Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

Nico Schaffrath
nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt
mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 7.01.2020

Abgabe: 14.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

In diesem Versuch soll der Elastizitätsmodul unterschiedlicher Metalle mithilfe einer Biegungsmessung bestimmt werden. Zusätzlich sollen die verwendeten Metalle über ihre Dichte bestimmt werden.

Anders formulieren Zitate und Quellen nicht vergessen

2 Theorie

2.1 Allgemein

Wenn äußere Kräfte auf einen Körper wirken, sodass sich dieser verformt, können Spannungen auftreten. Es wird unterschieden zwischen der Normalspannung, welche senkrecht zur Oberfläche steht und der Tangentialspannung, welche parallel zur Oberfläche verläuft. Wird durch eine von außenwirkende Kraft die Länge L eines Materials um ΔLverkürzt, so entsteht eine Spannung, welche mithilfe des Hookschen Gesetzes

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} \tag{1}$$

beschrieben werden kann, wobei E als Elastizitätsmodul bezeichnet wird. Dieser Proportionalitätsfaktor lässt sich auch über die Biegung eines Stabes berechnen.

2.2 Einseitige Biegung des Stabes

Wird ein Stab, wobei die geometrische Form des Querschnitts allgemein nicht von Bedeutung für den Ablauf des Versuchs ist, an einem seiner Enden eingespannt und zusätzlich an dem anderen Ende mit einem Gewicht belastet, so lässt sich beobachten, dass die Durchbiegung des Stabes mit zunehmenden Abstand von dem eingespannten Ende ebenfalls zunimmt (siehe dazu Abbildung (VERWEIS)).

Durch die an der Stelle L wirkenden Kraft, wird auf die an Querschnittsfläche an der Stelle x ein Drehmoment M_F ausgeübt, welches eine Verdrehung des Stabes hervorruft. Die oberen Schichten des Stabes werden gestreckt und die unteren gestaucht. Der Stab verdreht sich so lange weiter, bis ein Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment M_F und dem durch die Spannungen zwischen den gestauchten beziehungsweise gestreckten Schichten des Stabes enstehenden Drehmoments M_σ entsteht. Es existiert aber auch eine Schicht, in der keine Spannungen auftreten. Diese wird als neutrale Faser bezeichnet.

Da die Kraft, die auf den Stab wirkt, senkrecht zu dem Kraftarm ist, gilt für das Drehmoment M_F, welches auf die Querschnittsfläche an der Stelle x wirkt

$$M_F = F \cdot (L - x). \tag{2}$$

Im Gegensatz dazu lässt sich das Drehmoment M_σ mit

$$\int_Q y \cdot \sigma(y) \, \mathrm{d}q \tag{3}$$

berechnen, wobei y den Abstand des Flächenelements dq von der neutralen Faser angibt (siehe Abbildung). Weiterhin kann $\sigma(y)$ mithilfe von Gleichung (VERWEIS) umgeschrieben werden, sodass sich

$$\sigma(y) = E\frac{\delta x}{\Delta x} \tag{4}$$

ergibt. Hierbei gibt δx die Änderung der Länge von Δx infolge der Biegung des Stabes.

Aus der Abbildung (VERWEIS) lässt sich für $\delta x \ll \Delta x$ entnehmen, dass sich die Längenänderung δx als

$$\delta x = y\Delta\phi = y\frac{\Delta x}{R} \tag{5}$$

schreiben lässt. Mit der Annahme, dass mit R ein geringer Krümmungsradius vorliegt, lässt sich das Gleichgewicht von M_F und M_σ mit den Gleichungen (VERWEIS) zu

$$E\frac{\mathrm{d}^2D}{\mathrm{d}x^2}\int_Q y^2\,\mathrm{d}q \tag{6}$$

umformulieren. Das Integral

$$I = \int_Q y^2\,\mathrm{d}q \tag{7}$$

wird als Flächenträgheitsmoment bezeichnet. Zusammenfassend ergibt sich also für die gesuchte Durchbiegung $D(x)$ der Zusammenhang

$$D(x) = \frac{F}{2EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \tag{8}$$

für $0 \leq x \leq L$.

2.3 Zweiseitige Biegung eines Stabes

Wenn ein Stab nun nicht nur an einem Ende, sondern an seinen beiden Enden eingespannt wird, wie in der Abbildung (VERWEIS) zu sehen ist, greift nur noch das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x \tag{9}$$

an der Querschnittsfläche Q an, für die $0 \leq x \leq L/2$ gilt. Im Gegensatz dazu gilt für $L/2 \leq x \leq L$ nun

$$M_F = -\frac{F}{2}(L-x). \tag{10}$$

Mittels dieser Gleichungen und der Annahme, dass in der Mitte des Stabes die Biegekurve $D(x)$ eine horizontale Tangente besitzt, ergibt sich aus der Gleichung (VERWEIS) für $0 \leq x \leq L/2$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \tag{11}$$

beziehungsweise für $L/2 \leq x \leq L$

$$D(x) = \frac{F}{48EI}\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right) \tag{12}$$

[1]

3 Durchführung

3.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die einseitige Einspannung

Sowohl ein zylindrischer, als auch ein rechteckiger Stab werden zunächst vermessen und gewogen. Anschließend werden die Stäbe nacheinander einseitig, wie in Abbildung **??** zu sehen ist, in die Vorrichtung eingespannt.

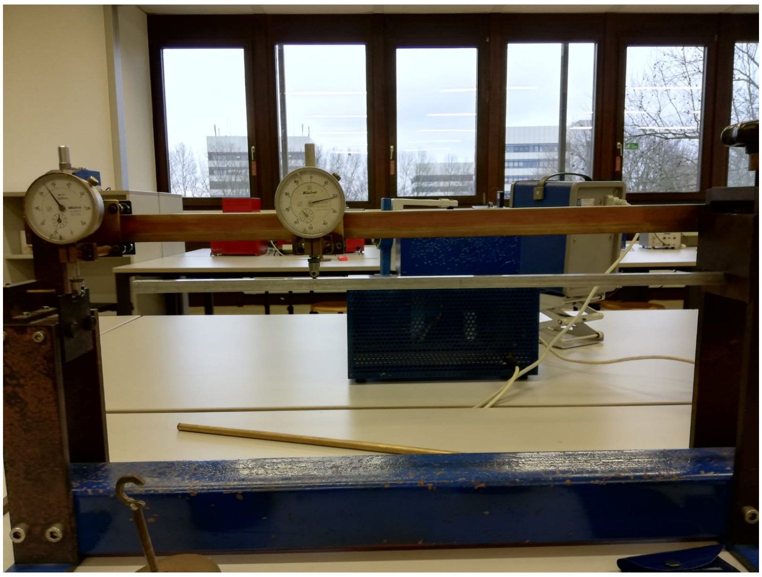


Abbildung 1: Aufbau zur einseitigen Messung der Durchbiegung ohne Gewicht

Nun soll die Auslenkung $D(x)$ ohne Verwendung eines Gewichts in Abhängigkeit von x gemessen werden, wobei 15 Messwerte aufzunehmen sind. Daran angeschlossen wird eine Masse $m_{Zylinder,1} = 503,2\,\mathrm{g}$ beziehungsweise $m_{Rechteck,1} = 1168,8\,\mathrm{g}$ über eine Aufhängung ($m_A = 40,4\,\mathrm{g}$) an die Seite des Stabes gehangen (siehe Abbildung **??**), welche nicht eingespannt wurde. Auch hier werden 15 Messwerte für die Auslenkung $D(x)$ in Abhängigkeit von x aufgenommen.

3.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die beidseitige Einspannung

Ähnlich wie beim ersten Teilversuch soll der Elastizitätsmoduls der beiden zuvor verwendeten Stäbe ermittelt werden. Zuerst wird jeweils ein Stab an beiden seiner Enden in der Vorrichtung eingespannt, wie in Abbildung **??** zu sehen ist. Hier sollen 15 Messwerte aufgenommen werden, welche die Abhängigkeit der Auslenkung $D(x)$ in Abhängigkeit von x angeben.
Daran angeschlossen wird an die Mitte des Stabes ein Gewicht der Masse aufgehangen und abermals soll die Auslenkung $D(x)$ abhängig von x über 15 Messwerte ermittelt werden. Hierbei beträgt die Masse des Gewichts $m_2 = 2830,8\,\mathrm{g}$. Auch in diesem Teil des Versuchs wurde die Aufhängung mit der Masse $m_A = 40,4\,\mathrm{g}$ verwendet. Dies lässt sich Abbildung **??** entnehmen.

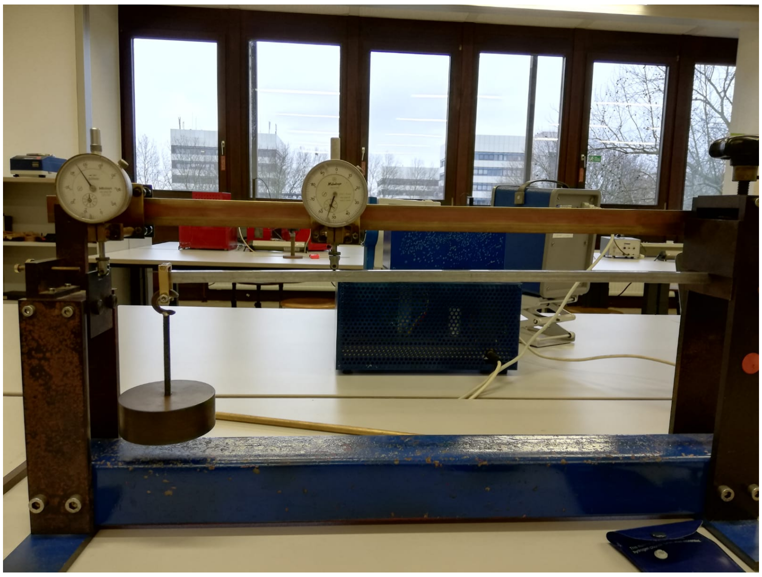


Abbildung 2: Aufbau zur Messung einseitigen Messung der Durchbiegung mit Gewicht

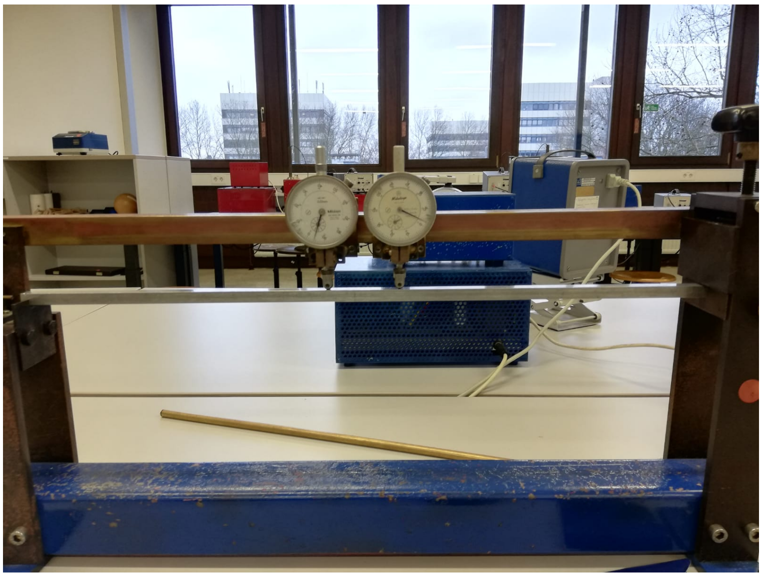


Abbildung 3: Aufbau zur beidseitigen Messung der Durchbiegung ohne Gewicht

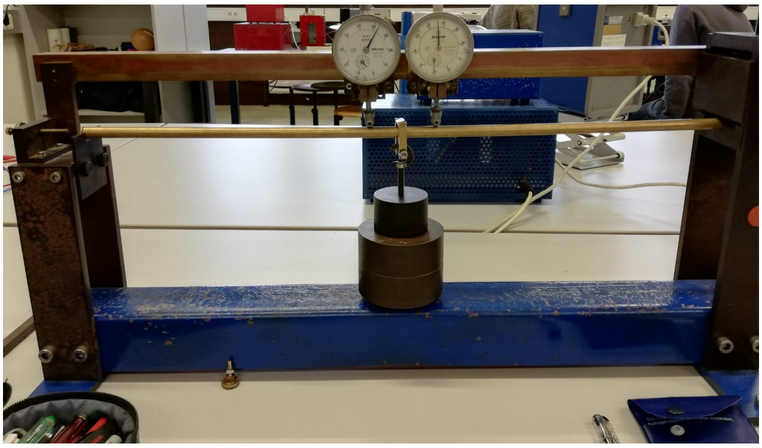


Abbildung 4: Aufbau zur beidseitigen Messung der Durchbiegung mit Gewicht

4 Auswertung

4.1 Runder Stab einseitig eingespannt

Messung	d / mm
1	10,05
2	10,00
3	9,95
4	9,95
5	9,95
6	10,00
7	10,00
8	9,95
9	10,00
10	9,95

Tabelle 1: Durchmesserwerte des runden Stabes

Mit den Messwerten aus Tabelle 1 lässt sich der Durchmesser des runden Stabes mit Hilfe der Formeln für den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{13}$$

und den Standardfehler des Mittelwertes

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{14}$$

als

$$d = (9,980 \pm 0,012)\,\mathrm{mm}$$

angeben. Der Radius beträgt somit

$$R = (4,990 \pm 0,006)\,\mathrm{mm}.$$

Das Flächenträgheitsmoment des runden Stabes kann nach Formel (FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENT RUND) als

$$I_{Rund} = (0,003919 \pm 0,000005)\,\mathrm{m}^4$$

berechnet werden.

x / cm	$D_{OhneGewicht}$ / mm	$D_{MitGewicht}$ / mm	$D_{Differenz}$ / mm
5	−0,08	0,04	0,12
8	−0,12	0,12	0,24
11	−0,13	0,27	0,40
14	−0,11	0,51	0,62
17	−0,07	0,81	0,88
20	0,00	1,20	1,20
23	0,09	1,61	1,52
26	0,21	2,09	1,88
29	0,37	2,64	2,27
32	0,56	3,21	2,65
35	0,87	3,77	2,90
38	0,95	4,50	3,55
41	1,21	5,11	3,90
44	1,46	5,81	4,35
47	1,46	6,53	5,07

Tabelle 2: Messwerte des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

Mit Hilfe einer Linearen Ausgleichsrechnung der Messwerte aus Tabelle 2 kann der Elastizitätsmodul aus dem Faktor $F/2EI_{Rund}$ aus Gleichung (REFERENZ) bestimmt werden, der der Steigung

$$m = (0,0641 \pm 0,0008)\,\mathrm{m}^{-2}$$

der Ausgleichsgeraden in Abbildung 5 entspricht.

Aus dem Zusammenhang

$$E_{Rund} = \frac{F}{2 \cdot m \cdot I_{Rund}} \tag{15}$$

folgt dann, mit dem Wert $F = 5,3327\,\mathrm{N}$ des verwendeten Gewichtes,

$$E = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}$$

als Wert für den Elastizitätsmodul. (VERGLEICH MIT LITERATUR)

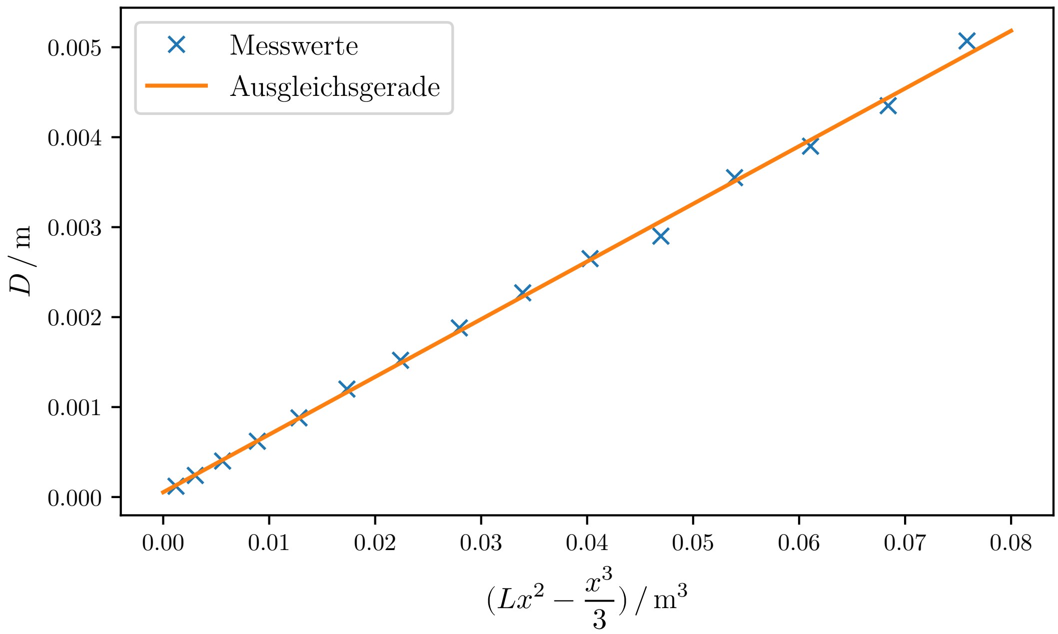


Abbildung 5: Runder Stab einseitig eingespannt

4.2 Eckiger Stab einseitig eingespannt

Messung	h / mm	b / mm
1	9,95	10,00
2	9,95	10,00
3	10,00	10,05
4	9,90	10,00
5	10,00	10,00
6	9,90	10,05
7	9,95	9,95
8	10,00	9,95
9	9,95	10,00

Tabelle 3: Höhen- und Breitenwerte des eckigen Stabes

Mit den Messwerten aus Tabelle 2 lässt sich der die Höhe des eckigen Stabes mit Hilfe der Formeln 13 und 14 als

$$h = (9,960 \pm 0,013)\,\mathrm{mm}$$

und die Breite als

$$b = (9,995 \pm 0,012)\,\mathrm{mm}$$

angeben.Das Flächenträgheitsmoment des eckigen Stabes kann nach Formel (FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENT Eckig) als

$$I_{Eckig} = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^4$$

berechnet werden.

x / cm	$D_{OhneGewicht}$ / mm	$D_{MitGewicht}$ / mm	$D_{Differenz}$ / mm
5	−0,09	−0,04	0,05
8	−0,34	−0,09	0,25
11	−0,70	−0,06	0,64
14	−0,98	0,04	1,02
17	−1,22	0,21	1,43
20	−1,47	0,57	2,04
23	−1,74	0,77	2,51
26	−1,98	1,10	3,08
29	−2,17	1,53	3,70
32	−2,20	1,96	4,16
35	−2,20	2,47	4,67
38	−2,20	3,11	5,31
41	−2,20	3,60	5,80
44	−2,20	4,25	6,45
47	−2,17	4,86	7,03

Tabelle 4: Messwerte des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

Mit Hilfe einer Linearen Ausgleichsrechnung der Messwerte aus Tabelle 4 kann der Elastizitätsmodul aus dem Faktor $F/2EI_{Rund}$ aus Gleichung (REFERENZ) bestimmt werden, der der Steigung

$$m = (0,0930 \pm 0,0023)\,\mathrm{m}^{-2}$$

der Ausgleichsgeraden in Abbildung 6 entspricht.

Aus dem Zusammenhang

$$E_{Eckig} = \frac{F}{2 \cdot m \cdot I_{Eckig}} \tag{16}$$

folgt dann, mit dem Wert $F = 11,855\,\mathrm{N}$ des verwendeten Gewichtes,

$$E = (76,9 \pm 1,9) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$$

als Wert für den Elastizitätsmodul. (VERGLEICH MIT LITERATUR)

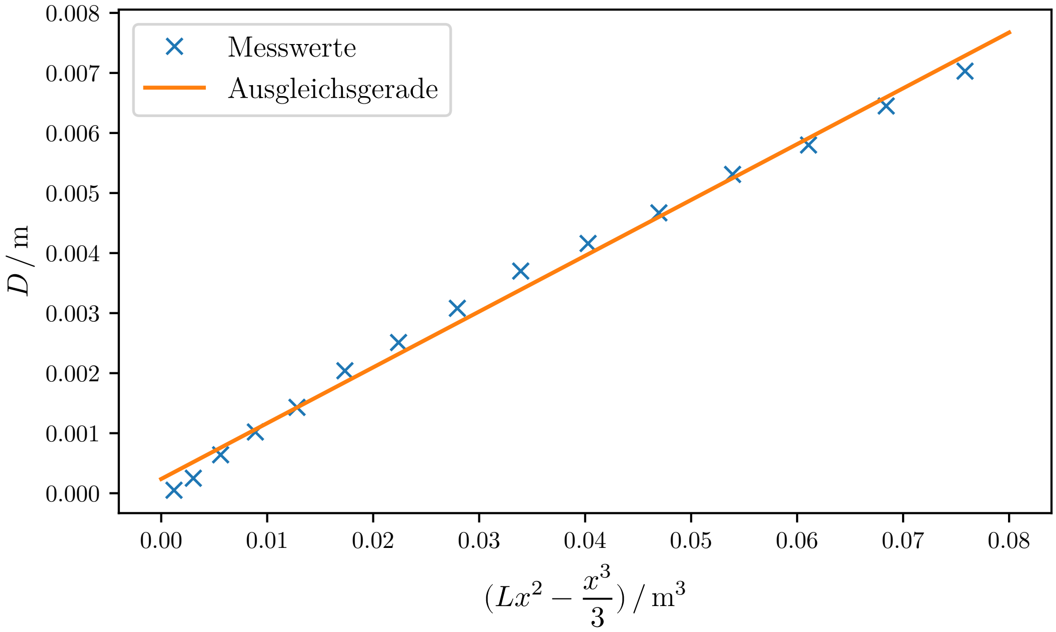


Abbildung 6: Eckiger Stab einseitig eingespannt

4.3 Runder Stab beidseitig eingespannt

x / cm	$D_{OhneGewicht}$ / mm	$D_{MitGewicht}$ / mm	$D_{Differenz}$ / mm
6,6	−0,84	0,05	0,89
9,6	−0,75	0,48	1,23
12,6	−0,63	0,94	1,57
15,6	−0,48	1,32	1,80
18,6	−0,33	1,66	1,99
21,6	−0,22	1,91	2,13
24,6	−0,11	2,05	2,16
30,6	0,09	2,02	1,93
33,6	0,13	1,89	1,76
36,6	0,20	1,68	1,48
39,6	0,27	1,43	1,16
42,6	0,35	1,14	0,79
45,6	0,44	0,78	0,34
48,6	0,54	0,39	−0,15

Tabelle 5: Messwerte des runden Stabes bei beidseitiger Einspannung

Auch bei der beidseitigen Einspannung kann der Elastizitätsmodul durch eine Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Hierfür werden die linke und die Rechte Hälfte des Stabes seperat betrachtet (siehe Abbildung 7). Die Steigung der Ausgleichsgeraden auf der linken Seite beträgt

$$m = (0,0122 \pm 0,0005)\,\mathrm{m}^{-2}$$

und auf der rechten Seite

$$m = (0.01945 \pm 0,00016)\,\mathrm{m}^{-2}.$$

Mit dem entsprechenden Wert $F = 11,855\,\mathrm{N}$ für beide Gewichte ergibt sich dann aus dem Zusammenhang

$$E_{Rund} = \frac{F}{48 \cdot m \cdot I_{Rund}} \tag{17}$$

für $x < L/2$

$$E = (99 \pm 4) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$$

und für $x > L/2$

$$E = (62 \pm 6) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}.$$

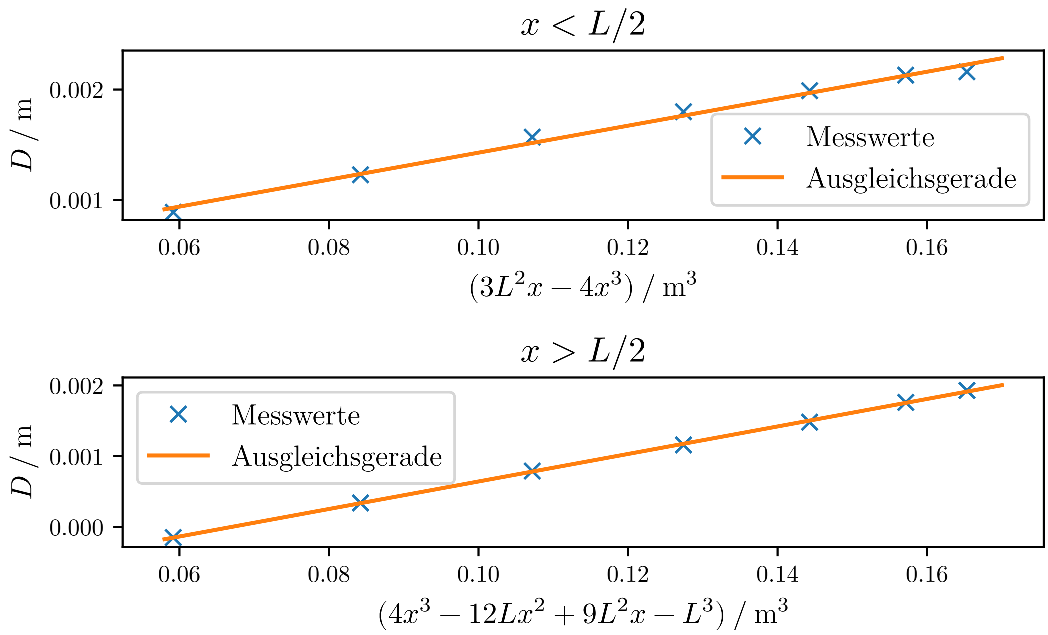


Abbildung 7: Runder Stab beidseitig eingespannt

4.4 Eckiger Stab beidseitig eingespannt

x / cm	$D_{OhneGewicht}$ / mm	$D_{MitGewicht}$ / mm	$D_{Differenz}$ / mm
6,6	−0,28	0,35	0,63
9,6	−0,24	0,64	0,88
12,6	−0,16	0,92	1,08
15,6	−0,05	1,19	1,24
18,6	−0,06	1,42	1,48
21,6	0,00	1,60	1,60
24,6	0,07	1,66	1,59
30,6	0,06	1,68	1,62
33,6	0,07	1,68	1,61
36,6	0,07	1,53	1,46
39,6	0,07	1,38	1,31
42,6	0,01	1,25	1,24
45,6	0,13	1,04	0,91
48,6	0,18	0,87	0,69

Tabelle 6: Messwerte des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung

Die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abildung 8 auf der linken Seite beträgt

$$m = (0,0095 \pm 0,0004)\,\mathrm{m}^{-2}$$

und auf der rechten Seite

$$m = (0.0089 \pm 0,0006)\,\mathrm{m}^{-2}.$$

Mit dem entsprechenden Wert $F = 11,855\,\mathrm{N}$ für beide Gewichte ergibt sich dann aus dem Zusammenhang

$$E_{Eckig} = \frac{F}{48 \cdot m \cdot I_{Eckig}} \tag{18}$$

für $x < L/2$

$$E = (127 \pm 5) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}$$

und für $x > L/2$

$$E = (135 \pm 9) \cdot 10^9\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s^2}}.$$

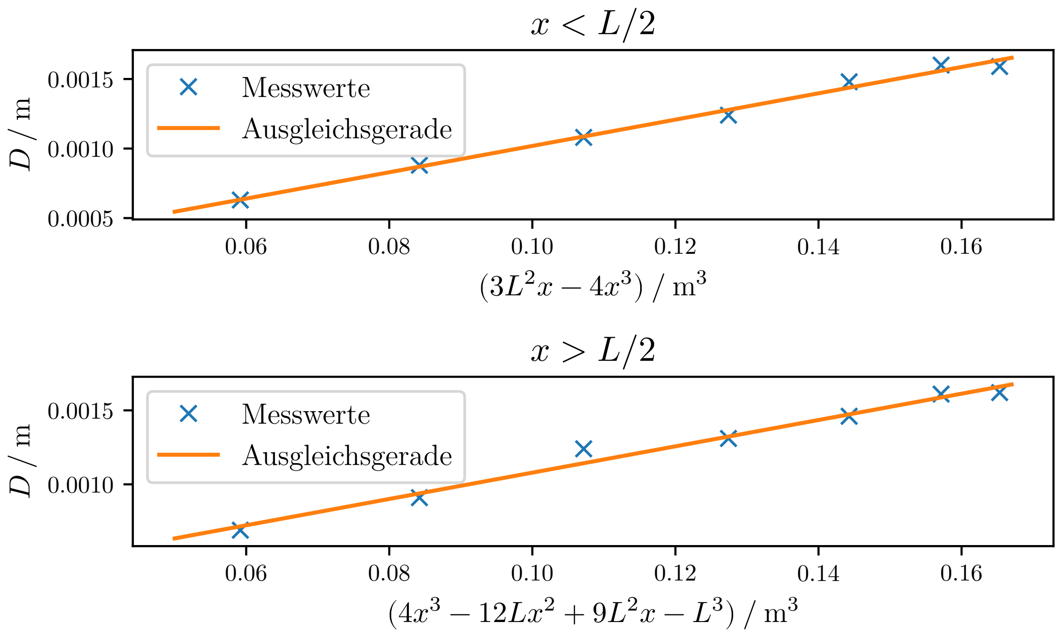


Abbildung 8: Eckiger Stab beidseitig eingespannt

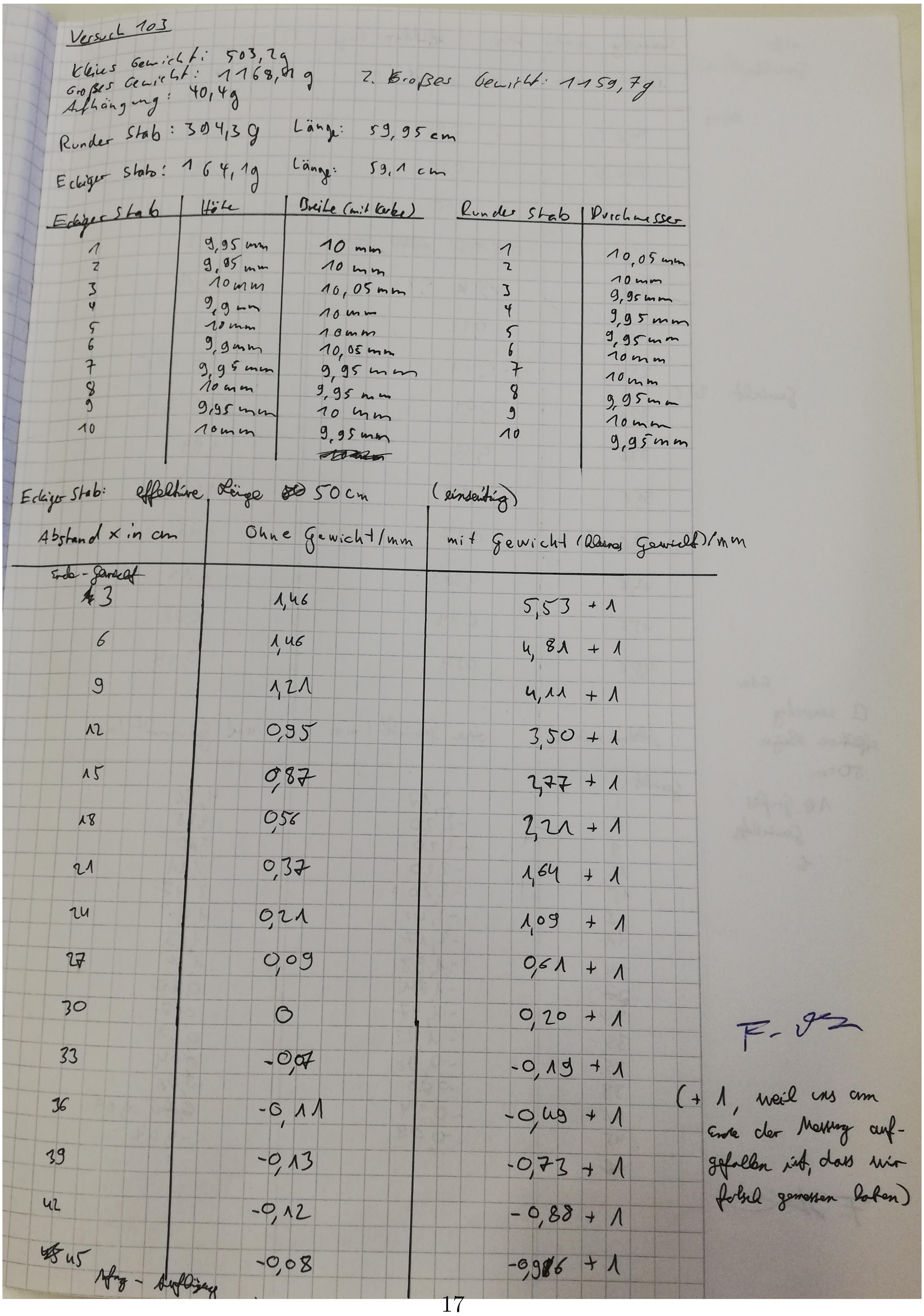
5 Diskussion

Das Ergebnis für den Elastizitätsmodul des runden Stabes bei einseitiger Einspannung ($E = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^9\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$) lässt vermuten, dass es sich bei dem Material des Stabes um Messing handelt. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls bei Messing beträgt $(78 - 123) \cdot 10^9\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$(Siehe ZITAT). Die Ergebnisse bei der beidseitigen Einspannung weichen jedoch um (PROZENT) von der unteren Grenze des Literaturwertes auf der rechten Seite ab.

Das Ergebnis für den Elastizitätsmodul des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung ($E = (76,9 \pm 1,9) \cdot 10^9\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$) lässt vermuten, dass es sich bei dem Material des Stabes um Aluminium handelt. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls bei Aluminium beträgt $(70) \cdot 10^9\,\mathrm{kg/(m\,s^2)}$ (Siehe (ZITAT)). Das aus der Messung bestimmte Elastizitätsmodul weicht also um (PROZENT) ab. Bei der beidseitigen Messung treten Abweichungen von (PROZENT) auf der linken und (PROZENT) auf der rechten Seite auf.

Die Abweichungen lassen sich durch statischtische Fehler und systematische Fehler bei der Messung erklären. Wahrscheinlich ist, dass Ungenauigkeiten beim Ablesen der Messuhr und beim kalibrieren dieser aufgetreten sind. Der zweite Stab kann durch die großen Abweichungen für die einseitige und beidseitige Einspannung nicht sicher als Aluminium identifiziert werden.

6 Anhang



Versuch 103

Kleines Gewicht: 503,2g
Großes Gewicht: 1168,1g   2. Großes Gewicht: 1159,7g
Aufhängung: 40,4g

Runder Stab: 304,3g   Länge: 59,95 cm

Eckiger Stab: 164,1g   Länge: 59,1 cm

Eckiger Stab	Höhe	Breite (mit Kerbe)
1	9,95 mm	10 mm
2	9,95 mm	10 mm
3	10 mm	10,05 mm
4	9,9 mm	10 mm
5	10 mm	10 mm
6	9,9 mm	10,05 mm
7	9,95 mm	9,95 mm
8	10 mm	9,95 mm
9	9,95 mm	10 mm
10	10 mm	9,95 mm

Runder Stab	Durchmesser
1	10,05 mm
2	10 mm
3	9,95 mm
4	9,95 mm
5	9,95 mm
6	10 mm
7	10 mm
8	9,95 mm
9	10 mm
10	9,95 mm

Eckiger Stab: effektive Länge 50 cm (einseitig)

Abstand x in cm	Ohne Gewicht/mm	mit Gewicht (kleines Gewicht)/mm
Ende - Gewicht 3	1,46	5,53 + 1
6	1,46	4,81 + 1
9	1,21	4,11 + 1
12	0,95	3,50 + 1
15	0,87	2,77 + 1
18	0,56	2,21 + 1
21	0,37	1,64 + 1
24	0,21	1,09 + 1
27	0,09	0,61 + 1
30	0	0,20 + 1
33	-0,07	-0,19 + 1
36	-0,11	-0,49 + 1
39	-0,13	-0,73 + 1
42	-0,12	-0,88 + 1
45 Anfang - Aufhängung	-0,08	-0,96 + 1

F. [illegible]

(+ 1, weil uns am Ende der Messung aufgefallen ist, dass wir falsch gemessen haben) zweiseitig runder Stab effektive Länge 55,2cm

alle Gewichte

Abstand x in cm	ohne Gewicht / mm	mit Gewicht / mm
~~…,6~~ 6,6	-0,84	0,05
~~…,6~~ 9,6	-0,75	0,48
12,6	-0,63	0,94
15,6	-0,48 -0,32 ~~…~~ 0,22	1,32
18,6	~~…~~ -0,33	1,66
21,6	-0,22	1,91
24,6	-0,11	~~2,33~~ 2,05
30,6	0,09	~~2,36~~ 2,02
33,6	0,13	1,89
36,6	0,20	1,68
39,6	0,27	1,43
42,6	0,385	1,14
45,6	0,44	0,78
48,6	0,54	0,39

Anfang

Gewicht 27,6

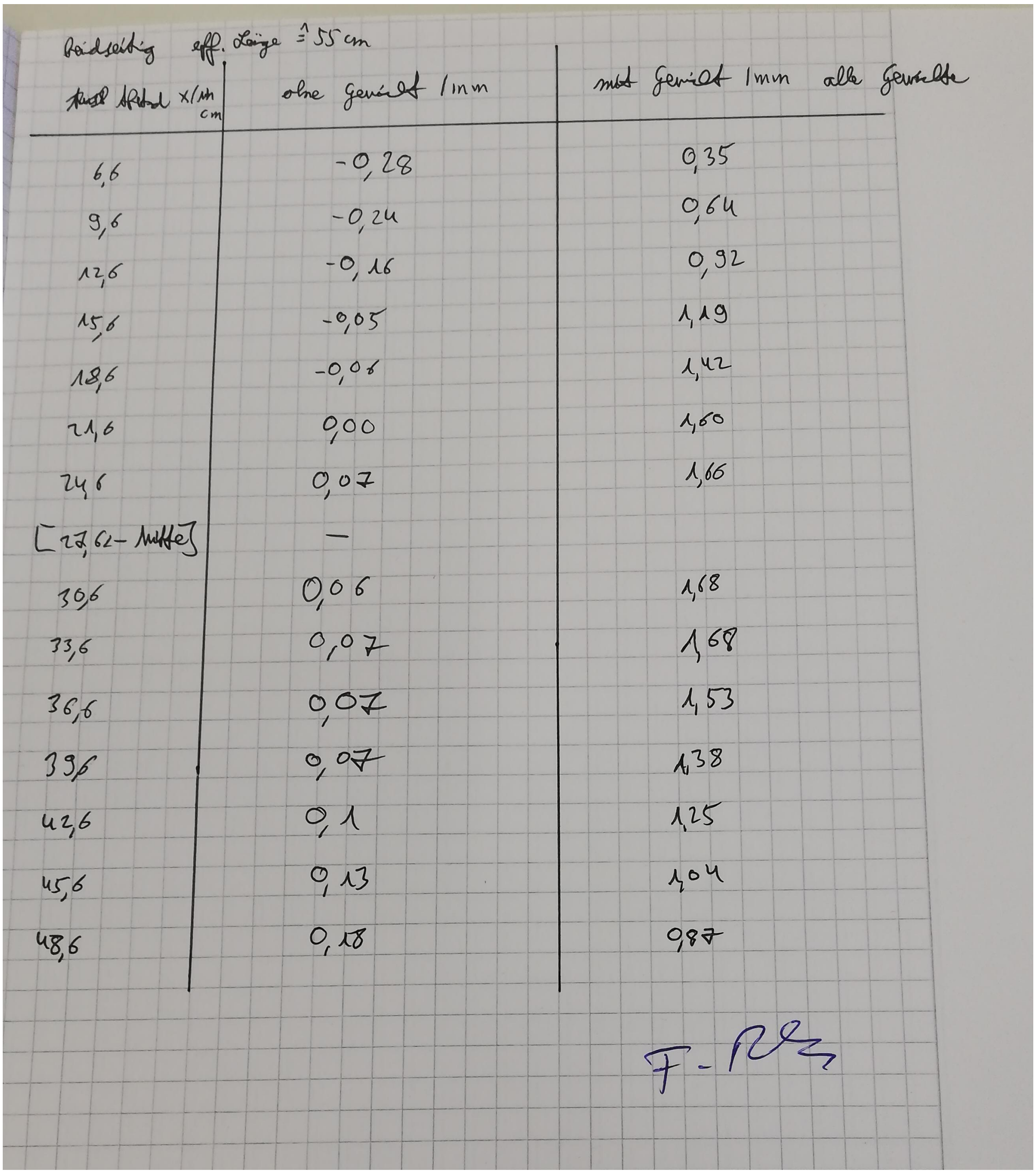
Ende

☐ einseitig
effektive Länge
50cm

1 ~~2~~. Großes
Gewicht
1

Abstand x in cm	ohne Gewicht / mm	mit Gewicht / mm
Gewicht		
3	-2,17	4,86
6	-2,20	4,25
9	-2,20	3,60
12	-2,20	3,11
15	-2,20	2,47
18	-2,20	1,96
21	-2,17	1,53
24	-1,98	1,10
27	-1,74	0,77
30	-1,47	0,57
33	-1,22	0,21
36	-0,98	0,04
39	-0,70	-0,06
42	-0,34	~~0,06~~ -0,09
45	-0,09	-0,04
~~48~~		

F. A…



Beidseitig eff. Länge ≙ 55 cm

Abstand x/cm	ohne Gewicht /mm	mit Gewicht /mm alle Gewichte
6,6	-0,28	0,35
9,6	-0,24	0,64
12,6	-0,16	0,92
15,6	-0,05	1,19
18,6	-0,06	1,42
21,6	0,00	1,60
24,6	0,07	1,66
[27,6 - Mitte]	—	
30,6	0,06	1,68
33,6	0,07	1,68
36,6	0,07	1,53
39,6	0,07	1,38
42,6	0,1	1,25
45,6	0,13	1,04
48,6	0,18	0,87

F-R

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Biegung elastischer Stäbe.*

[2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://matplotlib.org/`.

[3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python.* Version 0.16.0. URL: `http://www.scipy.org/`.

[4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: `http://pythonhosted.org/uncertainties/`.

[5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://www.numpy.org/`.