Álgebra multilineal y Geometría

Contenidos

1 Álgebra multilineal

1.1 Formas Cuadráticas

Definición 1.1.1
Sea E un k-ev. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned} \phi\colon E \times E &\to k \\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1 + u_2, v) = \phi(u_1, v) + \phi(u_2, v)$
- $\phi(\lambda u, v) = \lambda \phi(u, v)$
- $\phi(u, v) = \phi(v, u)$

$\forall u, v, u_1, u_2 \in E$ y $\forall \lambda \in k$.

Definición 1.1.2
Sea ϕ una forma bilineal simétrica sobre un k-ev. E. Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned} q\colon E &\to k \\ u &\mapsto q(u) = \phi(u,u) \end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a ϕ.

Observación 1.1.1 Se cumple que $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$

Lema 1.1.1 Sea ϕ una forma bilieal simétrica sobre un k-ev. E con $carE \neq 2$ y sea q la forma cuadrática asociada a ϕ, entonces

$$\phi(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

Demostración

$$q(u + v) - q(u) - q(v) = \phi(u + v, u + v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) =$$
$$= \phi(u, u) + \phi(u, v) + \phi(v, u) + \phi(v, v) - \phi(u, u) - \phi(v, v) = 2\phi(u, v)$$

Definición 1.1.3
Sea ϕ una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un k-ev. E y sea $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ una base. La matriz de ϕ en base B es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

Observación 1.1.2 La matriz $M_B(\phi)$ es simétrica

Definición 1.1.4
Sea E un k-ev. y sea $\phi \colon E \times E \to k$ una forma bilineal simétrica.

- Diremos que ϕ es definida positiva si

$$\phi(x, x) > 0, \quad \forall x \in E \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es definida negativa si

$$\phi(x, x) < 0, \quad \forall x \in E \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es no definida en cualquier otro caso.

Observación 1.1.3 Si ϕ es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre E.

Definición 1.1.5
Dada una matriz cuadrada A (dim n) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = \left|A_k\right|$$

Teorema de Sylvester
Sea E un k-ev. de dimension n y sea $\phi \colon E \times E \to k$ una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } E$$

Demostración

$\Longrightarrow$

Como ϕ es definida positiva, define un producto escalar sobre E. Si tomamos una base B cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Llamamos $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \left|M_{B_2}(\phi)\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

Entonces, como $M_B(\phi) = S^T_{B,B_2} M_{B_2}(\phi) S_{B_2,B}$

$$\left|M_B(\phi)\right| = \left|S_{B_2,B}\right|^2 \left|M_{B_2}(\phi)\right| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que ϕ también define un producto escalar en el subespacio vectorial $< v_1, \cdots, v_k >$ cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left|M_B(\phi)_k\right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Longleftarrow$

Tenemos que $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$. Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1} u_1 + u2 \\ v_3 = \alpha_{3,1} u_1 + \alpha_{3,2} u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1} u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1} u_{n-1} + u_n \end{cases} \qquad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad {\scriptstyle 2 \leq k \leq n \atop 1 \leq i \leq k-1}$$

Propiedades de $\{v_1, \cdots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = \langle u_1, \cdots, u_k \rangle$ En particular, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de E.
- $\phi(v_k, v_i) = 0$ $\forall 1 \leq i \leq k-1$ porque $v_i \in \langle u_1, \cdots, u_i \rangle$ y hemos tomado los α de manera que $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$ es base ortogonal
- La matriz $S_{B_2 B}$

$$S_{B_2 B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|S_{B_2 B}\right| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2 B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$M_B(\phi) = S^T_{B,B_2} M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi(v_1,v_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \phi(v_k,v_k) & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ & & & & & \phi(v_n,v_n) \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} k & \updownarrow & \\ \leftrightarrow & & \\ \hline & & \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S^t_{B,B_2})\delta_k(M_{B_2}(\phi))\delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \phi(v_i,v_i) > 0 \text{ (por hipótesis) } \Longrightarrow \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k,v_k) > 0$$

Finalmente, $\forall x \in E$

$$\phi(x,x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \phi(v_i,v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

Teorema Método convergencia-pivote
Dada una forma bilineal simétrica ϕ, queremos encontrar una base de E, B_2, en la cual $M_{B_2}(\phi)$ sea una matriz diagonal. Partimos de una base B i de $M_B(\phi)$. El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \underset{\text{en columnas}}{\overset{\text{misma op.}}{\sim}} \left(S_1 M_b(\phi) S_1^T | S_1\right) \sim \cdots \sim$$
$$\sim \left(S_r \ldots S_1 M_B(\phi) S_1^T \ldots S_r^T | S_r \ldots S_1\right)$$

Donde la matriz de la izquierda es M_{B_2} y es diagonal.

Ejemplo 1.1.1

$$q_\phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$

$$\underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces, en base B, los vectores de B_2 son:

- $v_1 = (1, 0, 0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$
- $v_2 = (1, 1, 1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y $\phi(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$.

1.2 Espacio dual

Definición 1.2.1
Sea E un k-ev. Definimos el espacio Dual de E como $E^* = \{\phi : E \to k \text{ lineales}\}$ (también es un k-espacio vectorial)

Observación 1.2.1 Para definir E^* tenemos que usar bases de E.

Definición 1.2.2
Si $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de E (k-ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^* \colon E &\to k \\ u_j &\mapsto u_i^*(u_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de B a $B^* = \{u_1^*, \cdots, u_n^*\}$ (que efectivamente es una base de E^*).

Observación 1.2.2 En particular si $w \in E$ y $w = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$, se cumple que:

$$w(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) = a_j \implies w = \sum_{i=1}^{n} w(u_i) u_i^*$$

Proposición 1.2.1 (cambios de base)
Sean B_1 y B_2 bases de E (k-ev. de dim $= n$) y sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y B_2. Si $S_{B_1B_2}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces:

$$S_{B_1^*B_2^*} = (S_{B_1B_2}^{-1})^T = (S_{B_2B_1})^T$$

Proposición 1.2.2 (aplicaciones lineales)
Sean E y F k-ev. y sea $\phi\colon E \to F$ una aplicación lineal, entonces ϕ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^*\colon F^* &\to E^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi \end{aligned}$$

Observación 1.2.3 Si E y F son de dimensión finita, ϕ admite expresión matricial (en coordenadas). En particular $\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ base de } E \\ B_2 \text{ base de } F \end{array}\right\} \implies \phi$ viene dada por $M_{B_1,B_2}(\phi)$ y $\left.\begin{array}{l} B_1^* \text{ base de } E^* \\ B_2^* \text{ base de } F^* \end{array}\right\} \implies \phi^*$ viene dada por $M_{B_2^*,B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1,B_2}(\phi))^T$.

Proposición 1.2.3 (espacio bidual)
Dado E k-ev. podemos definir $E^*, E^{**}, \cdots$. En particular tenemos que E^{**} es canónicamente isomorfo a E mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi\colon E &\to E^{**} \\ u &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(u)\colon E^* &\to k \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u) \end{aligned}$$

Observación 1.2.4 Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $E \cong E^{**}$ y no distinguimos entre E y E^{**}

1.3 Tensores

Definición 1.3.1
Sean $E_1, \cdots, E_r$ k-ev. Diremos que $f\colon E_1 \times \cdots \times E_r \to k$ es un tensor (o una aplicacion multilineal) si $\forall i = 1, \cdots, r$ y $\forall v_j \in E_j$ $(i \neq j)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \phi_i\colon E_i &\to k \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_r) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

Definición 1.3.2
Sea E un k-ev. Llamaremos tensor de tipo (p, q) (o tensor p veces covariante y q veces contravariante) (o tensor p-covariante y q-contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p} \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{q} &\to k \\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) \end{aligned}$$

Observación 1.3.1 Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como $T_p^q(E)$.

Observación 1.3.2 Por convenio $T_0(E) = T^0(E) = T_0^0(E) = k$.

Ejemplo 1.3.1
Sea E un k-ev.

- $T_1(E) = T_1^0(E) = E^*$
- $T^1(E) = T_0^1 = E^{**}$ ($\cong E$)
- $T_2(E) = T_2^0(E) = \{$formas bilineales de E en $k\}$

Proposición 1.3.1
$T_p^q(E) = T_q^p(E^*)$ (cambiando el orden)

Proposición 1.3.2
$T_p^q(E)$ tiene estructura de k-espacio vectorial. Si $f, g \in T_p^q(E)$ y $\alpha, \beta \in k$

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g \colon \overbrace{E \times \cdots E}^{p} \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{q} &\to k \\ (v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) &\mapsto (\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) \end{aligned}$$

donde
$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) = \alpha f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q) + \\ \beta g(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_q). \end{aligned}$$

Definición 1.3.3 (producto tensorial)
Dados $f \in T_p^q(E)$ y $g \in T_{p'}^{q'}(E)$, definimos el producto tensorial de f y g como

$$\begin{aligned} f \otimes g \colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p+p'} \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{q+q'} &\to k \\ (v_1, \cdots, v_p, \overline{v_1}, \cdots \overline{v_{p'}}, w_1, \cdots, w_q, \overline{w_1}, \cdots, \overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_p) + \\ & \quad g(\overline{v_1}, \cdots, \overline{v_{p'}}, \overline{w_1}, \cdots \overline{w_{q'}}) \end{aligned}$$

Observación 1.3.3 Si f y g son tensores, entonces $f \otimes g$ también lo es. Además $f \otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(E)$.

Proposición 1.3.3
Sean $f \in T_p^q(E)$, $g \in T_{p'}^{q'}$ y $h \in T_{p''}^{q''}(E)$.

- $\otimes$ **NO** es abeliano. En general $f \otimes g \neq g \otimes f$.
- $\otimes$ es asociativo. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$. Denotado por $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h \quad ((f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in k$. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

Ejemplo 1.3.2
Sea $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Y consideramps el producto tensorial de los tensores e_1^* y e_2^* sobre los vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\left.\begin{array}{l}(e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) = e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1 y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) = e_2^*(v_1)e_1^*(v_")?y_1 x_2\end{array}\right\} \implies e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

Ejemplo 1.3.3
Sea $E = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$, $B* = \{e_1^*, e_2^*\}$, entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(E) \qquad \begin{cases} (e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0 \end{cases}$$

Observación 1.3.4 a Si E es un k-ev de dimensión n y $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$

$$(\underbrace{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*}_{I=\{i_1,\cdots,i_p\}} \otimes \underbrace{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_2}}_{J=\{j_1,\cdots j_q\}})(\underbrace{e_{l_1}, \cdots, e_{l_p}}_{L=\{l_1,\cdots,l_p\}}, \underbrace{e_{m_1}^*, \cdots, e_{m_q}^*}_{M=\{m_1,\cdots,m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 1.3.5 Sean $f, g \in T_p^q(E)$ entonces

$$f = g \iff_{\substack{\forall e_{i_1},\cdots,e_{i_p} \in B \\ \forall e_{j_1}^*,\cdots,e_{j_q}^* \in B^*}} f(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*)$$

1.4 Dimensión y bases de $T_p^q(E)$

Recordemos que $T_p^q(E)$ es un k-ev.

Teorema (base de $T_p^q(E)$)
Sea E un k-ev. de dimensión n y sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces

i) $\dim_k T_p^q(E) = n^{p+q}$

ii) Una base de $T_p^q(E)$ es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \Big|_{j_1,\cdots,j_1 \in \{1,\cdots,n\}}^{i_1,\cdots,i_p \in \{1,\cdots,n\}} \right\}$$

iii) Si $f \in T_p^q(E)$, las coordenadas de f en la base B_p^q son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*))$$

Demostración

i) Es consecuencia directa de ii

ii) Primero veamos que B_p^q es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ}(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean I_0, J_0 dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q}) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la observación 1.3.4). Veamos ahora que B_p^q es generadora. Sea $f \in T_p^q(E)$, definimos $g \in T_p^q(E)$ como

$$g = \sum_{\forall I,J} (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})(e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que $f = g$ quedan provados ii y iii. Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e^*_{j_1^0}, \cdots, e^*_{j_q^0}) = f(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e^*_{j_1^0}, \cdots, e^*_{j_q^0})$$

Por la observación 1.3.4 y queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1.4.1
Sea $E = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea $u \in \mathbb{R}^n$
$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \qquad (B_0^1 = B)$$
- Sea $w \in T_1^0(E)(= E^*)$
$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \qquad (B_1^0 = B^*)$$
- Sea $n = 3$ y sea $f \in T_2(E)$
$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \cdots e_3^* \otimes e_3^*\}$$
$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

Proposición 1.4.1 (cambio de base)
Sea E un k-ev. de dimensión n y sean $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Sea $S = (s^i_j)$ la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B y sea $T = (t^i_j)$ su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "T"'] & \overline{B} \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, bend left, "S^t"] & \overline{B}^* \arrow[l, bend left, "T^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $f \in T_p^q(E)$ y sean

$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \Big(f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$
$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \Big(f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$

Entonces, $\forall I, J$

$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q}) = \sum_{\forall L,M} s^{l_1}_{i_1} \cdots s^{l_p}_{i_p} t^{j_1}_{m_1} \cdots t^{j_q}_{m_q} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})$$

Ejemplo 1.4.2

- $f \in T^1(E) = E^{**} = E$ por lo tanto $f = u$ y $\substack{u_B=(x_1,\cdots,u_n)\\ u_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_1(E) = E^*$ por lo tanto $f = w$ y $\substack{w_B=(x_1,\cdots,u_n)\\ w_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_2(E)$ por lo tanto f es una forma bilineal y $\substack{f_B=A\in M_{n,n}(k)\\ f_{\overline{B}}=\overline{A}\in M_{n,n}(k)}$, entonces

$$\overline{A} = S^t A S$$

1.5 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como $x_n = \{1, \cdots, n\}$
- Denotaremos como $\mathcal{S}_n = \{\sigma \colon x_n \to x_n \text{bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$ es un grupo por composición. Además denotaremos $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada $s_0 \in \mathcal{S}_n$, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$

  es biyectiva.

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$, denotaremos s de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si s es cíclica la denotaremos como $s = (1, 3, 7, 5)$. En este caso, $s(1) = 3$, $s(3) = 7$, $s(7) = 5$ y $s(5) = 1$, para el resto de valores $s(i) = i$.

- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo $s = (i, j)$ con $i \neq j$

- $\forall s \in \mathcal{S}_n$, s se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir

$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \mod 2$$

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$ y sea $s = t_1 \cdots t_p$ una descomposición de s en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de s como $\varepsilon(s) = (-1)^p$.

1.6 Tensores simétricos y antisimétricos

Definición 1.6.1
Sea E un k-ev. de dimensión n, sea $f \in T_p(E)$ y $s \in \mathcal{S}_p$, entonces, definimos $(\underline{s}f) \in T_p(E)$ como

$$(\underline{s}f)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_{s(1)}, \cdots, v_{s(p)})$$

Ejemplo 1.6.1
Sea $E = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(E)$ y $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$, entonces

$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

Proposición 1.6.1
Sea E un k-ev. de dimensión n, sean $w_1, \ldots, w_p \in T_1(E) = E^*$, y $s \in \mathcal{S}_p$ ($t = s^{-1}$). Entonces

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$

Demostración
Sean $u_1, \ldots, u_n \in E$ (obsérvese que $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \in T_p(E)$)

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_1, \ldots, u_p) = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \ldots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$$

Dado que $s(i) = j \iff i = t(j)$, $w_i(u_{s_i}) = w_i(u_j) = w_{t(j)(u_j)}$. Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}(u_1, \ldots, u_p)$$

Ejemplo 1.6.2
Sea $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos $(1, 2) = s \in \mathcal{S}_2$. Entonces $s = (1, 2) = s^{-1} = t$ y para los siguientes elementos de $T_2(E)$ se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \qquad \underline{s}f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \qquad \underline{s}f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos $(1, 2, 3) = s \in (S)_3$. Entonces $t = s^{-1} = (1, 3, 2)$, es decir, que $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$, y para el siguiente elemento de $T_3(E)$ se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

Observación 1.6.1 Sea $f_i \in T_p(E)$. Entonces $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i(\underline{s} f_i)$. Por tanto, la proposición anterior sirve para $\forall f \in T_p(E)$.

Ejemplo 1.6.3
Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo 1.6.2 se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s}f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

Definición 1.6.2
Sea E un $k - ev.$ de $\dim n$. Sea $f \in T_p(E)$.

1. f es simétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f$
2. f es antisimétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f$
3. $S_p(E) = \{f \in T_p(E) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(E)$
   $A_p(E) = \{f \in T_p(E) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_P(E)$

Observación 1.6.2 $S_p(E), A_p(E) \subseteq T_p(E)$ son s.e-v. (ver observación 1.6.1).

Ejemplo 1.6.4
Para los dos ejemplos, sea $E = \mathbb{R}^3$, sean B y B^* bases de E y de E^* correspondientemente.

1. Definimos $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(E)$ y $s = (1,2) \in (S)_2$. Entonces $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s\}$ y $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$, $\varepsilon(s) = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f,\ \underline{s}(f) \neq -f \end{array}\right\} \implies \begin{array}{l} f \notin S_2(E) \\ f \notin A_2(E) \end{array}$$

2. Como anteriormente, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$.
   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array}\right\} \implies f \in S_2(E)$$

   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f \end{array}\right\} \implies f \in A_2(E)$$

Observación 1.6.3

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$ si $\varepsilon(s) = t_1, \ldots, t_n$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$.
- $s \in \mathcal{S}_p$. Definimos $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, donde $A_{i,j} = 1$ si $i = s(j)$ y $A_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces $\det A = \varepsilon(s)$.

Proposición 1.6.2
Sea E un k-e.v. de dimensión n, sea $f \in T_p(E)$.

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:
$$\begin{aligned} \text{f simétrica } \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in E,\ \forall i, j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:
$$\begin{aligned} \text{f antisimétrica } \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in E,\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & - f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \\ \iff & \forall u_1, \ldots, u_p \in E,\ \forall i < j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \ldots, u_p) = 0. \end{aligned}$$

Demostración

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

   En el caso de la implicación conversa se cumple:
$$\begin{aligned} \forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f \implies & \forall t_1, \ldots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \ldots, t_m}f = \\ & \underline{t_1}(\underline{t_2}(\ldots(\underline{t_m}f)\ldots)) = f \end{aligned}$$

   Finalmente,
$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies \text{ f es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.
$$\begin{aligned} & \forall u_1, \ldots, u_p \in E, \forall i < j \quad 0 = f(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + \\ & f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \implies \\ & f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

   Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:
$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1 \cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1 \cdots t_m) f$$

   Y entonces:
$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s) f \implies f \in A_p(E)$$

   Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser f antisimétrica,
$$\forall u_1, \ldots, u_p \in E,\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

   Si $u_i = u_j$, entonces $f(u_1, \ldots, u_p) = 0$.