta_i (\omega_1 \wedge \dots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \dots \wedge \omega_p)$
- Sea  $s \in \mathcal{S}_p$ ,  $t = s^{-1}$ ,  $\omega_{s(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t} (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p) = \varepsilon(s) (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)$
- Si  $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{E}$ ,  $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(u_1, \dots, u_p) = \det(\omega_j(u_i))$



v) Si  $\omega_i = \omega_j, (i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$

vi)  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$  son l.i.

### Demostración

i)  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p!A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in \text{Im}(A) \stackrel{\text{visto}}{=} A_p(\mathbb{E})$

ii) Ejercicio (misma proposición que  $\otimes$ )

iii)  $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$  (Ejercicio, misma proposición que  $\otimes$ )

$$\begin{aligned} \omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} &\stackrel{1.7.5+1.7.6}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}) = \\ &\stackrel{\varepsilon^2(s)=1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r)\varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} (\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}) \stackrel{rs=m \in \mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m) (\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)}) = \\ &= \varepsilon(s) (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})} (u_1, \dots, u_p) &= \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}) (u_1, \dots, u_p) = \\ &= \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r) (\omega_{r(1)}(u_1) \dots \omega_{r(p)}(u_p)) \stackrel{\text{def det}}{=} \det(\omega_j(u_i))_{i,j} \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p &\stackrel{1.7.8(iii)}{=} (-1) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \implies \\ \implies 2(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) &= 0 \stackrel{\text{rank} \neq 2}{\implies} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0 \end{aligned}$$

vi)  $\implies$

Suponemos que son l.d. y que  $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j$ :

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \left( \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j \right) \stackrel{1.7.8(ii)}{=} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j (\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_j) \stackrel{1.7.8(v)}{=} 0 !!$$

$\longleftarrow$

Sea  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ ,  $B^* = \{\omega_1, \dots, \omega_p, \overbrace{\omega_{p+1}, \dots, \omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$  la base dual de  $B$ , tenemos que:

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) (u_1, \dots, u_p) \stackrel{1.7.8(iv)}{=} \det(\omega_j(u_i)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$