Òscar Benedi

<u>Àlgebra multilineal i geometria</u>

1 Álgebra lineal

1. Espacio dual

Sea E un K-e.v.

Def: El espacio dual es: $E^* = \{\varphi : E \to K \text{ lineales}\}$ ← es un K-e.v.

→ **Obs:** Para definir E^* debemos usar bases: si E es un K-e.v. de dim n con base $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, definimos:

$$u_i^* : E \to K$$
$$u_j \mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij}$$

↳ $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ es una base de E^*

En particular, si $\omega \in E^*$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$, donde se cumple que:

$$\omega(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) = a_j \Rightarrow \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i^*$$

- CAMBIOS DE BASE

Sean B_1, B_2 bases de E (E es K-e.v. de dim $= n$) y sean B_1^*, B_2^* bases duales de B_1, B_2 de E^*. Si S_{B_1,B_2} es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces:

$$S_{B_1^*, B_2^*} = (S_{B_1,B_2})^T = (S_{B_2,B_1}^{-1})^T$$

- APLICACIONES LINEALES

Sean E y F K-e.v. Sea $\Phi : E \to F$ una aplicación lineal, entonces Φ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\Phi^* : F^* \to E^*$$
$$\omega \mapsto \Phi^*(\omega) = \omega \circ \Phi$$

$E \xrightarrow{\Phi} F \xrightarrow{\omega} K$ ← composición de lineales es lineal

Si E y F de dim finita, Φ admite expresión matricial (en coordenadas).

En particular, $\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ base de } E \\ B_2 \text{ base de } F \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi$ viene dado por $M_{B_1,B_2}(\Phi)$

y $\left.\begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } E^* \\ B_2^* \text{ base de } F^* \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi^*$ viene dado por $M_{B_2^*,B_1^*}(\Phi^*) = \left(M_{B_1,B_2}(\Phi)\right)^T$

- **ESPACIO BIDUAL**

Dado E K-e.v. podemos definir $E^*, E^{**}, \ldots$ y tenemos que E^{**} es canónicamente isomorfo (como e.v.) a E mediante el isomorfismo:

$$\Phi : E \xrightarrow{\Phi} E^{**}$$
$$u \longmapsto \Phi(u) : E^* \longrightarrow K$$
$$\omega \longmapsto (\Phi(u))(\omega) = \omega(u) \in K$$

Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $E \simeq E^{**}$ y no distinguimos entre E y E^{**}