Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva

Contenidos

0 Formas Cuadráticas

0.1 Definición, matriz de una forma cuadrática y bases

Definición 0.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. Diremos que una aplicación

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E} &\to \mathbf{k}\\ (u,v) &\mapsto \phi(u,v)\end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica si

- $\phi(u_1+u_2,v)=\phi(u_1,v)+\phi(u_2,v)$
- $\phi(\lambda u,v)=\lambda\phi(u,v)$
- $\phi(u,v)=\phi(v,u)$

$\forall u,v,u_1,u_2\in\mathbb{E}$ y $\forall\lambda\in\mathbf{k}$.

Definición 0.1.2
Sea ϕ una forma bilineal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$. Diremos que la aplicación

$$\begin{aligned}q\colon \mathbb{E} &\to \mathbf{k}\\ u &\mapsto q(u)=\phi(u,u)\end{aligned}$$

es la forma cuadrática asociada a ϕ.

Observación 0.1.3 Se cumple que $q(\lambda u)=\lambda^2q(u)$

Lema 0.1.4 Sea ϕ una forma bilieal simétrica sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ con $\operatorname{car}\mathbb{E}\neq 2$ y sea q la forma cuadrática asociada a ϕ, entonces

$$\phi(u,v)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$$

Demostración

$$q(u+v) - q(u) - q(v) = \phi(u+v, u+v) - \phi(u,u) - \phi(v,v) =$$
$$= \phi(u,u) + \phi(u,v) + \phi(v,u) + \phi(v,v) - \phi(u,u) - \phi(v,v) = 2\phi(u,v)$$

Definición 0.1.5
Sea ϕ una forma bilineal simétrica/cuadrática sobre un $\mathbf{k}$-e.v. $\mathbb{E}$ y sea $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ una base. La matriz de ϕ en base B es

$$M_B(\phi) = (a_{ij}) = (\phi(u_i, u_j))$$

Observación 0.1.6 La matriz $M_B(\phi)$ es simétrica

Definición 0.1.7
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. y sea $\phi \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica.

- Diremos que ϕ es definida positiva si

$$\phi(x,x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es definida negativa si

$$\phi(x,x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad x \neq \vec{0}$$

- Diremos que ϕ es no definida en cualquier otro caso.

Observación 0.1.8 Si ϕ es una forma bilineal simétrica y definida positiva entonces define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$.

Definición 0.1.9
Dada una matriz cuadrada A (dim n) definimos

$$A_k = (a_{ij}), \quad 1 \leq i,j \leq k \quad \text{y} \quad \delta_k(A) = \left|A_k\right|$$

Teorema de Sylvester (0.1.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n y sea $\phi \colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica, entonces

$$\phi \text{ es definida positiva} \iff \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n \quad \forall B \text{ base de } \mathbb{E}$$

Demostración
$\Longrightarrow$

Como ϕ es definida positiva, define un producto escalar sobre $\mathbb{E}$. Si tomamos una base B cualquiera, mediante Gramm-Schmidt podemos construir una base ortogonal $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Por tanto

$$i \neq j \implies \phi(v_i, v_j) = 0, \quad \phi(v_i, v_i) > 0 \quad 1 \leq i,j \leq n$$

Llamamos $\phi(v_i, v_i) = \lambda_i > 0$. Por tanto

$$M_{B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \left|M_{B_2}(\phi)\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

Entonces, como $M_B(\phi) = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B_2,B}$

$$\left|M_B(\phi)\right| = \left|S_{B_2,B}\right|^2 \left|M_{B_2}(\phi)\right| > 0$$

Por lo tanto, la matriz de un producto escalar tiene determinante positivo independientemente de la base tomada. Observamos que ϕ también define un producto escalar en el subespacio vectorial $< v_1, \cdots, v_k >$ cuando lo restringimos a este. Por lo que hemos visto antes se tiene que

$$\left|M_B(\phi)_k\right| = \delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

$\Longleftarrow$

Tenemos que $\delta_k(M_B(\phi)) > 0 \quad \forall 1 \leq k \leq n$. Aplicamos la siguiente variación de Gramm-Schmidt. Tomamos la base $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ Y hacemos la siguiente construcción:

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = \alpha_{2,1}u_1 + u2 \\ v_3 = \alpha_{3,1}u_1 + \alpha_{3,2}u_2 + u_3 \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{n,1}u_1 + \cdots + \alpha_{n,n-1}u_{n-1} + u_n \end{cases} \qquad \alpha_{i,j} \text{ son tales que } \phi(v_k, u_i) = 0 \quad {\scriptstyle 2 \leq k \leq n \atop 1 \leq i \leq k-1}$$

Propiedades de $\{v_1, \cdots, v_n\}$

- $\forall k$, $\langle v_1, \cdots, v_k \rangle = \langle u_1, \cdots, u_k \rangle$ En particular, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de $\mathbb{E}$.
- $\phi(v_k, v_i) = 0 \ \forall 1 \leq i \leq k-1$ porque $v_i \in \langle u_1, \cdots, u_i \rangle$ y hemos tomado los α de manera que $\phi(v_k, u_i) = 0 \implies B_2$ es base ortogonal
- La matriz S_{B_2B}

$$S_{B_2B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{n,1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \left|S_{B_2B}\right| = 1 \text{ y } \delta_k(S_{B_2B}) = 1$$

Finalmente, tenemos

$$M_B(\phi) = S_{B,B_2}^T M_{B_2}(\phi) S_{B,B_2}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} k \ \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} k \ \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi(v_1, v_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \phi(v_k, v_k) & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ & & & & & \phi(v_n, v_n) \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} k \ \updownarrow & \\ \leftrightarrow & \\ \hline & \end{array}\right)$$

$$\implies \delta_k(M_B(\phi)) = \delta_k(S^t_{B,B_2})\delta_k(M_{B_2}(\phi))\delta_k(S_{B,B_2}) = \delta_k(M_{B_2}(\phi)) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ (por hipótesis) } \implies \frac{\delta_k(M_B(\phi))}{\delta_{k-1}(M_B(\phi))} = \phi(v_k, v_k) > 0$$

Finalmente, $\forall x \in \mathbb{E}$

$$\phi(x,x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{k} x_i v_i, \sum_{i=1}^{k} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \phi(v_i, v_i) > 0 \text{ si } x \neq \vec{0}$$

QED

Teorema Método convergencia-pivote (0.1.11)
Dada una forma bilineal simétrica ϕ, queremos encontrar una base de $\mathbb{E}$, B_2, en la cual $M_{B_2}(\phi)$ sea una matriz diagonal. Partimos de una base B i de $M_B(\phi)$. El procesos es: operación con filas a las dos matrices y luego la misma operacion pero en la columnas de la primera matriz únicamente (véase ejemplo).

$$(M_B(\phi)|Id) \overset{\text{op. filas}}{\sim} (S_1 M_B(\phi)|S_1) \underset{\text{en columnas}}{\overset{\text{misma op.}}{\sim}} \left(S_1 M_b(\phi) S_1^T | S_1\right) \sim \cdots \sim$$
$$\sim \left(S_r \dots S_1 M_B(\phi) S_1^T \dots S_r^T | S_r \dots S_1\right)$$

Donde la matriz de la izquierda es M_{B_2} y es diagonal.

Ejemplo 0.1.12

$$q_\phi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 2yz; \quad A = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(1)+(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(2)+(3)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{fila}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}}$$
$$\underset{(3)-\frac{1}{2}(2)}{\overset{\text{columna}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Entonces, en base B, los vectores de B_2 son:

- $v_1 = (1,0,0); \quad \phi(v_1, v_1) = 2$

- $v_2 = (1,1,1); \quad \phi(v_2, v_2) = -2$
- $v_3 = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}); \quad \phi(v_3, v_3) = \frac{1}{2}$

Y $\phi(v_i, v_j) = 0$, $i \neq j$.

Proposición 0.1.13
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de dimension n, sea $\phi\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbf{k}$ una forma bilineal simétrica y sea q su forma cuadrática asociada. Consideremos $B = \{u_1, \dots u_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$. Sabemos que

$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Consideremos el subespacio vectorial $\mathbb{E}^\perp \subseteq \mathbb{E}$ definido por $\mathbb{E}^\perp = \{u \in \mathbb{E} \mid \phi(u,v) = 0 \ \forall v \in \mathbb{E}\}$. Tenemos que

i)
$$D = M_B(\phi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \implies E^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle .$$

ii)
$$\operatorname{rg} q + \dim \mathbb{E}^\perp = n \implies i_0(q) = \dim \mathbb{E}^\perp.$$

iii) Sean $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, e $i_+(q)$ el número de elementos estrictamente positivos de la diagonal de $M_B(\phi)$. $i_+(q)$ no depende de la base *q-ortogonal* B elegida.

iv) Sea $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ y sean $\delta_0 = 1, \delta_1, \dots, \delta_n \neq 0$. Entonces, $i_-(q)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia $\delta_0, \dots, \delta_n$.

Demostración

i) $u_i \in \{u_{m+1}, \dots, u_n\}$,

$$\phi(u_j, u_i) = (0 \ \cdots \ 1 \cdots \ 0\ ) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ \ \forall\, 1 \leq j \leq n \implies$$

$\implies \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle \subseteq \mathbb{E}^\perp$.

Sea $u \in \mathbb{E}$ tal que $u \notin \langle u_{m+1}, \dots u_n \rangle$. Se tiene que $\exists\ 1 \leq i \leq m$ t.q. $x_i \neq 0$. Entonces,

$$e_i^t M_B(\phi)\, u = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1_i & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha_i x_i \neq 0 \implies u \notin \mathbb{E}^{\perp}.$$

Así pues, $\mathbb{E}^{\perp} = \langle u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$.

iii) Sea $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ una base *q-ortogonal* de $\mathbb{E}$.

$$M_{B'}(\phi) = D' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$m = i_+(q, B)\,; \;\; \mathbb{F}^+ = \langle u_1, \dots u_m \rangle\,; \;\; \mathbb{E} = \mathbb{F}^+ \oplus \langle u_{m+1}, \dots u_n \rangle = \mathbb{F}^+ \oplus \mathbb{F}^{\leq 0}.$$

Análogamente,

$$m' = i_+(q, B')\,; \;\; \mathbb{F}'^+ = \langle u'_1, \dots u'_m \rangle\,; \;\; \mathbb{E} = \mathbb{F}'^+ \oplus \left\langle u'_{m+1}, \dots u'_n \right\rangle = \mathbb{F}'^+ \oplus \mathbb{F}'^{\leq 0}.$$

Consideremos la fución que proyecta un vector de $\mathbb{F}^+$ sobre $\mathbb{F}'^+$.

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{F}^+ \to \mathbb{E} &\to \mathbb{F}'^+ \\ v &\longmapsto f(v). \end{aligned}$$

Sea $v \in \mathbb{F}^+$ y sean v_1 y v_2 las proyecciones de v sobre $\mathbb{F}'^+$ y $\mathbb{F}'^{\leq 0}$ respectivamente. Tenemos que $f(v) = v_1$. Entonces,

$$f(v) = 0 \implies v_1 = 0 \implies v = v_2.$$

Además, $0 \leq \phi(v, v)$ y $\phi(v_2, v_2) = \phi(v, v) \leq 0$, de modo que $v = 0$ y f es inyectiva. Considerando la función que proyecta un vector de $\mathbb{F}'^+$ sobre $\mathbb{F}^+$.

$$\begin{aligned} g \colon \mathbb{F}'^+ \to \mathbb{E} &\to \mathbb{F}^+ \\ v &\longmapsto g(v). \end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento análogo, obtenemos que g es inyectiva, de modo que $m = m'$.

0.2 Clasificación afín y proyectiva

Definición 0.2.1
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-espacios vectoriales. Sean

$$\phi\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbf{k},$$

$$\psi\colon \mathbb{F}\times\mathbb{F}\to\mathbf{k}$$

formas bilineales simétricas. Diremos que ϕ y ψ son afínmente equivalentes, y escribiremos $\phi\sim\psi$, si existe un isomorfismo $f\colon\mathbb{E}\to\mathbb{F}$ tal que

$$\phi\left(u,v\right)=\psi\left(f\left(u\right),f\left(v\right)\right)\ \ \forall u,v\in\mathbb{E},$$

$$\phi\left(f^{-1}\left(u'\right),f^{-1}\left(v'\right)\right)=\psi\left(u',v'\right)\ \ \forall u',v'\in\mathbb{F}.$$

Teorema de Sylvester (0.2.2)

i) $\mathbf{k}=\mathbb{R}$
$$\phi\sim\psi\iff \operatorname{rg}\phi=\operatorname{rg}\psi \text{ y } i_+\left(\phi\right)=i_+\left(\psi\right).$$

ii) $\mathbf{k}=\mathbb{C}$
$$\phi\sim\psi\iff \operatorname{rg}\phi=\operatorname{rg}\psi.$$

1 Álgebra multilineal

1.1 Espacio dual

Definición 1.1.1
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Definimos el espacio Dual de $\mathbb{E}$ como $\mathbb{E}^*=\{\phi:\mathbb{E}\to\mathbf{k}\text{ lineales}\}$ (también es un $\mathbf{k}$-espacio vectorial)

Observación 1.1.2 Para definir $\mathbb{E}^*$ tenemos que usar bases de $\mathbb{E}$.

Definición 1.1.3
Si $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ es una base de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev.) definimos

$$\begin{aligned} u_i^*\colon \mathbb{E}&\to\mathbf{k}\\ u_j&\mapsto u_i^*(u_j)=\delta_{ij}\end{aligned}$$

Y llamaremos base dual de B a $B^*=\{u_1^*,\cdots,u_n^*\}$ (que efectivamente es una base de $\mathbb{E}^*$).

Observación 1.1.4 En particular si $w\in\mathbb{E}^*$ y $w=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_iu_i^*$, se cumple que:

$$w(u_j)=\sum_{i=1}^n a_iu_i^*(u_j)=a_j\implies w=\sum_{i=1}^n w(u_i)u_i^*$$

Proposición 1.1.5 (cambios de base)
Sean B_1 y B_2 bases de $\mathbb{E}$ ($\mathbf{k}$-ev. de $\dim \mathbb{E} = n$) y sean B_1^* y B_2^* las bases duales de B_1 y B_2. Si $S_{B_1 B_2}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces:

$$S_{B_1^* B_2^*} = (S_{B_1 B_2}^{-1})^T = (S_{B_2 B_1})^T$$

Proposición 1.1.6 (aplicaciones lineales)
Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ $\mathbf{k}$-ev. y sea $\phi\colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ una aplicación lineal, entonces ϕ induce la aplicación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \phi^*\colon \mathbb{F}^* &\to \mathbb{E}^* \\ w &\mapsto \phi^*(w) = w \circ \phi \end{aligned}$$

Observación 1.1.7 Si $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ son de dimensión finita, ϕ admite expresión matricial (en coordenadas). En particular:

$$\left.\begin{aligned} B_1 \text{ base de } \mathbb{E} \\ B_2 \text{ base de } \mathbb{F} \end{aligned}\right\} \implies \phi \text{ viene dada por } M_{B_1,B_2}(\phi)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1^* \text{ base de } \mathbb{E}^* \\ B_2^* \text{ base de } \mathbb{F}^* \end{aligned}\right\} \implies \phi^* \text{ viene dada por } M_{B_2^*,B_1^*}(\phi^*) = (M_{B_1,B_2}(\phi))^T$$

Proposición 1.1.8 (espacio bidual)
Dado $\mathbb{E}$ $\mathbf{k}$-ev. podemos definir $\mathbb{E}^*, \mathbb{E}^{**}, \cdots$. En particular tenemos que $\mathbb{E}^{**}$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{E}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{E} &\to \mathbb{E}^{**} \\ u &\mapsto \phi(u) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \phi(u)\colon \mathbb{E}^* &\to \mathbf{k} \\ w &\mapsto (\phi(u))(w) = w(u) \end{aligned}$$

Observación 1.1.9 Como este isomorfismo es canónico (no depende de las bases), $\mathbb{E} \cong \mathbb{E}^{**}$ y no distinguimos entre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}^{**}$

1.2 Tensores

Definición 1.2.1
Sean $\mathbb{E}_1, \cdots, \mathbb{E}_r$ $\mathbf{k}$-ev. Diremos que $f\colon \mathbb{E}_1 \times \cdots \times \mathbb{E}_r \to \mathbf{k}$ es un tensor (o una aplicacion multilineal) si $\forall i = 1, \cdots, r$ y $\forall v_j \in \mathbb{E}_j$ $(i \neq j)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \phi_i\colon \mathbb{E}_i &\to \mathbf{k} \\ v &\mapsto \phi(u) = f(v_1, \cdots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \cdots, v_r) \end{aligned}$$

es una aplicación lineal.

Definición 1.2.2
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Llamaremos tensor de tipo (p,q) (o tensor p veces covariante y q veces contravariante) (o tensor p-covariante y q-contravariante) a un tensor

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}}^{p}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) &\mapsto f(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) \end{aligned}$$

Observación 1.2.3 Al conjunto de tensores de este tipo se le denota como $T_p^q(\mathbb{E})$.

Observación 1.2.4 Por convenio $T_0(\mathbb{E}) = T^0(\mathbb{E}) = T_0^0(\mathbb{E}) = \mathbf{k}$.

Ejemplo 1.2.5
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev.

- $T_1(\mathbb{E}) = T_1^0(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$
- $T^1(\mathbb{E}) = T_0^1 = \mathbb{E}^{**}$ $(\cong \mathbb{E})$
- $T_2(\mathbb{E}) = T_2^0(\mathbb{E}) = \{\text{formas bilineales de } \mathbb{E} \text{ en } \mathbf{k}\}$

Proposición 1.2.6
$T_p^q(\mathbb{E}) = T_q^p(\mathbb{E}^*)$ (cambiando el orden)

Proposición 1.2.7
$T_p^q(\mathbb{E})$ tiene estructura de $\mathbf{k}$-espacio vectorial. Si $f,g \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $\alpha,\beta \in \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \alpha f+\beta g\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\mathbb{E}}^{p}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) &\mapsto (\alpha f+\beta g)(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (\alpha f+\beta g)(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q) = \alpha f(&v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q)+ \\ &\beta g(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_q). \end{aligned}$$

Definición 1.2.8 (producto tensorial)
Dados $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y $g \in T_{p'}^{q'}(\mathbb{E})$, definimos el producto tensorial de f y g como

$$\begin{aligned} f\otimes g\colon \overbrace{\mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}}^{p+p'}\times\overbrace{\mathbb{E}^*\times\cdots\times\mathbb{E}^*}^{q+q'} &\to \mathbf{k} \\ (v_1,\cdots,v_p,\overline{v_1},\cdots\overline{v_{p'}},w_1,\cdots,w_q,\overline{w_1},\cdots,\overline{w_{q'}}) &\mapsto f(v_1,\cdots,v_p,w_1,\cdots,w_p)+ \\ &\qquad g(\overline{v_1},\cdots,\overline{v_{p'}},\overline{w_1},\cdots\overline{w_{q'}}) \end{aligned}$$

Observación 1.2.9 Si f y g son tensores, entonces $f\otimes g$ también lo es. Además $f\otimes g \in T_{p+p'}^{q+q'}(\mathbb{E})$.

Proposición 1.2.10
Sean $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, $g \in T_{p'}^{q'}$ y $h \in T_{p''}^{q''}(\mathbb{E})$.

- $\otimes$ **NO** es abeliano. En general $f \otimes g \neq g \otimes f$.
- $\otimes$ es asociativo. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$. Denotado por $f \otimes g \otimes h$
- $\vec{0} \otimes f = f \otimes \vec{0} = \vec{0}$
- $f \otimes (g+h) = f \otimes g + f \otimes h \quad ((f+g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h)$
- $\alpha \in k$. $(\alpha f) \otimes g = \alpha(f \otimes g) = f \otimes (\alpha g)$

Ejemplo 1.2.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$. Y consideramps el producto tensorial de los tensores e_1^* y e_2^* sobre los vectores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\left.\begin{array}{l} (e_1^* \otimes e_2^*)(v_1, v_2) = e_1^*(v_1)e_2^*(v_2) = x_1 y_2 \\ (e_2^* \otimes e_1^*)(v_1, v_2) = e_2^*(v_1)e_1^*(v_")?y_1 x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow e_1^* \otimes e_2^* \neq e_2^* \otimes e_1^*$$

Ejemplo 1.2.12
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$, $B = \{e_1, e_2\}$, $B* = \{e_1^*, e_2^*\}$, entonces

$$e_1 \otimes e_2 \in T^2(\mathbb{E}) \qquad \begin{cases} (e_1 \otimes e_2) = (e_1^{**} \otimes e_2^{**})(e_1^*, e_1^*) = e_1(e_1)e_2(e_1) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_1^*, e_2^*) = 1 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_1^*) = 0 \\ (e_1 \otimes e_2)(e_2^*, e_2^*) = 0 \end{cases}$$

Observación 1.2.13 a Si $\mathbb{E}$ es un **k**-ev de dimensión n y $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$

$$(\underbrace{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*}_{I=\{i_1,\cdots,i_p\}} \otimes \underbrace{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_2}}_{J=\{j_1,\cdots j_q\}})(\underbrace{e_{l_1}, \cdots, e_{l_p}}_{L=\{l_1,\cdots,l_p\}}, \underbrace{e_{m_1}^*, \cdots, e_{m_q}^*}_{M=\{m_1,\cdots,m_q\}}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } I = L \text{ y } J = M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 1.2.14 Sean $f, g \in T_p^q(\mathbb{E})$ entonces

$$f = g \iff_{\substack{\forall e_{i_1},\cdots,e_{i_p} \in B \\ \forall e_{j_1}^*,\cdots,e_{j_q}^* \in B^*}} f(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*) = g(e_{i_1}, \cdots, e_{j_q}^*)$$

1.3 Dimensión y bases de $T_p^q(\mathbb{E})$

Recordemos que $T_p^q(\mathbb{E})$ es un **k**-ev.

Teorema (base de $T_p^q(\mathbb{E})$) (1.3.1)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n y sea $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$, entonces

i) $\dim_k T_p^q(\mathbb{E}) = n^{p+q}$

ii) Una base de $T_p^q(\mathbb{E})$ es

$$B_p^q = \left\{ e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q} \Big|_{j_1,\cdots,j_1 \in \{1,\cdots,n\}}^{i_1,\cdots,i_p \in \{1,\cdots,n\}} \right\}$$

iii) Si $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, las coordenadas de f en la base B_p^q son

$$f_{B_p^q} = (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*))$$

Demostración

i) Es consecuencia directa de **??**

ii) Primero veamos que B_p^q es li. Sea

$$w = \sum \alpha_{IJ}(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Sean I_0, J_0 dos conjuntos de índices cualesquiera, entonces

$$0 = w(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*) = \alpha_{I_0 J_0}$$

(Por la **??**). Veamos ahora que B_p^q es generadora. Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$, definimos $g \in T_p^q(\mathbb{E})$ como

$$g = \sum_{\forall I,J} (f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e_{j_1}^*, \cdots, e_{j_q}^*)(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}))$$

Demostrando ahora que $f = g$ quedan provados **??** y **??**. Tenemos ahora que

$$g(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \cdots, e_{j_q^0}^*) = f(e_{i_1^0}, \cdots, e_{i_p^0}, e_{j_1^0}^*, \cdots, e_{j_q^0}^*)$$

Por la **??** y queda demostrado el teorema.

Ejemplo 1.3.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $B^* = \{e_1^* \cdots e_n^*\}$

- Sea $u \in \mathbb{R}^n$
$$u = u(e_1^*) + \cdots + u(e_n^*) \qquad (B_0^1 = B)$$

- Sea $w \in T_1^0(\mathbb{E})(= \mathbb{E}^*)$
$$w = w(e_1)e_1^* + \cdots + w(e_n)e_n^* \qquad (B_1^0 = B^*)$$

- Sea $n = 3$ y sea $f \in T_2(\mathbb{E})$
$$B_2^0 = \{e_1^* \otimes e_1^*, e_1^* \otimes e_2^*, \cdots e_3^* \otimes e_3^*\}$$
$$f = f(e_1, e_1)e_1^* \otimes e_1^* + f(e_1, e_2)e_1^* \otimes e_2^* + \cdots + f(e_3, e_3)e_3^* \otimes e_3^*$$

Proposición 1.3.3 (cambio de base)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n y sean $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ y $\overline{B} = \{u_1, \cdots, u_n\}$. Sea $S = (s_j^i)$ la matriz de cambio de base de $\overline{B}$ a B y sea $T = (t_j^i)$ su inversa. De manera que tenemos esta relación:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend right, "T"'] & \overline{B} \arrow[l, bend right, "S"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B^* \arrow[r, bend left, "S^t"] & \overline{B}^* \arrow[l, bend left, "T^t"] \end{tikzcd}$$

Sea $f \in T_p^q(\mathbb{E})$ y sean

$$f_B = (\alpha_{IJ})_{I,J} = \Big(f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$
$$f_{\overline{B}} = (\overline{\alpha}_{IJ})_{I,J} = \Big(f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q})\Big)_{I,J}$$

Entonces, $\forall I, J$

$$\overline{\alpha}_{IJ} = f(u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}, u^*_{j_1}, \cdots, u^*_{j_q}) = \sum_{\forall L,M} s^{l_1}_{i_1} \cdots s^{l_p}_{i_p} t^{j_1}_{m_1} \cdots t^{j_q}_{m_q} f(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}, e^*_{j_1}, \cdots, e^*_{j_q})$$

Ejemplo 1.3.4

- $f \in T^1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^{**} = \mathbb{E}$ por lo tanto $f = u$ y ${}^{u_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{u_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$ por lo tanto $f = w$ y ${}^{w_B=(x_1,\cdots,u_n)}_{w_{\overline{B}}=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)}$, entonces

$$\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = S^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- $f \in T_2(\mathbb{E})$ por lo tanto f es una forma bilineal y ${}^{f_B=A\in M_{n,n}(k)}_{f_{\overline{B}}=\overline{A}\in M_{n,n}(k)}$, entonces

$$\overline{A} = S^t A S$$

1.4 Recordatorio de permutaciones

- Denotaremos como $x_n = \{1, \cdots, n\}$
- Denotaremos como $\mathcal{S}_n = \{\sigma \colon x_n \to x_n \text{bilineales}\}$
- $\#\mathcal{S}_n = n!$
- $\mathcal{S}_n$ es un grupo por composición. Además denotaremos $s_1 s_2 = s_1 \circ s_2$
- Fijada $s_0 \in \mathcal{S}_n$, la aplicación

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{S}_n &\to \mathcal{S}_n \\ s &\mapsto s_0 s \end{aligned}$$

  es biyectiva.

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$, denotaremos s de las siguientes maneras
  - $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s(1) & s(2) & \cdots & s(n) \end{pmatrix}$
  - Si s es cíclica la denotaremos como $s = (1, 3, 7, 5)$. En este caso, $s(1) = 3$, $s(3) = 7$, $s(7) = 5$ y $s(5) = 1$, para el resto de valores $s(i) = i$.

- Llamaremos trasposición a una permutación del tipo $s = (i, j)$ con $i \neq j$

- $\forall s \in \mathcal{S}_n$, s se puede expresar como composición (o producto) de trasposiciones. Además, la paridad del número de trasposiciones se mantiene, es decir

$$s = t_1 \cdots t_p = l_1 \cdots l_q \implies p \equiv q \mod 2$$

- Sea $s \in \mathcal{S}_n$ y sea $s = t_1 \cdots t_p$ una descomposición de s en trasposiciones. Entonces, definimos el signo de s como $\varepsilon(s) = (-1)^p$.

1.5 Tensores simétricos y antisimétricos

Definición 1.5.1
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$ y $s \in \mathcal{S}_p$, entonces, definimos $(\underline{s}f) \in T_p(\mathbb{E})$ como

$$(\underline{s}f)(v_1, \cdots, v_p) = f(v_{s(1)}, \cdots, v_{s(p)})$$

Ejemplo 1.5.2
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \in T_3(\mathbb{E})$ y $s = (1, 2, 3) \in \mathcal{S}_3$, entonces

$$(\underline{s}f)(v_1, v_2, v_3) = f(v_2, v_3, v_1)$$

Proposición 1.5.3
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. de dimensión n, sean $w_1, \ldots, w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$, y $s \in \mathcal{S}_p$ $(t = s^{-1})$. Entonces

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}$$

Demostración
Sean $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{E}$ (obsérvese que $w_1 \otimes \cdots \otimes w_p \in T_p(\mathbb{E})$)

$$\underline{s}(w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_1, \ldots, u_p) = (w_1 \otimes \cdots \otimes w_p)(u_{s(1)}, \ldots, u_{s(p)}) = w_1(u_{s(1)}) \cdot w_2(u_{s(2)}) \cdots w_p(u_{s(p)})$$

Dado que $s(i) = j \iff i = t(j)$, $w_i(u_{s_i}) = w_i(u_j) = w_{t(j)(u_j)}$. Con lo que podemos reordenar el último producto como

$$w_{t(1)}(u_1) \cdot w_{t(2)}(u_2) \cdots w_{t(p)}(u_p) = w_{t(1)} \otimes \cdots \otimes w_{t(p)}(u_1, \ldots, u_p)$$

Ejemplo 1.5.4
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ para los dos siguientes ejemplos.

En el primero fijamos $(1,2) = s \in \mathcal{S}_2$. Entonces $s = (1,2) = s^{-1} = t$ y para los siguientes elementos de $T_2(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f_1 = e_1^* \otimes e_2^* \qquad \underline{s} f_1 = e_2^* \otimes e_1^*$$

$$f_2 = e_1^* \otimes e_1^* \qquad \underline{s} f_2 = e_1^* \otimes e_1^*$$

$$f_3 = e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f_3 = e_3^* \otimes e_2^*$$

En el segundo fijamos $(1,2,3) = s \in (S)_3$. Entonces $t = s^{-1} = (1,3,2)$, es decir, que $t(1) = 3, t(2) = 1, t(3) = 2$, y para el siguiente elemento de $T_3(\mathbb{E})$ se cumple:

$$f = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f = e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^*$$

Observación 1.5.5 Sea $f_i \in T_p(\mathbb{E})$. Entonces $\underline{s}(\sum \alpha_i f_i) = \sum \alpha_i (\underline{s} f_i)$. Por tanto, la proposición anterior sirve para $\forall f \in T_p(\mathbb{E})$.

Ejemplo 1.5.6
Con las mismas hipótesis que en el primer caso del ejemplo **??** se cumple:

$$f = 3e_1^* \otimes e_2^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_2^* \otimes e_3^* \qquad \underline{s} f = 3e_2^* \otimes e_1^* + 5e_1^* \otimes e_1^* + 5e_3^* \otimes e_2^*$$

Definición 1.5.7
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. de $\dim n$. Sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. f es simétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s} f = f$
2. f es antisimétrica $\iff \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s} f = \varepsilon(s) f$
3. $S_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ simétrica}\} \subseteq T_p(\mathbb{E})$
   $A_p(\mathbb{E}) = \{f \in T_p(\mathbb{E}) \mid f \text{ antisimétrica}\} \subseteq T_P(\mathbb{E})$

Observación 1.5.8 $S_p(\mathbb{E}), A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ son s.e-v. (ver observación **??**).

Ejemplo 1.5.9
Para los dos ejemplos, sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, sean B y B^* bases de $\mathbb{E}$ y de $\mathbb{E}^*$ correspondientemente.

1. Definimos $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $s = (1,2) \in (S)_2$. Entonces $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s\}$ y $\varepsilon(\mathrm{Id}) = 1$, $\varepsilon(s) = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id}) \cdot f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* \neq f,\ \underline{s}(f) \neq -f \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f \notin S_2(\mathbb{E}) \\ f \notin A_2(\mathbb{E}) \end{array}$$

2. Como anteriormente, $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$.
   - Para $f = e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\mathrm{Id}}(f) = f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_2^* = f \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in S_2(\mathbb{E})$$

- Para $f = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$,

$$\left.\begin{array}{r}\underline{\mathrm{Id}}(f) = f = \varepsilon(\mathrm{Id})f \\ \underline{s}(f) = e_2^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_2^* = -f = \varepsilon(s)f\end{array}\right\} \implies f \in A_2(\mathbb{E})$$

Observación 1.5.10

- $\varepsilon(s) = (-1)^n$ si $\varepsilon(s) = t_1, \ldots, t_n$, donde $t_1, \ldots, t_n$ son transposiciones.
- $\varepsilon(s_1 s_2) = \varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)$.
- $s \in \mathcal{S}_p$. Definimos $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, donde $A_{i,j} = 1$ si $i = s(j)$ y $A_{i,j} = 0$ en otro caso. Entonces $\det A = \varepsilon(s)$.

Proposición 1.5.11
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-e.v. de dimensión n, sea $f \in T_p(\mathbb{E})$.

1. Podemos caracterizar los tensores simétricos como:

$$\text{f simétrica} \iff \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i, j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

2. Podemos caracterizar los tensores antisimétricos como:

$$\begin{aligned}\text{f antisimétrica} &\iff \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ &\qquad -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \\ &\iff \forall u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E},\ \forall i < j \text{ si } u_i = u_j \text{ entonces } f(u_1, \ldots, u_p) = 0.\end{aligned}$$

Demostración

1. La implicación directa es una consecuencia de la definición de simetría.

   En el caso de la implicación conversa se cumple:

$$\forall t \text{ transposición } \underline{t}f = f \implies \forall t_1, \ldots, t_m \text{ transposiciones } \underline{t_1, \ldots, t_m}f = \underline{t_1}(\underline{t_2}(\ldots(\underline{t_m}f)\ldots)) = f$$

   Finalmente,

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = f \implies \text{ f es simétrica.}$$

2. Veamos primero que la tercera condición implica la segunda.

$$\begin{aligned}&\forall u_1, \ldots, u_p \in E, \forall i < j \quad 0 = f(u_1, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_i + u_j, \ldots, u_p) = \\ &f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + \\ &f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = \\ &f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) + f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \implies \\ &f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)\end{aligned}$$

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Suponiendo cierta la segunda condición se cumple:

$$\underline{t}f = -f \implies \underline{t_1 \cdots t_m}f = (-1)^m f = \varepsilon(t_1 \cdots t_m)f$$

Y entonces:

$$\forall s \in \mathcal{S}_p \quad s = t_1 \cdots t_m \text{ y } \varepsilon(s) = (-1)^m \implies \forall s \in \mathcal{S}_p \quad \underline{s}f = \varepsilon(s)f \implies f \in A_p(E)$$

Y, finalmente, que la primera implica la tercera. Por ser f antisimétrica,

$$\forall u_1, \ldots, u_p \in E,\ \forall i < j \quad f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p)$$

Si $u_i = u_j$, entonces $f(u_1, \ldots, u_p) = 0$.

Proposición 1.5.12
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $car\mathbb{E} \neq 2$ y sea $f \in T_p(\mathbb{E})$, entonces $\forall v_i, v_j \in \mathbb{E}$

$$f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) \iff f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

Demostración
$\implies$

$$f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = -f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) \implies$$
$$2f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0 \implies f(\cdots, w, \cdots, w, \cdots) = 0$$

$\impliedby$

$$f(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots) = 0 \implies$$
$$f(\cdots, v_i, \cdots, v_i, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) + f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots) = 0$$
$$\implies f(\cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots) = -f(\cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots)$$

Ejemplo 1.5.13
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base, Llamamos $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$ y sea $\mathcal{S}_2 = \{\mathrm{Id}, s = (1, 2)\}$. Entonces

$$\underline{\mathrm{Id}}f = f \qquad M_b(\underline{s}f) = (\underline{s}f(e_i, e_j)) = (f(e_j, e_i)) = A^t$$

Es decir, f es simétrico si y solo si $A^t = A \iff A$ simétrica y f es antisimétrico si y solo si $A = -A^t \iff A$ antisimétrica

Ejemplo 1.5.14
Sea $\dim \mathbb{E} = n$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de $\mathbb{E}$, entonces

$$\begin{aligned} f\colon \overbrace{E \times \cdots \times E}^{n} &\to \mathbf{k} \\ (u_1, \ldots, u_n) &\mapsto det_B(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

Como f es multilineal ($\implies f \in T_n(\mathbb{E})$), f es antisimétrico por la proposición **??**.

Definición 1.5.15
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. con $car\mathbf{k} = 0$ y $f \in T_p(\mathbb{E})$. Llamamos simetrizado de f a

$$S(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \underline{s} f$$

y antisimetrizado de f a

$$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} f$$

Ejemplo 1.5.16
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{E}$

- Sea $f = e_1^* \otimes e_2^* \in T_2(\mathbb{E})$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, s = (1,2)\}$, entonces

$$S(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_1^*)$$
$$A(f) = \frac{1}{2}(e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*)$$

- Sea $g = e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^*$ y $\mathcal{S}_p = \{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$, entonces

$$S(g) = \frac{1}{6}(e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_3^* \otimes e_2^* + e_3^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_3^* \otimes e_1^*)$$

Observación 1.5.17 $s^{-1} \in \mathcal{S}_p$, por lo tanto no hace falta calcular s^{-1}

Ejemplo 1.5.18
Sea $f \in T_2(\mathbb{E})$ (formas bilineales) y sea $M_B(f) = A = (f(e_i, e_j))$, entonces

$$M_B(S(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) + M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A + A^t)$$

$$M_B(A(f)) = \frac{1}{2}\left(M_B(f) - M_B(f)^t\right) = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

Observación 1.5.19 Si $f \in T_2(\mathbb{E}) \implies f = S(f) + A(f)$

Proposición 1.5.20
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-ev. Consideramos $A, S \colon T_p(\mathbb{E}) \to T_p(\mathbb{E})$, entonces

i) A, S son lineales

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ y $f \in A_p(\mathbb{E}) \implies A(f) = f$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ y $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$

Demostración i) Queda como ejercicio. (pista: Consideramos $S(f+g)$)

ii) $f \in S_p(\mathbb{E}) \implies S(f) = f$ queda como ejercicio. Suponemos que $f \in A_p(\mathbb{E})$, entonces

$$A(f) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s)\underline{s}f\right) = \frac{1}{p!}\sum_{s\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(s)\left(\varepsilon(s)f\right) = \frac{p!f}{p!} = f$$

iii) $Im(S) = S_p(\mathbb{E})$ queda como ejercicio. Demostraremos que $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$. Por **??** sabemos que $A_p(\mathbb{E}) \subseteq Im(A)$, por lo tanto, resta ver que $g = A(h) \in A_p(\mathbb{E})$, sea $s \in \mathcal{S}_op$

$$\underline{s}h = \underline{s}\left(\frac{1}{p!}\sum_{r\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(r)\underline{r}f\right) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p}\varepsilon(r)\underline{s}(\underline{r}f)\right) =$$

$$= \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{r\in\mathcal{S}_p\varepsilon(sr)\underline{sr}h}\right) \overset{??}{=} \varepsilon(s)\frac{1}{p!}\left(\sum_{t\in\mathcal{S}_p\varepsilon(t)\underline{t}h}\right) = \varepsilon(s)g$$

Observación 1.5.21 Las mismas construcciones funcionan para tensores $(0,q)$, $T^q(\mathbb{E}) = T_q(\mathbb{E}^*)$, pero no funcionan para tensores (p,q) donde $p,q \neq 0$ porque las construcciones implican permutaciones.

1.6 Producto exterior

Observación 1.6.1 $S_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$, $A_p(\mathbb{E}) \subseteq T_p(\mathbb{E})$ y S_p, A_p s.e.v..

- $f \in S_p(\mathbb{E})$, $g \in S_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin S_{p+p'}(\mathbb{E})$
- $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_p(\mathbb{E})$ en general $f \otimes g \notin A_{p+p'}(\mathbb{E})$

Ejemplo 1.6.2
Sean ω_1, $\omega_2 \in T_1(\mathbb{E})$:

- $T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^* = S_1(\mathbb{E}) = A_1(\mathbb{E})$, porque $S_1 = \{Id\}$.
- $\omega_1 \otimes \omega_2 \notin S_2(\mathbb{E}), A_2(\mathbb{E})$.

Observación 1.6.3 El producto exterior (que definiremos) manda tensores antisimétricos a antisimétricos.

Observación 1.6.4 Lo haremos en $T_p(\mathbb{E})$, análogamente se hará en $T^q(\mathbb{E})$.

Definición 1.6.5 (producto exterior de orden 1)
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-e.v.; $\omega_1, \ldots, \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, el producto exterior de orden 1 es:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p!A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p)$$

Observación 1.6.6

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \cancel{p}! \left(\frac{1}{\cancel{p}!} \sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \underline{s} \left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p\right) \right) =$$

$$= \sum_{s\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(s) \left(\omega_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{s^{-1}(p)}\right) \overset{\varepsilon(s)=\varepsilon(s^{-1})}{=} \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)$$

Ejemplo 1.6.7
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

- $e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$
- $e_2^* \wedge e_1^* = \cdots = -e_1^* \wedge e_2^*$
- $e_1^* \wedge e_1^* = e_1^* \otimes e_1^* - e_1^* \otimes e_1^* = 0$

Proposición 1.6.8
Sean $\omega_1, \ldots \omega_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in A_p(\mathbb{E})$

ii) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \left(\alpha_i \overline{\omega_i} + \beta_i \overline{\overline{\omega_i}}\right) \wedge \cdots \wedge \omega_p = \alpha_i(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\omega_i} \wedge \cdots \wedge \omega_p) + \beta_i(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\overline{\omega_i}} \wedge \cdots \wedge \omega_p)$

iii) Sea $s \in \mathcal{S}_p$, $t = s^{-1}$, $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t} \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) = \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)$

iv) Si $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{E}$, $\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)(u_1, \ldots, u_p) = det\left(\omega_j(u_i)\right)$

v) Si $\omega_i = \omega_j, (i \neq j) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$

vi) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \neq 0 \iff \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$ son l.i.

Demostración

i) $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = p! A\left(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_p\right) \implies \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in Im(A) \overset{visto}{=} A_p(\mathbb{E})$

ii) Ejercicio (misma proposición que $\otimes$)

iii) $\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} = \underline{t}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)$ (Ejercicio, misma proposición que $\otimes$)

$$\omega_{s(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{s(p)} \overset{\textbf{??+??}}{=} \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r) \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) =$$

$$\overset{\varepsilon^2(s)=1}{=} \varepsilon(s) \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \overbrace{\varepsilon(r)\varepsilon(s)}^{\varepsilon(rs)} \left(\omega_{rs(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{rs(p)}\right) \overset{rs=m\in\mathcal{S}_p}{=} \varepsilon(s) \sum \varepsilon(m) \left(\omega_{m(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{m(p)}\right) =$$

$$= \varepsilon(s) \left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)$$

iv)

$$\overbrace{(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p)}^{T_p(\mathbb{E})}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{r(p)}\right)(u_1, \ldots, u_p) =$$

$$\sum_{r\in\mathcal{S}_p} \varepsilon(r)\left(\omega_{r(1)}(u_1) \ldots \omega_{r(p)}(u_p)\right) \overset{\text{def det}}{=} det(\omega_j(u_i))_{i,j}$$

v)

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \overset{\mathbf{??}(iii)}{=} (-1)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_i \wedge \cdots \wedge \omega_p \implies$$

$$\implies 2\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right) = 0 \overset{car\mathbf{k}\neq 2}{\implies} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$$

vi) $\implies$

Suponemos que son l.d. y que $\omega_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j$:

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \left(\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j \omega_j\right) \overset{\mathbf{??}(ii)}{=} \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_j\right) \overset{\mathbf{??}(v)}{=} 0 \;!!$$

$\Longleftarrow$

Sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $B^* = \{\omega_1, \ldots, \omega_p, \overbrace{\omega_{p+1}, \ldots, \ldots, \omega_n}^{\text{Steinitz}}\}$ la base dual de B, tenemos que:

$$\left(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p\right)(u_1, \ldots, u_p) \overset{\mathbf{??}(iv)}{=} det\left(\omega_j\left(u_i\right)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Observación 1.6.9 En el caso particular de $B = \{e_1, \ldots e_n\}$ base de $\mathbb{E}$,

$$I = \{i_1, \ldots i_p\}, \; 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n;$$
$$J = \{j_1, \ldots j_p\}, \; 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n.$$

$$\epsilon_{IJ} = \left(e^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{i_p}\right)\left(e_{j_1}, \cdots, e_{j_p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J \\ 0 & \text{en el caso contrario} \end{cases}$$

En efecto, si $\exists j_k \in J$, $j_k \notin I$, entonces en virtud del cálculo dado por **??(??)** , en la posición k hay una fila de ceros.
Por otro lado, si $I = J$ entonces tenemos el determinante de la matriz identidad.
Observemos también que si $I = J$ pero no están ordenadas crecientemente, $\epsilon_{IJ} = \pm 1$ en función de las permutaciones que ordenan estos conjuntos.

Teorema (1.6.10)
Sea $\mathbb{E}$ un $\mathbf{k}$-e.v. de $\dim n$, sea $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y sea $p \leq n$.

i) $\dim A_p(\mathbb{E}) = \binom{n}{p}$.

ii) Una base de A_p es $\left\{e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}\right\} = \tilde{B}$, $i \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

iii)

Ejemplo 1.6.11
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

Espacio	dim	base	coordenadas
$A_1(\mathbb{E}) = T_1(\mathbb{E})(= \mathbb{E}^*)$	3	$\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$	$w = (a_1, b_1, c_1)$
$A_2(\mathbb{E}) \subseteq T_2(\mathbb{E})$	3	$\{e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_3^*\}$	$w_1 \wedge w_2 =(w_1 \wedge w_2)(e_1, e_2)e_1^* \wedge e_2^* + (w_1 \wedge w_2)(e_1, e_3)e_1^* \wedge e_3^* + (w_1 \wedge w_2)(e_2, e_3)e_2^* \wedge e_3^*$
$A_3(\mathbb{E}) \subseteq T_3(\mathbb{E})$	1	$\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*\}$	$t = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = (t(e_1, e_2, e_3))$

Además, si $w_1 = (a_1, b_1, c_2)_{B^*}$, $w_2 = (a_2, b_2, c_2)_{B^*}$ y $w_3 = (a_3, b_3, c_3)_{B^*}$

$$w_1 \wedge w_2 = \begin{vmatrix} w_1(e_1) & w_1(e_2) \\ w_2(e_1) & w_2(e_2) \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^*)$$

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 = (w_1 \wedge w_2 \wedge w_3)(e_1, e_2, e_3)(e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*)$$

Definición 1.6.12
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$ y $g \in A_q(\mathbb{E})$. Definimos el producto exterior de f y g como

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!q!} A(f \otimes g)$$

Proposición 1.6.13
Sea $\mathbb{E}$ un **k**-ev. y sean $f \in A_p(\mathbb{E})$, $g \in A_q(\mathbb{E})$ y $h \in A_r(\mathbb{E})$.

i) $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h) = f \wedge g \wedge h$

ii) $f \wedge g = (-1)^{p+q} g \wedge f$

iii) $\wedge$ es lineal en cada factor.

Observación 1.6.14 $w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_r = w_1 \wedge (w_2 \wedge (\cdots w_{r-1} \wedge (w_r)))$

Ejemplo 1.6.15
Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$, $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $f, g \in A_2(\mathbb{E})$

- $f = e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*$
- $g = e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*$

$$f \wedge g = (e_1^* \wedge e_2^* + e_2^* \wedge e_3^* + e_3^* \wedge e_4^*) \wedge (e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^*) =$$

$$= \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*} + \cancelto{0}{e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} +$$

$$+ e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^* + \cancelto{0}{e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_3^*} = e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_1^* \wedge e_2^*$$