# Versuch 204

# Wärmeleitung von Metallen

Nico Schaffrath Mira Arndt nico.schaffrath@tu-dortmund.de mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.01.2020 Abgabe: 28.01.2020

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie	3
3	Durchführung3.1 Allgemein3.2 Statische Methode3.3 Dynamische Methode	5
4	Auswertung  4.1 statistische Methode	10 11
5	Diskussion	17
6	Anhang	18
Lit	eratur	18

# 1 Ziel

In dem Versuch soll die Wärmeleitfähigkeit von Aluminium, Messing und Edelstahl untersucht werden und anschließend sollen die jeweiligen spezifischen Wärmeleitfähigkeiten bestimmt werden.

### 2 Theorie

Wenn sich die Temperatur innerhalb eines Körpers nicht in einem Gleichgewichtszustand befindet, tritt ein Wärmetransport in Form von mindestens einer der drei Möglichkeiten Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung auf. Wird ein Stab, mit Länge L, dem Querschnitt A, der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärme c so erhitzt, dass er zum Beispiel an einem Ende wärmer ist, als an dem anderen, so fließt innerhalb der Zeit dt die Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \tag{1}$$

durch die Querschnittsfläche A. Das Minuszeichen kommt daher, dass Wärme immer vom warmen ins kalte Reservoir fließt. Der Buchstabe  $\kappa$  bezeichnet die gesuchte Wärmeleitfähigkeit, welche materialabhängig ist. In dem vorliegenden eindimensionalen Fall lässt sich die Wärmestromdichte j als

$$j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2}$$

definieren. Weiterhin lässt sich die Wärme innerhalb eines Körpers über [3]

$$Q = mcT (3)$$

berechnen. Werden nun die Gleichungen 2 und 3 in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0 \tag{4}$$

eingesetzt (V steht für das Volumen), so ergibt sich die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$
 (5)

Mithilfe dieser Gleichung lässt sich die räumliche und zeitliche Temperaturentwicklung in dem zu untersuchenden Köper beschreiben. Die Lösung ist abhängig von Anfangsbedingungen und der Stabgeometrie. Weiterhin wird die Temperaturleitfähigkeit, ein Maß dafür, wie schnell ein Temperaturausgleich zustande kommt, als

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c} \tag{6}$$

definiert. Wird ein Stab über die Periode Tabwechselnd erhitzt und abgekühlt, ergibt sich die allgemeine Lösung

$$T(x,t) = T_{max}e^{-\sqrt{\frac{\rho\omega c}{2\kappa}}x}cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\kappa}}x\right). \tag{7}$$

Diese Lösung entspricht einer Temperaturwelle, mit Amplitude  $T_{max}$ , welche sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \tag{8}$$

in dem Stab ausbreitet. Die Dämpfung dieser Welle lässt sich über das Verhältnis der Amplituden  $A_{nah}$  und  $A_{fern}$  an den Stellen  $x_{nah}$  und  $x_{fern}$  bestimmen. Werden zusätzlich  $\omega = \frac{2\pi}{T^*}$  ( $T^*$  gibt die Periodendauer der Wärmewelle an) und  $\Phi = \frac{2\pi\Delta t}{T^*}$  verwendet, lässt sich die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  über

$$\kappa = \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2\Delta t \ln \frac{A_{nah}}{A_{fern}}} \tag{9}$$

errechnen. Hierbei gilt

$$\Delta x = x_{fern} - x_{nah}$$
$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

# 3 Durchführung

### 3.1 Allgemein

Bei dem Versuch sind vier Probestäbe (zwei Messingstäbe mit unterschiedlichen Querschnittsflächen sowie jeweils ein Aluminiumstab und ein Edelstahlstab mit gleichen Querschnittsflächen) auf einer Platte befestigt. Wie der Abbildung 1 entnommen werden kann, werden die Stäbe an einer Seite mithilfe eines Peltierelements simultan erhitzt beziehungsweise abgekühlt. An jedem Stab befinden sich zwei Thermoelemente, mit denen die Temperatur an dem Stab gemessen werden kann. Die Grundplatte ist zusätzlich mit dem 'XPlorer GLX' (Datenlogger) verbunden, welcher die aufgenommenen Daten während der Messung anzeigen, aber auch abspeichern kann. Während der Messung soll die Wärmeisolierung über die Stäbe gelegt werden, damit die Abgabe von Wärme an die Umgebung so gering die möglich gehalten werden kann.

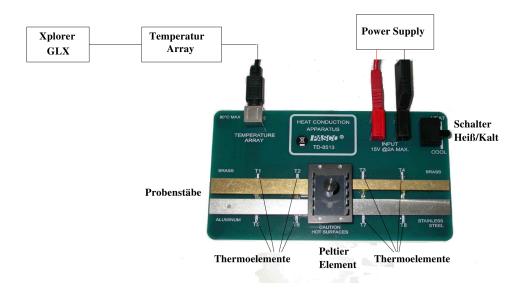


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Versuchaufbaus [4]

#### 3.2 Statische Methode

Zunächst soll der Abstand der Thermoelemente eines Stabes voneinander gemessen werden. Die Abtastrate des Datenloggers soll auf  $\Delta t_{GLX}=5$  s eingestellt werden. Die mit der Grundplatte verbundene Spannungsquelle soll auf  $U_P=5$  V eingestellt werden. Wenn die Isolierung auf die Stäbe gelegt wurde, kann der Schalter an der Grundplatte auf 'Heat' umgelegt und die Messung gestartet werden. Die Messung soll beendet werden, wenn die Temperatur an Thermoelement  $T_7$  ungefähr 45°C beträgt. Ist dieser Punkt erreicht, so sollen die Isolierungen abgenommen werden und der Schalter an der Grundplatte soll von 'Heat' auf 'Cool' umgelegt werden. Die aufgenommenen Daten, welche auf dem Datenlogger gespeichert wurden, sollen grafisch ausgewertet werden. Erst wenn die Temperatur aller Thermoelemente unter 30°C liegt kann mit der zweiten Messung fortgefahren werden.

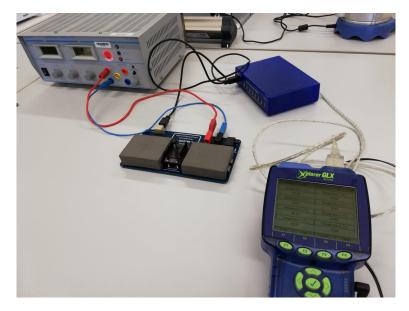


Abbildung 2: Versuchsaufbau

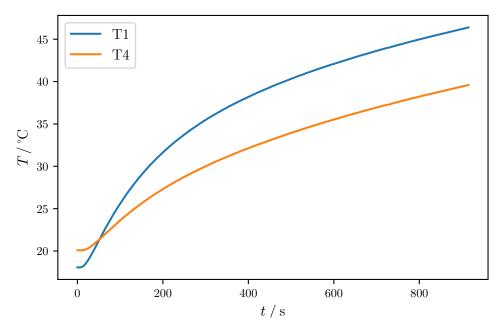
# 3.3 Dynamische Methode

Im Gegensatz zu der statischen Methode sollen die Stäbe nun periodisch erhitzt und abgekühlt werden. Die Abtastrate am Datenlogger soll auf  $\Delta t_{GLX}=1$  s und die Spannung der Spannungsquelle auf  $U_P=8$  V eingestellt werden. Die Messung soll erst gestartet werden, wenn alle Thermoelemente weniger als 30°C anzeigen. Auch hier sollen während der Messung die Isolierung auf die Stäbe gelegt werden (siehe 2). Die erste Messung soll bei einer Periodendauer von T=80 s durchgeführt werden, das heißt, dass der Schalter nach jeweils 40 s umgeschaltet werden soll. Es sollen mindestens sechs Perioden aufgenommen werden. Nachdem die Messung beendet wurde, sollen die Stäbe wieder bis auf unter 30°C gekühlt werden. Während des Kühlvorgangs können die Isolierungen abgenommen werden. Nachdem sich die Stäbe abgekühlt haben, kann eine zweite Messung durchgeführt werden. Diese unterscheidet sich von der ersten dynamischen Messung dahingehend, dass die Periodendauer auf T=200 s erhöht wird.

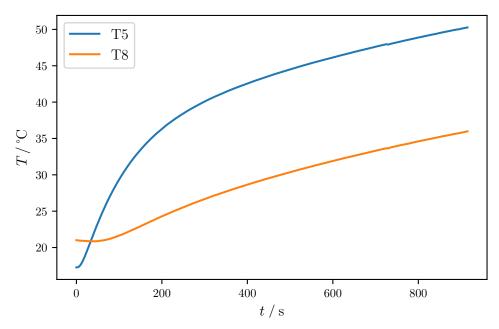
# 4 Auswertung

#### 4.1 statistische Methode

Der Abstand der Thermoelemente zueinander beträgt jeweils  $\Delta x = 3 \, \mathrm{cm}$ .



**Abbildung 3:** Zeitlicher Temperaturverlauf des breiten und dünnen Messingstabes bei der statischen Methode



**Abbildung 4:** Zeitlicher Temperaturverlauf des Aluminium- und Edelstahlstabes bei der statischen Methode

In Abbildung 3 sind die Temperaturverläufe der beiden Messingstäbe aufgetragen. Dabei fällt auf, dass der breite Stab schneller wärmer wird als der dünne Stab und sich auf lange Sicht eine Temperaturdifferenz von ca  $7\,^{\circ}$ C einstellt. Auch wenn der dünne Messingstab zu Beginn der Messung eine höhere Starttemperatur von  $20,1\,^{\circ}$ C als der breite Messingstab ( $18,07\,^{\circ}$ C) hatte, so wurde diese Temperaturdifferenz bereits nach 45 Sekunden ausgeglichen.

In Abbildung 4 sind die Temperaturverläufe des Aluminiumstabes und des Edelstahlstabes aufgetragen. Hierbei wird der Aluminiumstab schneller heiß als der Edelstahlstab. Die Temperaturdifferenz stellt sich auf lange Sicht bei ca  $14\,^{\circ}\mathrm{C}$  ein. Auch wenn der Edelstahlstab zu Beginn der Messung eine höhere Starttemperatur von  $21,01\,^{\circ}\mathrm{C}$  als der Aluminiumstab  $(17,27\,^{\circ}\mathrm{C})$  hatte, so wurde diese Temperaturdifferenz sogar schon nach nach 35 Sekunden ausgeglichen.

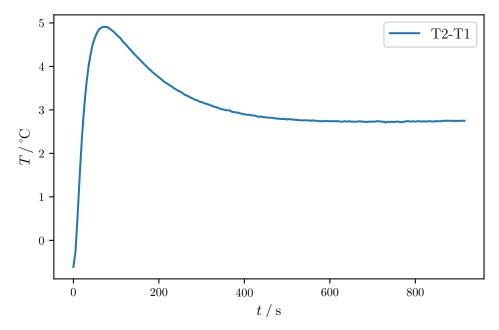
Generell lässt sich sagen, dass alle Temperaturverläufe ihren größten Anstieg in den ersten 200 Sekunden haben. Dabei steigt die Temperatur des Aluminiums schon nach den ersten Sekunden stark an, während Edelstahl sich erst nach einer Minute merkbar erwärmt. Um beurteilen zu können, welcher Stab die beste Wärmeleitung hat, werden die Temperaturen nach 700 Sekunden verglichen (Siehe Tabelle 1).

Tabelle 1: Temperatur der Thermoelemente nach 700 Sekunden

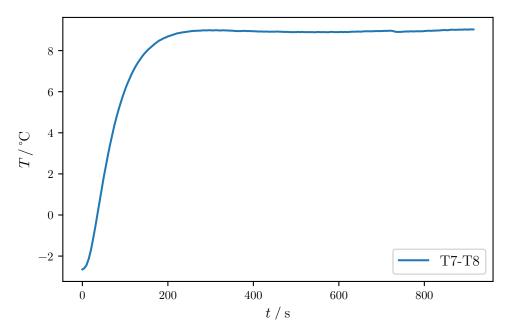
Thermoelement	$T/^{\circ}\mathrm{C}$
Т 1	43,62
T 4	36,94
T 5	47,62
T 8	$33,\!32$

Es lässt sich also sagen, dass der Aluminiumstab die beste Wärmeleitung hat.

In den Abbildungen 5 und 6 sind die Temperaturdifferenzen des nahen und fernen Thermoelementes des breiten Messingstabes und des Edelstahlstabes gegen die Zeit aufgetragen.



**Abbildung 5:** Zeitlicher Verlauf der Temperaturdifferenz zwischen T1 und T2 am Messingstab bei der statischen Methode



**Abbildung 6:** Zeitlicher Verlauf der Temperaturdifferenz zwischen T7 und T8 am Edelstahstab bei der statischen Methode

Beide Verläufe nähern sich nach einiger Zeit einem festen Wert an. Die Temperaturdifferenz beim Messingstab stellt sich nach ca 400 Sekunden auf 2,8 °C ein und die des Edelstabstabes nach schon 200 Sekunden auf 9,5 °C. Der größte Unterschied zwischen den beiden Graphen ist der, dass die Temperaturdifferenz des Messingstabes zunächst auf 5 °C ansteigt, bevor sich der gleichbleibende Wert einspielt. Beim Messingstab nähert sich der Graph von unten seiner oberen Schranke an und überschreitet diese nicht.

#### 4.2 Dynamische Methode

In den Abbildungen 7, 8 und 9 sind die zeitlichen Temperaturverläufe des breiten Messingstabes, des Aluminiumstabes und des Edelstahlstabes vom nahen und fernen Thermoelement aufgetragen. Um daraus die Amplituden A1 und A2, sowie die Phasendifferenzen  $\Delta t$  zu bestimmen, werden alle Hoch- und Tiefpunkte aus den Messdaten abgelesen (siehe Tabelle 2, 5 und 8). Die tatsächlichen Amplituden werden dann nach der Formel

$$A_n = \frac{Max_n - \frac{Min_n + Min_{n+1}}{2}}{2} \tag{10}$$

berechnet. Zum letzten Maximum kann jedoch keine Amplitude bestimmt werden, da diese kein dazugehöriges zweites Minimum hat. Die Phasendifferenz kann dann mit den Formeln für den Mittelwert

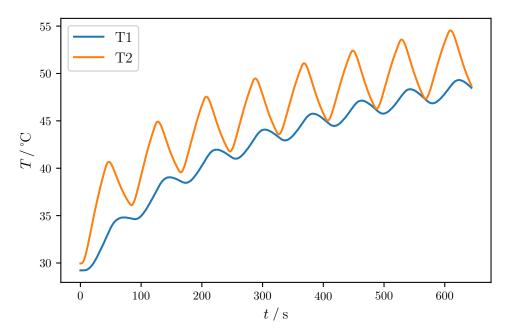
$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{11}$$

und den Standardfehler des Mittelwertes

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$
 (12)

aus den einzelnen Zeitabständen  $\delta t$ zwischen den Maxima der Graphen bestimmt werden.

## 4.2.1 Breiter Messingstab



**Abbildung 7:** Zeitlicher Temperaturverlauf von T1 und T2 am Messingstab bei der dynamischen Methode

t/s	$T_{Max}  /  ^{\circ} \mathrm{C}$	t / s	$T_{Min}/^{\circ}\mathrm{C}$	t/s	$T_{Max}  /  ^{\circ} \mathrm{C}$	t / s	$T_{Min}/^{\circ}\mathrm{C}$
71	34,81	0	29,22	47	40,67	0	29,95
147	39,05	90	$34,\!62$	128	44,92	84	$36,\!11$
223	41,96	172	38,46	208	$47,\!54$	165	$39,\!57$
303	44,08	255	41,01	288	$49,\!48$	246	41,77
383	45,76	337	42,93	368	51,08	327	$43,\!58$
463	$47,\!14$	418	$44,\!46$	449	$52,\!41$	407	$45,\!03$
542	$48,\!34$	498	45,76	529	$53,\!58$	488	$46,\!28$
623	49,31	579	$46,\!85$	609	$54,\!55$	568	$47,\!34$
	(a) Extrem	na bei T	Γ1	'	(b) Extrem	na bei 7	$\Gamma 2$

**Tabelle 2:** Extrema der Temperaturen beim breiten Messingstab bei der dynamischen Methode

Die Amplituden ergeben sich durch Gleichung 10 zu den Werten in Tabelle 3.

Amplitude	$T_{Max}/{}^{\circ}\mathrm{C}$	Amplitude	$T_{Max}/{}^{\circ}\mathrm{C}$
1	1,445	1	3,820
2	$1,\!255$	2	3,540
3	1,113	3	3,435
4	1,055	4	3,403
5	1,033	5	3,388
6	1,015	6	3,378
7	1,018	7	$3,\!385$
(a) Amplitu	den von T1	(b) Amplitu	den von T2

Tabelle 3: Amplituden der Temperatur des breiten Messingstabes

Diese lassen sich nun mit 11 und 12 als

$$A_{fern}=(1,13\pm0,07)\,^{\circ}\mathrm{C}$$

und

$$A_{nah} = (3,49 \pm 0,07)\,{}^{\circ}\mathrm{C}$$

schreiben. Die einzelnen  $\delta t$  werden in Tabelle 4 aufgeführt.

Phasendifferenz	t/s
1	24
2	19
3	15
4	15
5	15
6	14
7	13
8	14

Tabelle 4: Phasendifferenz der Temperaturmaxima beim breiten Messingstab

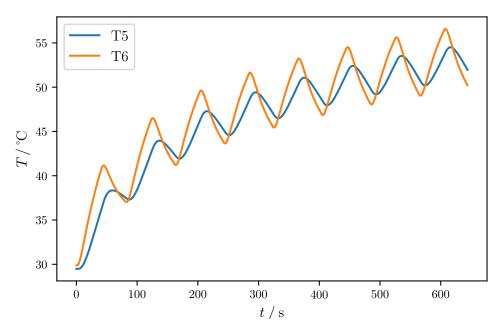
Für  $\Delta t$  gilt dann mit 11 und 12

$$\Delta t = (16, 1 \pm 1, 3) \,\mathrm{s}$$

Um nun die Wärmeleitfähigkeit mit Gleichung 9 zu bestimmen wurde  $\rho=8,4\,{\rm g/cm^3}$  und  $c=377\,{\rm J/(kg\,K)}$  (siehe [1]) angenommen. Daraus ergibt sich dann insgesamt

$$\kappa = (78 \pm 8) \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \, K}}.$$

### 4.2.2 Aluminiumstab



**Abbildung 8:** Zeitlicher Temperaturverlauf von T1 und T2 am Messingstab bei der dynamischen Methode

t/s	$T_{Max}$ / °C	t/s	$T_{Min}$ /°C	t/s	$T_{Max}$ / °C	t/s	$T_{Min}/^{\circ}{\rm C}$
59	38,35	0	29,48	45	41,15	0	29,87
136	43,96	87	37,31	126	$46,\!51$	83	37,02
214	$47,\!28$	170	41,92	205	$49,\!61$	164	$41,\!21$
295	$49,\!42$	251	44,58	286	$51,\!64$	245	$43,\!64$
375	51,08	331	46,49	366	$53,\!24$	325	$45,\!44$
455	$52,\!41$	413	47,95	447	$54,\!52$	406	$46,\!85$
535	$53,\!53$	494	49,18	527	$55,\!62$	486	48,05
616	$54,\!51$	575	50,20	608	$56,\!58$	567	49,04
	(a) Extrem	na bei 🛚	Γ5	1	(b) Extrem	na bei 7	Γ6

**Tabelle 5:** Extrema der Temperaturen beim Aluminiumstab bei der dynamischen Methode

Die Amplituden ergeben sich durch Gleichung 10 zu den Werten in Tabelle 6.

Amplitude	$T_{Max}  /  ^{\circ}\mathrm{C}$	Amplitude	$T_{Max}/^{\circ}\mathrm{C}$
1	2,478	1	3,853
2	2,173	2	3,698
3	2,015	3	$3,\!593$
4	1,943	4	$3,\!550$
5	1,930	5	3,548
6	1,923	6	$3,\!535$
7	1,820	7	3,538
(a) Amplitu	den von T5	(b) Amplitu	den von T6

Tabelle 6: Amplituden der Temperatur des Aluminiumstabes

Diese lassen sich nun mit 11 und 12 als

$$A_{fern} = (2,04 \pm 0,09) \, ^{\circ}\text{C}$$

und

$$A_{nah} = (3,62 \pm 0,05)\,{}^{\circ}\mathrm{C}$$

schreiben. Die einzelnen  $\delta t$  werden in Tabelle 7 aufgeführt.

Phasendifferenz	t/s
1	14
2	10
3	9
4	9
5	9
6	8
7	8
8	6

Tabelle 7: Phasendifferenz der Temperaturmaxima beim Aluminiumstab

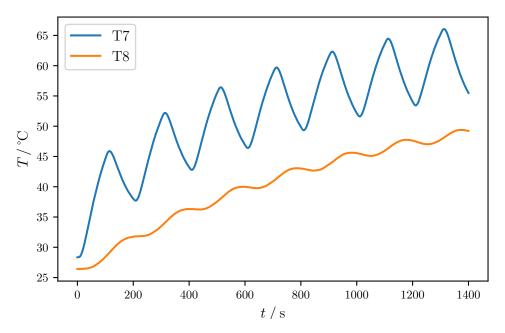
Für  $\Delta t$  gilt dann mit 11 und 12

$$\Delta t = (9, 1 \pm 0, 9) \,\mathrm{s}$$

Um nun die Wärmeleitfähigkeit mit Gleichung 9 zu bestimmen wurde  $\rho=2,7\,{\rm g/cm^3}$  und  $c=900\,{\rm J/(kg\,K)}$  (siehe [2]) angenommen. Daraus ergibt sich dann insgesamt

$$\kappa = (210 \pm 27) \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \, K}}.$$

### 4.2.3 Edelstahlstab



**Abbildung 9:** Zeitlicher Temperaturverlauf von T7 und T8 am Edelstahlstabes bei der dynamischen Methode

t/s	$T_{Max}$ / °C	t/s	$T_{Min}\:/^{\circ}\mathrm{C}$	t/s	$T_{Max}$ / °C	t / s	$T_{Min}$ /°C
114	45,89	0	28,35	195	31,72	1	26,40
313	$52,\!20$	209	37,70	408	$36,\!32$	227	31,83
512	$56,\!42$	409	42,79	596	$40,\!00$	430	$36,\!25$
713	59,70	610	$46,\!40$	782	43,06	642	39,76
912	$62,\!32$	810	$49,\!34$	982	$45,\!63$	845	$42,\!66$
1113	$64,\!46$	1010	$51,\!61$	1175	47,76	1047	45,10
1312	$66,\!05$	1210	$53,\!44$	1373	$49,\!39$	1251	47,02
	(a) Extrem	a bei T7	7	' '	(b) Extrem	a bei T8	3

**Tabelle 8:** Extrema der Temperaturen beim Edelstahlstab bei der dynamischen Methode

Die Amplituden ergeben sich durch Gleichung 10 zu den Werten in Tabelle 9.

Amplitude	$T_{Max}$ / °C	Amplitude	$T_{Max}$ / °C
1	6,433	1	1,303
2	5,978	2	1,140
3	5,913	3	0,998
4	5,915	4	0,925
5	5,923	5	$0,\!875$
6	5,968	6	0,850
(a) Amplitu	den von T7	(b) Amplitu	den von T8

Tabelle 9: Amplituden der Temperatur des Edelstahlstabes

Diese lassen sich nun mit 11 und 12 als

$$A_{fern} = (1,01 \pm 0,08)\,^{\circ}\text{C}$$

und

$$A_{nah} = (6,02 \pm 0,09)\,{}^{\circ}\mathrm{C}$$

schreiben. Die einzelnen  $\delta t$  werden in Tabelle 10 aufgeführt.

Phasendifferenz	t/s
1	81
2	95
3	84
4	69
5	70
6	62
7	61

Tabelle 10: Phasendifferenz der Temperaturmaxima beim Edelstahlstab

Für  $\Delta t$  gilt dann mit 11 und 12

$$\Delta t = (75 \pm 5) \,\mathrm{s}$$

Um nun die Wärmeleitfähigkeit mit Gleichung 9 zu bestimmen wurde  $\rho = 7,9\,\mathrm{g/cm^3}$  und  $c = 470\,\mathrm{J/(kg\,K)}$  (siehe [10] und [11]) angenommen. Daraus ergibt sich dann insgesamt

$$\kappa = (12, 5 \pm 1) \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \, K}}.$$

# 5 Diskussion

Bei der statistischen Methode konnten die erwarteten Zusammenhänge, dass ein dünner Stab schlechter Wärme leitet als ein breiter Stab, nachgewiesen werden. Es war auch zu

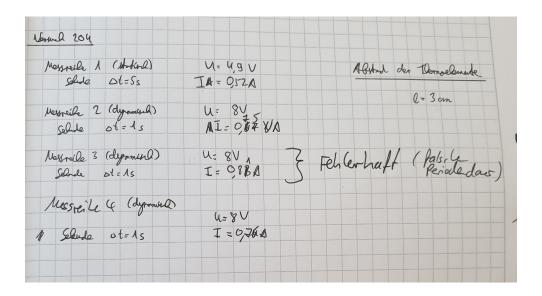
erwarten, dass Edelstahl die Wärme nicht so gut leitet wie Aluminium, was auch aus dem Versuch hervorgeht. Die Temperaturwerte aller Stäbe sollten sich einer oberen Schranke annähern, doch die Graphen 3 und 4 zeigen eher ein asymptotisches Verhalten. Die prozentualen Fehlerwerte der Messwerte zu den Literaturwerten der Wärmeleitfähigkeit sind in Tabelle 11 aufgeführt.

Material	$\kappa_{Messung}/\mathrm{W/(mK)}$	$\kappa_{Literaturwert}[9]/\mathrm{W/(mK)}$	Prozentualer Fehler / $\%$
Messing	78	81	3,70
Aluminium	210	220	$4,\!55$
Edelstahl	15,5	20	$37,\!5$

Tabelle 11: Vergleich der Messwerte und Literaturwerte der Wärmeleitfähigkeit

Die Abweichungen lassen sich durch statistische Fehler bei der Messung erklären. Dazu gehört die Ungenauigkeit der Periodizität des Temperaturanstiegs und Abfalls, da das Umstellen der Kühlung und Erhitzung nach einer Stoppuhr erfolgte. Außerdem kann trotz Isolierung nicht davon ausgegangen werden, dass Die Probenstäbe keine Temperatureinflüsse von außen Erfahren haben.

# 6 Anhang



### Literatur

- [1] Chemie.de. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Messing.html.
- [2] Chemie.de. URL: https://www.chemie.de/lexikon/Aluminium.html.

- [3] TU Dortmund. Versuchsanleitung-Das Dulong-Petitsche Gesetz.
- [4] TU Dortmund. Versuchsanleitung-Wärmeleitung von Metallen.
- [5] John D. Hunter. "Matplotlib: A 2D Graphics Environment". Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.
- [6] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. SciPy: Open source scientific tools for Python. Version 0.16.0. URL: http://www.scipy.org/.
- [7] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.
- [8] Travis E. Oliphant. "NumPy: Python for Scientific Computing". Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.
- [9] schweizer-fn.de. URL: https://www.schweizer-fn.de/stoff/wleit\_metall/wleit\_metall.php.
- [10] wikibooks. URL: https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung\_Chemie/\_spezifische\_W%C3%A4rmekapazit%C3%A4ten.
- [11] wikibooks. URL: https://de.wikibooks.org/wiki/Tabellensammlung\_Chemie/\_Dichte\_fester\_Stoffe.