

Versuch 103

Biegung elastischer Stäbe

Nico Schaffrath
nico.schaffrath@tu-dortmund.de

Mira Arndt
mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 7.01.2020

Abgabe: 14.01.2020

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemein	3
2.2	Einseitige Biegung des Stabes	3
2.3	Zweiseitige Biegung eines Stabes	6
3	Durchführung	6
3.1	Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die einseitige Einspannung . . .	6
3.2	Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die beidseitige Einspannung . . .	7
4	Auswertung	10
5	Diskussion	12
6	Anhang	12
	Literatur	12

1 Ziel

In diesem Versuch soll der Elastizitätsmodul unterschiedlicher Metalle mithilfe einer Bieugungsmessung bestimmt werden. Zusätzlich sollen die verwendeten Metalle über ihre Dichte bestimmt werden.

Zitate und Quellen nicht vergessen CHEMIE

2 Theorie

2.1 Allgemein

Wenn äußere Kräfte auf einen Körper wirken, sodass sich dieser verformt, können Spannungen auftreten. Dieses Verhalten kann der Abbildung ?? entnommen werden.

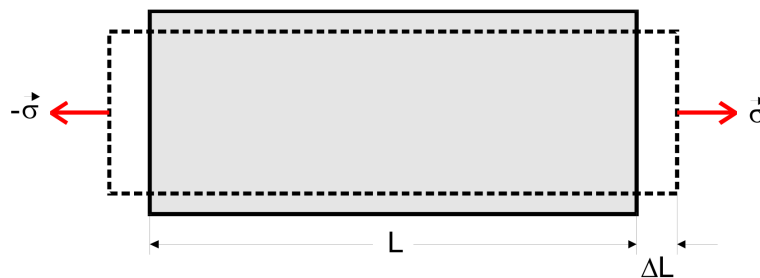


Abbildung 1: Dehnung eines Stabes durch den Einfluss einer Normalspannung

Es wird unterschieden zwischen der Normalspannung, welche senkrecht zur Oberfläche steht und der Tangentialspannung, welche parallel zur Oberfläche verläuft. Wird durch eine von außenwirkende Kraft die Länge L eines Materials um ΔL verkürzt, so entsteht eine Spannung, welche mithilfe des Hookschen Gesetzes

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

beschrieben werden kann, wobei E als Elastizitätsmodul bezeichnet wird. Dieser Proportionalitätsfaktor lässt sich auch über die Biegung eines Stabes berechnen.

2.2 Einseitige Biegung des Stabes

Wird ein Stab, wobei die geometrische Form des Querschnitts allgemein nicht von Bedeutung für den Ablauf des Versuchs ist, an einem seiner Enden eingespannt und zusätzlich an dem anderen Ende mit einem Gewicht belastet, so lässt sich beobachten, dass die Durchbiegung des Stabes mit zunehmenden Abstand von dem eingespannten Ende ebenfalls zunimmt (siehe dazu Abbildung ??).

Durch die an der Stelle L wirkenden Kraft, wird auf die an Querschnittsfläche an der Stelle x ein Drehmoment M_F ausgeübt, welches eine Verdrehung des Stabes hervorruft. Die oberen Schichten des Stabes werden gestreckt und die unteren gestaucht. Der Stab

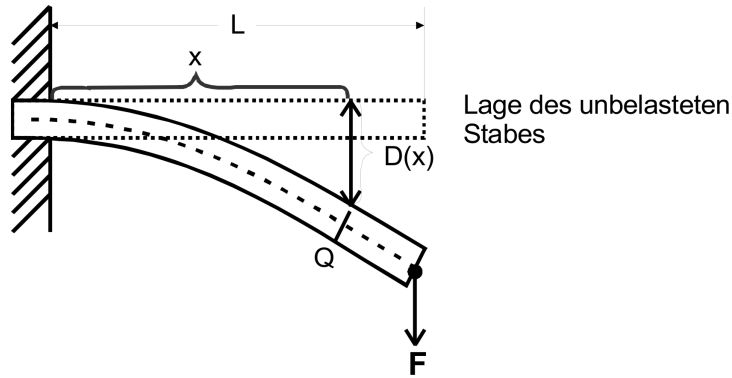


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes unter dem Einfluss einer Kraft bei einseitige Einspannung

verdreht sich so lange weiter, bis ein Gleichgewicht zwischen dem Drehmoment M_F und dem durch die Spannungen zwischen den gestauchten beziehungsweise gestreckten Schichten des Stabes entstehenden Drehmoments M_σ entsteht. Es existiert aber auch eine Schicht, in der keine Spannungen auftreten. Diese wird als neutrale Faser bezeichnet.

Da die Kraft, die auf den Stab wirkt, senkrecht zu dem Kraftarm ist, gilt für das Drehmoment M_F , welches auf die Querschnittsfläche an der Stelle x wirkt

$$M_F = F \cdot (L - x). \quad (2)$$

Im Gegensatz dazu lässt sich das Drehmoment M_σ mit

$$M_\sigma = \int_Q y \cdot \sigma(y) dq \quad (3)$$

berechnen, wobei y den Abstand des Flächenelements dq von der neutralen Faser angibt (siehe Abbildung ??).

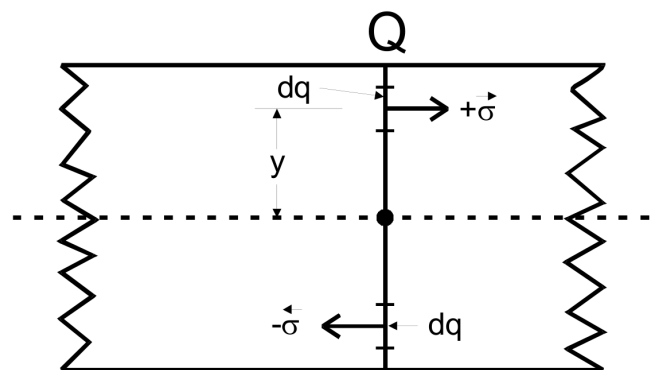


Abbildung 3: Querschnitt des Stabes zur Berechnung des Drehmoments M_σ

Weiterhin kann $\sigma(y)$ mithilfe von Gleichung 1 umgeschrieben werden, sodass sich

$$\sigma(y) = E \frac{\delta x}{\Delta x} \quad (4)$$

ergibt. Hierbei gibt δx die Änderung der Länge von Δx infolge der Biegung des Stabes.

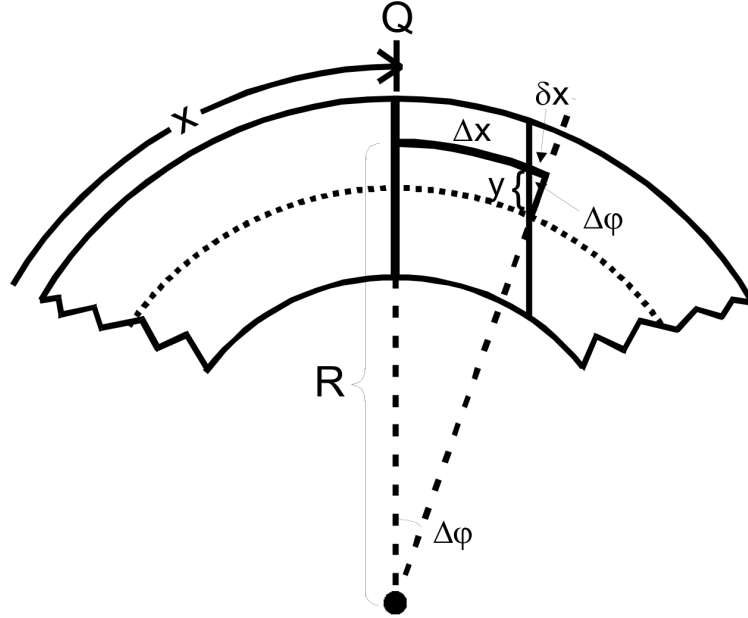


Abbildung 4: Skizze zur Berechnung der Normalspannung $\sigma(y)$ in einem gebogenen Stab

Aus der Abbildung ?? lässt sich für $\delta x \ll \Delta x$ entnehmen, dass sich die Längenänderung δx als

$$\delta x = y \Delta \phi = y \frac{\Delta x}{R} \quad (5)$$

schreiben lässt. Mit der Annahme, dass mit R ein geringer Krümmungsradius vorliegt, lässt sich das Gleichgewicht von M_F und M_σ mit den Gleichungen 2 und 3 zu

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F(L - x) \quad (6)$$

umformulieren. Das Integral

$$I = \int_Q y^2 dq \quad (7)$$

wird als Flächenträgheitsmoment bezeichnet. Zusammenfassend ergibt sich also für die gesuchte Durchbiegung $D(x)$ der Zusammenhang

$$D(x) = \frac{F}{2EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (8)$$

für $0 \leq x \leq L$.

2.3 Zweiseitige Biegung eines Stabes

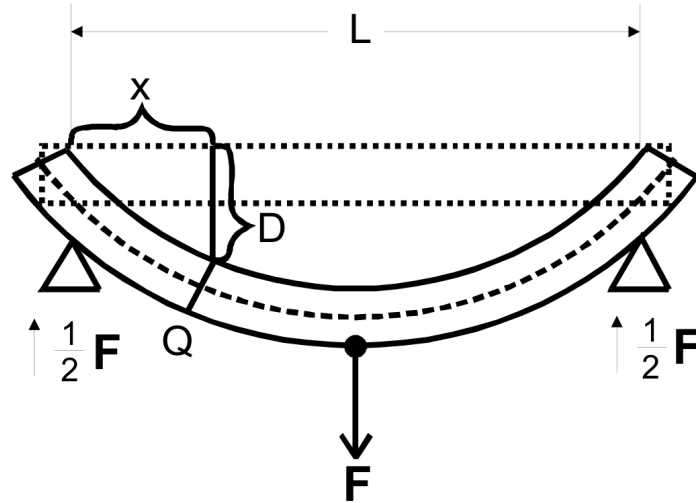


Abbildung 5: Durchbiegung eines zweiseitig aufgelegten Stabes

Wenn ein Stab nun nicht nur an einem Ende, sondern an seinen beiden Enden eingespannt wird, wie in der Abbildung ?? zu sehen ist, greift nur noch das Drehmoment

$$M_F = -\frac{F}{2}x \quad (9)$$

an der Querschnittsfläche Q an, für die $0 \leq x \leq L/2$ gilt. Im Gegensatz dazu gilt für $L/2 \leq x \leq L$ nun

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x). \quad (10)$$

Mittels dieser Gleichungen und der Annahme, dass in der Mitte des Stabes die Biegelinie $D(x)$ eine horizontale Tangente besitzt, ergibt sich aus der Gleichung 6 für $0 \leq x \leq L/2$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (11)$$

beziehungsweise für $L/2 \leq x \leq L$

$$D(x) = \frac{F}{48EI} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3). \quad (12)$$

3 Durchführung

3.1 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die einseitige Einspannung

Sowohl ein zylindrischer, als auch ein rechteckiger Stab werden zunächst vermessen und gewogen. Anschließend werden die Stäbe nacheinander einseitig, wie in Abbildung ?? zu sehen ist, in die Vorrichtung eingespannt.

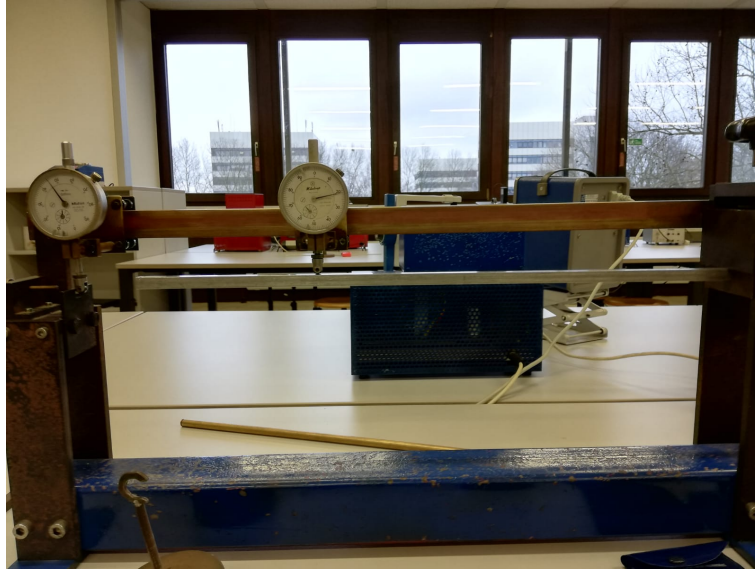


Abbildung 6: Aufbau zur einseitigen Messung der Durchbiegung ohne Gewicht

Nun soll die Auslenkung $D(x)$ ohne Verwendung eines Gewichts in Abhängigkeit von x gemessen werden, wobei 15 Messwerte aufzunehmen sind. Daran angeschlossen wird eine Masse $m_{\text{Zylinder},1} = 503,2 \text{ g}$ beziehungsweise $m_{\text{Rechteck},1} = 1168,8 \text{ g}$ über eine Aufhängung ($m_A = 40,4 \text{ g}$) an die Seite des Stabes gehangen (siehe Abbildung ??), welche nicht eingespannt wurde. Auch hier werden 15 Messwerte für die Auslenkung $D(x)$ in Abhängigkeit von x aufgenommen.

3.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls über die beidseitige Einspannung

Ähnlich wie beim ersten Teilversuch soll der Elastizitätsmoduls der beiden zuvor verwendeten Stäbe ermittelt werden. Zuerst wird jeweils ein Stab an beiden seiner Enden in der Vorrichtung eingespannt, wie in Abbildung ?? zu sehen ist. Hier sollen 15 Messwerte aufgenommen werden, welche die Abhängigkeit der Auslenkung $D(x)$ in Abhängigkeit von x angeben.

Daran angeschlossen wird an die Mitte des Stabes ein Gewicht der Masse aufgehängt und abermals soll die Auslenkung $D(x)$ abhängig von x über 15 Messwerte ermittelt werden. Hierbei beträgt die Masse des Gewichts $m_2 = 2830,8 \text{ g}$. Auch in diesem Teil des Versuchs wurde die Aufhängung mit der Masse $m_A = 40,4 \text{ g}$ verwendet. Dies lässt sich Abbildung ?? entnehmen.

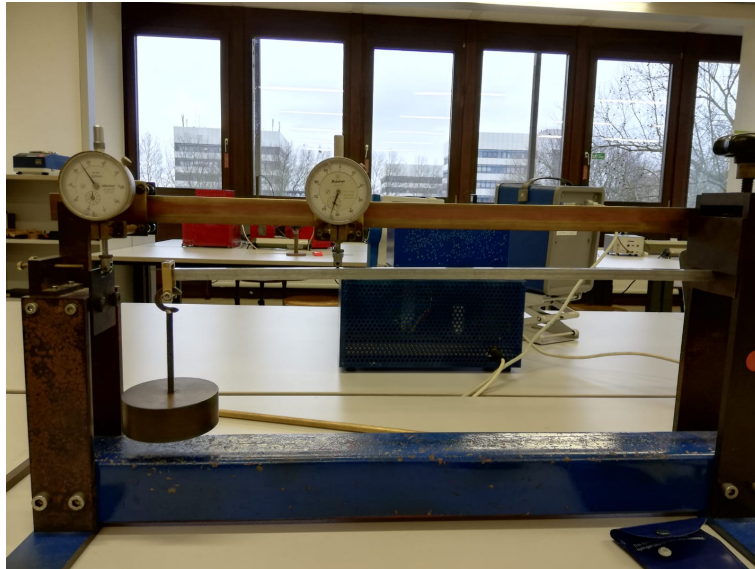


Abbildung 7: Aufbau zur Messung einseitigen Messung der Durchbiegung mit Gewicht

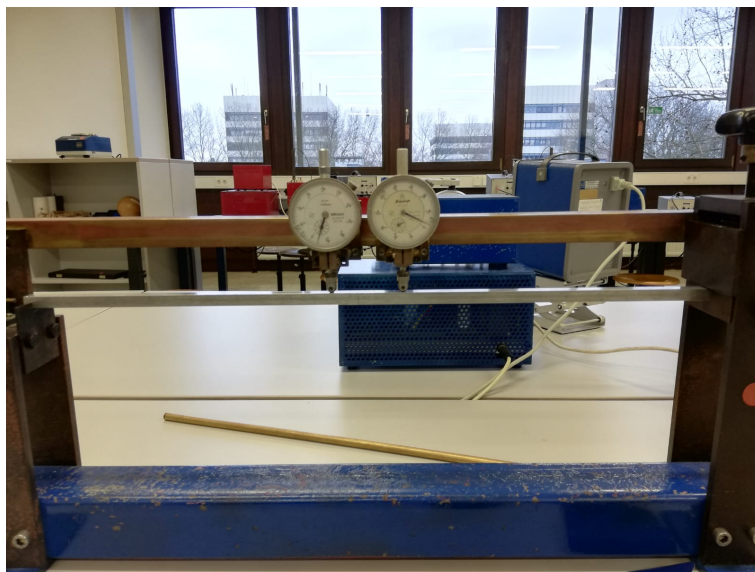


Abbildung 8: Aufbau zur beidseitigen Messung der Durchbiegung ohne Gewicht

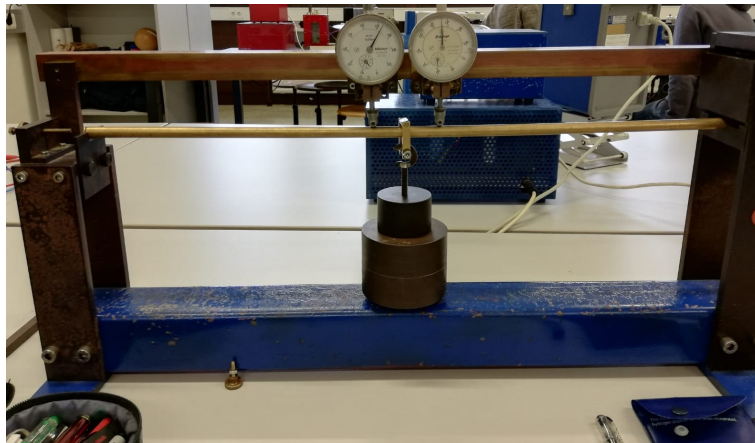


Abbildung 9: Aufbau zur beidseitigen Messung der Durchbiegung mit Gewicht

4 Auswertung

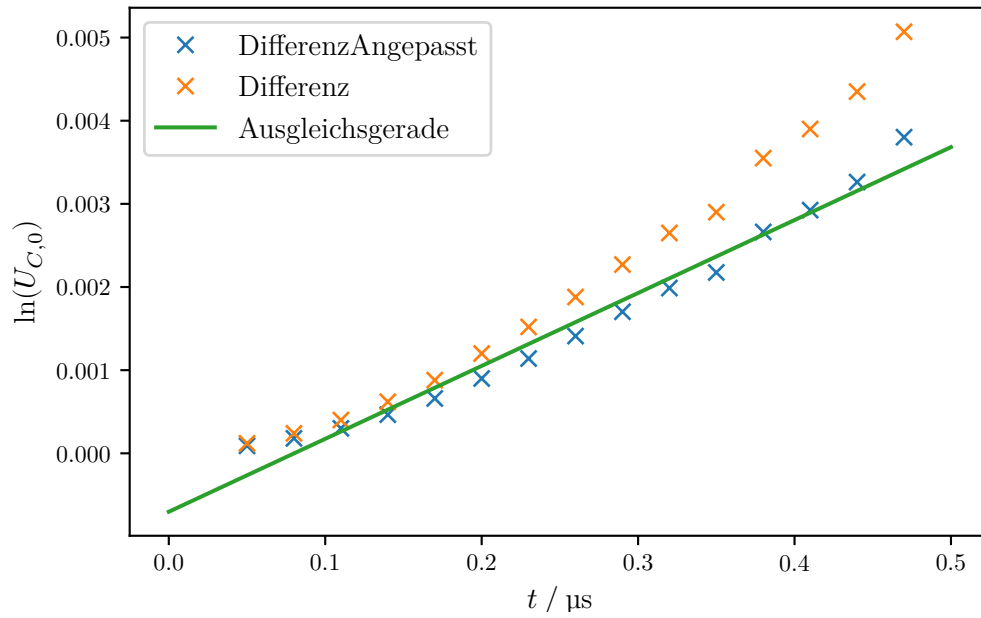


Abbildung 10: Plot.

Siehe Abbildung 12!

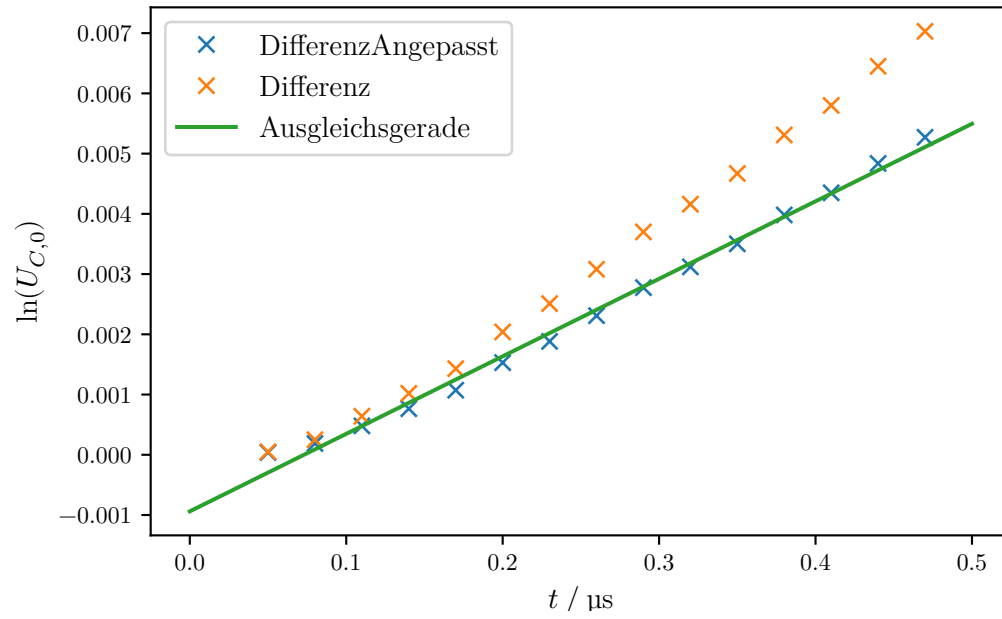


Abbildung 11: Plot.

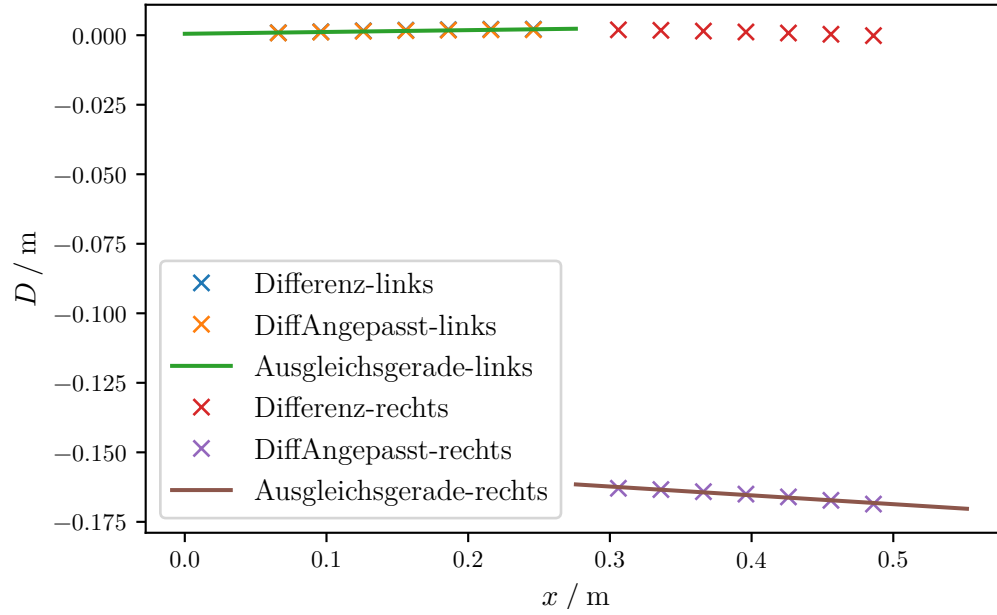


Abbildung 12: Plot.

5 Diskussion

6 Anhang

Literatur

- [1] *Chemie.de*. URL: <https://www.chemie.de/lexikon/Elastizit%C3%A4tsmodul.html>.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung-Biegung elastischer Stäbe*.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [5] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [6] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.