

Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

Nico Schaffrath

nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt

mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 7.01.2020

Abgabe: 14.01.2020

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1 Ziel | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Durchführung | 3 |
| 4 Auswertung | 3 |
| 4.1 Runder Stab einseitig eingespannt | 3 |
| 4.2 Eckiger Stab einseitig eingespannt | 5 |
| 4.3 Runder Stab beidseitig eingespannt | 7 |
| 4.4 Eckiger Stab beidseitig eingespannt | 9 |
| 5 Diskussion | 10 |
| 6 Anhang | 12 |
| Literatur | 14 |

1 Ziel

2 Theorie

[1]

3 Durchführung

4 Auswertung

4.1 Runder Stab einseitig eingespannt

| Messung | d / mm |
|---------|-----------------|
| 1 | 10,05 |
| 2 | 10,00 |
| 3 | 9,95 |
| 4 | 9,95 |
| 5 | 9,95 |
| 6 | 10,00 |
| 7 | 10,00 |
| 8 | 9,95 |
| 9 | 10,00 |
| 10 | 9,95 |

Tabelle 1: Durchmesserwerte des runden Stabes

Mit den Messwerten aus Tabelle 1 lässt sich der Durchmesser des runden Stabes mit Hilfe der Formeln für den Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

und den Standardfehler des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2)$$

als

$$d = (9,980 \pm 0,012) \text{ mm}$$

angeben. Der Radius beträgt somit

$$R = (4,990 \pm 0,006) \text{ mm}.$$

Das Flächenträgheitsmoment des runden Stabes kann nach Formel (FLÄCHENTRÄGHEITSMOMENT RUND) als

$$I_{Rund} = (0,003919 \pm 0,000005) \text{ m}^4$$

berechnet werden.

| $x / \text{ cm}$ | $D_{OhneGewicht} / \text{ mm}$ | $D_{MitGewicht} / \text{ mm}$ | $D_{Differenz} / \text{ mm}$ |
|------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 5 | −0,08 | 0,04 | 0,12 |
| 8 | −0,12 | 0,12 | 0,24 |
| 11 | −0,13 | 0,27 | 0,40 |
| 14 | −0,11 | 0,51 | 0,62 |
| 17 | −0,07 | 0,81 | 0,88 |
| 20 | 0,00 | 1,20 | 1,20 |
| 23 | 0,09 | 1,61 | 1,52 |
| 26 | 0,21 | 2,09 | 1,88 |
| 29 | 0,37 | 2,64 | 2,27 |
| 32 | 0,56 | 3,21 | 2,65 |
| 35 | 0,87 | 3,77 | 2,90 |
| 38 | 0,95 | 4,50 | 3,55 |
| 41 | 1,21 | 5,11 | 3,90 |
| 44 | 1,46 | 5,81 | 4,35 |
| 47 | 1,46 | 6,53 | 5,07 |

Tabelle 2: Messwerte des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

Mit Hilfe einer Linearen Ausgleichsrechnung der Messwerte aus Tabelle 2 kann der Elastizitätsmodul aus dem Faktor $F/2EI_{Rund}$ aus Gleichung (REFERENZ) bestimmt werden, der der Steigung

$$m = (0,0641 \pm 0,0008) \text{ m}^{-2}$$

der Ausgleichsgeraden in Abbildung 1 entspricht.

Aus dem Zusammenhang

$$E_{Rund} = \frac{F}{2 \cdot m \cdot I_{Rund}} \quad (3)$$

folgt dann, mit dem Wert $F = 5,3327 \text{ N}$ des verwendeten Gewichtes,

$$E = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$$

als Wert für den Elastizitätsmodul. (VERGLEICH MIT LITERATUR)

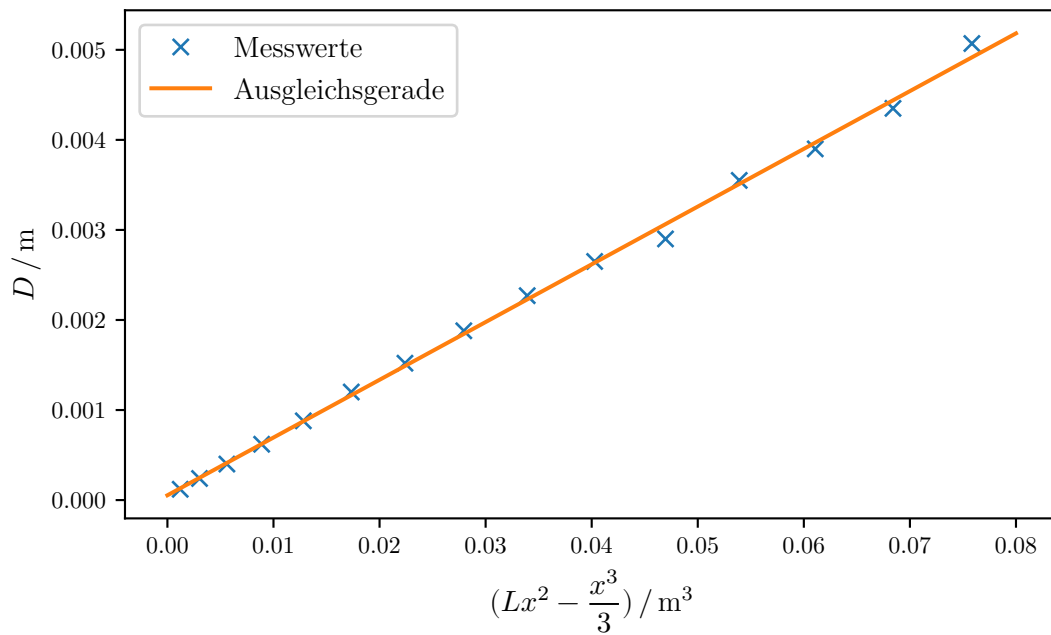


Abbildung 1: Runder Stab einseitig eingespannt

4.2 Eckiger Stab einseitig eingespannt

| Messung | h / mm | b / mm |
|---------|-----------------|-----------------|
| 1 | 9,95 | 10,00 |
| 2 | 9,95 | 10,00 |
| 3 | 10,00 | 10,05 |
| 4 | 9,90 | 10,00 |
| 5 | 10,00 | 10,00 |
| 6 | 9,90 | 10,05 |
| 7 | 9,95 | 9,95 |
| 8 | 10,00 | 9,95 |
| 9 | 9,95 | 10,00 |

Tabelle 3: Höhen- und Breitenwerte des eckigen Stabes

Mit den Messwerten aus Tabelle 2 lässt sich die Höhe des eckigen Stabes mit Hilfe der Formeln 1 und 2 als

$$h = (9,960 \pm 0,013) \text{ mm}$$

und die Breite als

$$b = (9,995 \pm 0,012) \text{ mm}$$

angeben. Das Flächenträgheitsmoment des eckigen Stabes kann nach Formel (FLÄCHEN-TRÄGHEITSMOMENT Eckig) als

$$I_{Eckig} = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

berechnet werden.

| $x / \text{ cm}$ | $D_{OhneGewicht} / \text{ mm}$ | $D_{MitGewicht} / \text{ mm}$ | $D_{Differenz} / \text{ mm}$ |
|------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 5 | −0,09 | −0,04 | 0,05 |
| 8 | −0,34 | −0,09 | 0,25 |
| 11 | −0,70 | −0,06 | 0,64 |
| 14 | −0,98 | 0,04 | 1,02 |
| 17 | −1,22 | 0,21 | 1,43 |
| 20 | −1,47 | 0,57 | 2,04 |
| 23 | −1,74 | 0,77 | 2,51 |
| 26 | −1,98 | 1,10 | 3,08 |
| 29 | −2,17 | 1,53 | 3,70 |
| 32 | −2,20 | 1,96 | 4,16 |
| 35 | −2,20 | 2,47 | 4,67 |
| 38 | −2,20 | 3,11 | 5,31 |
| 41 | −2,20 | 3,60 | 5,80 |
| 44 | −2,20 | 4,25 | 6,45 |
| 47 | −2,17 | 4,86 | 7,03 |

Tabelle 4: Messwerte des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

Mit Hilfe einer Linearen Ausgleichsrechnung der Messwerte aus Tabelle 4 kann der Elastizitätsmodul aus dem Faktor $F/2EI_{Rund}$ aus Gleichung (REFERENZ) bestimmt werden, der der Steigung

$$m = (0,0930 \pm 0,0023) \text{ m}^{-2}$$

der Ausgleichsgeraden in Abbildung 2 entspricht.

Aus dem Zusammenhang

$$E_{Eckig} = \frac{F}{2 \cdot m \cdot I_{Eckig}} \quad (4)$$

folgt dann, mit dem Wert $F = 11,855 \text{ N}$ des verwendeten Gewichtes,

$$E = (76,9 \pm 1,9) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$$

als Wert für den Elastizitätsmodul. (VERGLEICH MIT LITERATUR)

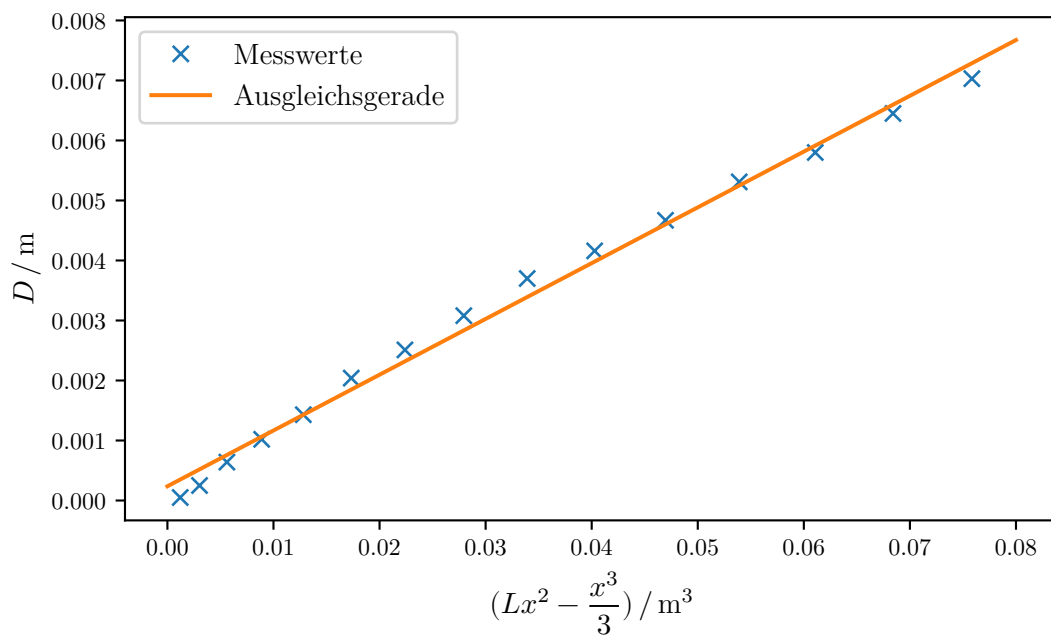


Abbildung 2: Eckiger Stab einseitig eingespannt

4.3 Runder Stab beidseitig eingespannt

| x / cm | $D_{\text{OhneGewicht}} / \text{mm}$ | $D_{\text{MitGewicht}} / \text{mm}$ | $D_{\text{Differenz}} / \text{mm}$ |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 6,6 | −0,84 | 0,05 | 0,89 |
| 9,6 | −0,75 | 0,48 | 1,23 |
| 12,6 | −0,63 | 0,94 | 1,57 |
| 15,6 | −0,48 | 1,32 | 1,80 |
| 18,6 | −0,33 | 1,66 | 1,99 |
| 21,6 | −0,22 | 1,91 | 2,13 |
| 24,6 | −0,11 | 2,05 | 2,16 |
| 30,6 | 0,09 | 2,02 | 1,93 |
| 33,6 | 0,13 | 1,89 | 1,76 |
| 36,6 | 0,20 | 1,68 | 1,48 |
| 39,6 | 0,27 | 1,43 | 1,16 |
| 42,6 | 0,35 | 1,14 | 0,79 |
| 45,6 | 0,44 | 0,78 | 0,34 |
| 48,6 | 0,54 | 0,39 | −0,15 |

Tabelle 5: Messwerte des runden Stabes bei beidseitiger Einspannung

Auch bei der beidseitigen Einspannung kann der Elastizitätsmodul durch eine Ausgleichsrechnung bestimmt werden. Hierfür werden die linke und die Rechte Hälfte des Stabes separat betrachtet (siehe Abbildung 3). Die Steigung der Ausgleichsgeraden auf der linken Seite beträgt

$$m = (0,0122 \pm 0,0005) \text{ m}^{-2}$$

und auf der rechten Seite

$$m = (0,01945 \pm 0,00016) \text{ m}^{-2}.$$

Mit dem entsprechenden Wert $F = 11,855 \text{ N}$ für beide Gewichte ergibt sich dann aus dem Zusammenhang

$$E_{Rund} = \frac{F}{48 \cdot m \cdot I_{Rund}} \quad (5)$$

für $x < L/2$

$$E = (99 \pm 4) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$$

und für $x > L/2$

$$E = (62 \pm 6) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}.$$

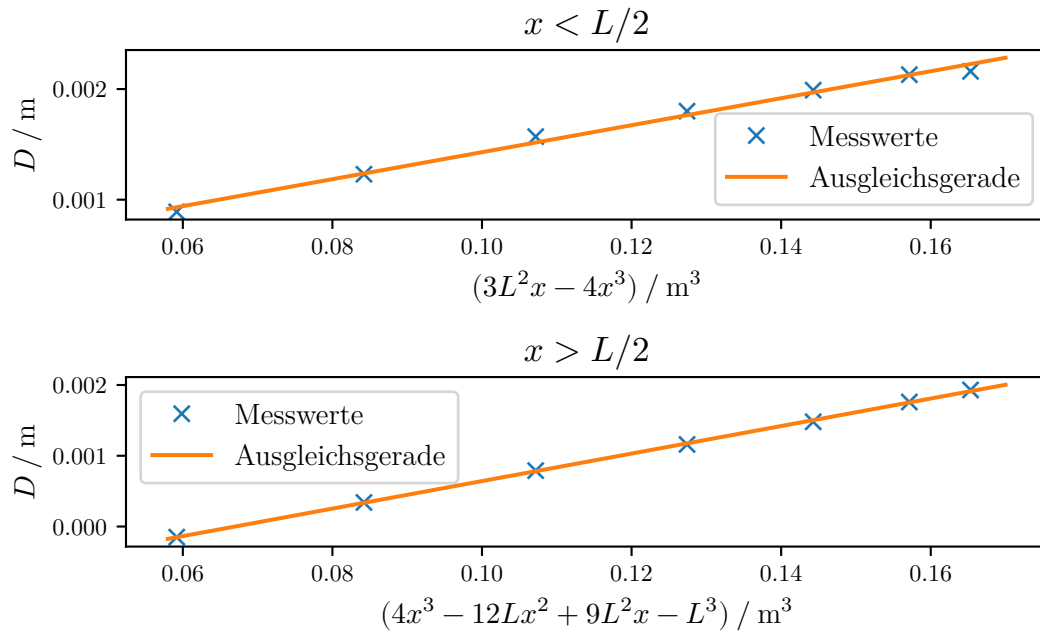


Abbildung 3: Runder Stab beidseitig eingespannt

4.4 Eckiger Stab beidseitig eingespannt

| x / cm | $D_{\text{OhneGewicht}} / \text{mm}$ | $D_{\text{MitGewicht}} / \text{mm}$ | $D_{\text{Differenz}} / \text{mm}$ |
|-----------------|--------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 6,6 | −0,28 | 0,35 | 0,63 |
| 9,6 | −0,24 | 0,64 | 0,88 |
| 12,6 | −0,16 | 0,92 | 1,08 |
| 15,6 | −0,05 | 1,19 | 1,24 |
| 18,6 | −0,06 | 1,42 | 1,48 |
| 21,6 | 0,00 | 1,60 | 1,60 |
| 24,6 | 0,07 | 1,66 | 1,59 |
| 30,6 | 0,06 | 1,68 | 1,62 |
| 33,6 | 0,07 | 1,68 | 1,61 |
| 36,6 | 0,07 | 1,53 | 1,46 |
| 39,6 | 0,07 | 1,38 | 1,31 |
| 42,6 | 0,01 | 1,25 | 1,24 |
| 45,6 | 0,13 | 1,04 | 0,91 |
| 48,6 | 0,18 | 0,87 | 0,69 |

Tabelle 6: Messwerte des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung

Die Steigung der Ausgleichsgeraden in Abbildung 4 auf der linken Seite beträgt

$$m = (0,0095 \pm 0,0004) \text{ m}^{-2}$$

und auf der rechten Seite

$$m = (0,0089 \pm 0,0006) \text{ m}^{-2}.$$

Mit dem entsprechenden Wert $F = 11,855 \text{ N}$ für beide Gewichte ergibt sich dann aus dem Zusammenhang

$$E_{\text{Eckig}} = \frac{F}{48 \cdot m \cdot I_{\text{Eckig}}} \quad (6)$$

für $x < L/2$

$$E = (127 \pm 5) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$$

und für $x > L/2$

$$E = (135 \pm 9) \cdot 10^9 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}.$$

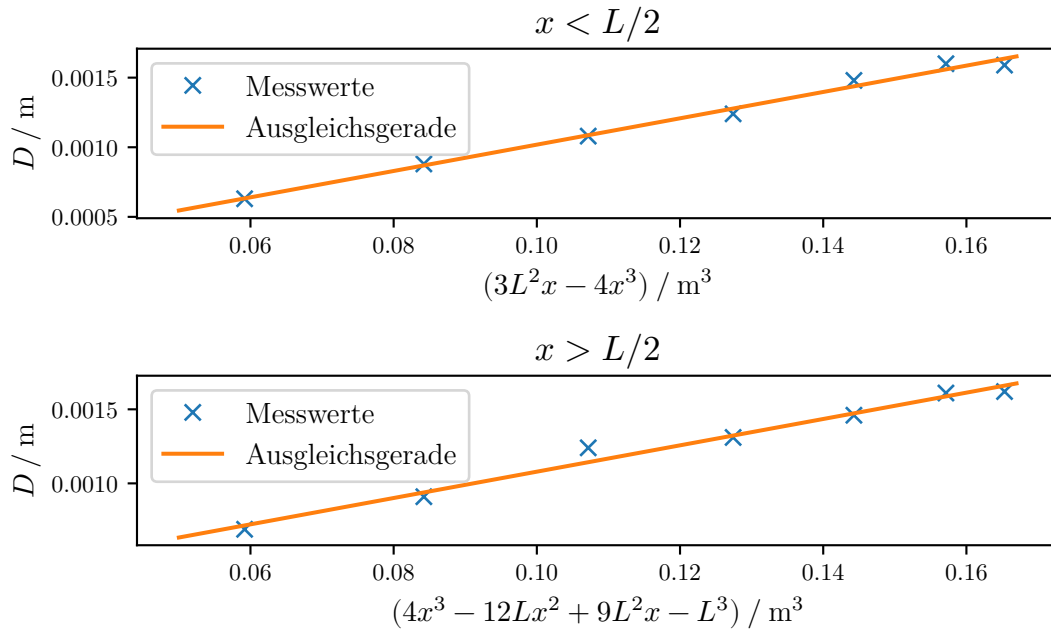


Abbildung 4: Eckiger Stab beidseitig eingespannt

5 Diskussion

Das Ergebnis für den Elastizitätsmodul des runden Stabes bei einseitiger Einspannung ($E = (85,4 \pm 1,1) \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m s}^2)$) lässt vermuten, dass es sich bei dem Material des Stabes um Messing handelt. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls bei Messing beträgt $(78 - 123) \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m s}^2)$ (Siehe ZITAT). Die Ergebnisse bei der beidseitigen Einspannung weichen jedoch um (PROZENT) von der unteren Grenze des Literaturwertes auf der rechten Seite ab.

Das Ergebnis für den Elastizitätsmodul des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung ($E = (76,9 \pm 1,9) \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m s}^2)$) lässt vermuten, dass es sich bei dem Material des Stabes um Aluminium handelt. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls bei Aluminium beträgt $(70) \cdot 10^9 \text{ kg}/(\text{m s}^2)$ (Siehe (ZITAT)). Das aus der Messung bestimmte Elastizitätsmodul weicht also um (PROZENT) ab. Bei der beidseitigen Messung treten Abweichungen von (PROZENT) auf der linken und (PROZENT) auf der rechten Seite auf.

Die Abweichungen lassen sich durch statistische Fehler und systematische Fehler bei der Messung erklären. Wahrscheinlich ist, dass Ungenauigkeiten beim Ablesen der Messuhr und beim kalibrieren dieser aufgetreten sind. Der zweite Stab kann durch die großen Abweichungen für die einseitige und beidseitige Einspannung nicht sicher als Aluminium identifiziert werden.

6 Anhang

Versuch 103

Kleines Gewicht: 503,2g
 Großes Gewicht: 1168,9g
 Abhängung: 40,4g

2. Großes Gewicht: 1159,7g

Runder Stab: 304,3g Länge: 59,95 cm
 Eckiger Stab: 164,1g Länge: 59,1 cm

| Eckiger Stab | Höhe | Breite (mit Kerbe) | Runder Stab | Durchmesser |
|--------------|---------|--------------------|-------------|-------------|
| 1 | 9,95 mm | 10 mm | 1 | 10,05 mm |
| 2 | 9,95 mm | 10 mm | 2 | 10 mm |
| 3 | 10 mm | 10,05 mm | 3 | 9,95 mm |
| 4 | 9,9 mm | 10 mm | 4 | 9,95 mm |
| 5 | 10 mm | 10 mm | 5 | 9,95 mm |
| 6 | 9,9 mm | 10,05 mm | 6 | 10 mm |
| 7 | 9,95 mm | 9,95 mm | 7 | 10 mm |
| 8 | 10 mm | 9,95 mm | 8 | 9,95 mm |
| 9 | 9,95 mm | 10 mm | 9 | 10 mm |
| 10 | 10 mm | 9,95 mm | 10 | 9,95 mm |

Eckiger Stab: effektive Länge 50 cm (einseitig)

| Abstand x in cm | Ohne Gewicht/mm | mit Gewicht (kleines Gewicht)/mm |
|-----------------|-----------------|----------------------------------|
| Ende - Gardel | | |
| 3 | 1,46 | 5,53 + 1 |
| 6 | 1,46 | 4,81 + 1 |
| 9 | 1,21 | 4,11 + 1 |
| 12 | 0,95 | 3,50 + 1 |
| 15 | 0,87 | 2,77 + 1 |
| 18 | 0,56 | 2,21 + 1 |
| 21 | 0,37 | 1,64 + 1 |
| 24 | 0,21 | 1,09 + 1 |
| 27 | 0,09 | 0,51 + 1 |
| 30 | 0 | 0,20 + 1 |
| 33 | -0,07 | -0,19 + 1 |
| 36 | -0,11 | -0,49 + 1 |
| 39 | -0,13 | -0,73 + 1 |
| 42 | -0,12 | -0,88 + 1 |
| 45 | -0,08 | -0,98 + 1 |

117g - Aufhängen

F. 92

(+ 1, weil uns am Ende der Messung aufgefallen ist, dass wir falsch gemessen haben)

| alle Gewichte | uniseitig Abstand x in cm | rechter Stab | effektive Länge 55,2 cm | |
|--------------------|------------------------------|-----------------|------------------------------------|------------------|
| | | | ohne Gewicht / mm | mit Gewicht / mm |
| Aufg | 6,6 | | - 0,84 | 0,05 |
| | 10,6 | | - 0,75 | 0,48 |
| | 12,6 | | - 0,63 | 0,94 |
| | 15,6 | | - 0,48 - 0,32 0,16 0,12 | 1,32 |
| | 18,6 | | 0,24 - 0,33 | 1,66 |
| | 21,6 | | - 0,12 | 1,91 |
| | 24,6 | | - 0,11 | 2,33 2,05 |
| | 27,6 | | 0,09 | 2,96 2,02 |
| | 30,6 | | 0,13 | 1,89 |
| | 36,6 | | 0,20 | 1,68 |
| | 39,6 | | 0,27 | 1,43 |
| | 42,6 | | 0,385 | 1,14 |
| | 45,6 | | 0,44 | 0,78 |
| | 48,6 | | 0,54 | 0,39 |
| Gewicht | Abstand x in cm | | ohne Gewicht / mm | mit Gewicht / mm |
| | Gewicht | | | |
| 1. großes Gewichte | 3 | | - 2,17 | 4,86 |
| | 6 | | - 2,20 | 4,25 |
| | 9 | | - 2,20 | 3,60 |
| | 12 | | - 2,20 | 3,11 |
| | 15 | | - 2,20 | 2,47 |
| | 18 | | - 2,20 | 1,96 |
| | 21 | | - 2,17 | 1,53 |
| | 24 | | - 1,98 | 1,10 |
| | 27 | | - 1,74 | 0,77 |
| | 30 | | - 1,47 | 0,57 |
| | 33 | | - 1,22 | 0,21 |
| | 36 | | - 0,98 | 0,04 |
| | 39 | | - 0,80 | - 0,06 |
| | 42 | | - 0,34 | - 0,08 - 0,09 |
| | 45 | | - 0,09 | - 0,64 |
| | 48 | | | |

F. 100

Beidseitig eff. Länge $\hat{=} 55 \text{ cm}$

| Abstand x/mm | ohne Gerüst 1mm | mit Gerüst 1mm alle Gerüste |
|-----------------------|-----------------|-----------------------------|
| 6,6 | -0,28 | 0,35 |
| 9,6 | -0,24 | 0,64 |
| 12,6 | -0,16 | 0,92 |
| 15,6 | -0,05 | 1,19 |
| 18,6 | -0,06 | 1,42 |
| 21,6 | 0,00 | 1,60 |
| 24,6 | 0,07 | 1,66 |
| [27,6 - Mitte] | - | |
| 30,6 | 0,06 | 1,68 |
| 33,6 | 0,07 | 1,68 |
| 36,6 | 0,07 | 1,53 |
| 39,6 | 0,07 | 1,38 |
| 42,6 | 0,1 | 1,25 |
| 45,6 | 0,13 | 1,04 |
| 48,6 | 0,18 | 0,87 |

F-RS

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Biegung elastischer Stäbe*.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.

- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [5] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.