

# Cálculo integral

## Contenidos

<b>1 Series Numéricas e Integrales Impropias</b>	<b>1</b>
1.1 Series numéricas . . . . .	1
1.2 Series de números positivos . . . . .	3
1.3 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes . . . . .	9
Teorema de Riemman para series condicionalmente convergentes . . . . .	10
1.4 Aplicación: Series de potencias . . . . .	12
Teorema de Cauchy-Hadamard . . . . .	12
1.4.1 Series de números complejos . . . . .	15
1.5 Integrales impropias: definición y ejemplos . . . . .	16
<b>2 Integración multiple</b>	<b>16</b>
2.1 Integral de Riemann sobre rectangulos compactos . . . . .	16

## 1 Series Numéricas e Integrales Impropias

### 1.1 Series numéricas

#### Definición 1.1.1

Una serie de números reales es una pareja de sucesiones de números reales  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(s_n)_{n \geq 0}$ , relacionadas por

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

Denominaremos término  $n$ -ésimo de la serie al elemento  $a_n$  y llamaremos suma parcial  $n$ -ésima de la serie a  $s_n$

**Observación** Las sumas parciales definen los términos

$$a_0 = s_0 \quad a_n = s_n - s_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

#### Definición 1.1.2

Llamaremos suma de una serie a

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

suponiendo que existe

**Observación** Denotaremos  $s = \sum_{n \geq 0} a_n = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n$ . Esta misma notación no servirá para representar la serie.

### Definición 1.1.3

Diremos que una serie  $\sum a_n$  es convergente o divergente si lo es la sucesión de sumas parciales

- convergente  $\lim s_n \in \mathbb{R}$
- divergente  $\lim s_n = \pm\infty$
- oscilante  $\nexists \lim s_n$

**Observación 1.1.4** Una serie no tiene por qué comenzar por el índice 0, y por tanto, podemos considerar series con términos  $a_n$  donde  $n \geq n_0$ . En tal caso, las sumas parciales son  $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ , y la suma (si existe)  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n a_k$ .

### Definición 1.1.5

Sea  $r \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie geométrica de razón  $r$  a la serie

$$\sum_{n \geq 0} r^n$$

### Proposición

La serie geométrica es convergente si y solo si  $|r| < 1$ , en tal caso la suma es

$$\sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$$

### Demostración

Primero, calculamos el término  $n$ -ésimo

$$s_n = 1 + r + \cdots + r^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } r = 1 \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1} & \text{si } r \neq 1 \end{cases}$$

- Si  $r = 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = \infty$
- Si  $|r| > 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \infty$
- Si  $|r| < 1$ ,  $\lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{-1}{r-1}$
- Si  $r = -1$ ,  $s_n = 0$  si  $n$  par y  $s_n = 1$  si  $n$  impar. Por lo tanto la serie es oscilante

### Proposición 1.1.6

Si  $\sum a_n$  es convergente, entonces  $\lim a_n = 0$

### **Demostración**

Sabemos que  $a_n = s_n - s_{n-1}$ , por lo tanto  $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1})$ , como  $\lim s_n$  existe (y por lo tanto también  $\lim s_{n-1}$ )

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

### **Proposición 1.1.7** (Criterio de Cauchy para series)

La serie  $\sum a_n$  es convergente si  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m, n \geq n_0 \implies |s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} \cdots + a_n| < \varepsilon$$

### **Proposición 1.1.8** (linealidad)

Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series convergentes. Entonces  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$  también lo es y  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$ .

### **Proposición 1.1.9**

Sean dos sucesiones  $(a_n)$  y  $(b_n)$ , son iguales salvo en número finito de términos, entonces las series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen la misma convergencia.

### **Demostración**

Sea  $d_n = b_n - a_n$ , que vale 0 salvo en número finito de términos

- Si  $\sum a_n$  converge  $\sum b_n = \sum a_n + \overbrace{\sum d_n}^{\text{Suma finita}} \implies \sum b_n$  converge
- Si  $\sum a_n$  diverge  $\sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  diverge
- Si  $\sum a_n$  oscila  $\sum b_n = \sum a_n + \sum d_n \implies \sum b_n$  oscila

### **Proposición 1.1.10** (Asociatividad)

Sea  $\sum a_n$  una serie y  $(n_k)_{k \geq 0}$  una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Definimos

$$b_0 = a_0 + \cdots + a_{n_0} \quad b_k = a_{(n_{k-1}+1)} + \cdots + a_{n_k}$$

Si existe la suma de  $\sum a_n$ , entonces también existe la suma de  $\sum b_k$  y son iguales.

### **Demostración**

Sea  $A_n = \sum_{i=0}^n a_i$  y  $B_k = \sum_{i=0}^k b_i$ , por la definición anterior se tiene que  $B_k = A_{n_k}$  y por lo tanto  $(B_k)$  es una sucesión parcial de  $(A_n)$ , lo cual implica que si  $(A_n)$  converge,  $(B_k)$  también y lo hace al mismo número.

## **1.2 Series de números positivos**

### **Proposición 1.2.1**

Si una serie  $\sum a_n$  es de *términos positivos* ( $a_n \geq 0$ ) entonces la sucesión  $(s_n)$  de sumas parciales es *creciente*, y por tanto, siempre tiene límite:

$$\sum a_n = \lim s_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n$$

Este puede ser finito (si la sucesión de sumas parciales es acotada) o infinito (en caso contrario).

**Proposición 1.2.2** (Criterio de comparación directa)

Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos positivos. Si  $\exists n_0$  tal que  $a_n \leq b_n$  ( $\forall n \geq n_0$ ). Entonces

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

Por tanto, la convergencia de  $\sum b_n$  implica la de  $\sum a_n$  y la divergencia de  $\sum a_n$  implica la de  $\sum b_n$ .

**Demostración**

Por el enunciado

$$\sum_{i=n_0}^n a_i \leq \sum_{k=n_0}^n b_k \implies \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$

Los términos  $a_0, \dots, a_{n_0}$  se pueden añadir al sumatorio y no alteran la convergencia.

**Definición**

Llamamos serie armónica a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$$

**Definición 1.2.3** (Serie de Riemman)

Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Llamaremos serie armónica generalizada o serie de Riemman de parámetro  $p$  a la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$$

**Proposición**

La serie de Riemman es convergente si y solo si  $p > 1$ .

**Demostración**

Distinguiremos entre varios casos

- Si  $p = 1$ . Suponemos que la serie es convergente con suma  $s$

$$s = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots > \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = s$$

absurdo ya que  $s > s$ .

- Si  $p < 1$ .

$$n^p \leq n \implies \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$$

y por comparación directa con la serie armónica, diverge.

- Si  $p > 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} &= 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \dots \leq \\ &\leq 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \dots \end{aligned}$$

que es una serie geométrica de razón  $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$  y por lo tanto convergente.

**Proposición 1.2.4** (Criterio de comparación en el límite)

Sean  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  series de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe el límite

$$\lim \frac{\sum a_n}{\sum b_n} = l \in [0, +\infty]$$

- Si  $l < +\infty$ .  $\sum b_n$  converge  $\implies \sum a_n$  converge y  $\sum a_n$  diverge  $\implies \sum b_n$  diverge.
- Si  $l > 0$ .  $\sum a_n$  converge  $\implies \sum b_n$  converge y si  $\sum b_n$  diverge  $\implies \sum a_n$  diverge.
- Si  $0 < l < +\infty$ . Entonces las dos series tienen el mismo carácter.

**Demostración**

Provaremos cada caso de manera individual

- Caso  $l < +\infty$ . Fijado  $\varepsilon > 0$ , por definición de límite, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \implies a_n < (l + \varepsilon)b_n$$

y el resultado queda provado por comparación directa.

- Caso  $l > 0$ . Se deduce del primer caso, considerando

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{l}$$

- Caso  $0 < l < +\infty$ . Se trata de una conjunción de los casos anteriores

**Lema 1.2.5** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} < r$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$

**Demostración**

Provaremos cada caso por separado

- $a_n^{1/n} < r \implies a_n < r^n$  que es la serie geométrica de razón  $r < 1$ , de modo que por comparación directa el resultado queda demostrado.
- $a_n^{1/n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$  y por lo tanto diverge.

**Proposición 1.2.6** (Criterio de la raíz de Cauchy)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Suponemos que existe  $\lim a_n^{1/n} = \alpha$ , entonces, si  $\alpha > 1$  la serie diverge y si  $\alpha < 1$  la serie converge.

**Demostración**

Demostraremos cada caso por separado

- Caso  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \leq r$$

Y el resultado queda provado aplicando el lema anterior.

- Caso  $\alpha > 1$ . Existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies a_n^{1/n} \geq 1$$

y aplicamos el lema anterior.

**Lema 1.2.7** Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos.

- Suponemos que hay  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $r < 1$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

entonces  $\sum a_n < +\infty$

- Suponemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

entonces  $\sum a_n = +\infty$

**Demostración**

Separaremos los casos.

•

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \implies a_{n+1} \leq r a_n \implies a_n \leq C r^n \quad (n \geq n_0)$$

donde  $C = \frac{a_{n_0}}{r^{n_0}}$  y por el criterio de comparación directa  $\sum a_n$  converge.

- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_{n+1} \geq a_n \implies a_n$  es creciente  $\implies \sum a_n$  diverge

**Proposición 1.2.8** (Criterio del cociente de Alembert)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos. Suponemos que existe  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ , entonces

- Si  $\alpha > 1$  la serie diverge
- Si  $\alpha < 1$  la serie converge

## Demostración

Separamos los dos casos

- Si  $\alpha < 1$ . Sea  $\alpha < r < 1$  entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

y aplicamos el lema anterior.

- Si  $\alpha > 1$ . Entonces  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq n_0 \implies \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

y aplicamos el lema anterior.

## Ejemplo

Estudiar la convergencia de

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ .  
 $n!$  crece más que  $n^2$  ( $n! > n^2$ )  $\implies \frac{1}{n!} < \frac{1}{n^2}$  que es la serie de Riemman de parámetro 2 (convergente). Por tanto,  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$  es convergente.
- $\sum \frac{x^n}{n!}$  para  $x > 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1$$

Por lo tanto, aplicando el criterio del cociente de Alembert, la serie converge.

- $\sum \alpha^{n+\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = \alpha$$

Por lo tanto, por el criterio de la raíz,  $\begin{cases} \alpha < 1 \text{ convergente} \\ \alpha > 1 \text{ divergente} \end{cases}$ . Si  $\alpha = 1$ , la serie es

$\sum 1^{n+\sqrt{n}} = \sum 1$  que es divergente.

**Observación 1.2.9** Los criterios anteriores no deciden cuando  $\alpha = 1$ . Como  $a_{n+1}/a_n \rightarrow \alpha$  implica que  $a_n^{1/n} \rightarrow \alpha$ , si el criterio del cociente no decide, entonces el de la raíz tampoco.

## Proposición 1.2.10 (Criterio de Raabe)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos estrictamente positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Proposición** (Criterio de condensación)

Sea  $(a_n)$  una sucesión de números positivos decreciente. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

**Proposición** (Criterio logarítmico)

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos tal que existe el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln(n)}$$

Si  $L > 1$ , la serie  $\sum a_n$  es convergente. Si  $L < 1$ , la serie  $\sum a_n$  es divergente.

**Proposición 1.2.11** (Criterio de la integral)

Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $f: [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  positiva, localmente integrable y decreciente. Consideramos  $a_n = f(n)$  ( $n \geq n_0$ ) entonces

i) La serie  $\sum a_n$  y la integral impropia  $\int_{n_0}^{+\infty} f$  tienen el mismo carácter.

ii) Para  $N \geq n_0$

$$\sum_{n \geq n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{N-1} a_n + \int_N^{+\infty} f + \varepsilon_n$$

donde  $\varepsilon_n \in [0, a_n]$

**Ejemplo**

•  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  tiene el mismo carácter que  $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$  (convergente  $\iff \alpha > 1$ )

• Calcular  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$  con error  $< 10^{-3}$ .

Necesitamos que

$$\frac{1}{N^{1.01}} < 10^{-3} \implies N > 1000^{1/1.01} \implies N \geq 934$$

Calculamos ahora

$$\sum_{n=1}^{933} \frac{1}{n^{1.01}} + \int_{934}^{+\infty} \frac{dx}{x^{1.01}} \simeq 100.577 \simeq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1.01}}$$

**Proposición 1.2.12**

Sea  $\sum a_n$  una serie de términos positivos. Dada cualquier permutación  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , la serie  $\sum a_{\sigma(n)}$  tiene la misma suma que  $\sum a_n$ .

**Demostración**

Sea  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$  y  $B_n = \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}$  y sean  $A = \lim A_n$  y  $B = \lim B_n$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\{0, 1, \dots, m\} \subseteq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$$

ya que  $\sigma$  es suprayectiva. Entonces  $a_0 + a_1 + \dots + a_m \leq a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \dots + a_{\sigma(n)}$  por lo tanto,  $A_m \leq B_n \implies A \leq B$ . Haciendo el mismo razonamiento para  $\sigma^{-1}$  (biyectiva), obtenemos que  $B \leq A$ . Y por lo tanto,  $A = \sum a_n = \sum a_{\sigma(n)} = B$ .



### 1.3 Series absolutamente convergentes y condicionalmente convergentes

#### Definición 1.3.1

Diremos que una serie  $\sum a_n$  es absolutamente convergente, si la serie  $\sum |a_n|$  es convergente.

#### Proposición 1.3.2

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

#### Demostración

Aplicamos criterio de Cauchy para series a  $\sum |a_n|$ :  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$m > n \geq n_0 \implies \left| |a_{n+1}| + \dots + |a_m| \right| < \varepsilon \implies |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

De donde se deduce que

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| < |a_{n+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon$$

(por la desigualdad triangular). Y por lo tanto,  $\sum a_n$  cumple el criterio de Cauchy.

#### Definición 1.3.3

Una serie convergente, que no es absolutamente convergente, se dice que es condicionalmente convergente.

#### Ejemplo

La serie armónica alternada  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  es condicionalmente convergente.

#### Proposición 1.3.4

Si  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  son absolutamente convergentes, y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sum (a_n + b_n)$  y  $\sum \lambda a_n$  son absolutamente convergentes.

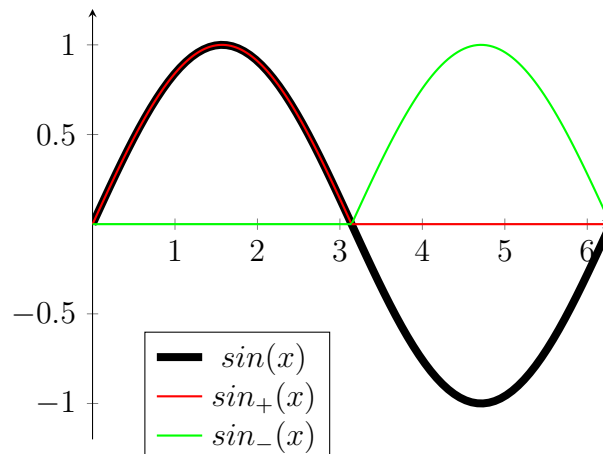
#### Definición 1.3.5

Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Definimos  $a_+$  (la parte positiva de  $a$ ) como  $a_+ = \max(a, 0)$ , asimismo, definimos la parte negativa de  $a$  como  $a_- = \max(-a, 0)$ .

**Observación** Dado un  $a$ , podemos expresar  $a = a_+ - a_-$  y  $|a| = a_+ + a_-$

**Observación** Dada  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos hacer exactamente lo mismo, ( $f = f_+ - f_-$ ,  $|f| = f_+ + f_-$ )

#### Ejemplo



**Lema 1.3.6** Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales. Sean  $(p_n)$  y  $(q_n)$  sus partes positiva y negativa (respectivamente).

- i)  $\sum a_n$  converge absolutamente  $\iff \sum p_n, \sum q_n$  son convergentes.
- ii) Si  $\sum a_n$  es condicionalmente convergente, entonces  $\sum p_n$  y  $\sum q_n$  son divergentes

### Demostración

- i) Se tiene que

$$\sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^n p_k + \sum_{k=0}^n q_k$$

Si  $\sum |a_n|$  converge  $\implies \sum p_n$  y  $\sum q_n$  tienen el mismo carácter, como ambas son series de términos positivos,  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  convergen.

El recíproco es directo por linealidad.

- ii) Se tiene que

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n p_k - \sum_{k=0}^n q_k$$

$\sum p_n$  y  $\sum q_n$  no pueden ser las dos convergentes por i y tampoco puede ser que solo una de las dos sea divergente, porque entonces  $\sum a_n$  divergería.

### Proposición 1.3.7

Si una serie es absolutamente convergente, entonces todas sus series reordenadas son convergentes con la misma suma.

Es decir,  $\forall \sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación,  $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$

### Demostración

Primero, escribimos

$$a_n = p_n - q_n \xrightarrow{a_n \text{ abs. conv.}} \sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$$

Consideramos ahora  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  permutación, entonces,  $\sum a_{\sigma(n)}$  también es absolutamente convergente ( $\sum |a_{\sigma(n)}| = \sum |a_n|$  reordenando términos positivos). Ahora tenemos que

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum p_{\sigma(n)} - \sum q_{\sigma(n)} \underset{\text{términos positivos}}{=} \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$$

□

### Teorema de Riemman para series condicionalmente convergentes (1.3.8)

Sea  $\sum a_n$  una serie condicionalmente convergente.  $\forall s \in [-\infty, +\infty]$  existe una reordenación de la serie  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (permutación) tal que  $\sum a_{\sigma(n)} = s$ .

### Definición 1.3.9

Una serie alternada es una serie donde los términos cambian de signo alternativamente. Es decir, una serie de la forma  $\sum (-1)^n a_n$  donde  $a_n \geq 0$ .

**Proposición 1.3.10** (Criterio de Leibnitz)

Si  $(a_n)$  es una sucesión descendiente de términos positivos con  $\lim a_n = 0$ , entonces  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.

Además, si  $S_N$  es la  $N$ -ésima suma parcial de  $\sum (-1)^n a_n$  y  $S$  es su suma,  $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ .

**Demostración**

Consideramos la serie  $(S_{2N})$

$$S_{2N+2} = S_{2N} + \overbrace{(a_{2N+1} + a_{2N+2})}^{\leq 0} \leq S_{2N}$$

Por lo tanto,  $(S_{2N})$  es descendiente, acotada inferiormente por  $a_0 - a_1$ . Consideramos ahora  $(S_{2N+1})$

$$S_{2N+3} = S_{2N+1} + \overbrace{(a_{2N+2} + a_{2N+3})}^{\geq 0} \geq S_{2N+1}$$

Con lo cual  $(S_{2N+1})$  es creciente. Además se tiene que

$$a_0 - a_1 = S_1 \leq S_{2N+1} \leq S_{2N} \leq S_0 = a_0 \quad (1)$$

Con lo cual deducimos que tanto  $(S_{2N})$  como  $(S_{2N+1})$  son convergentes (monótonas y acotadas). Por último, tenemos que

$$\lim(S_{2N} - S_{2N-1}) = \lim a_{2N} = 0 \implies \left. \begin{array}{l} \lim S_{2N} = S \\ \lim S_{2N+1} = S \end{array} \right\} \implies \lim S_N = S$$

Para acabar, sabemos por (1) que  $S$  está dentro del intervalo de extremos  $S_N$  y  $S_{N+1}$  de longitud  $a_{N+1}$ , por lo tanto  $|S - S_N| \leq a_{N+1}$

**Ejemplo**

La serie armónica alternada,  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  es convergente por el criterio de Leibnitz.

Hay otros criterios de convergencia para series cualesquiera, entre los cuales destaca el criterio de Dirichlet.

**Proposición 1.3.11** (Criterio de Dirichlet)

Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones numéricas. Suponemos que

- i) las sumas parciales  $s_n$  de la serie  $\sum a_n$  están acotadas.
- ii) la sucesión  $(b_n)$  es positiva y decreciente con límite 0.

Entonces la serie  $\sum a_n b_n$  es convergente.

## 1.4 Aplicación: Series de potencias

### Definición 1.4.1

Una serie de potencias (centrada en 0) es una expresión

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

donde  $a_n$  son los coeficientes de la serie.

**Lema 1.4.2** Sea  $\sum a_n x^n$  una serie de potencias. El conjunto de los  $r \geq 0$  tales que  $\sum |a_n| r^n$  converge es un intervalo que contiene al 0.

### Demostración

Si  $0 \leq s \leq r$  y  $\sum |a_n| r^n$  converge, entonces  $\sum |a_n| s^n$  converge también por comparación directa ( $|a_n| s^n \leq |a_n| r^n$ ) y  $\sum |a_n| 0^n$  converge a 0 trivialmente.

### Definición 1.4.3

Sea  $\sum a_n x^n$  una serie de potencias y sea  $I$  el intervalo de los  $r \geq 0$  tales que  $\sum |a_n| r^n$  converge. Llamamos radio de convergencia de la serie a  $R$  el extremo superior del intervalo  $I$ . Denominamos dominio de convergencia de la serie al intervalo  $(-R, R)$

**Observación** La serie puede converger en los puntos frontera del dominio de convergencia.

**Observación** Los casos extremos corresponden a  $R = 0$  (la serie solo converge para  $x = 0$ ) y  $R = +\infty$  (la serie converge para todo  $x$ ).

### Teorema de Cauchy-Hadamard (1.4.4)

Sea  $\sum a_n x^n$  una serie de potencias. Su radio de convergencia  $R$  viene dado por

$$\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

La serie de potencias es absolutamente convergente si  $|x| < R$  y es divergente si  $|x| > R$ .

**Observación** A priori no se puede afirmar nada cuando  $|x| = R$ .

### Demostración

Separaremos la demostración en varios casos

- Caso  $0 < R < +\infty$ . Sea  $0 < |x| < R$ . Existe  $C < 1$  tal que

$$|x| < CR \implies \frac{1}{R} < \frac{C}{|x|}$$

Por lo tanto, si  $n$  es suficientemente grande

$$|a_n|^{1/n} \leq \frac{C}{|x|} \implies |a_n x^n| \leq C^n$$

Como  $C^n$  es la serie geométrica de razón  $C < 1$ , la serie converge.

Sea ahora  $|x| > R$ , tenemos que  $\frac{1}{R} > \frac{1}{|x|}$ . Hay infinitos  $n$  tal que

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1$$

Por lo tanto  $a_n x^n$  no tiende a 0 y por lo tanto la serie no converge.

- Caso  $R = +\infty$ . Entonces  $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ . Por lo tanto, para  $n$  suficientemente grande  $\exists C < 1$  tal que  $|a_n|^{1/n} < \frac{C}{|x|} \implies |a_n x^n| < C^n$  y por lo tanto la serie converge.
- Caso  $R = 0$ . Entonces  $\forall x$  hay infinitos  $n$  tales que  $|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|x|} \implies |a_n x^n| > 1 \neq 0$  y por lo tanto, la serie diverge.

**Observación 1.4.5** El radio de convergencia también se puede calcular con las expresiones

$$\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{1/n} \quad \frac{1}{R} = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Suponiendo que los límites existan.

### Ejemplo

- $\sum n! x^n$ ,  $\frac{1}{R} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty \implies R = 0$
- $\sum x^n$ ,  $\frac{1}{R} = \lim 1^{1/n} = 1^0 = 1 \implies R = 1$
- $\sum \frac{x^n}{n!}$ ,  $\frac{1}{R} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \implies R = +\infty$
- Las  $\sum_{n \geq 0} x^n$ ,  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  y  $\sum \frac{1}{n^2}$  tienen  $R = 1$ , pero tienen comportamiento distinto en la frontera.

### Definición 1.4.6

Si una serie de potencias  $\sum a_n x^n$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ , define una función

$$f: (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sum a_n x^n$$

**Observación** Se puede probar que  $f$  es continua, integrable y derivable “término a término”

**Observación** La serie derivada término a término tiene radio de convergencia  $R$ , y por lo tanto, la función es de clase  $\mathcal{C}^\infty$

### Demostración

Primero, consideramos la función derivada  $f'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} = \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} x^k$ , calculamos ahora el radio de convergencia por la definición.

$$\limsup |n+1|^{1/n} |a_{n+1}|^{1/n} = \limsup |n|^{1/n-1} |a_n|^{1/n-1} = \limsup \left( n^{1/n} |a_n|^{1/n} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{R}$$

Además

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \rightarrow f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

**Definición**

Una función tal que alrededor de cada punto se puede expresar como una serie de potencias (convergente) se llama analítica.

**Definición 1.4.7**

Sea  $D$  un intervalo abierto tal que  $0 \in D$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Entonces,  $f$  define una serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

que es la serie de Taylor de  $f$  (centrada en 0).

**Proposición**

Sea  $D$  un intervalo abierto tal que  $0 \in D$  y sea  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Suponemos que la serie de Taylor de  $f$  tiene radio de convergencia  $R > 0$ . Recordando la formula de Taylor  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  (donde  $P_n$  es el polinomio de Taylor de grado  $\leq n$  de  $f$  en 0, y  $R_n$  el correspondiente residuo de Taylor), por tanto en  $D \cap (-R, R)$

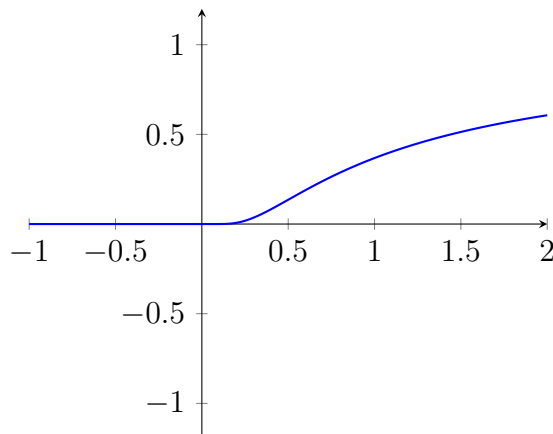
$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

**Observación 1.4.8** Hay funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que su serie de Taylor (centrada en 0) converge para todo  $x$ , pero no coincide con  $f(x)$  en ningún punto salvo el origen.

Hay funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  tales que su serie de Taylor (centrada en 0) tiene radio de convergencia 0.

**Ejemplo**

La función  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Su serie de Taylor es nula ( $f^{(k)}(0) = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ ). Pero  $f$  no se anula en ningún entorno de 0  $\implies f$  no coincide con la serie de Taylor en ningún entorno de 0.

**Proposición 1.4.9** (Algunas series de Taylor importantes)

- $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad |x| < 1$
- $(1+x)^p = \sum_{n \geq 0} \binom{p}{n} x^n \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R} & \text{si } p \in \mathbb{N} \\ |x| < 1 & \text{si } p \notin \mathbb{N} \end{cases}$
- $a = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n \quad |x| < 1$

### Ejemplo

- $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} = e^1 = e$
- $\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n \geq 0} x^n \implies \sum_{n \geq 1} nx^{n-1} = \left( \frac{1}{(1-x)} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$

Por lo tanto

$$\sum_{n \geq 1} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

- $f = \arctan(x)$  con  $|x| < 1$  (a partir de  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ )

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} \implies \arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

#### 1.4.1 Series de números complejos

##### Definición

La definición de serie, de serie convergente y de serie absolutamente convergente, es la misma si, en vez de considerar números reales, consideramos números complejos.

##### Proposición

Una serie  $\sum c_n$  de números complejos es convergente si y solo si lo son separadamente sus partes real e imaginaria.

##### Proposición

Toda serie  $\sum c_n$  de números complejos absolutamente convergente, es convergente.

**Observación** El estudio de las series de potencias es completamente análogo. En el caso complejo, si la serie de potencias  $\sum c_n z^n$  tiene radio de convergencia  $R$  ( $\frac{1}{R} = \limsup |c_n|^{1/n}$ ). Entonces, el dominio de convergencia es un disco abierto  $|z| < R$  del plano complejo.

**Observación** La serie de Taylor de la función exponencial real permite definir la exponencial compleja como

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposición**

Tomando  $z \in \mathbb{C}$  un imaginario puro, y separando las partes real e imaginaria de las potencias, obtenemos la formula de Euler.

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

En particular para  $x = \pi$ , se tiene que  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

## 1.5 Integrales impropias: definición y ejemplos

# 2 Integración multiple

## 2.1 Integral de Riemann sobre rectangulos compactos

**Definición 2.1.1**

Un rectangulo de  $\mathbb{R}^n$  es un producto  $A := I_1 \times \cdots \times I_n$  donde  $I_j \in \mathbb{R}$  son intervalos que suponemos no degenerados i fitados. Si los  $I_j$  son compactos o abiertos, también lo es  $A$ .

**Definición 2.1.2**

La medida o volum  $n$ -dimensional de  $A$  es  $\text{vol}(A) = \text{long}(I_1) \times \cdots \times \text{long}(I_n)$  ( $n = 1$  longitud,  $n = 2$  area...).

**Definición 2.1.3**

Una partición de  $A$  es el resultado de hacer una partición  $\mathcal{P}_j$  de cada  $I_j$ ,  $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ . Si  $A', A'' \in A$  subrectangulos de una partición,  $\overset{\circ}{A}' \cap \overset{\circ}{A}'' = \emptyset$ .