Versuch 308

Spulen und Magnetfelder

Nico Schaffrath Mira Arndt nico.schaffrath@tu-dortmund.de mira.arndt@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.11.2019 Abgabe: 3.12.2019

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Ziel	3
2	Theorie 2.1 Helmholtzspulen	
3	Durchführung 3.1 Vermessung von Spulen/Magnetfeld von Spulen	6
4	Auswertung 4.1 Magnetische Flußdichte zweier Spulen	11
5	Diskussion	14
6	Anhang	17
Lit	eratur	21

1 Ziel

Soll ich in der Durchführung die Werte für die Stromstärke und falls vorhanden auch für die Spannung angeben? Ich brauche die Bilder für die Durchführung.

Bei dem vorliegenden Versuch sollen die Magnetfelder unterschiedlicher Spulen, beziehungsweise Spulenpaare, vermessen werden. Außerdem soll die Hysteresekurve eines ferromagnetischen Materials, welches sich in einer Ringspule befindet, aufgezeichnet und untersucht werden.

2 Theorie

Verweis auf Konstanten

Magnetfelder werden durch bewegte elektrische Ladungen hervorrufen. Der magnetische Fluss B wird in der Einheit Tesla angegeben und

Da bewegte Ladungen magnetische Felder hervorrufen, lässt sich auch um stromdurchflossene Leiter ein magnetisches Feld messen, welches sich mithilfe von konzentrischen Kreisen, die senkrecht zum Leiter stehen, darstellen lässt. Die magnetische Flussdichte B um eine beliebig geschlossene Leiterschleife lässt sich mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

im Abstand r berechnen. Mithilfe dieser Formel lässt sich die magnetische Flussdichte auf einer Geraden, die durch den Mittelpunkt einer Leiterschleife/Ring verläuft ermitteln. Aus der Gleichung ?? ergibt sich

$$\vec{B}(x) = \frac{mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)}^{\frac{3}{2}} x,\tag{2}$$

wobei R den Radius des Ringes und x Liegt an Stelle eines Ringes eine Spule vor, so kann das Ergebnis mit der Windungszahl n multipliueirt werden.

Für den Fall, dass eine langegestreckte Spule mit 1 D vorliegt, so verlaufen die Feldlinien innerhalb dieser parallel zueinander, was bedeutet, dass die magnetische Flussdichte homogen ist und sich dessen Betrag mit der Formel

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{n}{I} I \tag{3}$$

berechnen lässt, wobei deutlich wird, dass die magnetische Flussdichte sowohl zu der Stromstärke I, als auch zu der Windungszahl n proportional und zu der Spulenlänge lumgekehrt proportional ist.

Für den Fall, dass eine Ringspule vorliegt, dessen Spulenradius r deutlich kleiner ist, als dessen Länge, lässt sich der Betrag B mit der FOmel berechnen. Auch hier ist B iinen homogen, nur außen dieses mal null.

2.1 Helmholtzspulen

Um ein möglichst homogenes Magnetfeld zu erhalten, werden zwei identische Spulen mit dem Radius R und der Windungszahl N so aufgestellt, dass die Verbindungslinie der Spulenmittelpunkte senkrecht zu den Spulen selbst steht. Wird der Abstand der Spulen so eingestellt, dass dieser dem Radius R entspricht, so ergibt sich auf der Verbindungslinie der Spulenmittelpunkte ein homogenes Magnetfeld, für das sich die magnetische Flussdichte im Mittelpunkt der Spulen durch die Überlagerung der einzelnen Felder ergibt. Weicht der Abstand der Spulen zueinander von dem Wert R ab, so ergibt sich der Wert für den magnetischen Fluss B im Mittelpunkt von zwei Spulen mit je einer Windung durch die Gleichung

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$
(4)

wobei der Nullpunkt so gewählt ist, dass der Mittelpunkt der Helmholtzspulen in ihm liegt und der Wert x der Hälfte des Abstandes der Spulen zueinander entspricht.

2.2 Hysteresekurve

Bedingt dadurch, dass bei Ferromagneten die relative Permeabilität $\mu_r \ll 0$ ist, verliert Gleichung (VERWEIS AUF GLEICHUNG) ihre Gültigkeit. Um den Zusammenhang zwischen magnetischer Erregung und magnetischem Fluss dennoch darstellen zu können, wird eine sogenannte Hysteresekurve erstellt. Diese gibt auf der x-Achse den Wert der magnetischen Flussdichte an.

Wird ein ferromagnetisches Material, welches noch nicht magnetisiert ist, zum ersten Mal durch ein äußeres Magnetfeld beeinflusst, vergrößern sich die Weißschen Bezirke, bis alle magnetischen Momente in dieselbe Richtung zeigen. In diesem Punkt ist der magnetische Fluss am größten. Es wird im Allgemeinen von der der Sättigungsmagnetisierung B_s gesprochen. Weiterhin wird der Kurvenverlauf vom Ursprung bis zur Sättigungsmagnetisierung Neukurve genannt.

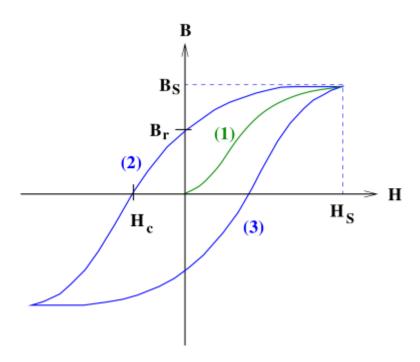


Abbildung 1: Darstellung einer allgemeinen Hysteresekurve (blau) samt Neukurve (grün) [1]

Wenn das äußere Magnetfeld nun stufenweise abgeschaltet wird, verbleibt der Ferromagnet weiterhin in einem magnetisierten Zustand. Der Wert für den magnetischen Fluss wird als Remanenz B_r bezeichnet. Durch das Anlegen eines Magnetfeldes, welches antiparallel zu dem zuerst angelegten Feld verläuft, kann das Material wieder in einen unmagnetisierten Zustand gebracht werden. Der hier gemessenen Wert für die magnetische Erregung H wird allgemein Koerzitivkraft H_c genannt. Das äußere Magnetfeld kann nun gleichmäßig heraufund anschließend wieder herabgefahren werden. Abgesehen von dem Vorzeichen ergeben sich dieselben Werte für die Sättigungsmagnetisierung beziehungsweise die Remanenz. Um die Hysteresekurve zu vervollständigen kann das äußere Feld ein weiteres Mal umgepolt und schrittweise erhöht werden, sodass sich abermals die Sättigungsmagnetisierung ergibt.

Es ist zu beachten, dass der Zustand des Ferromagneten nicht nur von dem außen angelegten Feld abhängig ist, sondern auch davon von der Vorgeschichte des Materials. Zusätzlich fällt auf, dass die Hysteresekurve symmetrisch zum Ursprung verläuft.

3 Durchführung

3.1 Vermessung von Spulen/Magnetfeld von Spulen

Zuerst sollen die magnetischen Flussdichten von zwei Spulen - einer kurzen mit einer Länge $l = 5.5 \,\mathrm{cm}$ und $n = 100 \,\mathrm{Windungen}$, sowie einer langen Spule mit einer Länge $l = 15.8 \,\mathrm{cm}$

und n=300 Windungen - gemessen werden. Dies soll mithilfe einer (longitudinalen) Hall-Sonde verwirklicht werden, die entlang der Spulenmitte bei konstanter Spannung U und konstantem Strom I, die magnetische Flussdichte misst. Dabei sollen von beiden Seiten Messwerte sowohl außerhalb, als auch innerhalb der Spule aufgenommen werden. Die dabei erhaltenen Ergebnisse sollen graphisch aufgetragen und mit dem Theoriewert des magnetischen Flusses innerhalb der Spulen verglichen werden.

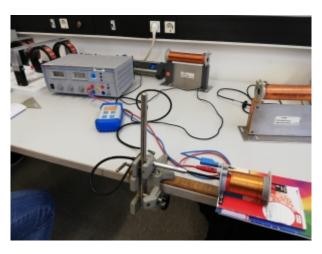


Abbildung 2: Versuchsaufbau zur Vermessung einer kurzen Spule

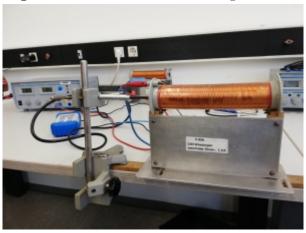


Abbildung 3: Versuchsaufbau zur Vermessung einer langen Spule

3.2 Vermessung von Helmholtzspulen/Magnetfeld eines Spulenpaares

In diesem Teil soll die magnetische Flussdichte B von einem Helmholtzspulenpaar untersucht werden. Dazu werden zwei identische Spulen, mit Radius $r=12.5\,\mathrm{cm}$, Breite $b=3.3\,\mathrm{cm}$, die jeweils n=100 Windungen besitzen, in drei unterschiedlichen Abständen voneinander platziert. Dabei ist zu beachten, dass die Spulen ohne einen seitlichen Versatz und ohne Drehwinkel zueinander angeordnet sein müssen. Die notierten Werte geben den Abstand von dem Mittelpunkt der einen Spule zum Mittelpunkt der anderen Spule

an. Auch hier gilt es das magnetische Feld auf einer Achse, die durch die Spulenmitten verläuft, bei konstanter Stromstärke I, sowie konstanter Spannung U zu messen. Es sollen sowohl Messwerte zwischen den Spulen, als auch außerhalb der Spulen, mithilfe einer (transversalen) Hallsonde aufgenommen werden. Die aufgeschriebenen Werte beziehen sich auf den Abstand von dem nach innen gerichteten Rand einer Spule zur Hallsonde. Die so ermittelten Werte sollen graphisch dargestellt und mit den Theoriewerten verglichen werden.

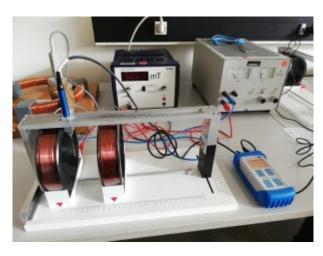
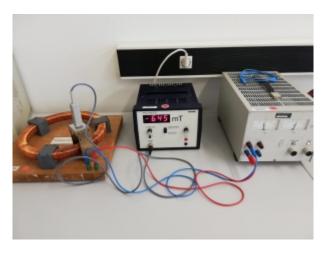


Abbildung 4: Versuchsaufbau zur Vermessung von Helmholtzspulen

3.3 Hysteresekurve

Zuletzt soll die Hysteresekurve einer Ringspule mit n=595 Windungen, einem Luftspalt der Breite $b=3\,\mathrm{mm}$ und einem Durchmesser von $d=26\,\mathrm{cm}$ aufgezeichnet werden. Dazu soll der Spulenstrom zunächst von $I=0\,\mathrm{A}$ in zehn Schritten auf $I=0\,\mathrm{A}$ hochgestellt werden und anschließend ebenfalls in zehn Schritten wiederum auf $I=0\,\mathrm{A}$ herabgesetzt werden. Nach einer Umpolung wird der eben beschriebene Vorgang wiederholt. Wenn dies abgeschlossen ist, soll nach einer weiteren Umpolung die Stromstärke ein letztes Mal von $I=0\,\mathrm{A}$ in zehn Schritten auf $I=10\,\mathrm{A}$ hochgeregelt werden. Die Messwerte für die magnetische Flussdichte werden mit einer transversalen Hallsonde aufgenommen. Die Ergebnisse sollen graphisch dargestellt werden und zusätzlich sollen Sättiungsmagnetisierung U_S , Remanenz U_r und Koerzitivkraft H_c ermittelt werden.



 ${\bf Abbildung}$ 5: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Hysteresekurve

4 Auswertung

4.1 Magnetische Flußdichte zweier Spulen

x / cm	B / mT
-2,5	0,190
-2	0,244
-1,5	0,320
-1	0,433
-0,5	0,596
0	1,002
0,5	1,213
1	1,393
1,5	1,517
2	1,614
2,5	1,676
3	1,720
3,5	1,751
4	1,774
11,3	1,732
11,8	1,718
12,3	1,696
12,8	1,667
13,3	1,629
13,8	1,567
14,3	1,485
14,8	1,376
15,3	1,192
15,8	1,005
16,3	0,750
16,8	0,536
17,3	0,377
17,8	0,265
18,3	0,206
(a) lan	ge Spule

Tabelle 1: Magnetische Flußdichte zweier Spulen entlang ihrer Symmetrieachsen

Die Messwerte für die magnetische Flußdichte der langen und der kurzen Spule sind in Tabelle 1 aufgelistet. Außerdem sind die Werte der langen Spule zusammen mit dem Theoriewert, welcher sich nach Gleichung 3 als

$$B_{L,t}=1,909\,\mathrm{mT}$$

berechnen lässt, in Abbildung 6 in einem xB-Diagramm aufgetragen, wobei der Nullpunkt von x am Anfang der Spule liegt.

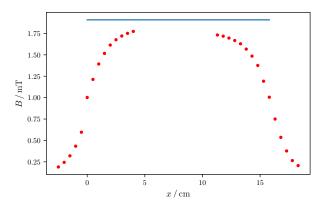


Abbildung 6: Flussdichte B entlang der Symmetrieachse einer langen Spule

Beim Vergleich mit der Theorie fällt auf, dass die gemessenen Werte noch in der Spule am Randbereich abfallen und auch in der Mitte nicht ganz den vollen Theoriewert erreichen. Die Messwerte der kurzen Spule sind in Abbildung 7 als xb-Diagramm dargestellt.

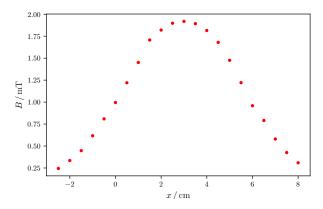


Abbildung 7: Flussdichte B entlang der Symmetrieachse einer kurzen Spule

4.2 Magnetische Flußdichte eines Helmholzspulenpaares

x / cm	B/mT	x / cm	B/mT	x / cm	B/mT
1	3,03	1	2,53	2	2,06
1,5	2,98	1,8	2,33	3	1,79
2	2,93	2,6	2,14	4	1,57
2,5	2,90	3,4	2,00	5	1,42
3	2,88	$4,\!2$	1,90	6	$1,\!35$
$3,\!5$	2,89	5	1,86	7	1,34
4	2,92	5,8	1,88	8	1,40
$4,\!5$	2,97	6,6	1,96	9	1,54
5	3,03	7,4	2,06	10	1,74
5,4	3,07	8,2	2,27	11	2,00
11	2,39	15	$2,\!27$	18	$2,\!25$
12	2,00	15,5	2,10	19	1,90
14	1,34	16,5	1,74	$19,\!5$	1,73
18	0,58	18,5	1,16	21	$1,\!27$
25	0,19	$22,\!5$	0,51	23	$0,\!83$
(a) Abstand $l = 10$ cm		(b) Abstan	d l = 14 cm	(c) Abstan	d l = 17 cm

Tabelle 2: Flussdichte B auf der Symmetrieachse eines Hemlholzspuelnpaares

Für die drei unterschiedlichen Abstände der Helmholzspulen ergeben sich die Messwerte in Tabelle 2.

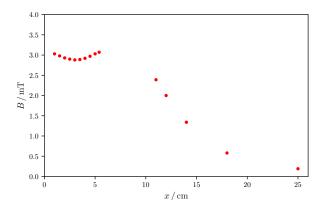


Abbildung 8: Flussdichte Bauf der Symmetrie
achse eines Hemlholzspuelnpaares mit Abstand $l=10\,$ cm

Der Theoriewert der magnetischen Flußdichte im Mittelpunkt beim Abstand von $10\,\mathrm{cm}$ kann mit Gleichung 4 als

$$B=2,87\,\mathrm{mT}$$

ermittelt werden. Er kann mit dem Messwert

$$B=2,88\,\mathrm{mT}$$

verglichen werden.

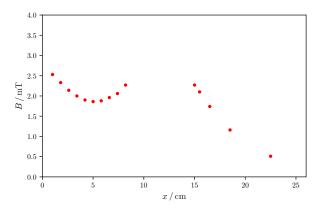


Abbildung 9: Flussdichte Bauf der Symmetrie
achse eines Hemlholzspuelnpaares mit Abstand $l=14\,$ cm

Für einen Abstand von $14\,\mathrm{cm}$ kann die Magnetische Flussdichte im Mittelpunkt über Gleichung 4als

$$B=1,782\,\mathrm{mT}$$

berechnet werden und mit dem Messwert

$$B = 1,883 \,\mathrm{mT}$$

verglichen werden.

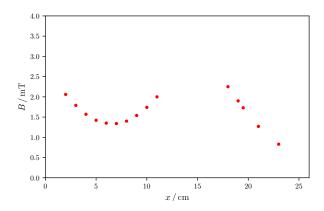


Abbildung 10: Flussdichte B auf der Symmetrieachse eines Hemlholzspuelnpaares mit Abstand $l=17\,$ cm

Bei einem Abstand von $17\,\mathrm{cm}$ ergibt sich der Theoriewert der Magnetischen Flussdichte mit Gleichung 4 als

$$B = 1,254 \,\mathrm{mT}$$

Er kann mit dem Messwert

$$B = 1,338 \,\mathrm{mT}$$

verglichen werden.

Es fällt auf, dass alle Messwerte, besonders der erste, nahe am errechneten Theoriewert liegen.

4.3 Hysteresekurve einer Spule mit Eisenkern

			I/A	B/mT	$H/\mathrm{A\cdot m^{-1}}$	I/A	B/mT	$H / A \cdot m^{-1}$
			10	732	7284	-10	-730	-7284
			9	712	6556	-9	-713	-6556
			8	693	5828	-8	-694	-5828
			7	670	5099	-7	-671	-5099
I / A	B/mT	$H/A \cdot m^{-1}$	6	645	4371	-6	-646	-4371
0	107	0	- 5	614	3642	-5	-616	-3642
1	191	728	4	579	2914	-4	-580	-2914
2	352	1457	3	533	2185	-3	-533	-2185
$\frac{2}{3}$	451	$\frac{1457}{2185}$	2	465	1457	-2	-467	-1457
4	515	2100	1	336	728	-1	-334	-728
5	567	3642	0	131	0	0	-130	0
6	607	4371	-1	-75	-728	1	71	728
7	645	5099	-2	-251	-1457	2	248	1457
8			-3	-393	-2185	3	390	2185
9	677	5828	-4	-487	-2914	4	482	2914
	707	6556	-5	-551	-3642	5	546	3642
10	732	7284	-6	-601	-4371	6	595	4371
	(a) Neuk	urve	-7	-640	-5099	7	634	5099
			-8	-674	-5828	8	667	5828
			-9	-705	-6556	9	696	6556
			-10	-730	-7284	10	722	7284
		((b) Verr	ingern des	äußeren Ma-	(c) Erhö	hen des äu	ißeren Magnet-

Tabelle 3: Magnetische Feldstärke B in Abhängigkeit der magnetischen Erregung H

gnetfeldes

Die Tabelle 3 beinhaltet die Messwerte für die Spule mit Eisenkern. Dabei ist die Stromrichtung durch ein Vorzeichen bei der Stromstärke angegeben. Aus den Messwerten lässt sich sofort der Wert für die Sättigungsmagnetisierung

$$B_S = 732 \,\mathrm{mT}$$

und der Wert für die Remanenz

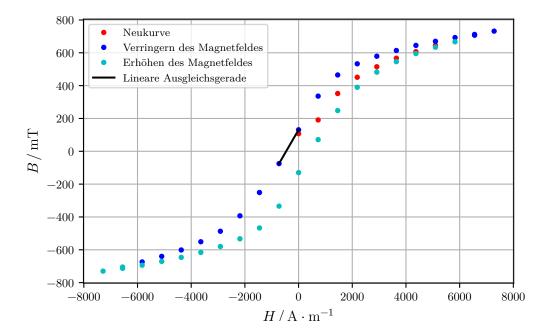
$$B_r=131\,\mathrm{mT}$$

ablesen.

Um die Koerzitivkraft H_c zu bestimmen muss jedoch zunächst eine Ausgleichsgerade um den Achsennullpunkt erstellt werden um die magnetische Erregung bei $B=0\,\mathrm{mT}$ zu erhalten. Dies wurde hier mit matplotlib [2] umgesetzt und ist in Abbildung (REFERENZ) zu sehen.

Mit dieser Methode ergibt sich die Koerzitivkraft als

$$H_c = 463 \,\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$
.



5 Diskussion

Bei der Langen Spule konnten die Werte in der Mitte der Spule nicht ausreichend gut gemessen werden, da die Hall-Sonde zu kurz war. Somit ist nicht klar erkennbar, ob das Magnetfeld im Innneren der Spule konstant bleibt. Auf jeden Fall ist ab einer gewissen Tiefe, in der die Randeffekte nachlassen, zu erkennen, dass die Steigung der Magnetischen Flussdichte stark abnimmt und die B-Feld-Kurve somit abflacht, doch der errechnete Theoriewert wird beim gemessenen Bereich nicht erreicht. Außerdem ist noch anzumerken, dass wahrscheinlich ein Fehler bei der Messung vorlag, denn an Abbildung 6 ist zu erkennen, dass beim Nullpunkt ein ungewöhnlich großer Sprung auftritt. Abgesehen davon wäre das B-Feld ziemlich symmetrisch, was ja auch den erwartungen entspricht.

Dies ist ebenfalls bei der kurzen Spule der Fall. Bei der Durchführung ist jedoch bereits aufgefallen, dass die Windungen der Spule etwas locker waren und diese somit nicht gleichmäßig verteilt waren.

Die Ergebnisse der Messung zu der Helmholzspule entsprechen im Allgemeinen den Erwartungen. Ungenauigkeiten können hier dadurch zustande gekommen sein, dass die Haltevorrichtung, die die Hall-Sonde auf der symmetrieachse halten sollte etwas locker war und ein paar Millimeter spielraum ließ. Außerdem musste die Hall-Sonde senkrecht zum Magnetfeld per Hand ausgerichtet werden und das ging nur nach Augenmaß.

Die Neukurve der Spule mit Eisenkern entspricht nicht ganz dem, was man aus der Theorie erwartet hätte. Dies lässt sich jedoch dadurch erklären, dass diese Spule schon vor dem Versuch oft magnetisiert wurde und dem entsprechend eine Restmagnetisierung von

$$B = 107, 4 \,\mathrm{mT}$$

vorlag. Abgesehen davon entspricht die Hysteresekurve voll den Erwartungen.

6 Anhang

V308			26.11,13
9 N= 222		Durch messer der Ringsp	
d= 3mm			
. ea	Ø		
Anyone CAJ	vet Ivs	Greed Tools Inti	
0 1	1,5	107,4 107,5	
23	1,5	42.V 32.5	
45	7,5	515 567	
6 7 8 9	8,5	60 F 645	
8	M,5	707 677	
ΛΦ	14,5	732	
07876	4,5	7M2 693	
· * *	16 9	670 645	
5 1	2,5 2,5	614 5 7 9	
3 2	4,5	533 415	6-Feld
1 0	13/2 9 5 5 5 5 5 0 0	336 6BF	Amore IN NORS IVI Rada [INT]
Λ	-2	-75	10 15 712
2 3	-4,5	-251 -393	10 15 711
3 4 5 6 H&9 2	-6 -7,5	-48 7 -551	
6 7	-7,5 -9 -10	-601 -640	
8 9	- 11,5 - 13	-674 -705	
10	- 14,5	-730	
9.8 4.6	- 13 2145 - 115	-413 -694	
	- 10 - 8,5	-671 -646	
5 4 3 2	- 1 ,5	-616 -580	
3 2	- 4,5 - 3	-580 -533 -477 -334	
10	-15	-334 - 130	1
1 1	1,5	71	
3	5	248 330	
5	35	482 546	W
122426880	g No	5-46 5-95 634	
8	-43 -43 -45 -45 -45 -45 -45 -45 -45 -45 -45 -45	667 636	

6)	n= 100
	d=125 mm

A Aleston	l Who cm I=	3.0
Bure: Ald wriften home	Abstard [cm]	B-Rold EmTJ
Abstract der 5 gruben mettign 6 7 9 000000000000000000000000000000000	1 1 5 2 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	303 1,38 2,93 2,88 2,89 2,52 2,03 3,07
an for Pall:		
11 12 13 14 15	ЛЛ 143 Л2 Лч Л8 14625	233 2,00 434 9,58 9,13

2) Abstract l= 14 cm I=30

	Messing	Abstack Icm]	B- FORD EMT]	
involedo:	人 2 3 4 5 6 7 8 9 10 人 人 な れ れ な れ な な	7,4 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2014 1,450 2,450 2,084 1,940 1,850 1,850 1,825 Fellolofte hama (Had -Sorde half help)	2,527 2,325 2,4335 4,355 4,360 4,883 4,364 2,060 2,272 3,087 4,458 9,587

lde

Messing	Abstand [cm]	N-RID E.	mTJ			
inuta: 7 7 7 3 4 5 6 7 8 9	23 4 5 6 7 8 9 10		- 7,060			
10 12 13 14 15	11 19 19,5 21 23	7,250 7,897 1,897 1,726 1,4266	S			
	1	V= 36V, 1	[-08N	Lige der	Jula 15,8 cm	~
Mall	0 7	80	Addred I con J	-		
*	1 1,300 1,00	90 >2 .3 .3 .3 .7	0 405 1	- <u>Iman:</u> Oing	B-Feld [mT] 0,750 0,536 0,377 0,265	16,3 16,8 17,3 17,9
•	1 1,300 1,50	90 22 3 3 3 4 0 6 0 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9	0 495 1	irran: Oiras oufan: linas irran reilt	0,750 0,536 0,374	16,3

100 Lindage	×0=1,7	4= 41,1V	I = 1,03A	linge der sp. 4: 5,5cm
•	Abstrand [cm]	B-Ald EnT]		
	0 0,5 1 1,5 2 2,5 3	0,995 1,220 1,451 1,707 1,820 1,898 1,898 1,898 1,893 1,893	inne	
	4,5 5 5,5	1,680 1,476 1,221		
	6 6 7 7,5	0,959 0,791 0,580 0,425	a Be Links r	echls
	-0,5 -1	0,809	a- Be-rest to	Links
	-1,5 -2 -1,5	9617 01447 01335 01244		

Literatur

- [1] TU Dortmund. Versuchsanleitung Spulen und Magnetfelder.
- [2] John D. Hunter. "Matplotlib: A 2D Graphics Environment". Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.
- [3] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. SciPy: Open source scientific tools for Python. Version 0.16.0. URL: http://www.scipy.org/.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties.* Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.
- [5] Travis E. Oliphant. "NumPy: Python for Scientific Computing". Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.