EDIM I: Informe calefacció

Raquel García Bellés, Miquel Saucedo Cuesta

Introducció i supòsits

Se'ns demana pensar diversos models pel funcionament del temporitzador de la calefacció d'un habitatge. Així doncs, caldrà tenir en compte factors com l'horari de les persones que hi viuen, el rang de temperatures que es considera "agradable", i la despesa energètica.

L'evolució temporal de la temperatura vindrà donada per l'equació diferencial:

$$T' = q(t) - k(T - T_e(t)), \quad T(t_0) = T_0 \tag{1}$$

on T és la temperatura a l'interior, $T_e(t)$ és la temperatura exterior, $q(t)$ és la funció que quantifica l'acció de la calefacció, i k és una constant que mesura el ritme al qual s'intercanvia calor amb l'exterior, i que depèn, entre d'altres coses, de característiques de l'habitatge com la geometria i l'aïllament tèrmic. Aquesta constant pot determinar-se empíricament si es disposa dels valors de la temperatura exterior i interior de l'habitatge per a diferents temps. En el nostre model prendrem $k = 0.1$, ja que fent assajos amb $q(t) = 0$, aquest valor ens donava un ritme raonable[1] d'intercanvi de calor.

Considerarem la temperatura de l'habitatge en el transcurs de 24 hores. En aquesta escala temporal, és una bona aproximació suposar que la temperatura exterior varia seguint una funció sinusoidal segons:

$$T_e(t) = \frac{T_{max} + T_{min}}{2} + \frac{T_{max} - T_{min}}{2} \sin(\omega t + \pi) \tag{2}$$

Amb $T_{max} = 15^{o}$C, $T_{min} = 5^{o}$C i $\omega = 2\pi/24$. Hem escollit aquestes temperatures per a simular la temperatura d'un dia d'hivern en una ciutat com Barcelona [**?**]. El desfasament de π s'ha introduït per tal que a les $6:00$h de la matinada es doni la temperatura mínima.

En cada model proposarem una $q(t)$, i valorarem la seua eficiència segons una estimació de la despesa energètica, E, que calcularem mitjançant:

$$E = \int_{t_0}^{t_0+24} q(t)dt \tag{3}$$

Suposarem que l'horari en el qual hi ha gent a l'interior és de $17:00$h fins a $9:00$h del dia següent, de manera que hem fixat $q(t \in [9, 16]) = 0$ en tots els models amb l'objectiu d'estalviar energia. A les 16:00h s'engegarà la calefacció per tal d'obtenir la temperatura desitjada a les 17:00h. També suposarem que els valors òptims de temperatura pels habitants estan entre 22 i 23^{o}C. A l'hora de resoldre l'equació diferèncial (1), prendrem com a condicions inicials $t_0 = 16$ i $T_0 = T_e(t_0)$ en tots els models.

[1] Amb la $T_e(t)$ definida en l'equació (2), de les $23:00$h a les $24:00$h la temperatura baixa aproximadament 1^{o}C.

Models

Model 1: Termòstat

Aquest model pretén imitar el funcionament d'un termòstat, de manera que quan la temperatura baixa de 23ºC s'activa la calefacció. A més la calor subministrada és proporcional a la diferència entre la temperatura actual a l'interior i la desitjada.

Model 1.1

En aquest model pretenem mantenir la temperatura entre 22 i 23ºC mentre hi hagi gent a l'interior. Per això definim:

$$q(t \in [16, 9+24]) = \begin{cases} r(23-T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{4}$$

on r és un paràmetre que hem ajustat de manera que a les 17:00h la temperatura sigui superior a 22ºC, i que fins a les 9:00h del dia següent sempre es mantingui per sobre d'aquesta temperatura. A més hem pres el valor que ens donava menor despesa energètica, aquest ha sigut $r = 2.43$. Per simplicitat, hem resolt l'equació diferencial (1) numèricament amb el mètode de Runge-Kutta d'ordre 4, i hem obtingut la despesa energètica d'aquest model integrant numèricament l'expressió (3), aquesta ha estat de $E = 29.30$. Els resultats obtinguts per a l'evolució de la temperatura, així com la funció $q(t)$ es representen en la figura 1.

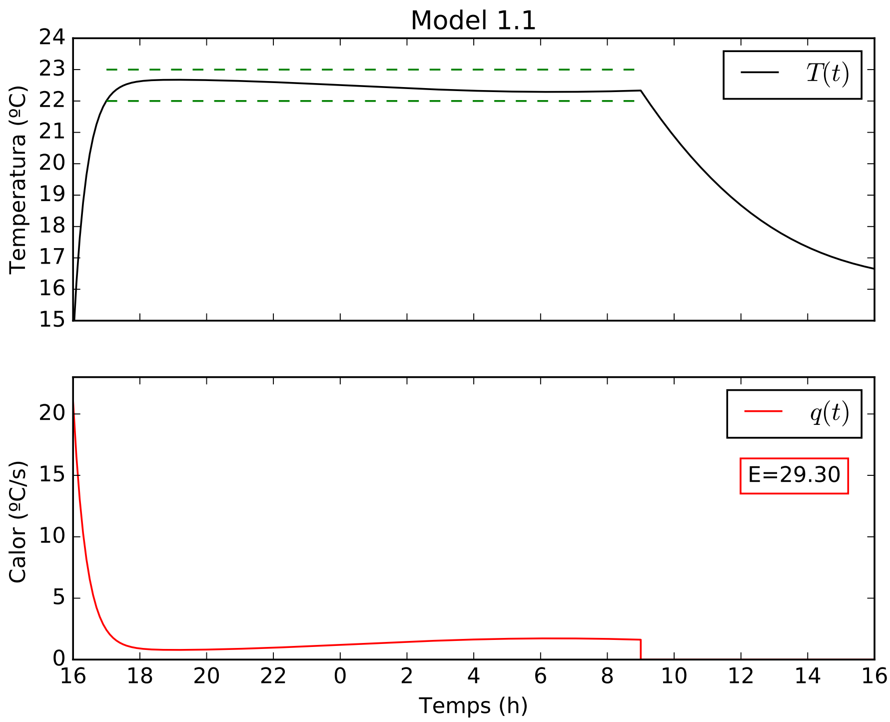


Figura 1: La gràfica superior mostra l'evolució de la temperatura a l'interior de l'habitatge en funció del temps. La gràfica inferior mostra el comportament de $q(t)$. Observem que en cap moment s'han assolit als 23°C.

Model 1.2

Aquest model és una variació de l'anterior, en el qual considerem que desde les 23 : 00h fins a les 7 : 00h els habitants estan dormint, per tant en aquesta franja horària la calefacció s'activarà quan la temperatura baixi de 18ºC. A les 6 : 00h es torna a posar més forta la calefacció per aconseguir que a les 7:00h la temperatura torni a ser de 22ºC. Així doncs, definim:

$$q(t \in [16, 23]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{5}$$

$$q(t \in [23, 6 + 24]) = \begin{cases} r_2(18 - T) & \text{si} \quad T < 18 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 18 \end{cases} \tag{6}$$

$$q(t \in [6 + 24, 9 + 24]) = \begin{cases} r_3(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{7}$$

on r_1, r_2 i r_3 són paràmetres. r_1 i r_3 s'han ajustat de manera que entre les 17:00h i les 23:00h, i entre les 7:00h i 9:00h del dia següent respectivament la temperatura sigui superior a 22ºC. El paràmetre r_3 s'ha ajustat per no permetre que la temperatura baixi dels 17ºC entre les 23:00h i les 6:00h del dia següent. Per a tots tres s'ha triat aquell valor que minimitzava la despesa energètica i aquests han sigut: $r_1 = 2.43$, $r_2 = 1.16$ i $r_3 = 2.64$. L'equació diferèncial s'ha resolt novament utilitzant el mètode Runge-Kutta d'ordre 4, i la despesa energètica integrant numèricament l'expressió (3), aquesta ha estat de $E = 27.22$. Els resultats obtinguts es representen en la figura 2.

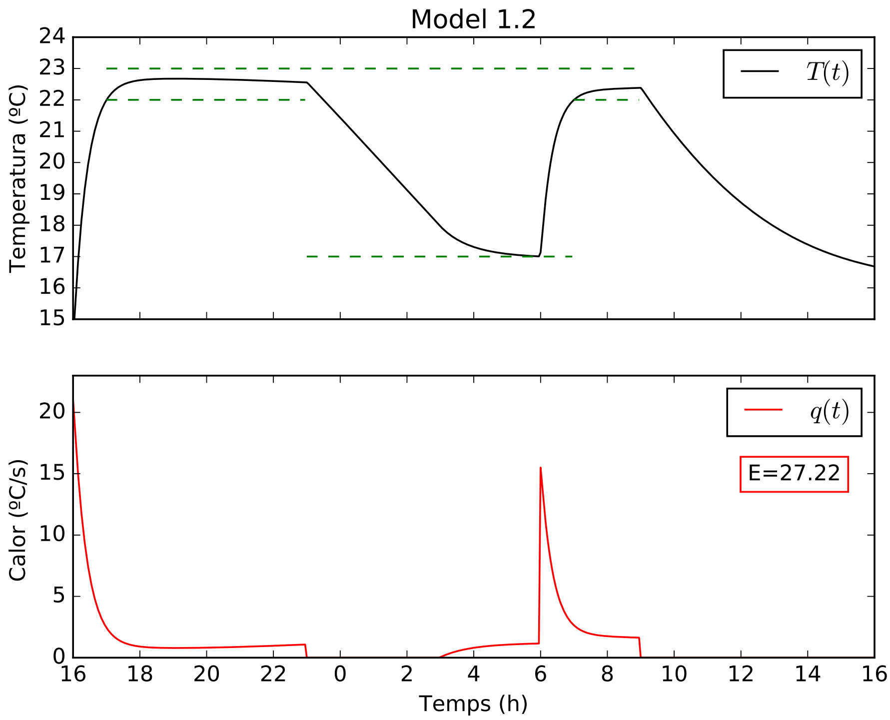


Figura 2: labla

En els models posterior permetrem que entre les 23 : 00h i les 7 : 00h la temperatura estigui entre 17 i 22ºC per tal de reduir la despesa energètica.

Model 2

Observem que si tenim una funció:

$$f(t) = k(T - T_e(t)) \tag{8}$$

introduïnt (8) com a $q(t)$ en (1), obtenim $T' = 0$, per tant aquesta funció permet mantenir la temperatura constant. Així doncs considerem:

$$q(t \in [16, 17]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{9}$$

$$q(t \in [17, 23]) = k(T - T_e(t)) \tag{10}$$

$$q(t \in [23, 6 + 24]) = \begin{cases} k(T - T_e(t)) & \text{si} \quad T \leq 17 \\ 0 & \text{si} \quad T > 17 \end{cases} \tag{11}$$

$$q(t \in [6 + 24, 7 + 24]) = \begin{cases} r_2(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{12}$$

$$q(t \in [7 + 24, 9 + 24]) = k(T - T_e(t)) \tag{13}$$

r_1 i r_2 són paràmetres que s'han ajustat per tal d'obtenir una temperatura de 22ºC a les 17:00h i a les 7:00h, si es comença a pujar la temperatura a les 16:00h i a les 6:00h respectivament, aquests valen: $r_1 =$ i $r_2 =$ **DIR QUANT VALEN LES R**. L'equació diferencial (1) s'ha resolt numèricament utilitzant el mètode Runge-Kutta d'ordre 4, i la despesa energètica s'ha calculat integrant numèricament l'expresió (3), aquesta ha sigut $E = 26.49$. En la figura 3 és representen els resultats obtinguts.

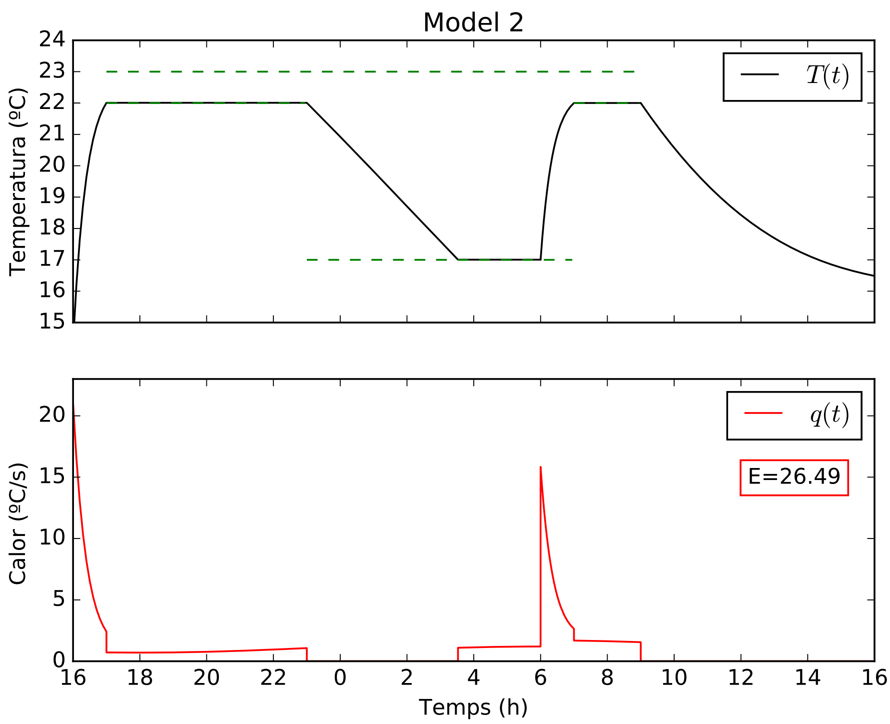


Figura 3: blabl

Model 3

Observem que si tenim una funció $f(t)$ que depén de com estigui variant la temperatura de la casa, segons:

$$f(t) = \alpha T'(t) \tag{14}$$

on α és una constant. Aleshores al introduïr (14) com a $q(t)$ en (1) obtenim:

$$T' = -\frac{k}{1-\alpha}(T - T_e(t)) \tag{15}$$

de manera que si anomenem $k' = k/(1-\alpha)$, aquesta funció és equivalent a poder canviar la constant k. Així doncs, en aquest model considerem la següent $q(t)$:

$$q(t \in [16, 17]) = \begin{cases} r_1(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{16}$$

$$q(t \in [17, 23]) = \alpha_1 T' \tag{17}$$

$$q(t \in [23, 6 + 24]) = \alpha_2 T' \tag{18}$$

$$q(t \in [6 + 24, 7 + 24]) = \begin{cases} r_2(23 - T) & \text{si} \quad T < 23 \\ 0 & \text{si} \quad T \geq 23 \end{cases} \tag{19}$$

$$q(t \in [7 + 24, 9 + 24]) = \alpha_3 T' \tag{20}$$

on r_1 i r_2 són paràmetres que s'han ajustat amb l'objectiu que la temperatura arribi a 22.5ºC a les 17:00h i a les 7:00h si es comença a pujar la temperatura a les 16:00h i a les 6:00h respectivament, s'ha obtingut $r_1 =$ i $r_2 =$**POSAR LO QUE VALEN LES R**. α_1 i α_3 s'han calculat a partir de les seues respectives k', per tal d'aconseguir que la temperatura baixi 0.5ºC entre les 17:00h i les 23:00h, i entre les 7:00h i les 9:00h respectivament, aquestes són: $\alpha_1 = -8.994$ i $\alpha_3 = -5.594$. Així mateix, α_2 s'ha ajustat per a que la temperatura baixi 5ºC entre les 23:00h i les 6:00h, i s'ha fixat en $\alpha_2 = -0.707$. Com en els models anteriors, l'equació diferencial (1) s'ha resolt numèricament, i la despesa energètica s'ha calculat integrant numèricament l'expresió (3), aquesta ha sigut $E = 27.49$. En la figura 4 es mostra l'evolució de la temperatura, així com la $q(t)$.

Fer que la temperatura pugi fins a 22.5ºC ha sigut una desició arbitrària, però observem que degut a la part de $q(t)$ que s'encarrega de pujar la temperatura, augmentar aquesta fins a valors propers als 23ºC és molt costós energèticament.

Model 4

Model 4.1

Considerem ara un model ideal, en el qual puguèssim proporcionar una $q(t)$ infinita de manera instantània per a variar la temperatura una quantitat ΔT. Es pot fer una estimació de la despesa energètica d'aquest model, ja que si observem l'equació (1), si $q(t)$ és molt gran, llavors el terme $-k(T - T_e(t))$ és menyspreable, i ens quedem amb:

$$T' = q(t) \tag{21}$$

Integrant (21), obtenim que $E = \Delta T$.

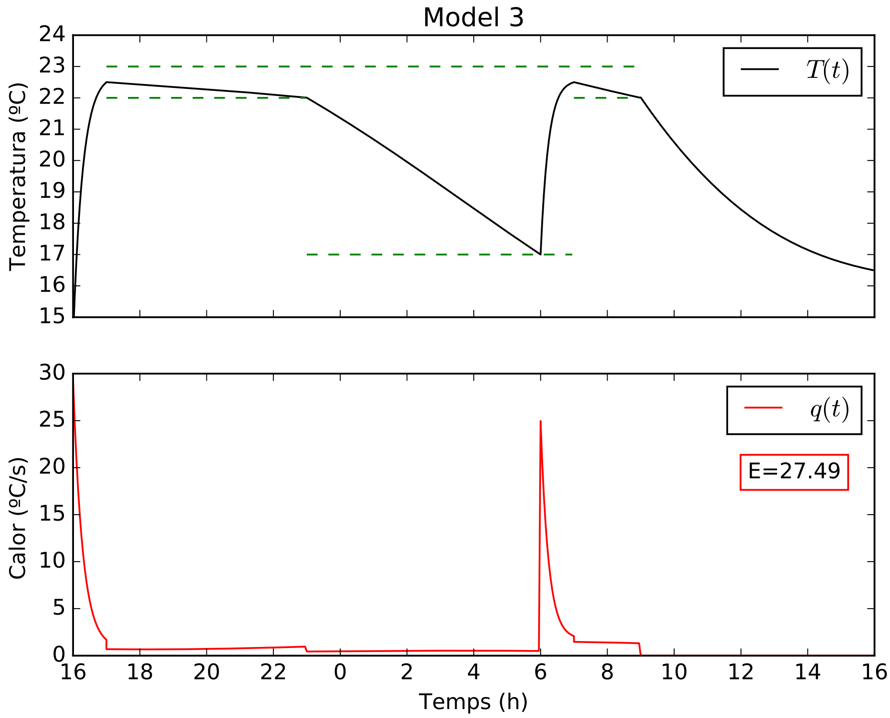
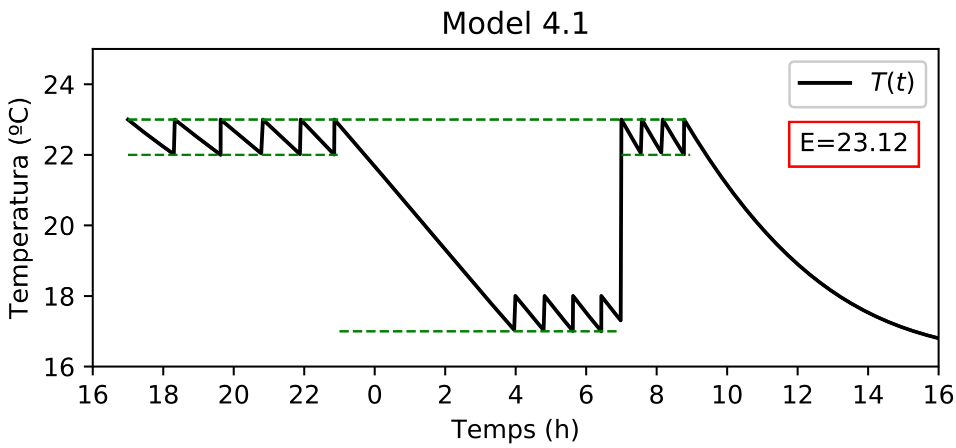


Figura 4: blalb

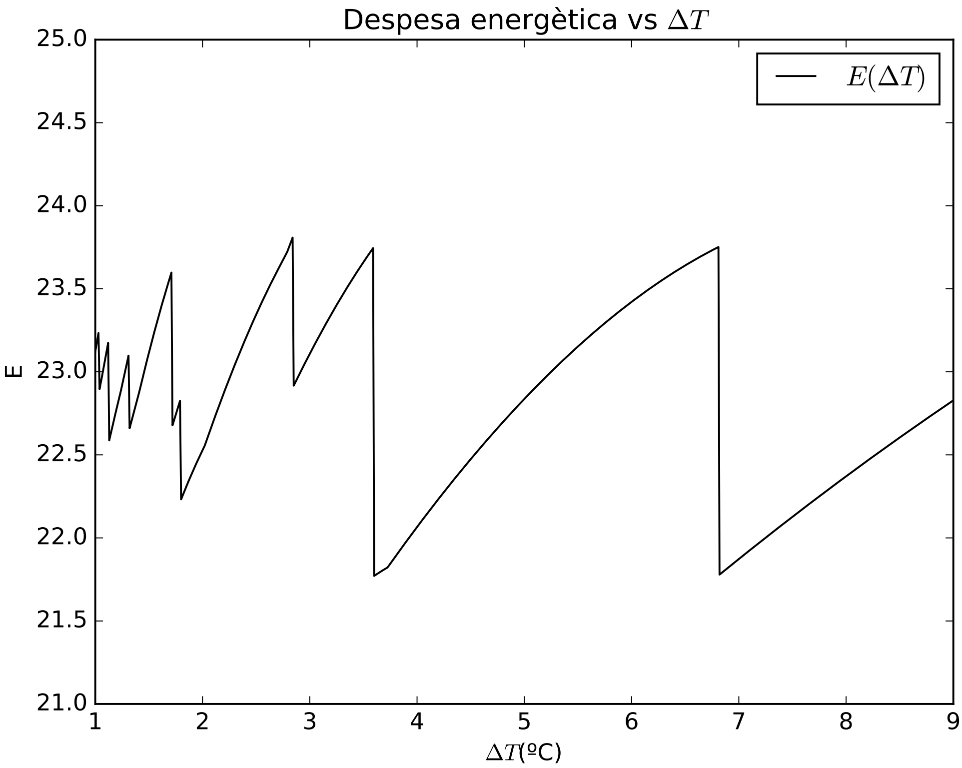


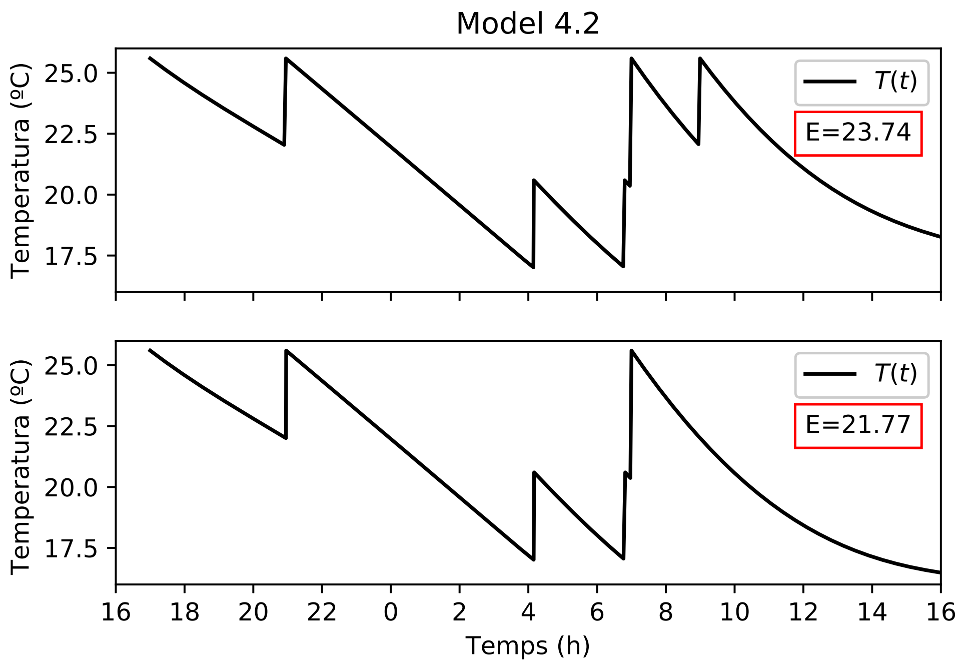
Model 4.2

Mirem com podem optimitzar la despesa energètica si variem ΔT

Conclusions

Annex


Despesa energètica vs ΔT
$E(\Delta T)$
E
ΔT(ºC)
25.0
24.5
24.0
23.5
23.0
22.5
22.0
21.5
21.0
1
2
3
4
5
6
7
8
9


Model 4.2
$T(t)$
E=23.74
$T(t)$
E=21.77
Temperatura (ºC)
Temperatura (ºC)
25.0
22.5
20.0
17.5
16
18
20
22
0
2
4
6
8
10
12
14
16
Temps (h)