EDIM I: Informe calefacció

Raquel García Bellés, Miquel Saucedo Cuesta

Introducció i supòsits

Se'ns demana pensar diversos models pel funcionament del temporitzador de la calefacció d'un habitatge. Així doncs, caldrà tenir en compte factors com l'horari de les persones que hi viuen, el rang de temperatures que es considera "agradable", i la despesa energètica.

L'evolució temporal de la temperatura vindrà donada per l'equació diferencial:

$$T' = q(t) - k(T - T_e(t)), \quad T(t_0) = T_0 \tag{1}$$

on T és la temperatura a l'interior, $T_e(t)$ és la temperatura exterior, $q(t)$ és la funció que quantifica l'acció de la calefacció, i k és una constant que mesura el ritme al qual s'intercanvia calor amb l'exterior, i que depèn, entre d'altres coses, de característiques de l'habitatge com la geometria i l'aïllament tèrmic. Aquesta constant pot determinar-se empíricament si es disposa dels valors de la temperatura exterior i interior de l'habitatge per a diferents temps. En el nostre model prendrem $k = 0.1$, ja que fent assajos amb $q(t) = 0$, aquest valor ens donava un ritme raonable[1] d'intercanvi de calor.

Considerarem la temperatura de l'habitatge en el transcurs de 24 hores. En aquesta escala temporal, és una bona aproximació suposar que la temperatura exterior varia seguint una funció sinusoidal segons:

$$T_e(t) = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} + \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \sin(\omega t + \pi) \tag{2}$$

Amb $T_{max} = 15^{o}$C, $T_{min} = 5^{o}$C i $\omega = 2\pi/24$. Hem escollit aquestes temperatures per a simular la temperatura d'un dia d'hivern en una ciutat com Barcelona [**?**]. El desfasament de π s'ha introduït per tal que a les $6:00$h de la matinada es doni la temperatura mínima.

En cada model proposarem una $q(t)$, i valorarem la seua eficiència segons una estimació de la despesa energètica, E, que calcularem mitjançant:

$$E = \int_{t_0}^{t_0+24} q(t)dt \tag{3}$$

Suposarem que l'horari en el qual hi ha gent a l'interior és de $17:00$h fins a $9:00$h del dia següent, de manera que hem fixat $q(t \in [9, 16]) = 0$ en tots els models amb l'objectiu d'estalviar energia. A les 16:00h s'engegarà la calefacció per tal d'obtenir la temperatura desitjada a les 17:00h. També suposarem que els valors òptims de temperatura pels habitants estan entre 22 i 23^{o}C. A l'hora de resoldre l'equació diferèncial (1), prendrem com a condicions inicials $t_0 = 16$ i $T_0 = T_e(t_0)$ en tots els models.

[1] Amb la $T_e(t)$ definida en l'equació (2), de les $23:00$h a les $24:00$h la temperatura baixa aproximadament 1^{o}C.

Models

Model 1

Aquest model pretén imitar el funcionament d'un termòstat, de manera que quan la temperatura baixa de 23ºC s'activa la calefacció. A més la calor subministrada és proporcional a la diferència entre la temperatura actual a l'interior i la desitjada.

Model 1.1

En aquest model pretenem mantenir la temperatura entre 22 i 23ºC mentre hi hagi gent a l'interior. Per això definim:

$$q(t \in [16, 9+24]) = \begin{cases} r(23-T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{4}$$

on r és un paràmetre que hem ajustat de manera que a les 17:00h la temperatura sigui superior a 22ºC, i que fins a les 9:00h del dia següent sempre es mantingui per sobre d'aquesta temperatura. A més hem pres el valor que ens donava menor despesa energètica, aquest ha sigut $r = 2.43$. Per simplicitat, hem resolt l'equació diferencial (1) numèricament amb el métode de Runge-Kutta d'ordre 4, i hem obtingut la despesa energètica d'aquest model integrant numèricament l'expressió (3), aquesta ha estat de $E = 29.30$. Els resultats obtinguts per a l'evolució de la temperatura amb aquest model, així com la funció $q(t)$ es representen en la figura 1.

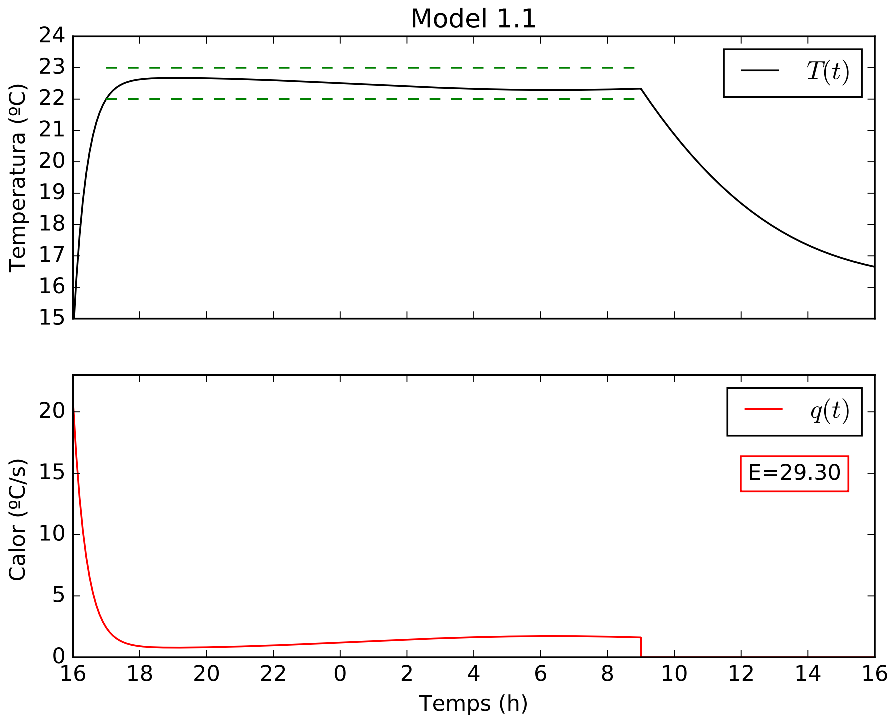


Figura 1: La gràfica superior mostra l'evolució de la temperatura a l'interior de l'habitatge en funció del temps. Les línies puntejades senyalen el rang de temperatures que es considera acceptable. La gràfica inferior mostra el comportament de $q(t)$. Observem que en cap moment s'han assolit els 23ºC.

Model 1.2

Aquest model és una variació de l'anterior, en el qual considerem que desde les 23:00h fins a les 7:00h els habitants estan dormint. És una pràctica habitual posar la calefacció més baixa per la nit per tal d'estalviar energia, tot i això tampoc es pot permetre que la temperatura baixi excesivament per a mantenir el comfort dels habitants. Així doncs, en aquesta franja horària la calefacció s'activarà quan la temperatura baixi de 18ºC, i a les 6:00h tornarà a posar-se més forta per aconseguir que a les 7:00h la temperatura torni a ser de 22ºC. Definim:

$$q(t \in [16, 23]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{5}$$

$$q(t \in [23, 6 + 24]) = \begin{cases} r_2(18 - T) & \text{si} \quad T < 18 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 18 \end{cases} \tag{6}$$

$$q(t \in [6 + 24, 9 + 24]) = \begin{cases} r_3(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{7}$$

on r_1, r_2 i r_3 són paràmetres. r_1 i r_3 s'han ajustat de manera que entre les 17:00h i les 23:00h, i entre les 7:00h i 9:00h del dia següent respectivament la temperatura sigui superior a 22ºC. El paràmetre r_3 s'ha ajustat per no permetre que la temperatura baixi dels 17ºC entre les 23:00h i les 6:00h del dia següent. Per a tots tres s'ha triat aquell valor que minimitzava la despesa energètica i aquests han sigut: $r_1 = 2.43$, $r_2 = 1.16$ i $r_3 = 2.64$. L'equació diferèncial s'ha resolt novament utilitzant el mètode Runge-Kutta d'ordre 4, i la despesa energètica integrant numèricament l'expressió (3), aquesta ha estat de $E = 27.22$. Els resultats obtinguts es representen en la figura 2.

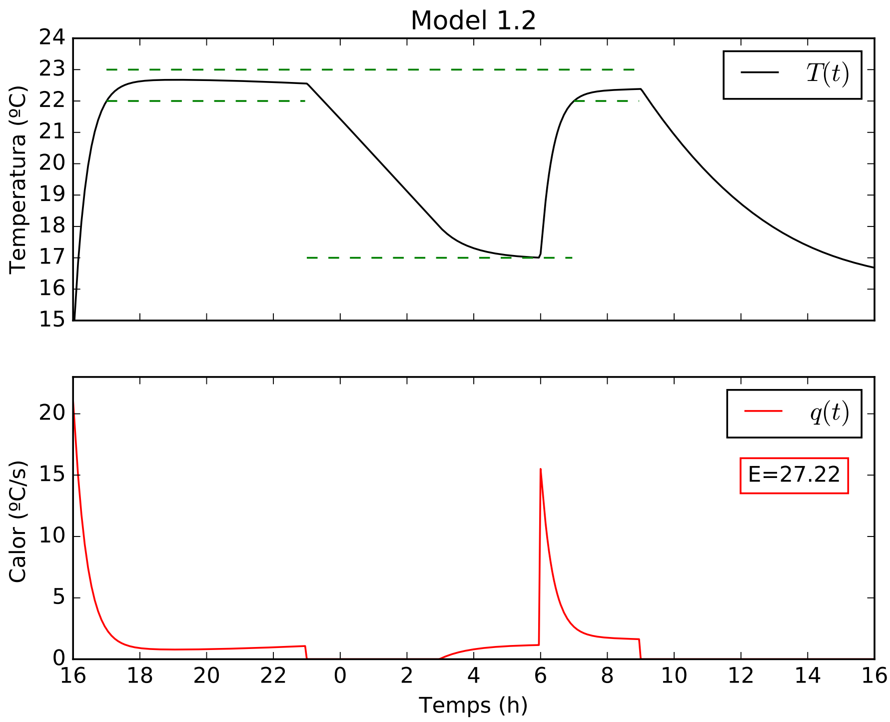


Figura 2: Evolució de la temperatura en funció del temps i $q(t)$ aplicada en el model 1.2. Observem com l'expressió (6) suavitza la caiguda de temperatura durant la nit. També notem que ha hi hagut una disminució de la despesa energètica de més de 2 punts respecte al model 1.1.

En els models posterior permetrem que entre les 23:00h i les 7:00h la temperatura estigui entre 17 i 22ºC per tal de reduir la despesa energètica.

Model 2

Observem que si tenim una funció:

$$f(t) = k(T - T_e(t)) \tag{8}$$

introduïnt (8) com a $q(t)$ en (1), obtenim $T' = 0$, per tant aquesta funció permet mantenir la temperatura constant. Així doncs considerem per a aquest model:

$$q(t \in [16,17]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{9}$$

$$q(t \in [17,23]) = k(T - T_e(t)) \tag{10}$$

$$q(t \in [23, 6+24]) = \begin{cases} k(T - T_e(t)) & \text{si} \quad T \leq 17 \\ 0 & \text{si} \quad T > 17 \end{cases} \tag{11}$$

$$q(t \in [6+24, 7+24]) = \begin{cases} r_2(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{12}$$

$$q(t \in [7+24, 9+24]) = k(T - T_e(t)) \tag{13}$$

r_1 i r_2 són paràmetres que s'han ajustat per tal d'obtenir una temperatura de 22ºC a les 17:00h i a les 7:00h, si es comença a pujar la temperatura a les 16:00h i a les 6:00h respectivament, aquests valen: $r_1 = 2.43$ i $r_2 = 2.64$. L'equació diferencial (1) s'ha resolt numèricament utilitzant el mètode Runge-Kutta d'ordre 4, i la despesa energètica s'ha calculat integrant numèricament l'expresió (3), aquesta ha sigut $E = 26.49$. En la figura 3 és representen els resultats obtinguts.

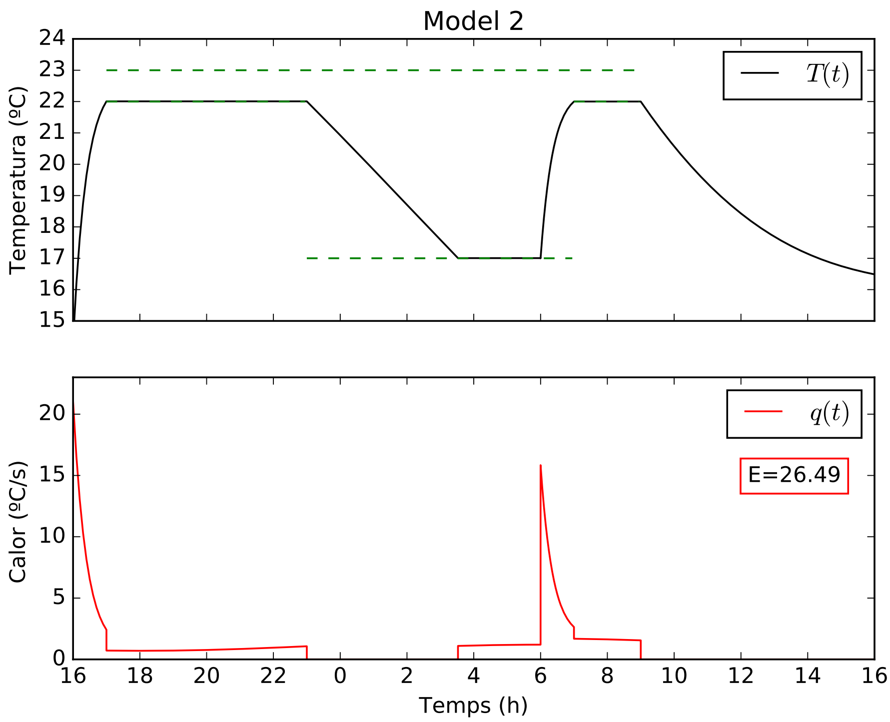


Figura 3: blabl

Model 3

Observem que si tenim una funció $f(t)$ que depén de com estigui variant la temperatura de la casa, segons:

$$f(t) = \alpha T'(t) \tag{14}$$

on α és una constant. Aleshores al introduïr (14) com a $q(t)$ en (1) obtenim:

$$T' = -\frac{k}{1-\alpha}(T - T_e(t)) \tag{15}$$

de manera que si anomenem $k' = k/(1-\alpha)$, aquesta funció és equivalent a poder canviar la constant k. Així doncs, en aquest model considerem la següent $q(t)$:

$$q(t \in [16, 17]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{16}$$

$$q(t \in [17, 23]) = \alpha_1 T' \tag{17}$$

$$q(t \in [23, 6+24]) = \alpha_2 T' \tag{18}$$

$$q(t \in [6+24, 7+24]) = \begin{cases} r_2(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{19}$$

$$q(t \in [7+24, 9+24]) = \alpha_3 T' \tag{20}$$

on r_1 i r_2 són paràmetres que s'han ajustat amb l'objectiu que la temperatura arribi a 22.5ºC a les 17:00h i a les 7:00h si es comença a pujar la temperatura a les 16:00h i a les 6:00h respectivament, s'ha obtingut $r_1 = 3.38$ i $r_2 = 4.16$. α_1 i α_3 s'han calculat a partir de les seues respectives k', per tal d'aconseguir que la temperatura baixi 0.5ºC entre les 17:00h i les 23:00h, i entre les 7:00h i les 9:00h respectivament, aquestes són: $\alpha_1 = -8.994$ i $\alpha_3 = -5.594$. Així mateix, α_2 s'ha ajustat per a que la temperatura baixi 5ºC entre les 23:00h i les 6:00h, i s'ha fixat en $\alpha_2 = -0.707$. Com en els models anteriors, l'equació diferencial (1) s'ha resolt numèricament, i la despesa energètica s'ha calculat integrant numèricament l'expresió (3), aquesta ha sigut $E = 27.49$. En la figura 4 es mostra l'evolució de la temperatura, així com la $q(t)$.

Fer que la temperatura pugi fins a 22.5ºC ha sigut una desició arbitràira, però observem que degut a la part de $q(t)$ que s'encarrega de pujar la temperatura, expressións (16) i (19), augmentar aquesta fins a valors propers als 23ºC és molt costós energèticament.

Model 4

Suposem ara que podem proporcionar una $q(t)$ infinita durant un temps infinitessimal δt, de manera que instantàniament es pot variar la temperatura una quantitat ΔT. Es pot fer una estimació de la despesa energètica d'aquest model, ja que si integrem l'equació (1):

$$\int_{T(t^*)}^{T(t^*+\delta t)} dT = \int_{t^*}^{t^*+\delta t} q(t)dt - k\int_{t^*}^{t^*+\delta t} (T - T_e)dt \tag{21}$$

obtenim:

$$E = \int_{t^*}^{t^*+\delta t} q(t)dt \leq \int_{T(t^*)}^{T(t^*+\delta t)} dT + kC\int_{t^*}^{t^*+\delta t} dt = \Delta T + kC\delta t \tag{22}$$

on C és una constant que compleix $|T - T_e| < C$. Com que kC està fitat, i δt és arbitrariament petit, tenim que $E \approx \Delta T$.

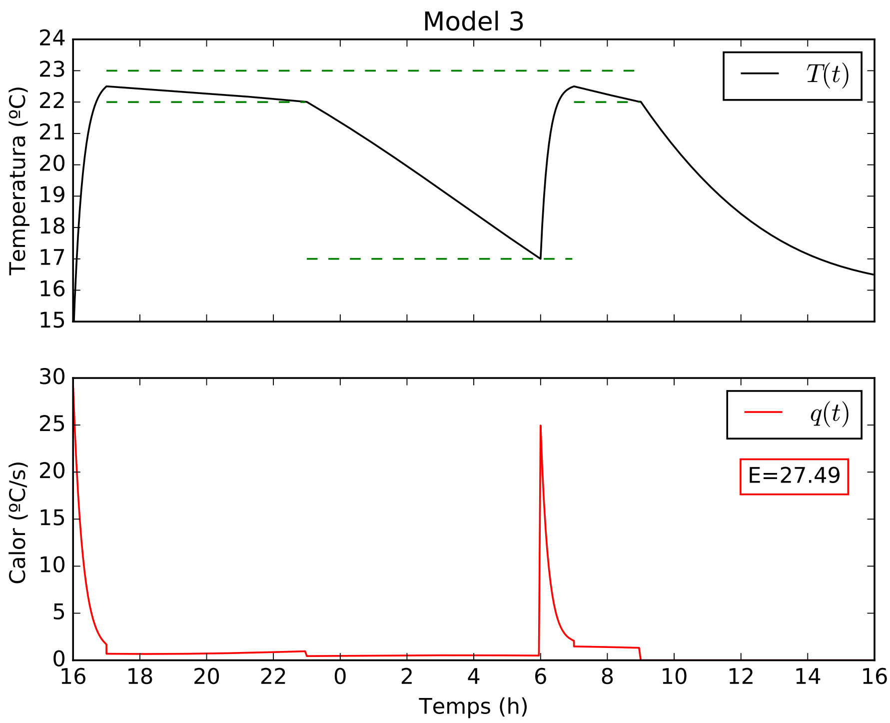
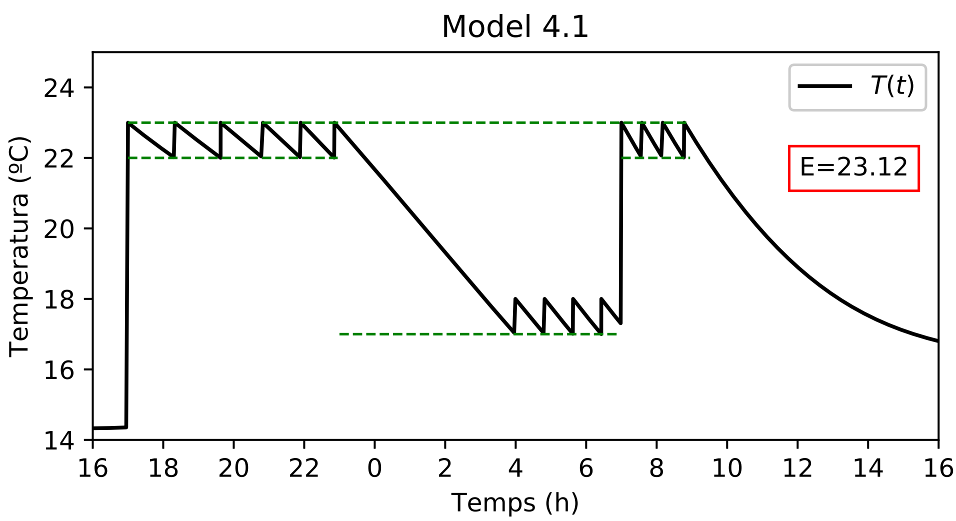


Figura 4: Evolució de la temperatura en l'habitatge i $q(t)$ aplicada. Les línies puntejades marquen el rang de temperatures que es considera acceptable en cada tram. Observem que aquest model es basa en poder regular el ritme al qual baixa la temperatura, per tant sempre cal que inicialment aquesta sigui superior a la que es considera mínima acceptable. El més eficient energèticament és fer que aquest mínim s'assoleixi al final de cada tram.

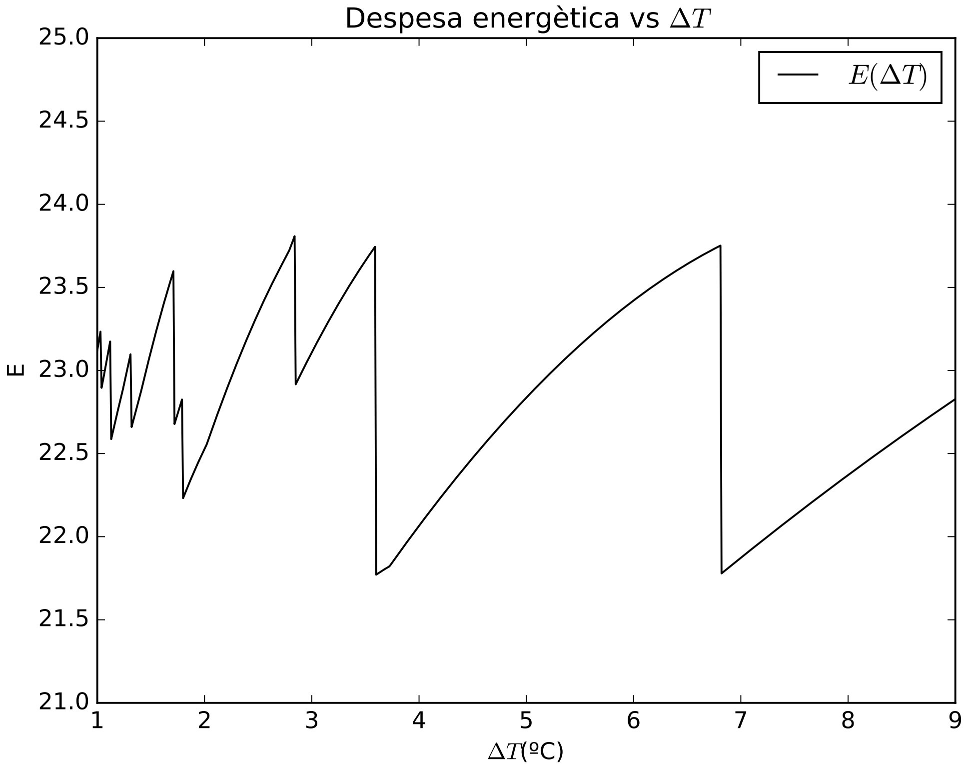
Model 4.1

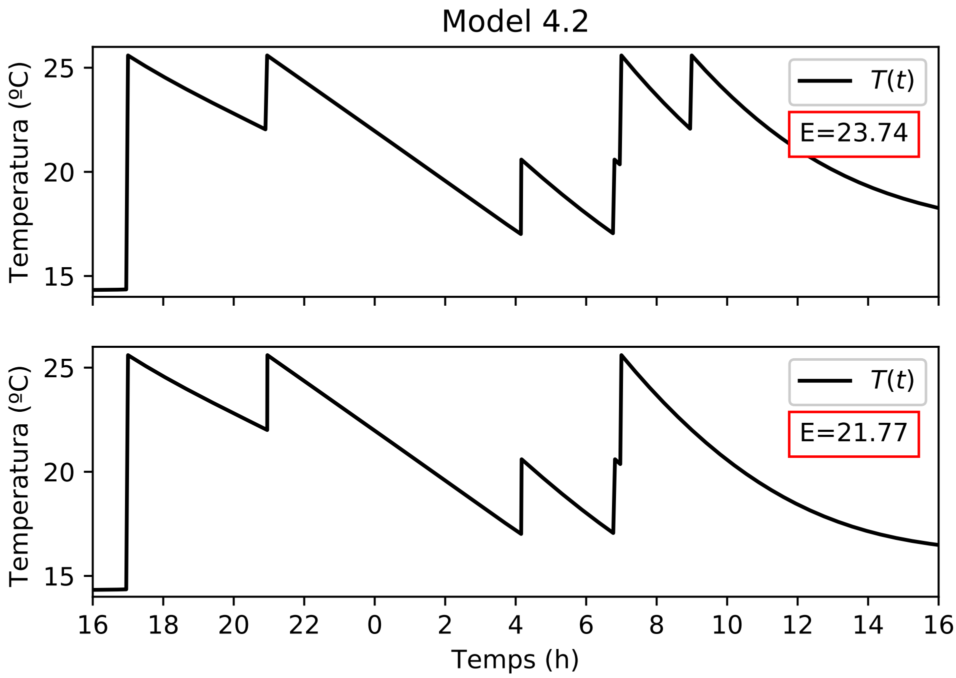
En aquest model la calefacció s'encén cada cop que la temperatura arriba o està per sota de la temperatura mínima acceptable, 22 o 17°C segons el tram horari, de manera que aquesta pugi instantàniament $\Delta T = 1$°C, excepte en els canvis de tram en que puja fins arribar a la temperatura mínima acceptable més 1°C. La simulació s'ha aconseguit resolent cada cop que s'engegués la calefacció l'equació diferencial (1) amb $q(t) = 0$, variant les condicions inicials de (t_0, T_0) de ma



Model 4.2

Mirem com podem optimitzar la despesa energètica si variem ΔT





Conclusions

Annex

```
#CONSTANTS

TMin=5
TMax=15
w=2*pi/24
k=0.1
stepSize=.05


#UTILITATS

def integrarPunts(l,stepSize):
area=0
for i in range(len(l)-1):
area+=(l[i][1]+l[i+1][1])/2 #àrea trapezi
return area*stepSize

def Te(t): #temperatura ambient
return (TMin+TMax)/2+(TMax-TMin)*sin(w*t+pi)/2

def free(temperaturaIni,tIni,k): #solució analítica evolució lliure
return desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te(t)),[T(t),t],ics=[tIni,temperaturaIni]).expand()

#MODELS


def calorTotDia(T,TSup): #Calor termòstat, s'apaga si la temperatura supera TSup
return (TSup-T)*(unit_step(T)-unit_step(T-TSup))


def termostatTotDia(r,horaFinal,horaInicial,Tinicial,restriccio,TSup): #Per ajustar els paràmetres r als diversos models
#diu si amb una r donada s'arriba a la temperatura desitjada, i en cas afirmatiu, quant es gasta
eq2=diff(T(t),t)==(r*calorTotDia(T(t),TSup)-k*(T(t)-Te(t)))
sol2=desolve_rk4(eq2, T, step=stepSize, ics=[horaInicial,Tinicial],end_points=horaFinal)
if sol2[-1][1]<restriccio:
return 0,0,0

q2=[(i[0],r*calorTotDia(i[1])) for i in sol2]
energiaGastada=integrarPunts(q2,stepSize).n() #energia gastada
return sol2,energiaGastada,q2





def calorTram(Tini,tf,tini,k): #evolució lliure començant a tini amb temperatura Tini fins a tf amb k paràmetre
sol=free(Tini,tini,k) # per model 3
alpha=1-0.1/k
dsol=diff(sol,t)
temp=[(i,sol(i)) for i in srange(tini,tf,stepSize)]
calor=[(i,alpha*dsol(i)) for i in srange(tini,tf,stepSize)]
return temp,calor




def model4(tSD,tID,tSN,tIN):
horaEntrada=17

horaEntrada=17
```

```
    horaDormir=23
    horaDespertar=7+24
    horaSortir=9+24
    punts=[]
    tA=horaEntrada
    tSupDia=tSD
    tInfDia=tID
    tSupNit=tSN
    tInfNit=tIN
    despesa=0


    while(tA<horaDormir):
    evolucionLibre=desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te(t)),[T(t),t],ics=[tA,tSupDia]).expand()
    try:#miro cuanto tarda en pasar de tSupDia a tInfDia
    tiempoTarda=find_root(evolucionLibre-tInfDia,tA,horaDormir)
    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,tiempoTarda,stepSize))))

    tA=tiempoTarda
    despesa=tSupDia-tInfDia+despesa

    except:
    #Ja no s'arriba a tInfDia mes
    break

    tB=find_root(evolucionLibre-tInfNit,tA,horaDespertar)
    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,tB,stepSize))))
    tA=tB
    while(tA<horaDespertar):
    evolucionLibre=desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te(t)),[T(t),t],ics=[tA,tSupNit]).expand()
    try:
    tiempoTarda=find_root(evolucionLibre-tInfNit,tA,horaDespertar)#miro cuanto tarda en pasar de

    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,tiempoTarda,stepSize))))
    tA=tiempoTarda
    despesa=tSupNit-tInfNit+despesa
    except:
    #Ja no s'arriba a tInfNit es
    break



    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,horaDespertar,stepSize))))
    despesa+=tSupDia-evolucionLibre(horaDespertar)
    tA=horaDespertar
    while(tA<horaSortir):
    evolucionLibre=desolve(diff(T(t),t)==-k*(T(t)-Te(t)),[T(t),t],ics=[tA,tSupDia]).expand()
    try:
    tiempoTarda=find_root(evolucionLibre-tInfDia,tA,horaSortir)#miro cuanto tarda en pasar de

    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,tiempoTarda,stepSize))))
    tA=tiempoTarda
    despesa=tSupDia-tInfDia+despesa
    except:
    punts+=list((map(lambda x:(x,evolucionLibre(x).n()),srange(tA,horaSortir+stepSize,stepSize))))
    break
    #ho poso aqui per periodicitat ,el primer dia sera diferent pero a partir del segon sera aixi
    despesa+=tSupDia-evolucionLibre(horaEntrada+24)
    return despesa,punts
```