Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

Contenidos

0 Formas Cuadráticas

0.1 Definición, matriz de una forma cuadrática y bases

Definición 0.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E} &\to \mathbf{k} \\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1+u_2,v)=\phi(u_1,v)+\phi(u_2,v)$
- $\phi(\lambda u,v)=\lambda\phi(u,v)$
- $\phi(u,v)=\phi(v,u)$

$\forall u,v,u_1,u_2\in\mathbb{E}$ y $\forall\lambda\in\mathbf{k}$.

Definición 0.1.2
Sea ϕ una forma bilineal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$. Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{E} &\to \mathbf{k} \\ u &\mapsto q(u)=\phi(u,u) \end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a ϕ.

Observación 0.1.3 Se cumple que $q(\lambda u)=\lambda^2 q(u)$

Lema 0.1.4 Sea ϕ una forma bilieal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ con $\operatorname{car}\mathbb{E}\neq 2$ y sea q la forma cuadrática asociada a ϕ, entonces

$$\phi(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$$

Demostración

$$q(u+v)-q(u)-q(v)=\phi(u+v,u+v)-\phi(u,u)-\phi(v,v)=$$
$$=\phi(u,u)+\phi(u,v)+\phi(v,u)+\phi(v,v)-\phi(u,u)-\phi(v,v)=2\phi(u,v)$$

Definición 0.1.5
Sea ϕ una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ y sea $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ una base. La matriz de ϕ en base B es

$$M_B(\phi)=(a_{ij})=(\phi(u_i,u_j))$$

Observación 0.1.6 La matriz $M_B(\phi)$ es simétrica

Definición 0.1.7
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. y sea $\phi\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica.

- Diremos que ϕ es definida positiva si

$$\phi(x,x)>0,\quad\forall x\in\mathbb{E}\quad x\neq\vec{0}$$

- Diremos que ϕ es definida negativa si

$$\phi(x,x)<0,\quad\forall x\in\mathbb{E}\quad x\neq\vec{0}$$

- Diremos que ϕ es no definida en cualquier otro caso.

Observación 0.1.8 Si ϕ es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$.

Definición 0.1.9
Dada una matriz cuadrada A (dim n) definimos

$$A_k=(a_{ij}),\quad 1\le i,j\le k\quad\text{y}\quad\delta_k(A)=\left|A_k\right|$$

Teorema de Sylvester (0.1.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n y sea $\phi\colon\mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi\text{ es definida positiva}\iff\delta_k(M_B(\phi))>0\quad\forall 1\le k\le n\quad\forall B\text{ base de }\mathbb{E}$$

Demostración
$\Longrightarrow$
Como ϕ es definida positiva, define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$. Si tomamos una base B cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal $B_2=\{v_1,\cdots,v_n\}$. Por tanto

$$i\neq j\implies\phi(v_i,v_j)=0,\quad\phi(v_i,v_i)>0\quad 1\le i,j\le n$$

Llamamos $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \left|M_{B_2}(\phi)\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

Entonces, como $M_B(\phi) = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2,B}$

$$\left|M_B(\phi)\right| = \left|S_{B_2,B}\right|^2 \left|M_{B_2}(\phi)\right| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que ϕ también define un producto escalar en el subespacio vectorial $< v_1, \cdots, v_k >$ cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left|M_B(\phi)_k\right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Longleftarrow$

Tenemos que $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$. Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \qquad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad {\scriptstyle 2\leq k\leq n \atop 1\leq i\leq k-1}$$

Propiedades de $\{v_1, \cdots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \cdots, v_k\rangle = \langle u_1, \cdots, u_k\rangle$ En particular, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.
- $\phi(v_k, v_i) = 0$ $\forall 1 \leq i \leq k-1$ porque $v_i \in \langle u_1, \cdots, u_i\rangle$ y hemos tomado los α de manera que $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$ es base ortogonal
- La matriz S_{B_2B}

$$S_{B_2B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|S_{B_2B}\right| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$M_B(\phi) = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} k \quad \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} k \quad \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi(v_1,v_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \phi(v_k,v_k) & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ & & & & & \phi(v_n,v_n) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} k \quad \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right)$$

$$\implies \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S^t_{B,B_2})\delta_k(M_{B_2}(\phi))\delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis) } \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0$$

Finalmente, $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x,x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

Teorema Método convergencia-pivote (0.1.11)
Dada una forma bilineal simétrica ϕ, queremos encontrar una base de $\mathbb{E}$, B_2, en la cual $M_{B_2}(\phi)$ sea una matriz diagonal. Partimos de una base B i de $M_B(\phi)$. El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \underset{\text{en columnas}}{\overset{\text{misma op.}}{\sim}} \left(S_1 M_B(\phi) S_1^T|S_1\right) \sim \cdots \sim$$
$$\sim \left(S_r \ldots S_1 M_B(\phi) S_1^T \ldots S_r^T|S_r \ldots S_1\right)$$

Donde la matriz de la izquierda es M_{B_2} y es diagonal.

Ejemplo 0.1.12

$$q_\phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces, en base B, los vectores de B_2 son:

- $v_1 = (1, 0, 0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$

- $v_2 = (1,1,1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y $\phi(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$.

Proposición 0.1.13
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n, sea $\phi \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica y sea q su forma cuadrática asociada. Consideremos $B = \{u_1, \dots u_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$. Sabemos que

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subespacio vectorial $\mathbb{E}^{\perp} \subseteq \mathbb{E}$ definido por $\mathbb{E}^{\perp} = \{u \in \mathbb{E} \mid \phi(u, v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{E}\}$. Tenemos que

i)
$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad E^{\perp} = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle .$$

ii)
$$\operatorname{rg} q + \dim \mathbb{E}^{\perp} = n \implies i_0(q) = \dim \mathbb{E}^{\perp}.$$

iii) Sean $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, e $i_+(q)$ el número de elementos estrictamente positivos de la diagonal de $M_B(\phi)$. $i_+(q)$ no depende de la base *q-ortogonal* B elegida.

iv) Sea $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ y sean $\delta_0 = 1, \delta_1, \dots, \delta_n \neq 0$. Entonces, $i_-(q)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia $\delta_0, \dots, \delta_n$.

Demostración

i) $u_i \in \{u_{m+1}, \dots, u_n\}$,

$$\phi(u_j, u_i) = (0 \ \cdots \ 1 \cdots \ 0) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \ \forall\, 1 \leq j \leq n \implies$$

$$\implies \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{E}^{\perp}.$$

Sea $u \in \mathbb{E}$ tal que $u \notin \langle u_{m+1}, \dots u_n \rangle$. Se tiene que $\exists\ 1 \leq i \leq m$ t.q. $x_i \neq 0$. Entonces,

$$e_i^t M_B(\phi)\, u = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1_i & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_i x_i \neq 0 \implies u \notin \mathbb{E}^{\perp}.$$

Así pues, $\mathbb{E}^{\perp} = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$.

iii) Sea $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$.

$$M_{B'}(\phi) = D' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$m = i_+(q, B); \ \ \mathbb{F}^+ = \langle u_1, \dots u_m \rangle; \ \ \mathbb{E} = \mathbb{F}^+ \oplus \langle u_{m+1}, \dots u_n \rangle = \mathbb{F}^+ \oplus \mathbb{F}^{\leq 0}.$$

Análogamente,

$$m' = i_+(q, B'); \ \ \mathbb{F}'^+ = \langle u'_1, \dots u'_m \rangle; \ \ \mathbb{E} = \mathbb{F}'^+ \oplus \left\langle u'_{m+1}, \dots u'_n \right\rangle = \mathbb{F}'^+ \oplus \mathbb{F}'^{\leq 0}.$$

Consideremos la fución que proyecta un vector de $\mathbb{F}^+$ sobre $\mathbb{F}'^+$.

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{F}^+ \to \mathbb{E} &\to \mathbb{F}'^+ \\ v &\longmapsto f(v). \end{aligned}$$

Sea $v \in \mathbb{F}^+$ y sean v_1 y v_2 las proyecciones de v sobre $\mathbb{F}'^+$ y $\mathbb{F}'^{\leq 0}$ respectivamente. Tenemos que $f(v) = v_1$. Entonces,

$$f(v) = 0 \implies v_1 = 0 \implies v = v_2.$$

Además, $0 \leq \phi(v, v)$ y $\phi(v_2, v_2) = \phi(v, v) \leq 0$, de modo que $v = 0$ y f es inyectiva. Considerando la función que proyecta un vector de $\mathbb{F}'^+$ sobre $\mathbb{F}^+$.

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{F}'^+ \to \mathbb{E} &\to \mathbb{F}^+ \\ v &\longmapsto g(v). \end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento análogo, obtenemos que g es inyectiva, de modo que $m = m'$.

0.2 Clasificación afín y proyectiva

Definición 0.2.1
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-espacios vectoriales. Sean

$$\phi\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbf{k},$$

$$\psi\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbf{k}$$

formas bilineales simétricas. Diremos que ϕ y ψ son afínmente equivalentes, y escribiremos $\phi\sim\psi$, si existe un isomorfismo $f\colon\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ tal que

$$\phi\left(u,v\right)=\psi\left(f\left(u\right),f\left(v\right)\right)\ \ \forall u,v\in\mathbb{E},$$

$$\phi\left(f^{-1}\left(u'\right),f^{-1}\left(v'\right)\right)=\psi\left(u',v'\right)\ \ \forall u',v'\in\mathbb{F}.$$

Teorema de Sylvester (0.2.2)

i) $\mathbf{k}=\mathbb{R}$
$$\phi\sim\psi\iff \operatorname{rg}\phi=\operatorname{rg}\psi \text{ y } i_+\left(\phi\right)=i_+\left(\psi\right).$$

ii) $\mathbf{k}=\mathbb{C}$
$$\phi\sim\psi\iff \operatorname{rg}\phi=\operatorname{rg}\psi.$$

1 Álgebra multilineal

1.1 Espacio dual

Definición 1.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Definimos el espacio Dual de $\mathbb{E}$ como $\mathbb{E}^*=\{\phi:\mathbb{E}\to\mathbf{k} \text{ lineales}\}$ (también es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial)

Observación 1.1.2 Para definir $\mathbb{E}^*$ tenemos que usar bases de $\mathbb{E}$.

Definición 1.1.3
Si $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ es una base de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^*\colon \mathbb{E}&\to\mathbf{k}\\ u_j&\mapsto u_i^*(u_j)=\delta_{ij}\end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de B a $B^*=\{u_1^*,\cdots,u_n^*\}$ (que efectivamente es una base de $\mathbb{E}^*$).

Observación 1.1.4 En particular si $w\in\mathbb{E}^*$ y $w=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_iu_i^*$, se cumple que:

$$w(u_j)=\sum_{i=1}^n a_iu_i^*(u_j)=a_j\implies w=\sum_{i=1}^n w(u_i)u_i^*$$

Proposición 1.1.5 (cambios de base)
Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{E}$ (**k**-ev. de $\dim \mathbb{E} = n$) y sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y B_2. Si $S_{B_1B_2}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces:

$$S_{B_1^*B_2^*} = (S_{B_1B_2}^{-1})^T = (S_{B_2B_1})^T$$

Proposición 1.1.6 (aplicaciones lineales)
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ **k**-ev. y sea $\phi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ una aplicación lineal, entonces ϕ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^*\colon \mathbb{F}^* &\to \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi \end{aligned}$$

Observación 1.1.7 Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son de dimensión finita, ϕ admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &\text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 &\text{ base de } \mathbb{F} \end{aligned}\right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1,B_2}(\phi)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1^* &\text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* &\text{ base de } \mathbb{F}^* \end{aligned}\right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*,B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1,B_2}(\phi))^T$$

Proposición 1.1.8 (espacio bidual)
Dado $\mathbb{E}$ **k**-ev. podemos definir $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \cdots$. En particular tenemos que $\mathbb{E}^{**}$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{E}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(u)\colon \mathbb{E}^* &\to \mathbf{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u) \end{aligned}$$

Observación 1.1.9 Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$ y no distinguimos entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}^{**}$

1.2 Tensores

Definición 1.2.1
Sean $\mathbb{E}_1, \cdots, \mathbb{E}_r$ **k**-ev. Diremos que $f\colon \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_r \to \mathbf{k}$ es un tensor (o una aplicacion multilineal) si $\forall i = 1, \cdots, r$ y $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$ $(i \neq j)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \phi_i\colon \mathbb{E}_i &\to \mathbf{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_r) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

Definición 1.2.2
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Llamaremos tensor de tipo (p,q) (o tensor p veces covariante y q veces contravariante) (o tensor p-covariante y q-contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}}^{p}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) &\mapsto f(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) \end{aligned}$$

Observación 1.2.3 Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como $T_p^q(\mathbb{E})$.

Observación 1.2.4 Por convenio $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbf{k}$.

Ejemplo 1.2.5
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**}$ $(\cong \mathbb{E})$
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbf{k}\}$

Proposición 1.2.6
$T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$ (cambiando el orden)

Proposición 1.2.7
$T_p^q(\mathbb{E})$ tiene estructura de $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si $f,g \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $\alpha,\beta \in \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \alpha f+\beta g\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\mathbb{E}}^{p}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) &\mapsto (\alpha f+\beta g)(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\alpha f+\beta g)(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) = \alpha f(&v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q)+ \\ &\beta g(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q). \end{aligned}$$

Definición 1.2.8 (producto tensorial)
Dados $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$, definimos el producto tensorial de f y g como

$$\begin{aligned} f\otimes g\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}}^{p+p'}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q+q'} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,\overline{v_1},\cdots\overline{v_{p'}},w_1,\cdots,w_q,\overline{w_1},\cdots,\overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_p)* \\ &\quad\ g(\overline{v_1},\cdots,\overline{v_{p'}},\overline{w_1},\cdots\overline{w_{q'}}) \end{aligned}$$

Observación 1.2.9 Si f y g son tensores, entonces $f\otimes g$ también lo es. Además $f\otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$.

Proposición 1.2.10
Sean $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, $g \in T_{p'}^{q'}$ y $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$.

- $\otimes$ **NO** es abeliano. En general $f \otimes g \neq g \otimes f$.
- $\otimes$ es asociativo. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$. Denotado por $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h \quad ((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in k$. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

Ejemplo 1.2.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Y consideramos el producto tensorial de los tensores e_1^* y e_2^* sobre los vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} (e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) = e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1 y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) = e_2^*(v_1)e_1^*(v_2) = y_1 x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

Ejemplo 1.2.12
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$, $B* = \{e_1^*, e_2^*\}$, entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \qquad \begin{cases} (e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0 \end{cases}$$

Observación 1.2.13 Si $\mathbb{E}$ es un **k**-ev de dimensión n y $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$

$$(\underbrace{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*}_{I=\{i_1,\cdots,i_p\}} \otimes \underbrace{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_2}}_{J=\{j_1,\cdots j_q\}})(\underbrace{e_{l_1}, \cdots, e_{l_p}}_{L=\{l_1,\cdots,l_p\}}, \underbrace{e_{m_1}^*, \cdots, e_{m_q}^*}_{M=\{m_1,\cdots,m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 1.2.14 Sean $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$ entonces

$$f = g \iff_{\substack{\forall e_{i_1},\cdots,e_{i_p} \in B \\ \forall e_{j_1}^*,\cdots,e_{j_q}^* \in B^*}} f(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*)$$

1.3 Dimensión y bases de $T_p^q(\mathbb{E})$

Recordemos que $T_p^q(\mathbb{E})$ es un **k**-ev.

Teorema (base de $T_p^q(\mathbb{E})$) (1.3.1)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n y sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces

i) $\dim_k T_p^q(\mathbb{E}) = n^{p+q}$

ii) Una base de $T_p^q(\mathbb{E})$ es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \Big|_{j_1,\cdots,j_1 \in \{1,\cdots,n\}}^{i_1,\cdots,i_p \in \{1,\cdots,n\}} \right\}$$

iii) Si $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, las coordenadas de f en la base B_p^q son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}))$$

Demostración

i) Es consecuencia directa de ii

ii) Primero veamos que B_p^q es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ}(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean I_0, J_0 dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la 1.2.13). Veamos ahora que B_p^q es generadora. Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, definimos $g \in T_p^q(\mathbb{E})$ como

$$g = \sum_{\forall I,J} (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que $f = g$ quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e^*_{j_1^0}, \cdots, e^*_{j_q^0}) = f(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e^*_{j_1^0}, \cdots, e^*_{j_q^0})$$

Por la 1.2.13 y queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1.3.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea $u \in \mathbb{R}^n$

$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \qquad (B_0^1 = B)$$

- Sea $w \in T_1^0(\mathbb{E})(= \mathbb{E}^*)$

$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \qquad (B_1^0 = B^*)$$

- Sea $n = 3$ y sea $f \in T_2(\mathbb{E})$

$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \cdots e_3^* \otimes e_3^*\}$$
$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

Proposición 1.3.3 (cambio de base)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n y sean $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Sea $S = (s_j^i)$ la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B y sea $T = (t_j^i)$ su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "T"'] & \overline{B} \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, bend left, "S^t"] & \overline{B}^* \arrow[l, bend left, "T^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y sean

$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \Big(f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$
$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \Big(f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$

Entonces, $\forall I, J$

$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q}) = \sum_{\forall L,M} s^{l_1}_{i_1} \cdots s^{l_p}_{i_p} t^{j_1}_{m_1} \cdots t^{j_q}_{m_q} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})$$

Ejemplo 1.3.4

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$ por lo tanto $f = u$ y ${}^{u_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{u_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ por lo tanto $f = w$ y ${}^{w_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{w_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_2(\mathbb{E})$ por lo tanto f es una forma bilineal y ${}^{f_B=A\in M_{n,n}(k)}_{f_{\overline{B}}=\overline{A}\in M_{n,n}(k)}$, entonces

$$\overline{A} = S^t A S$$

1.4 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como $x_n = \{1, \cdots, n\}$
- Denotaremos como $\mathcal{S}_n = \{\sigma\colon x_n \to x_n \text{bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$ es un grupo por composición. Además denotaremos $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada $s_0 \in \mathcal{S}_n$, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$

  es biyectiva.

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$, denotaremos s de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si s es cíclica la denotaremos como $s = (1, 3, 7, 5)$. En este caso, $s(1) = 3$, $s(3) = 7$, $s(7) = 5$ y $s(5) = 1$, para el resto de valores $s(i) = i$.

- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo $s = (i, j)$ con $i \neq j$

- $\forall s \in \mathcal{S}_n$, s se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir

$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \mod 2$$

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$ y sea $s = t_1 \cdots t_p$ una descomposición de s en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de s como $\varepsilon(s) = (-1)^p$.

1.5 Tensores simétricos y antisimétricos

Definición 1.5.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$ y $s \in \mathcal{S}_p$, entonces, definimos $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$ como

$$(\underline{s}f)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_{s(1)}, \cdots, v_{s(p)})$$

Ejemplo 1.5.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$ y $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$, entonces

$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

Proposición 1.5.3
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de dimensión n, sean $w_1, \dots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$, y $s \in \mathcal{S}_p$ $(t = s^{-1})$. Entonces

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$

Demostración
Sean $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{E}$ (obsérvese que $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$)

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_1, \dots, u_p) = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \dots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$$

Dado que $s(i) = j \iff i = t(j)$, $w_i(u_{s_i}) = w_i(u_j) = w_{t(j)(u_j)}$. Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}(u_1, \dots, u_p)$$

Ejemplo 1.5.4
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos $(1,2) = s \in \mathcal{S}_2$. Entonces $s = (1,2) = s^{-1} = t$ y para los siguientes elementos de $T_2(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \qquad \underline{s}f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \qquad \underline{s}f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos $(1,2,3) = s \in (S)_3$. Entonces $t = s^{-1} = (1,3,2)$, es decir, que $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$, y para el siguiente elemento de $T_3(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

Observación 1.5.5 Sea $f_i \in T_p(\mathbb{E})$. Entonces $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i(\underline{s}f_i)$. Por tanto, la proposición anterior sirve para $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$.

Ejemplo 1.5.6
Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.5.4 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

Definición 1.5.7
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de $\dim n$. Sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. f es simétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f$
2. f es antisimétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f$
3. $S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$
   $A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_P(\mathbb{E})$

Observación 1.5.8 $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ son s.e-v. (ver observación 1.5.5).

Ejemplo 1.5.9
Para los dos ejemplos, sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, sean B y B^* bases de $\mathbb{E}$ y de $\mathbb{E}^*$ correspondientemente.

1. Definimos $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $s = (1,2) \in (S)_2$. Entonces $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s\}$ y $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$, $\varepsilon(s) = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f,\, \underline{s}(f) \neq -f \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E}) \end{array}$$

2. Como anteriormente, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$.

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array}\right\} \implies f \in S_2(\mathbb{E})$$

- Para $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in A_2(\mathbb{E})$$

Observación 1.5.10

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$ si $\varepsilon(s) = t_1, \ldots, t_n$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$.
- $s \in \mathcal{S}_p$. Definimos $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, donde $A_{i,j} = 1$ si $i = s(j)$ y $A_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces $\det A = \varepsilon(s)$.

Proposición 1.5.11
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-e.v. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$\begin{aligned} \text{f simétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i, j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned} \text{f antisimétrica} \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \\ \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \ldots, u_p) = 0. \end{aligned}$$

Demostración

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

   En el caso de la implicación conversa se cumple:

$$\begin{aligned} \forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f \implies & \forall t_1, \ldots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \ldots, t_m}f = \\ & \underline{t_1}(\underline{t_2}(\ldots(\underline{t_m}f)\ldots)) = f \end{aligned}$$

   Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies \text{ f es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned} & \forall u_1, \ldots, u_p \in E, \forall i < j \quad 0 = f(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \implies \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1 \cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1 \cdots t_m) f$$

Y entonces:

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s) f \implies f \in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser f antisimétrica,

$$\forall u_1, \ldots, u_p \in E, \ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

Si $u_i = u_j$, entonces $f(u_1, \ldots, u_p) = 0$.

Proposición 1.5.12
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $\operatorname{car} \mathbf{k} \neq 2$ y sea $f \in T_p(\mathbb{E})$, entonces $\forall v_i, v_j \in \mathbb{E}$

$$f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \iff f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

Demostración
$\implies$

$$\begin{gathered} f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = -f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) \implies \\ 2f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0 \implies f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0 \end{gathered}$$

$\impliedby$

$$\begin{gathered} f(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots) = 0 \implies \\ f(\cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) = 0 \\ \implies f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \end{gathered}$$

Ejemplo 1.5.13
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base, Llamamos $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$ y sea $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$. Entonces

$$\underline{\mathrm{Id}} f = f \qquad M_b(\underline{s}f) = (\underline{s}f(e_i, e_j)) = (f(e_j, e_i)) = A^t$$

Es decir, f es simétrico si y solo si $A^t = A \iff A$ simétrica y f es antisimétrico si y solo si $A = -A^t \iff A$ antisimétrica

Ejemplo 1.5.14
Sea $\dim \mathbb{E} = n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{E}$, entonces

$$\begin{aligned} f \colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} &\to \mathbf{k} \\ (u_1, \ldots, u_n) &\mapsto det_B(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Como f es multilineal ($\implies f \in T_n(\mathbb{E})$), f es antisimétrico por la proposición 1.5.11.

Definición 1.5.15
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $\operatorname{car}\mathbf{k} = 0$ y $f \in T_p(\mathbb{E})$. Llamamos simetrizado de f a

$$S(f) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \underline{s}f$$

y antisimetrizado de f a

$$A(f) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}f$$

Ejemplo 1.5.16
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{E}$

- Sea $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$, entonces

$$S(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*)$$
$$A(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

- Sea $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$, entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^*\otimes e_2^*\otimes e_3^* + e_2^*\otimes e_1^*\otimes e_3^* + e_3^*\otimes e_2^*\otimes e_1^* + e_1^*\otimes e_3^*\otimes e_2^* + e_3^*\otimes e_1^*\otimes e_2^* + e_2^*\otimes e_3^*\otimes e_1^*)$$

Observación 1.5.17 $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$, por lo tanto no hace falta calcular s^{-1}

Ejemplo 1.5.18
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$, entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) + M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) - M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Observación 1.5.19 Si $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

Proposición 1.5.20
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Consideramos $A, S\colon T_p(\mathbb{E}) \to T_p(\mathbb{E})$, entonces

i) A, S son lineales

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ y $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ y $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$

Demostración i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos $S(f+g)$)

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ queda como ejercicio. Suponemos que $f \in A_p(\mathbb{E})$, entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}f\right) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\left(\varepsilon(s)f\right) = \frac{p!f}{p!} = f$$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ queda como ejercicio. Demostraremos que $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$. Por ii sabemos que $A_p(\mathbb{E}) \subseteq Im(A)$, por lo tanto, resta ver que $g = A(h) \in A_p(\mathbb{E})$, sea $s \in \mathcal{S}_op$

$$\underline{s}h = \underline{s}\left(\frac{1}{p!}\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\underline{r}f\right) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\underline{s}(\underline{r}f)\right) =$$

$$= \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p\varepsilon(sr)\underline{sr}h}\right) \overset{1.4}{=} \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{t\in\mathcal{S}_p\varepsilon(t)\underline{t}h}\right) = \varepsilon(s)g$$

Observación 1.5.21 Las mismas construcciones funcionan para tensores $(0,q)$, $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$, pero no funcionan para tensores (p,q) donde $p,q \neq 0$ porque las construcciones implican permutaciones.

1.6 Producto exterior

Observación 1.6.1 $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$, $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ y S_p, A_p s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$, $g \in S_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

Ejemplo 1.6.2
Sean ω_1, $\omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$:

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$, porque $S_1 = \{Id\}$.
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$.

Observación 1.6.3 El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

Observación 1.6.4 Lo haremos en $T_p(\mathbb{E})$, análogamente se hará en $T^q(\mathbb{E})$.

Definición 1.6.5 (producto exterior de orden 1)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v.; $\omega_1,\dots,\omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p!A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)$$

Observación 1.6.6

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \cancel{p!}\left(\frac{1}{\cancel{p!}}\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}\left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p\right)\right) =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\left(\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{s^{-1}(p)}\right) \overset{\varepsilon(s)=\varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)$$

Ejemplo 1.6.7
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \cdots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

Proposición 1.6.8
Sean $\omega_1, \ldots \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$

ii) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \left(\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}}\right) \wedge \cdots \wedge \omega_p = \alpha_i(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_p) + \beta_i(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \cdots \wedge \omega_p)$

iii) Sea $s \in \mathcal{S}_p$, $t = s^{-1}$, $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}\,(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p) = \varepsilon(s)\,(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$

iv) Si $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E}$, $(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)\,(u_1, \ldots, u_p) = det\,(\omega_j(u_i))$

v) Si $\omega_i = \omega_j, (i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$

vi) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ son l.i.

Demostración

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A\,(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in Im(A) \overset{visto}{=} A_p(\mathbb{E})$

ii) Ejercicio (misma proposición que $\otimes$)

iii) $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$ (Ejercicio, misma proposición que $\otimes$)

$$\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} \overset{1.6.5+1.6.6}{=} \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) =$$

$$\overset{\varepsilon^2(s)=1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r)\varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) \overset{rs=m \in \mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m)\left(\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)}\right) =$$

$$= \varepsilon(s)\,(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$$

iv)

$$\overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)(u_1, \ldots, u_p) =$$

$$\sum_{r \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)}(u_1) \ldots \omega_{r(p)}(u_p)\right) \overset{\text{def det}}{=} det(\omega_j(u_i))_{i,j}$$

v)

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \overset{iii}{=} (-1)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \implies$$
$$\implies 2\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) = 0 \overset{\text{car}\,\mathbf{k}\neq 2}{\implies} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$$

vi) $\implies$

Suponemos que son l.d. y que $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j$:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j\right) \overset{ii}{=} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_j\right) \overset{v}{=} 0 \text{ !!}$$

$\Longleftarrow$

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_p, \overbrace{\omega_{p+1}, \ldots, \ldots, \omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$ la base dual de B, tenemos que:

$$\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)\left(u_1, \ldots, u_p\right) \overset{iv}{=} det\left(\omega_j\left(u_i\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Observación 1.6.9 En el caso particular de $B = \{e_1, \ldots e_n\}$ base de $\mathbb{E}$,

$$I = \{i_1, \ldots i_p\}, \ 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n;$$
$$J = \{j_1, \ldots j_p\}, \ 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n.$$

$$\epsilon_{IJ} = \left(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*\right)\left(e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

En efecto, si $\exists j_k \in J$, $j_k \notin I$, entonces en virtud del cálculo dado por iv (1.6.8), en la posición k hay una fila de ceros.
Por otro lado, si $I = J$ entonces tenemos el determinante de la matriz identidad.
Observemos también que si $I = J$ pero no están ordenadas crecientemente, $\epsilon_{IJ} = \pm 1$ en función de las permutaciones que ordenan estos conjuntos.

Teorema (1.6.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de $\dim n$, sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y sea $p \leq n$.

i) $\dim A_p(\mathbb{E}) = \binom{n}{p}$.

ii) Una base de A_p es $\tilde{B} = \left\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*\right\}$, $i \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

iii) Si $w \in A_p(\mathbb{E})$, las coordenadas de w en la base anterior son:

$$\left(w\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\right)\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$$

Demostración

i) $ii \implies i$ trivialmente.

ii) L.I.: Sea

$$w = \sum_{\substack{I=\{i_1,\ldots,i_p\}\\ 1\le i_1<\cdots<i_p\le n}} \alpha_I e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* = 0.$$

Sea $I_0 = \{i_1^0, \ldots, i_p^0\}$ con $1 \le i_1^0 < \cdots < i_p^0 \le n$ cualesquiera. Entonces,

$$0 = w\left(e_{i_1^0}, \ldots, e_{i_p^0}\right) = \sum_{\substack{I=\{i_1,\ldots,i_p\}\\ 1\le i_1<\cdots<i_p\le n}} \alpha_I e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* \left(e_{i_1^0}, \ldots, e_{i_p^0}\right) \overset{1.6.9}{=} \alpha_{I_0}.$$

Generadores:

$$A_p(\mathbb{E}) = A(T_p(\mathbb{E})) = A_p\left(\left[e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}\right]_I\right) = \left[\left\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right\}_I\right] \overset{ii}{=} \left[\left\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right\}_{I \text{ ordenado}}\right].$$

iii) Sea $w \in A_p(\mathbb{E})$. Consideremos

$$\tilde{w} = \sum_{\substack{I=\{i_1,\ldots,i_p\}\\ 1\le i_1<\cdots<i_p\le n}} \left(w\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\right)\right) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*.$$

Veremos que $\tilde{w} = w$. Como tensores, basta ver que coinciden sobre vectores $\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\right)$. Como ambos son alternados, podemos suponer $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$. Entonces,

$$\tilde{w}\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\right) = w\left(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}\right).$$

Ejemplo 1.6.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

Espacio	dim	base	coordenadas
$A_1(\mathbb{E}) = T_1(\mathbb{E}) (= \mathbb{E}^*)$	3	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$	$w = (a_1, b_1, c_1)$
$A_2(\mathbb{E}) \subseteq T_2(\mathbb{E})$	3	$\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$	$w_1 \wedge w_2 = (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_2) e_1^* \wedge e_2^* + (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_3) e_1^* \wedge e_3^* + (w_1 \wedge w_2)(e_2, e_3) e_2^* \wedge e_3^*$
$A_3(\mathbb{E}) \subseteq T_3(\mathbb{E})$	1	$\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*\}$	$t = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = (t(e_1, e_2, e_3))$

Además, si $w_1 = (a_1, b_1, c_2)_{B^*}$, $w_2 = (a_2, b_2, c_2)_{B^*}$ y $w_3 = (a_3, b_3, c_3)_{B^*}$

$$w_1 \wedge w_2 = \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_2) \\ w_2(e_1) & w_2(e_2) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_3) \\ w_2(e_1) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} w_1(e_2) & w_1(e_3) \\ w_2(e_2) & w_2(e_3) \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*) =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_3^*) + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} (e_2^* \wedge e_3^*)$$

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3)(e_1, e_2, e_3)(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)$$

Observación 1.6.12 De forma análoga, podemos hacer el producto exterior de tensores 1-contravariantes ($T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$) y obtendremos $A^p(\mathbb{E})$ con dimensión $\binom{n}{p}$ y base $\left\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right\}_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n}$ si $B = \{e_i, \ldots, e_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.

Definición 1.6.13
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$ y $g \in A_q(\mathbb{E})$. Definimos el producto exterior de f y g como

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(f \otimes g)$$

Proposición 1.6.14
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_q(\mathbb{E})$ y $h \in A_r(\mathbb{E})$.

i) $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

ii) $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$

iii) $\wedge$ es lineal en cada factor.

Observación 1.6.15 $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_r = w_1 \wedge (w_2 \wedge (\cdots w_{r-1} \wedge (w_r)))$

Ejemplo 1.6.16
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $f, g \in A_2(\mathbb{E})$

- $f = e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*$
- $g = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$

$$f \wedge g = (e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*) \wedge (e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*) =$$
$$= \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} +$$
$$+ e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \cancelto{0}{e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} = e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$$

2 Geometría Proyectiva

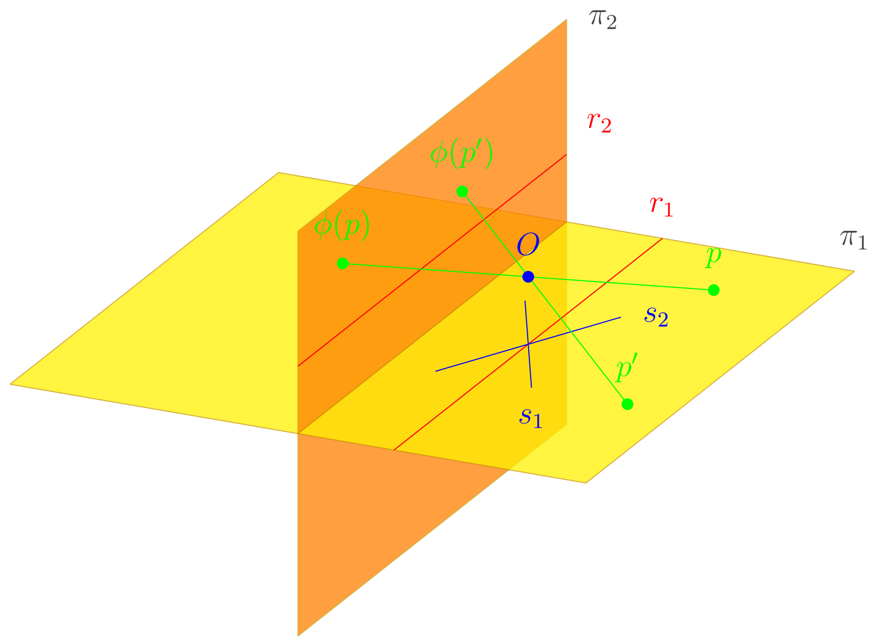
2.1 Contexto e idea

Segun el programa de Erlegen, una geometría se basa en el estudio de invariantes al aplicar unas ciertas transformaciones. Así tenemos que las geometrías estan "incluidas" en las superiores.

Así, la geometría euclidea, que estudia las transformaciones ortogonales, estaría "incluída" en la geometría afín, que estudia las tansformaciones lineales. Aquí se muestra una tabla con las distintas geometrías en la cual cada una esta "incluída" en la anterior

Geometría	Transformaciones de estudio
G. euclídea	transformaciones ortogonales
G. afín	transformaciones lineales
G. proyectiva	proyectividades
G. Algebraica	transformaciones por polinomios
G. Analítica	transformaciones por funciones analíticas
G. Diferencial	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$
Topología	transformaciones por funciones de clase $\mathcal{C}^0$

2.1.1 Problema matemático



La idea básica del problema es enviar los puntos de π_1 a π_2 mediante la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon \pi_1 &\to \pi_2 \\ p &\mapsto \overline{pO} \cap \pi_2 \end{aligned}$$

Observación 2.1.1

i) ϕ manda rectas a rectas

ii) ϕ no esta definida en r_1

iii) r_2 no esta en la imagen de ϕ

iv) $\phi(s_1)$ y $\phi(s_2)$ son pararelas, por lo tanto, ϕ no mantiene el paralelismo

v) ϕ no mantiene el tipo de cónica afín

Veremos que la solucion para ii y iii consistirá en añadir puntos en el ∞.

2.2 Definición y caracterizaciones del espacio proyectivo

Definición 2.2.1
Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo, $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de $\dim n+1$. El espacio proyectivo asociado a $\mathbb{E}$ es

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}) = \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\}$$

Diremos que $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ tiene dimensión n.

Observación 2.2.2 Se cumple $\mathbb{P}(\mathbb{E}) = (\mathbb{E} \setminus \{0\})/\sim$, donde $v \sim v' \iff \exists \lambda \neq 0,\ v' = \lambda v$ para $v, v' \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$.

Definición 2.2.3
Tenemos la siguiente aplicación π dada por el paso al cociente.

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{E} \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}(\mathbb{E}) \\ v &\mapsto \pi(v) = [v] \\ \{\text{s.e.v. de } \dim 1 \text{ de } \mathbb{E}\} &\leftrightarrow [v] \end{aligned}$$

Definición 2.2.4
A los elementos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$ los llamaremos puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{E})$.

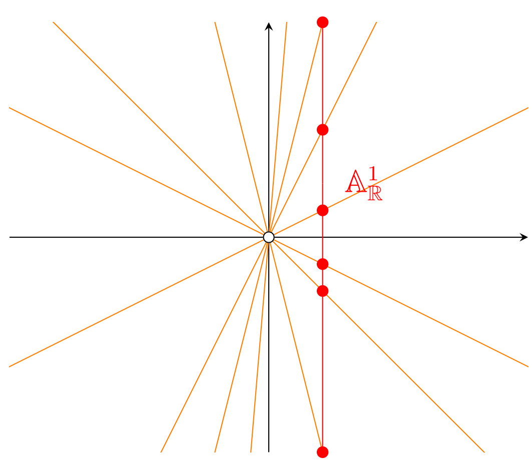
$$p = \pi(v) = [v]$$

Observación 2.2.5

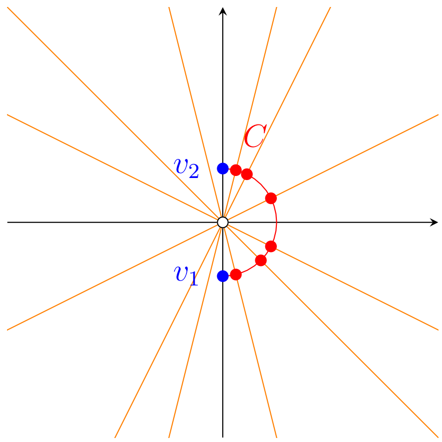
- Si $\mathbb{E}$ no es relevante, $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$.
- Si queremos remarcar $\mathbf{k}$, $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \mathbb{P}(\mathbb{E})$.
- Normalmente $\mathbb{P} + \mathbf{k}^n = \mathbb{P}(\mathbf{k}^{n+1}) = (\mathbf{k}^{n+1} \setminus 0)/\sim$.

Ejemplo 2.2.6

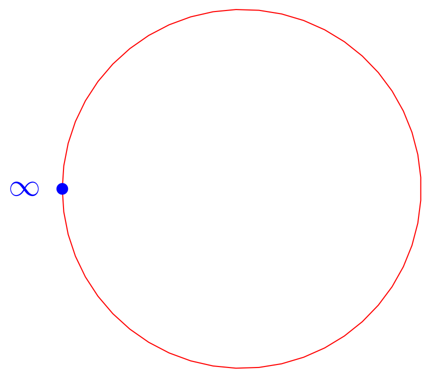
1. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.



Cada objeto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ (rectas en naranja) tiene su equivalente en $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ (puntos en rojo), a excepción de la recta $x = 0$. Para solucionar este problema, podemos usar la siguiente representación



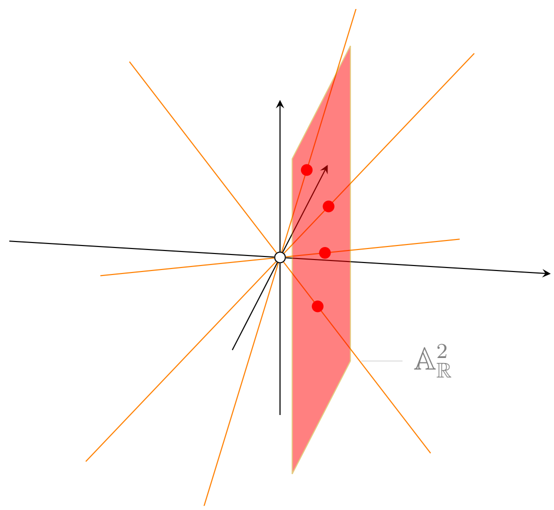
Pero el problema ahora viene por que v_1 y v_2 corresponden al mismo elemento de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Lo podemos solucionar de la siguiente forma:



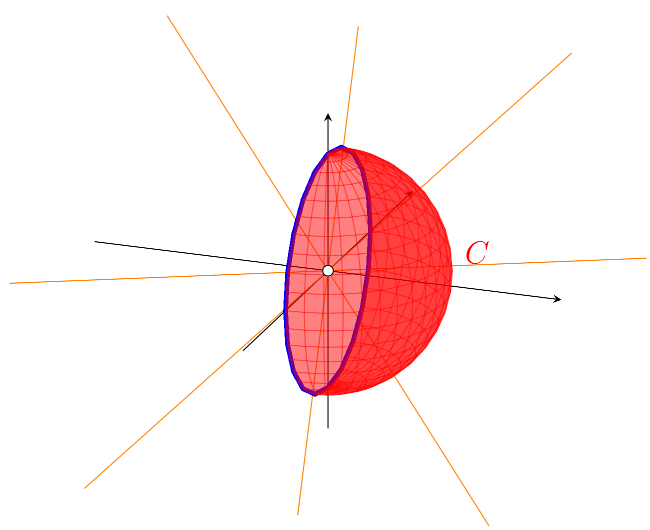
De tal forma que

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = C/(v_1 \sim v_2)$$

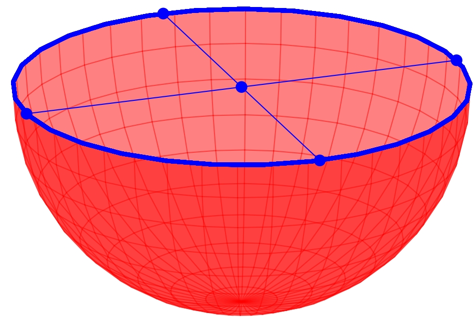
2. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.



Cada objeto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (rectas en naranja) tiene su equivalente en $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (puntos en rojo), a excepción de las rectas del plano $x = 0$. Para solucionar este problema, procedemos de manera análoga a 1

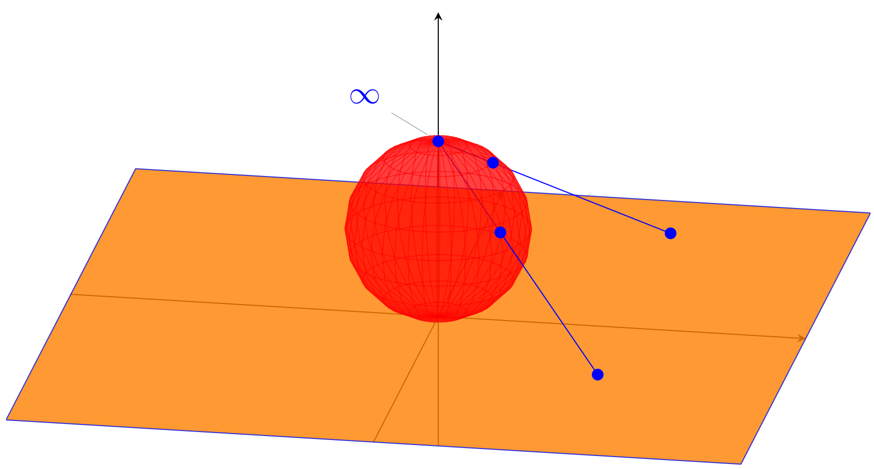


De nuevo, nos encontramos con el problema de que hay elementos de C (en azul) que se corresponden con el mismo elemento de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, No obstante, podemos visualizarlo como



Y unir los puntos azules antipolares. Aunque, si lo tratamos de imaginar, este objeto, no cabe en $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^2 \setminus 0)/\sim\, = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. Las igualdades por el momento son por analogía o intuición, más adelante se demostrarán. Aunque nos podemos hacer una idea basandonos en la proyección estereográfica



4. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Z}/2}$ contiene 7 puntos pues las rectas de $\mathbb{Z}^3$ solo contienen el 0 y un punto.

Observación 2.2.7 Hemos enunciado la definición algebraica de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Existe una definición axiomática que no es igual en algunos casos patológicos.

2.3 Variedades lineales proyectivas

Definición 2.3.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimensión $n+1$, sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Llamaremos variedad lineal (proyectiva) de dimensión r a cualquier conjunto de la forma:

$$V = \pi(H \setminus \{0\})$$

donde $H \subseteq \mathbb{E}$ es un subespacio vectorial de dimensión $r+1$.

Por convención defnimos la siguiente notación:

$$V = \pi(H \setminus \{0\}) = \pi(H)$$

Ejemplo 2.3.2

- $\mathbb{P}^n = \pi(\mathbb{E})$ es una variedad lineal de dimensión n.
- $p \in \mathbb{P}^n$, $p = \pi(v) = \pi([v])$ es una varidead lineal de dimensión 0.
- $\emptyset = \pi(\emptyset_{\mathbb{E}})$ es una variedad lineal de dimensión -1.

Definición 2.3.3

- $\dim V = 1 \longrightarrow$ Recta
- $\dim V = 2 \longrightarrow$ Plano
- $\dim V = n-1 \longrightarrow$ Hiperplano

Lema 2.3.4 $V = \pi(H \setminus \{0\}) \iff H \setminus \{0\} = \pi^{-1}(V)$

Ejercicio 2.3.5
Demostrar el lema anterior.

Observación 2.3.6 Hay una biyección

$$\{\text{s.e.v. de } \mathbb{E}\} \underset{\pi^{-1}}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \{\text{variedades lineales de } \mathbb{P}(\mathbb{E})\}$$

- con dimension $r+1 \leftrightarrow r$
- $H_1 \subseteq H_2 \iff V_1 \subseteq V_2$ con $V_i = \pi(H_i)$
- Las operaciones $+$ y $\cap$ definidas para subespacios, se definen a traves de esta biyección a variedades.

Proposición 2.3.7
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales $\implies V_1 \cap V_2$ variedad lineal que verifica:

- $V_1 \cap V_2 \subseteq V_1, V_2$
- Si W variedad lineal, $W \subseteq V_1, V_2$ i $W \subseteq V_1 \cap V_2$

Demostración
Veamos que: $V_1 \cap V_2 = \pi(H_1 \cap H_2)$ si $V_i = \pi(H_i)$
$\supseteq$

$$\text{Si } v \in H_1 \cap H_2, p = [v] \in \pi(H_1), \pi(H_2) \implies p \in V_1 \cap V_2$$

$\subseteq$

$$\text{Sea } p \in V_1 \cap V_2, \left.\begin{matrix} p = [v_1], v_1 \in H_1 \\ p = [v_2], v_2 \in H_2 \end{matrix}\right\} \implies [v_1] = [v_2] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ t.q. } v_2 = \lambda v_1 \implies$$
$$\implies v_2 \in H_1 \implies v_2 \in H_1 \cap H_2 \implies p = [v_2] \in \pi(H_1 \cap H_2)$$

El resto sigue de lo que sabemos de s.e.v.s.

Definición 2.3.8
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales, $V_i = \pi(H_i)$, definimos *join* o variedad lineal generada como:

$$V_1 \vee V_2 = \pi(H_1 + H_2)$$

Proposición 2.3.9

- $V_1, V_2 \subseteq V_1 \vee V_2$
- Sea W una variedad lineal, $V_1, V_2 \subseteq W \implies V_1 \vee V_2 \subseteq W$

Demostración
Propiedades de la suma de s.e.v.

Proposición 2.3.10
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales:

- $V_1 \subseteq V_2 \implies \dim(V_1) \leq \dim(V_2)$
- Si $V_1 \subseteq V_2$ y $\dim(V_1) = \dim(V_2) \implies V_1 = V_2$

Proposición 2.3.11 Fórmula de Grassmann

$$\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demostración
Propiedades s.e.v.

Ejemplo 2.3.12

1. $\mathbb{P}^2$ $\quad V_1, V_2$ rectas, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 2$	Posición relativa
0	2	Se cortan en un punto
1	1	Son la misma recta

Por tanto, dos rectas en un plano, o se cruzan o son la misma.

2. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1, V_2$ rectas, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 2$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$1 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
-1	3	Se cruzan
0	2	Se cortan en un punto ($V_1 \vee V_2 \cong \mathbb{P}^2$)
1	1	Son la misma recta

3. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1, V_2$ planos, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 4$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
1	3	Se cortan en una recta
2	2	Son el mismo plano

4. $\mathbb{P}^3$ $\quad V_1$ plano, V_2 recta, tenemos que $\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 \vee V_2) = 3$ (Grassmann).

$\dim(V_1 \cap V_2)$	$2 \leq \dim(V_1 \vee V_2) \leq 3$	Posición relativa
0	3	Se cortan en un punto
1	2	$V_2 \subseteq V_1$

Proposición 2.3.13
Sean $p \in \mathbb{P}^n, r, V, H \subseteq \mathbb{P}^n$ (recta, variedad lineal, hiperplano, respectivamente).

1. $\dim(V \vee p) = $ ó $\begin{cases} \dim V & (\iff p \in V) \\ \dim V + 1 & (\iff p \notin V) \end{cases}$

2. $\dim(r \vee H) = $ ó $\begin{cases} 1 & (\iff r \subseteq H) \\ 0 & (\iff r \nsubseteq H) \end{cases}$

Demostración
Fórmula de Grassmann.

Definición 2.3.14
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n, (V_i = \pi(H_i)$ variedades lineales, V_1 y V_2 son suplementarias $\iff$ H_1 y H_2 son complementarios.

Observación 2.3.15 V_1, V_2 suplementarias $\iff H_1 \oplus H_2 = \mathbb{E} \iff \left\{\begin{matrix} (1) & H_1 + H_2 = \mathbb{E} \\ (2) & H_1 \cap H_2 \end{matrix}\right\} \iff$
$\begin{cases} (1) & V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \\ (2) & V_1 \cap V_2 = \emptyset \end{cases}$

Proposición 2.3.16
Sean $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ variedades lineales:

1. V_1, V_2 son suplementarias $\implies \dim V_1 + \dim V_2 = n - 1$

2. Si $\dim V_1 + \dim V_2 = n-1$

$$V_1, V_2 \text{ suplementarias} \iff V_1 \vee V_2 = \mathbb{P}^n \iff V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Demostración

1. V_1, V_2 suplementarias $\iff H_1, H_2$ complementarios $\implies \overbrace{\dim H_1}^{\dim V_1+1} + \overbrace{\dim H_2}^{\dim V_2+1} = \dim \mathbb{E} = n+1$

2. Fórmula de Grassmann.

Definición 2.3.17
Sea $\mathbb{P}^n = \mathbb{R}(\mathbb{E})$, y sean $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{P}^n$ tal que $p_i = [v_i], v_i \in \mathbb{E}$, decimos que $p_0, \ldots, p_m$ son linealmente independientes (l.i.) $\iff v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{E}$ son linealmente independientes.

Observación 2.3.18 La independencia lineal no depende de los representantes elegidos.

Ejemplo 2.3.19
$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$. Sean $p_0 = [(1,1,0)], p_1 = [(0,1,1)], p_2 = [(2,3,1)]$. Entonces p_0 y p_1 son l.i., pero p_0, p_1, p_2 son l.d..

Proposición 2.3.20
Sean $p_0, \ldots, p_m \in \mathbb{P}^n$ puntos y $V \subseteq \mathbb{P}^n$ una variedad lineal:

1. $\dim(p_0 \vee \cdots \vee p_m) \leq m$

2. $\dim(p_0 \vee \cdots \vee p_m) = m \iff p_0, \ldots, p_m$ son l.i.

3. $\dim V = m \iff \exists p_0, \ldots, p_m \in V$ tal que $V = p_0 \vee \cdots \vee p_m \iff \forall p_0, \ldots, p_m \in V$ l.i., $V = p_0 \vee \cdots \vee p_m$

Demostración
Inmediata a partir de propiedades de s.e.v..

Definición 2.3.21
$p_0, \ldots, p_r \in \mathbb{P}^n (r \geq n)$ estan en posición general $\iff n+1$ puntos cualesquiera de ellos son l.i..

2.4 Sistemas de referencia proyectivos. Coordenadas proyectivas

Observación 2.4.1 $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$. Sea $B = \{v_0, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{E}$:

$$p = [v] = [\lambda v] \qquad (v)_B = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (\lambda v)_B = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vemos que las coordenadas estarían definidas salvor por multiplicar por λ.

Definición 2.4.2
$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$

1. Un sistema de referencia proyectivo en $\mathbb{P}^n$ es:

$$R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$$

   Donde $p_0, \dots, p_n, \bar{p}$ estan en posición general.

   - $\{p_0, \dots, p_n\}$ son los vertices de R
   - $\bar{p}$ es el punto unidad

2. Fijado un sistema de referencia R. Sea $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ base de $\mathbb{E}$. Diremos que B esta adaptada a R si y solo si:

$$\begin{cases} p_i = [u_i], \forall i = 0, \dots, n \\ \bar{p} = [u_0 + \cdots + u_n] \end{cases}$$

3. *Asignación de coordenadas proyectivas*
   $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{E})$, Sea $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$, y $B = \{u_0, \dots, u_n\}$ una base adaptada. Sea $q \in \mathbb{P}^n, q = [v]$, entonces $q_R = v_B$. (Cale ver que la definición es consistente)

Proposición 2.4.3
Sea R un sistema de referencia en $\mathbb{P}^n$. Sean $B_1 = \{u_0, \dots, u_n\}, B_2 = \{u'_0, \dots u'_n\}$ bases adaptadas a R. Sea $q = [v] \in \mathbb{P}^n$, entonces $\exists \lambda \neq 0$ tal que $v_{B_2} = v_{B_1}$.

Demostración
$p_i = [u_i] = [u'_i], \forall i = 0, \dots, n$. Por tanto, $\exists \lambda \neq 0$ tal que $u'i = \lambda_i u_i, \forall i = 1, \dots, n$. Por otro lado,

$$\bar{p} = [u_0 + \cdots + u_n] = [u'_0 + \cdots + u'_n] \implies \exists \lambda \neq 0 \text{ tal que } u'_0 + \cdots + u'_n =$$
$$= \lambda_0 u_0 + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda(u_0 + \cdots + u_n) \overset{B_1 \text{ base}}{\Longrightarrow} \lambda_i = \lambda \forall i = 1, \dots, n$$

Observación 2.4.4 $R = \{p_0, \dots, p_n; \bar{p}\}$ en $\mathbb{P}^n$

1. $q \in \mathbb{P}^n, q_R = (a_0, \dots, a_n) = \lambda(a_0, \dots, a_n) \overset{\text{notación}}{=} (a_0 : \cdots : a_n) \forall \lambda \neq 0$

2. Ejemplos:
   $(p_0)_R = (1 : 0 : \cdots : 0)$
   $\vdots$
   $(p_n)_R = (0 : \cdots : 0 : 1)$

3. $q_R = (0 : \cdots : 0)$ no existe.

4. Sea $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3), R = \{p_0, p_1, p_2; \bar{p}\} = \{[(1,1,0)],[(1,0,1)],[(0,1,1)];[(3,3,2)]\}$, entonces $B = \{[(1,1,0)],[(1,0,1)],[(0,1,1)]\}$ no es una base adaptada, para que lo sea, debemos multiplicar v_0, v_1, v_2 por $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tales que $\bar{p} = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$. En este caso:
$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 3 \\ \lambda_0 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = 2 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$
Y el sistema de referencia con la base B adaptada es:
$$R' = \{[(2,2,0)],[(1,0,1)],[(0,1,1)];[(3,3,2)]\}$$

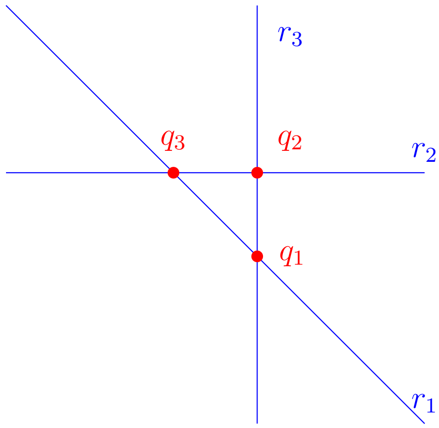
Proposición 2.4.5
Sean $H_0, \dots, H_m \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplanos, entonces
$$H_0, \dots, H_m \text{ l.i.} \iff dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m) = n - m - 1$$

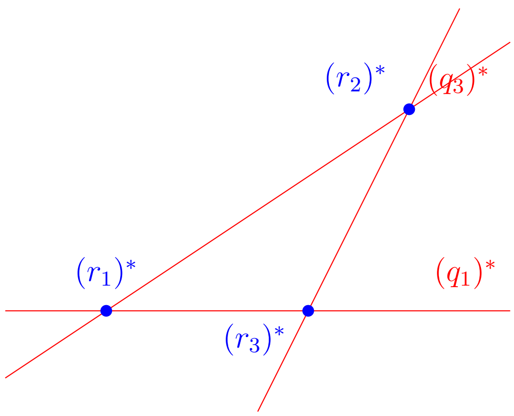
Demostración
$H_0, \dots, H_m$ l.i $\overset{def}{\iff}$ $H_0^*, \dots, H_m^* \in (\mathbb{P}^n)^*$ son l.i. $\iff$ $dim(H_o^* \vee \cdots \vee H_m^*) = m \iff dim(H_o^* \vee \cdots \vee H_m^*)^* = n - m - 1 = dim(H_0 \cap \cdots \cap H_m)$

Definición 2.4.6
Una recta (o haz) de hiperplanos en $\mathbb{P}^n$ es la colección de hiperplanos que contienen a una variedad fijada V de dimensión $n-2$.

Ejemplo 2.4.7 Dualizacion del triángulo

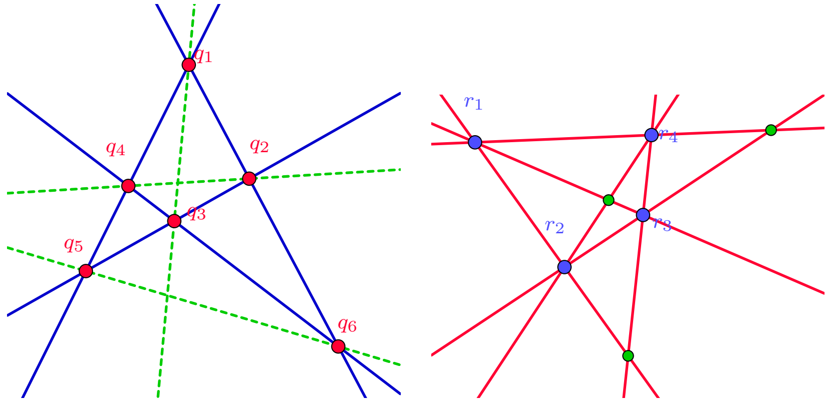
Triángulo en $\mathbb{P}^2$ Triángulo en $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$





Ejemplo 2.4.8

Cuadrilátero en $\mathbb{P}^2$ Cuadrilátero en $\left(\mathbb{P}^2\right)^*$



Definición 2.4.9
Sea $\mathcal{R} = \{p_0, \ldots, p_n; \bar{p}\}$ una referencia de $\mathbb{P}^n$, sea $B = \{u_0, \ldots, u_n\}$ una base adaptada y sea $B^* = \{u_0^*, \ldots, u_n^*\}$ su base dual. Entonces, llamamos referencia dual de $\mathcal{R}$ a

$$\mathcal{R}^* = \{p_0' = [u_0^*], \ldots, p_n' = [u_n^*]; \bar{p}' = [u_0^* + \cdots + u_n^*]\}$$

Observación 2.4.10 $\mathcal{R}^*$ no depende de la base B escogida.

Ejemplo 2.4.11
En coordenadas, sea $p \in \mathbb{P}^n$ y sea $p_{\mathcal{R}} = (a_0, \ldots, a_n)$, entonces p^* es un hiperplano de $(\mathbb{P}^n)^*$ y, en referencia $\mathcal{R}^*$ se tiene

$$p^* \equiv a_0 x_0' + \cdots + a_n x_n' = 0$$

Y si $H \subseteq \mathbb{P}^n$ en referencia $\mathcal{R}$

$$\mathbb{P}^n \supseteq H \equiv b_0 x_0 + \cdots + b_n x_n = 0$$

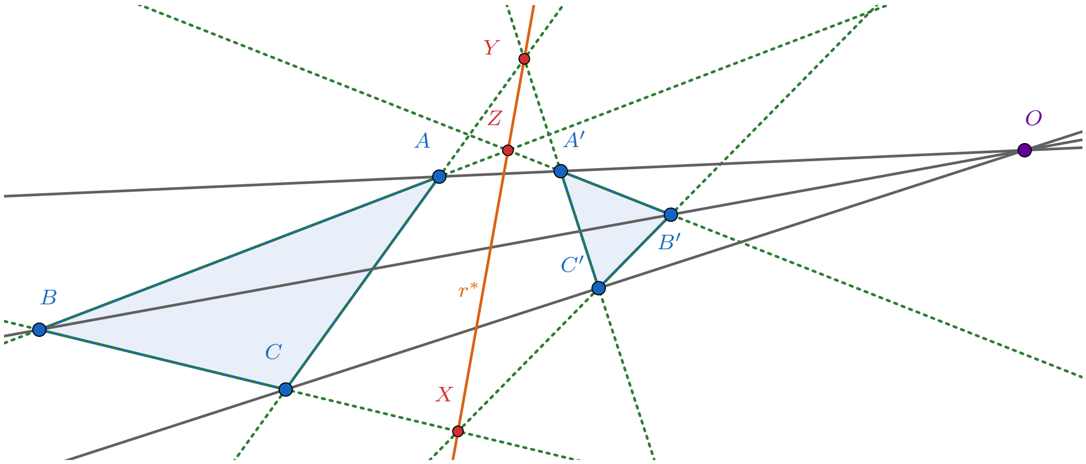
entonces $(H^*)_{\mathcal{R}^*} = (b_0, \ldots, b_n)$

Observación 2.4.12 En general, si tenemos $\mathcal{R}$ una referencia de $\mathbb{P}^n$ y $\mathcal{R}^* = \{{p_0}', \ldots, {p_n}'; \bar{p}'\}$ una refencia de $(\mathbb{P}^n)^*$. Entonces $({p_i}')^*$ es un hiperplano tal que $\pi \notin ({p_i}')^*$ y $p_j \in ({p_i}')^*$ $\forall i \neq j$

2.5 Los teoremas de Desargues y Pappus

Teorema de Desargues (2.5.1)
Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en $\mathbb{P}^2$ (sin vértices ni lados en común). Entonces,

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset \iff \begin{cases} AB \cap A'B' = Z \\ AC \cap A'C' = Y \\ BC \cap B'C' = X \end{cases} \quad \text{están alineados.}$$



Demostración

$\implies$ Analítica

$R = \{A, B, C; O\}$, es un sistema de referencia porque todos los puntos son linealmente independientes.

- A, B, C linealmente independientes (ABC triangulo)
- A, B, O linealmente independientes (si no, $AB = A'B'$)
- B, C, O linealmente independientes (si no, $BC = B'C'$)
- C, A, O linealmente independientes (si no, $AC = A'C'$)

Tenemos que

- $A' \in AO : x_1 - x_2 = 0$ i $A \neq A' \implies A' = (a : 1 : 1)$
- $B' \in BO : x_0 - x_2 = 0$ i $B \neq B' \implies B' = (1 : b : 1)$
- $C' \in CO : x_0 - x_1 = 0$ i $C \neq C' \implies C' = (1 : 1 : c)$

$$Z : \left\{ \begin{aligned} &AB : x_2 = 0 \\ &A'B' : 0 = \begin{vmatrix} a & 1 & x_0 \\ 1 & b & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} x_0(1-b) - x_1(a-1) = x_0(1-b) + x_1(1-a) = 0 \implies$$

$$\implies Z = (a-1 : 1-b : 0).$$

Análogamente, $X = (0 : b-1 : 1-c), Y = (a-1 : 0 : 1-c)$. Vemos que $Z - X = Z \implies X, Y, Z$ no son linealmente independientes $\iff X, Y, Z$ están alineados.

$\implies$ Sintética

$\overbrace{\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{E})}^{\pi \text{ plano en } \mathbb{P}^3} \subset \mathbb{P}(\bar{\mathbb{E}}) = \mathbb{P}^3, \bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \times \mathbf{k}$

Sea r una recta en $\mathbb{P}^3$, $r \nsubseteq \pi$, tal que $r \cap \pi = O$. Sean $p, p' \in r, p \neq p', p, p' \neq O$. r y AA' son coplanarias $\implies pA \cap p'A' = A_0$ (intersección de rectas en un plano). Análogamente, $\begin{cases} pB \cap p'B' = B_0 \\ pC \cap p'C' = C_0 \end{cases}$.
Por construcción,

$$\begin{matrix} pA_0 \cap \pi = A, & pB_0 \cap \pi = B, & pC_0 \cap \pi = C \\ p'A_0 \cap \pi = A', & p'B_0 \cap \pi = B', & p'C_0 \cap \pi = C' \end{matrix}$$

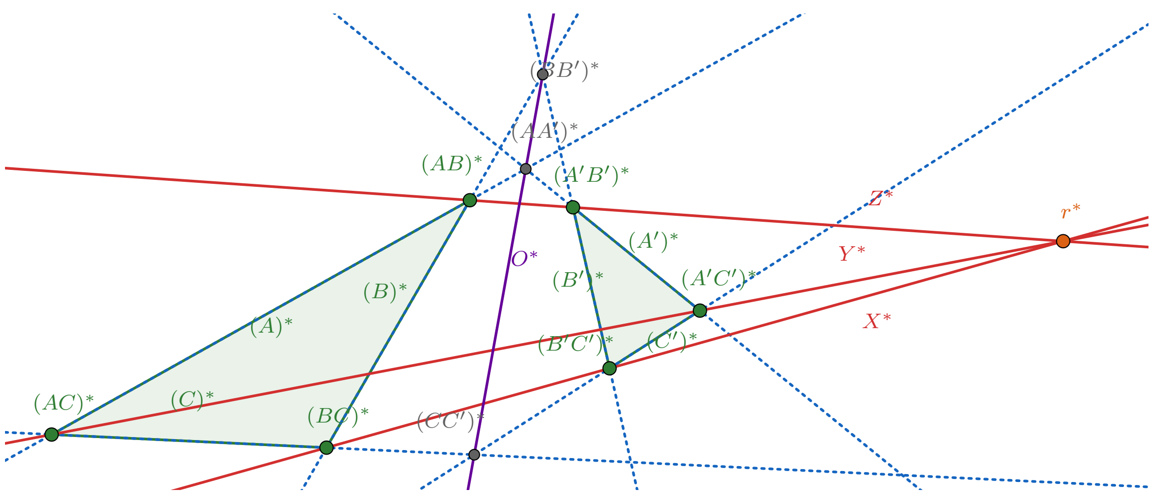
A_0, B_0, C_0 son linealmente independientes (forman un triángulo). Si estuvieran alineados, $T = A_0 \vee B_0 \vee C_0 \implies A, B, C \in \pi \cap (p \vee t)$ estarían alineados.
Finalmente,

$$Z = AB \cap A'B' = \pi \cap ((A_0 \vee B_0 \vee p) \cap (A_0 \vee B_0 \vee p')) \underset{\text{planos distintos}}{\overset{\text{intersección de}}{=}} \pi \cap (A_0 \vee B_0)$$

Análogamente, $Y = \pi \cap (A_0 \vee C_0)$ y $X = \pi \cap (B_0 \vee C_0)$. Entonces, $X, Y, Z \in \pi \cap (A_0 \vee B_0 \vee C_0)$ (que es una recta porque es la intersección de dos planos distintos).

$\Longleftarrow$ Dualidad
Hipotésis: X, Y, Z están alineados.

Consideramos el espacio proyectivo dual y dualizamos las hipótesis:



Queremos ver que, en efecto, $(AA')^*, (BB')^*, (CC')^*$ están alineados. Por la primera implicación, $\exists s \subset (\mathbb{P}^2)^*$ recta tal que:

$$\begin{aligned} s &= \left[[(AB)^* \vee (AC)^*] \cap \left[(A'B')^* \vee (A'C')^* \right] \right] \vee [\dots] \vee [\dots] \\ &= \left[(AB \cap AC)^* \cap (A'B' \cap A'C')^* \right] \vee [\dots] \vee [\dots] \\ &= (A^* \cap (A')^*) \vee (B^* \cap (B')^*) \vee (C^* \cap (C')^*) \\ &= (AA')^* \vee (BB')^* \vee (CC')^* \end{aligned}$$

$$s = (AA' \cap BB' \cap CC')^* \implies AA' \cap BB' \cap CC' = s^* \text{ (un punto)}$$

Observación 2.5.2 El teorema de Desargues es su propio dual: $(\implies) \iff (\impliedby)$.

Observación 2.5.3 Definición axiomática de $\mathbb{P}^2$

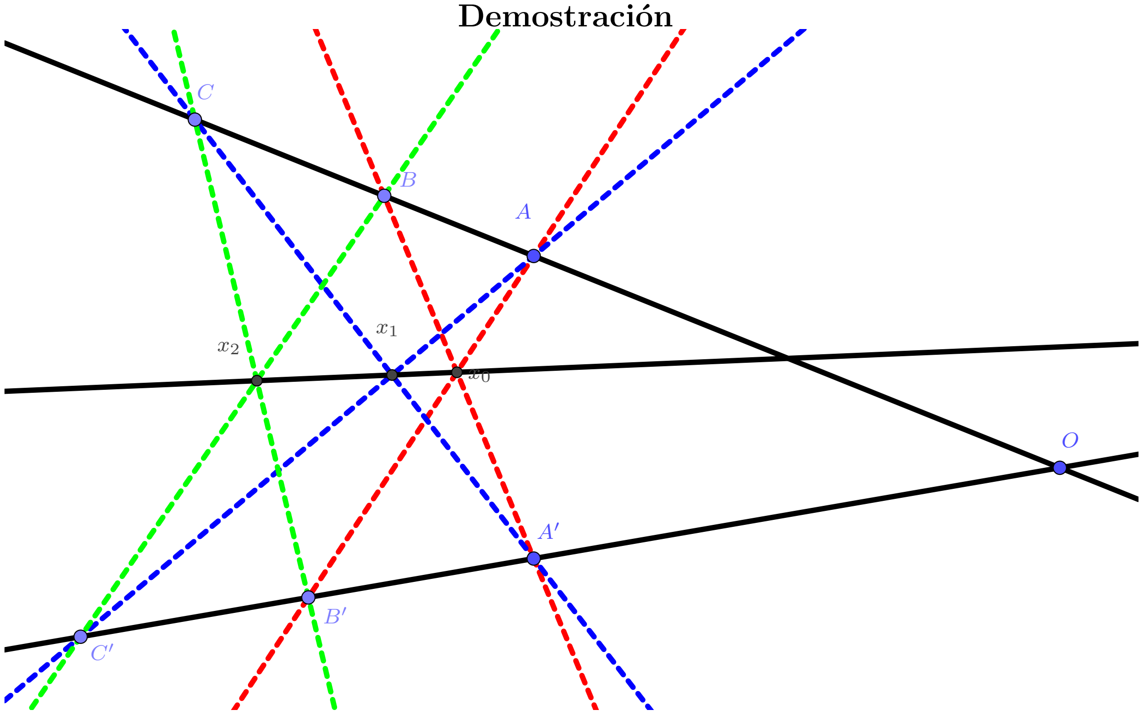
- $X \to$ puntos
- $Y \to$ rectas

Hay una relación de pertenencia entre puntos y rectas (los puntos pertenecen a rectas). Axiomas:

- $\forall p_1, p_2, \exists! r$ tal que $p_1, p_2 \in r$
- $\forall r_1, r_2, \exists! p$ tal que $p \in r_1, r_2$
- $\exists 4$ puntos no alineados

Teorema de Pappus (2.5.4)
Sean $r, s \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ rectas diferentes ($r \neq s$), sean $A, B, C \in r$ tal que $A \neq B$, $B \neq C$ y $C \neq A$ y sean también $A', B', C' \in s$ tal que $A' \neq B'$, $B' \neq C'$ y $C' \neq A'$. Entonces $x_0 \equiv AB' \cap A'B$, $x_1 \equiv AC' \cap A'C$ y $x_2 \equiv BC' \cap B'C$ estan alineados.

Demostración



Tomamos la referencia $\mathcal{R} = \{A, B, A'; B'\}$. Entonces

$$\begin{array}{ll} A = (1,0,0) & A' = (0,0,1) \\ B = (0,1,0) & B' = (1,1,1) \\ C = (1,a,0) & C' = (1,1,b) \end{array}$$

con $a, b \neq 0$. Calculamos ahora x_0, x_1 y x_2 y vemos que

$$\begin{vmatrix} \rule{1.5em}{0.4pt} & x_0 & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & x_1 & \rule{1.5em}{0.4pt} \\ \rule{1.5em}{0.4pt} & x_2 & \rule{1.5em}{0.4pt} \end{vmatrix} = 0$$

2.6 Coordenadas absolutas. Razón doble

Definición 2.6.1
Sea $\mathcal{R} = \{p_0, p_1; \bar{p}\}$ un sistema de referencia de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ y sea $q \in \mathbb{P}^1_k$ con $q_{\mathcal{R}} = (x_0, x_1)$ las coordenadas de q en la referencia $\mathcal{R}$. Definimos las coordenas absolutas de q como

$$\alpha = \frac{x_0}{x_1} \in k \cup \{\infty\}$$

Observación 2.6.2 A diferencia de las coordenadas normales, **NO** está definido salvo constantes.

Observación 2.6.3 Al trabajar con coordenadas absolutas, trabajaremos con aritmética normal de $0/\infty$.

Observación 2.6.4

$$\begin{aligned} (p_0)_{\mathcal{R}} &= (1,0) \qquad & \alpha_0 &= \infty \\ (p_1)_{\mathcal{R}} &= (0,1) \qquad & \alpha_1 &= 0 \\ (p_2)_{\mathcal{R}} &= (1,1) \qquad & \alpha_2 &= 1 \end{aligned}$$

Definición 2.6.5
Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ con al menos 3 de ellos diferentes. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia y sean $(q_i)_{\mathcal{R}} = (x_i : y_i)$ $\forall i = 1,2,3,4$. Definimos la razón doble de q_1, q_2, q_3, q_4 como

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

Observación 2.6.6 La razón doble no depende del sistema de referencia ni del representante de cada punto. De hecho, sean $\mathcal{R}$ y $\bar{\mathcal{R}}$ dos sistemas de referencia y $q_i = (x_i, y_i)_{\mathcal{R}} = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)_{\bar{\mathcal{R}}}$, por lo tanto

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

y se tiene que

$$\frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_3 & \bar{y}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}_4 & \bar{y}_4 \\ \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{x}_4 & \bar{y}_4 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\cancel{\det S}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Observación 2.6.7 La razón doble es cociente de razones simples

Observación 2.6.8 En coordenadas absolutas, si

$$\begin{array}{lll} q_1 & \alpha_1 & (\alpha_1 : 1) \\ q_2 & \alpha_2 & (\alpha_2 : 1) \\ q_3 & \alpha_3 & (\alpha_3 : 1) \\ q_4 & \alpha_4 & (\alpha_4 : 1) \end{array}$$

teniendo en cuenta que $(\infty, 1) = (1, 0)$. emtonces,

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_1 & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_4 & 1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}$$

Observación 2.6.9 Sean $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ tal que $\{q_1, q_2, q_3\}$ son diferentes dos a dos. Tomamos $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$ como nuestro sistema de referncia y sean $(x, y)_{\mathcal{R}} = q_4$ las coordenadas de q_4 en el sistema de referencia $\mathcal{R}$, entonces

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} : \frac{-y}{x} = \frac{x}{y}$$

es decir, la coordenada obsoluta de q_4 en la referencia $\mathcal{R} = \{q_1, q_2; q_3\}$.