Def: Una integral impropia $\int_a^b f$ es diu <u>absolutament convergent</u> quan

$$\int_a^b |f| \text{ és convergent}$$

Prop:

Si $\int_a^b f$ és absolutament convergent, és convergent.

Dem

Apliquem el criteri de Cauchy a $\int_a^b |f|$

$$\forall \varepsilon \quad \exists c_0 \text{ tq } a < c_0 \leq c_1 < c_2 < b \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} |f| < \varepsilon$$

[foto Terese

Def: Una integral impropia convergent però no absolutament convergent es diu <u>condicionalment convergent.</u>

INTEGRALS DE FUNCIONS POSITIVES

Sigui $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b \leq +\infty)$

localment integrable i positiva $(f \geq 0)$

Aleshores, la funció $F: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f \quad \text{és creixent.}$$

Per tant $\exists$ el límit:

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup_{a \le x < b} F(x)$$

$$\| $$

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f = \int_a^b f$$

que pot ser finit si F és fitada (int. imp. convergent)

o infinit si F no és fitada (" " divergent)

Prop (criteri de comparació directa)

Siguin $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ positives i localment integrables.

Si $f \le g$ aleshores $\int_a^b f \le \int_a^b g$

Per tant si la segona convergeix, la primera també,

i si la primera divergeix, la segona també.

dem

$$f \le g \Rightarrow \int_a^x f \le \int_a^x g \Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to b^-} \int_a^x f}_{= \int_a^b f} \le \underbrace{\lim_{x \to b^-} \int_a^x g}_{= \int_a^b g}$$

Prop: (criteri de comparació en el límit)

Sigui $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictament positives i localment integrables. Suposem que $\exists$ el límit:

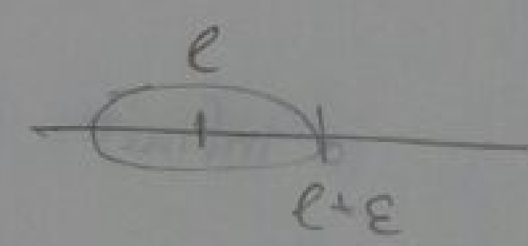
$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in [0, +\infty]$$

- Si $l < +\infty$ i $\int_a^b g < +\infty$ aleshores $\int_a^b f < +\infty$
- Si $l > 0$ i $\int_a^b f < +\infty$ aleshores $\int_a^b g < +\infty$
- Si $0 < l < +\infty$ ambdues integrals tenen el mateix caràcter.

dem

1) Fixada $\varepsilon > 0$, existeix x_0 amb $a \leq x_0 < b$ tq:

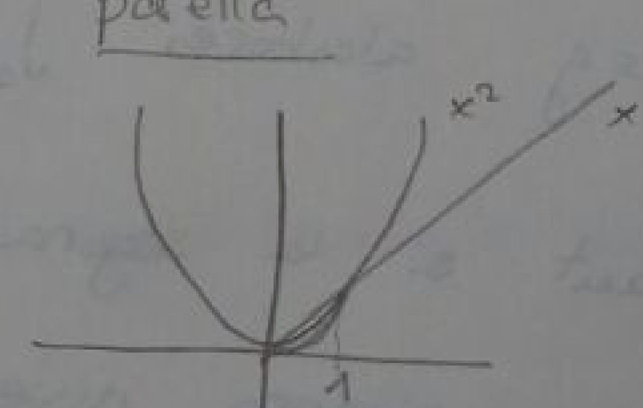
$$x_0 \leq x < b \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$$



$\Rightarrow f(x) < (l+\varepsilon)\, g(x)$ i apliquem comparació directa.

Exemples

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty \rightarrow e^{-x^2}$ parella



$e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \geq 1$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$$

2) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx < +\infty$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3) \quad (z \to 0^+)$$

$$1 - \cos z \sim \frac{z^2}{2} \quad (z \to 0^+)$$

$$1 - \cos \frac{1}{x} \sim \frac{1}{2x^2} \quad (x \to +\infty)$$

$\hookrightarrow$ infinitèssims equivalents $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} = 1$

sabem que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ i apliquem comparació en el límit.

Exemple

La integral impropia $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ és cond. convergent.

Sinus cardinal $\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ és C^∞

→ es de primera espècie, és impropia per l'interval.

Estudiem

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Es convergent integrant per parts.

$$\underbrace{\left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty}}_{\cos 1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}$$

absolutament convergent pq

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad i \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$$

$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ és divergent

La comparem amb $\frac{\sin^2 x}{x} \le \frac{|\sin x|}{x} \leftarrow$ div. per comp. directa

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$\underset{\text{per parts}}{=} \left[\frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{2} \cdot \frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{\sin 2}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx}_{\text{abs. conv} \Rightarrow \text{conv}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{divergent}} = +\infty$$

↓

ho sabem pel mateix raonament que abans.