Versuch 101

Das Trägheitsmoment

Nico Schaffrath
nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt
mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.12.2019 Abgabe: 7.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Bei diesem Versuch soll zunächst die Winkelrichtgröße und das Eigenträgheitsmoment einer Drillachse bestimmt werden. Mit dieser wird anschließend das Trägheitsmoment zweier Körper und anschließend einer Holzpuppe in unterschiedlichen Positionen bestimmt.

2 Theorie

Das Trägheitsmoment I wird zusammen mit dem Drehmoment $\vec{M}$ und der Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ benötigt, um Rotationsbewegungen vollstängig zu charakterisieren. Eine Punktförmige Masse m hat das Trägheitsmomen

$$I = m \cdot r^2, \tag{1}$$

wobei r den Abstand zur Drehachse angibt. Bei einem ausgedehnten Körper mit dikreten Massenelementen werden alle Massenelemente m mit dem entsprechenden Abstand r zusammenaddiert und ergeben somit das Trägheitsmoment

$$I = \sum_i r_i^2 \cdot m_i. \tag{2}$$

Beim Übergang zum kontinuierlichen System wird Ausdruck 2 zu

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m. \tag{3}$$

Um das Berechnen des Trägheitsmoments zu vereinfachen gibt es Hilfsmittel wie den Satz von Steiner, welcher einen Zusammenhang

$$I = I_S + m \cdot a^2 \tag{4}$$

zwischen dem Trägheitsmoment bezogen auf eine Drehachse I_S durch den Schwerpunkt und einem Trägheitsmoment zur Drehachse parallel dazu I herstellt. Dabei bezeichnet a den Abstand der beiden Drehachsen.

Ein komplexer Körper kann zudem in einfache Teile aufgeteilt werden, um so die Trägheitsmomente von möglichst symetrischen Körpern berechenen zu können. Diese lassen sich besonders einfach berechnen, oder sind sogar in Tabellen aufgeführt und die entsprechenden Trägheitsmomente können schließlich wieder addiert werden.

Das Drehmoment $\vec{M}$ berechnet sich als

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}, \tag{5}$$

wobei $\vec{F}$ die Kaft auf einen Rotationskörper und $\vec{r}$ den Abstand des Angreifpunktes der Kraft zur Drehachse angibt.

Wirkt bei einem schwingungsfähigem Rotationssystem mit Trägheitsmoment I eine Feder mit Winkelrichtgröße D der Drehung entgegen, so gilt für die Schwingungsdauer T bei kleinen Auslenkungswinkeln ϕ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{6}$$

Für kleine Winkel ϕ gilt außerdem der harmonische Zusammenhang

$$M = D \cdot \phi. \tag{7}$$

Für die untersuchten Körper werden die, zur berechnung der Trägheitsmomente benötigten, Formeln dem Skript der Physik I [3] entnommen.

Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders mit Radius R und Masse m, der sich um seine Symmetrieachse dreht berechnet sich nach

$$I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2. \tag{8}$$

Dreht sich ein Vollzylinder um eine Achse senkrecht zu seiner Symmetrieachse durch den Schwerpunkt, so wird das Trägheitsmoment durch

$$I = \frac{1}{4} \cdot m \cdot R^2 + \frac{1}{12} \cdot m \cdot h^2 \tag{9}$$

beschrieben. Für das Trägheitsmoment einer Vollkugek mit Masse m und Radius R gilt

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2. \tag{10}$$

3 Durchführung

Zur Vermessung der Körper werden diese auf einer Drillachse (siehe Abbildung 1) befestigt. Doch um die Trägheitsmomente der Körper zu bestimmen muss zunächst die Drillachse an sich untersucht werden.

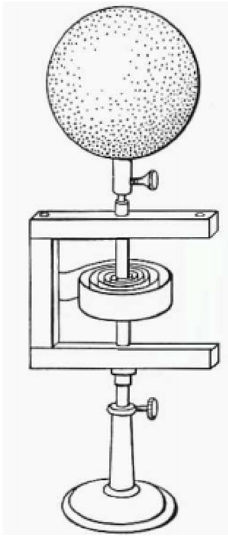

Abbildung 1: Drillachse mit Vollkugel [1]

3.1 Vermessung der Drillachse

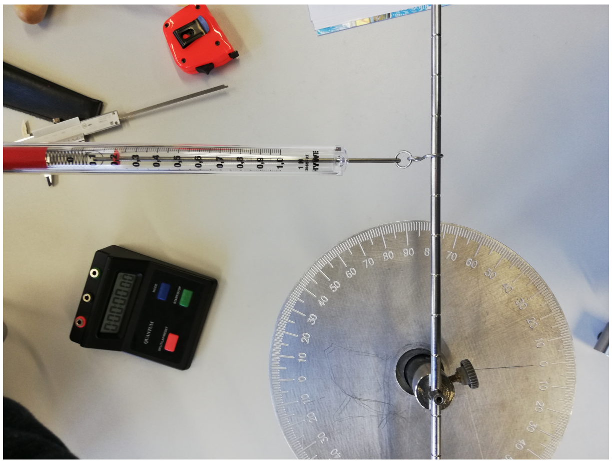

Abbildung 2: Bestimmung der Winkelrichtgröße D einer Drillachse

Mit dem Aufbau in Abbildung 4 kann die Winkelrichtgröße D bestimmt werden. Dazu wird mit Hilfe eines Kraftmessers in einem Abstand von $r = 12\,\text{cm}$ die Rückstellende Kraft der Feder bei 10 unterschiedlichen Auslenkungen gemessen.

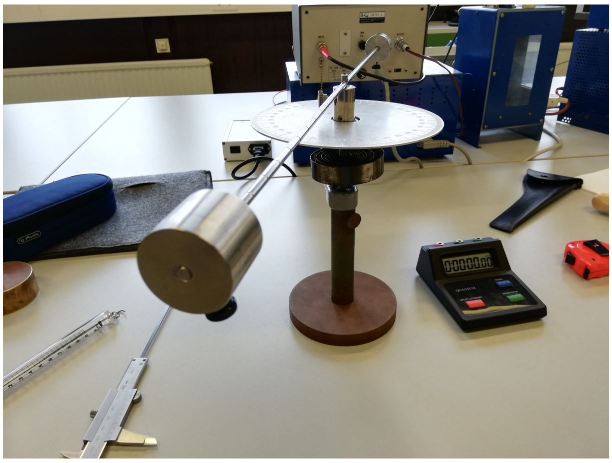

Abbildung 3: Bestimmung des Eigenträgheitsmoment I_D einer Drillachse

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoment der Drillachse werden zwei Zylinder mit $m = 222,9\,\mathrm{g}$ und $R = 1,995\,\mathrm{cm}$ an einer nahezu masselosen Stange auf der Drillachse befestigt. Nun kann die Schwingungsdauer T bei einer immer gleichen Auslenkung von $\phi = 15\,°$ bei 10 unterschiedlichen Abständen der Zylinder voneinander gemessen werden.

3.2 Bestimmung des Trägheitsmoments zweier Körper

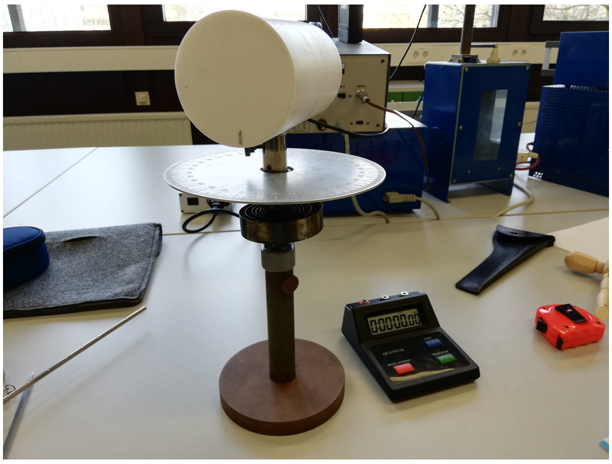

Abbildung 4: Bestimmung des Trägheitsmoments I eines Körpers mit Hilfe einer Drillachse

Die beiden Körper sind Zylinder, wobei sich der erste ($R = 3,75\,\mathrm{cm}$, $m = 1119,3\,\mathrm{g}$) um seine Symmetrieachse und der zweite ($R = 4,00\,\mathrm{cm}$, $h = 13,94\,\mathrm{cm}$, $m = 1525,5\,\mathrm{g}$) senkrecht zu seiner Symmetrieachse dreht. Um das Trägheitsmoment bestimmen zu können wird jeweils fünf mal die Schwingungsdauer bei einer Auslenkung von $\phi = 15\,°$ gemessen.

3.3 Bestimmung des Trägheitsmoments einer Holzpuppe in verschiedenen Positionen

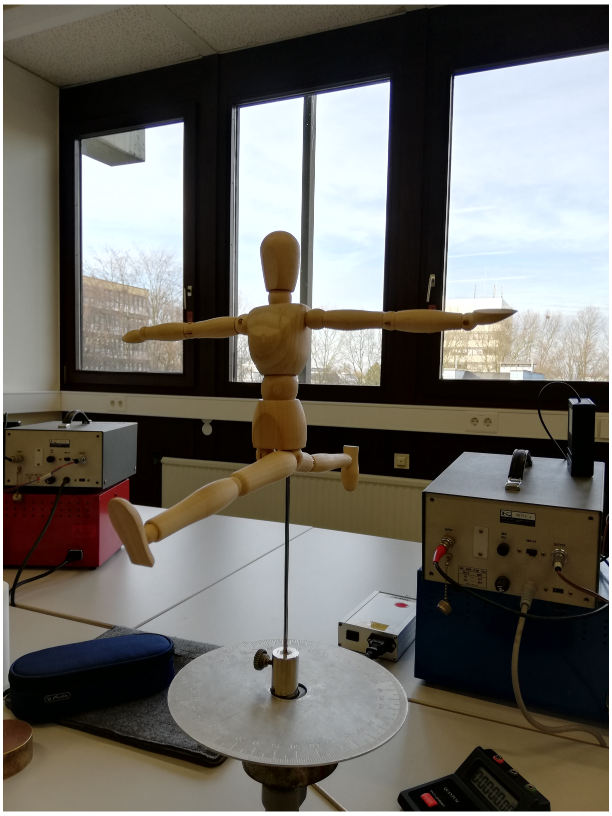

Abbildung 5: Position 1 der Holzpuppe

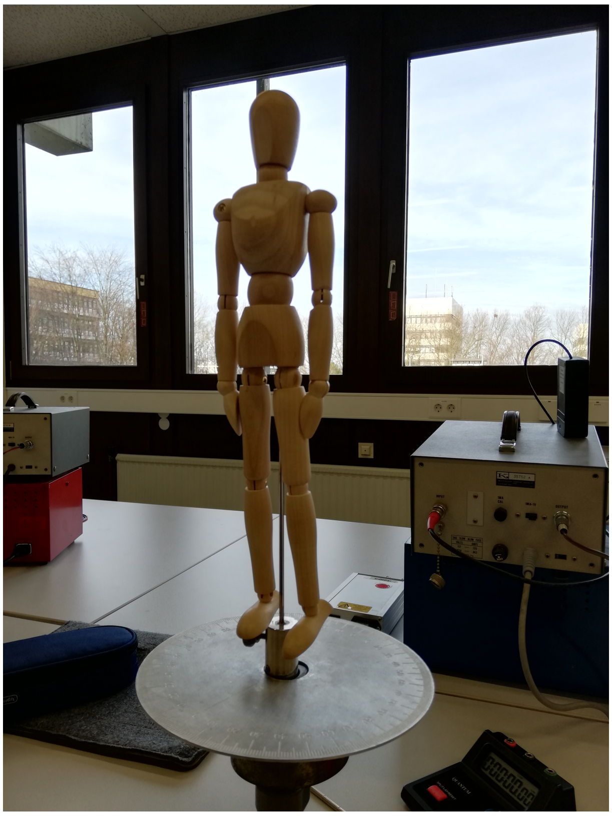

Abbildung 6: Position 2 der Holzpuppe

Auch bei der Holzpuppe werden pro Position fünf Messungen vorgenommen. Dieses mal jedoch bei einer Auslenkung von $\phi = 20\,°$, da die Messung der Schwingungsdauer mit einer Stoppuhr erfolgt und bei einer zu geringen Auslenkung nicht genau genug messbar wäre.

Der Kopf der Puppe wird durch eine Vollkugel mit Radius $R = 1,62\,\mathrm{cm}$ angenähert. Die Arme werden durch Zylinder mit Radius $R = 0,65\,\mathrm{cm}$ und Länge $h = 12,61\,\mathrm{cm}$, sowie die Beine als Zylinder mit Radius $R = 0,71\,\mathrm{cm}$ und Länge $h = 14,84\,\mathrm{cm}$ beschrieben. Auch der Oberkörper wird durch einen Zylinder mit Radius $R = 1,85\,\mathrm{cm}$ und Länge $h = 9,96\,\mathrm{cm}$

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße und des Eigenträgheitsmoments der Drillachse

Die Winkelrichtgröße D lässt sich mithilfe der Gleichungen (5 und 7) berechnen. Im Versuch standen Kraftarm $\vec{r}$ und Kraft $\vec{F}$ senkrecht zueinander, wodurch der Betrag von Gleichung (5) zu

$$M = F \cdot r \tag{11}$$

wird. Werden nun (7) und 11 gleichgesetzt und nach D umgestellt, ergibt sich die Gleichungen

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi}. \tag{12}$$

Mit den Werten aus der Tabelle **??**, der Formel 12 und den allgemeinen Formeln für den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \tag{13}$$

und der Standartabweichung

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (x_n - \bar{x})^2} \tag{14}$$

ergibt sich für die Winkelrichtgröße D der Wert D = (0.017027 ± 0.004618) Nm.

ϕ / rad	F / N
$\pi/6$	0.02
$\pi/3$	0.12
$\pi/2$	0.21
$2\pi/3$	0.31
$5\pi/6$	0.40
π	0.50
$7\pi/6$	0.60
$4\pi/3$	0.70
$3\pi/2$	0.80
$5\pi/3$	0.90

Tabelle 1: Aufgenommene Werte zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Um das Eigenträgheitsmoment I_D bestimmen zu können, ist es zuerst notwendig das gesamte Trägheitsmoment des in 4 zu sehenden Aufbaus zu berechnen. Dieses setzt sich mithilfe des Satzes von Steiner zu dem Ausdruck

$$I_{ges} = I_D + 2 \cdot I_{zh} + 2 \cdot m_{zh} \cdot a^2 \tag{15}$$

zusammen. Dabei gibt I_{zh} das Trägheitsmoment eines senkrecht zu der Drehachse liegenden Zylinders an, welches sich über

$$I_{zh} = m_{zh} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \tag{16}$$

berechnen lässt (Verweis auf Versuchsanleitung). Dieses Zwischenergebnis lässt sich nun in die quadrierte Gleichung (REFERENZ) einsetzen, wodurch sich

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I_D}{D} + \frac{8\pi^2 m_{zh}}{D} \cdot a^2 + \frac{8\pi^2 m_{zh} R^2}{4D} + \frac{8\pi^2 m_{zh} h^2}{12D} \tag{17}$$

ergibt. Der Ausdruck hat die Form der allgemeinen Geradengleichung

$$y(x) = m \cdot x + b \tag{18}$$

wobei

$$m = \frac{8\pi^2 m_z h}{D} \tag{19}$$

und

$$b = \frac{4\pi^2 I_D}{D} + \frac{8\pi^2 m_{zh} R^2}{4D} + \frac{8\pi^2 m_{zh} h^2}{12D} \tag{20}$$

gilt. Über die lineare Regression ergeben sich $m = (673.436 \pm 31.466)\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}$ und $b = (8.064 \pm 1.870)\,\mathrm{s}^2$ als gesuchte Werte. Wird nun 20 nach dem Eigenträgheitsmoment I_D aufgelöst

$$I_D = \frac{bD}{4\pi^2} - \frac{m_{zh} R^2}{2} - \frac{m_{zh} h^2}{6} \tag{21}$$

lässt sich durch die gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2} \tag{22}$$

als Wert für das Eigenträgheitsmoment I_D der Wert $I_D = (0.024 \pm 0.006)\,\mathrm{kg\,m^2}$.

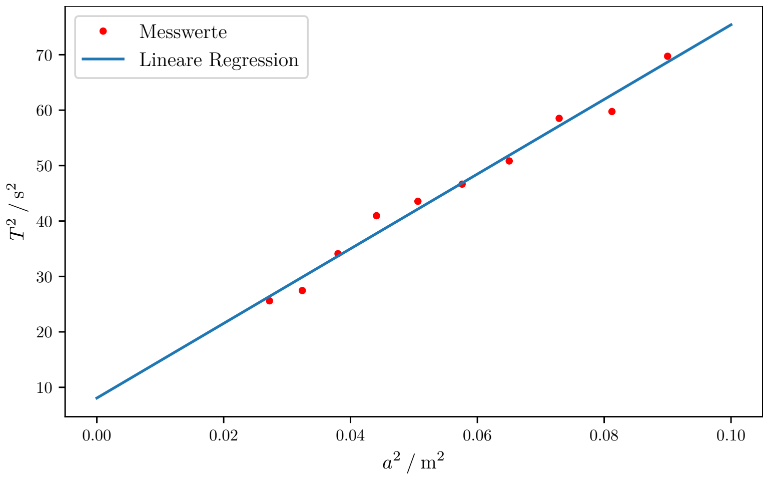

Abbildung 7: Darstellung der Messwerte und der linearen Regression zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D

a / m	T / s	a^2 / m^2	T^2 / s^2
0.30	8.35	0.0900	69.7225
0.285	7.73	0.0812	59.7529
0.27	7.65	0.0729	58.5225
0.255	7.13	0.0650	50.8369
0.24	6.83	0.0576	46.6489
0.225	6.60	0.0506	43.5600
0.21	6.40	0.0441	40.9600
0.195	5.84	0.0380	34.1056
0.18	5.24	0.0324	27.4576
0.165	5.06	0.0272	25.6036

Tabelle 2: Aufgenommene Werte zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D der Drillachse (Auslenkung betrug 15°)

Siehe **??**!

5 Diskussion

6 Anhang

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Das Trägheitsmoment.*

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Jan Kierfeld und Carsten Westphal. *Skript Physik I - Rotationsbewegungen.* URL: `https://moodle.tu-dortmund.de/pluginfile.php/827041/mod_resource/content/0/181203_cw.pdf`.

[4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.